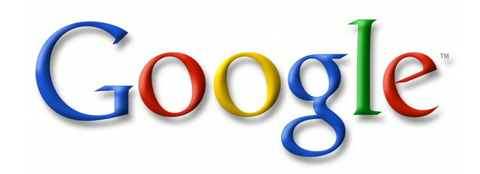






Mathematik

ologie

ufgaben

ich Poske







Physik

mit

Zusätzen aus der angewandten Mathematik aus der Logik und Psychologie

und mit

230 physikalischen Leitaufgaben

Verfaßt von

Dr. Alois Höfler

ord. Professor an der Deutschen Universität Prag

unter Mitwirkung von

Dr. Eduard Maiss
weiland Realschulprofessor
in Wien

Dr. Friedrich Poske
Professor am Askanischen Gymnasium
in Berlin

Mit 981 Abbildungen im Text und 12 Tafeln zum Teil in Farben

Braunschweig
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn
1904

Physik

mit

sätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie

und mit

230 physikalischen Leitaufgaben

lehrbuches als ein nicht unwesentliches Stück Lebensaufgabe im Auge zu behalten. Das erste Manuskriptblatt, auf dem ich mich in der Aufzeichnung meiner damaligen Lehrerfahrungen versuchte, ist vom 20. Juli 1879 datiert. Die Abfassung des vorliegenden Buches begannen Eduard Maiß und ich im Frühjahr 1893, sogleich nachdem wir die Naturlehre für die Unterstufe der Gymnasien und Realschulen als Ergebnis dreijährigen Zusammenarbeitens abgeschlossen hatten, weil uns der damalige Herr Landesschulinspektor Dr. Ferdinand Maurer als unser wahrhaft väterlicher Freund dringend aufforderte, auch ein Buch für die Oberstufe zu verfassen, da sich nach einem solchen seit langem ein sogar noch stärkeres Bedürfnis als nach einem für die Unterstufe fühlbar gemacht habe. Nach weiteren siebeneinhalb Jahren anhaltender gemeinschaftlicher Arbeit wurde mir mein Freund Maiß durch einen jähen Tod entrissen — ich werde von der dadurch geschaffenen Lage noch weiter unten zu sprechen haben — und nun sind noch einmal fast vier Jahre über die Vollendungsarbeiten des Buches dahingegangen. Es sei gestattet, hier über meine und meines Freundes Absichten nach sovieljähriger Arbeit Rechenschaft zu geben.

Was ein Lehrbuch der Physik neben denen seinesgleichen Charakteristisches aufzuweisen haben kann, verteilt sich auf seinen wissenschaftlichen Inhalt und auf die didaktische Formgebung. Wiewohl jener Inhalt letztlich auch für die didaktische Form grundlegend und bestimmend ist, so mag von ihm hier doch erst an zweiter Stelle die Rede sein.

Was aber das Didaktische eines Lehrbuches betrifft, so war es uns von jeher klar, daß dies immer nur ein kleiner Teil der didaktischen Vorbedingungen eines guten physikalischen Unterrichtes sein könne. Der entscheidende Teil des Lehrerfolges bleibt ja immer dem mündlichen Unterrichte, dem Schulversuche, der wirksamen Aneiferung des Schülers zur Beobachtung der in der Natur spontan sich abspielenden Erscheinungen vorbehalten; und schon hat die von Amerika und England ausgegangene Bewegung, den Schülerversuch zu einen wesentlichen Bestandteil der Schulung im physikalischen Denken zu machen, auch auf dem Festlande eine so erfreuliche lebendige Kraft bekundet, daß allen diesen Elementen gegenüber die Rolle des Lehrbuches zu einer sehr bescheidenen herabsinken zu müssen scheint. Jedenfalls haben wir in unserem Buch allen diesen Faktoren nicht entgegen, sondern, soweit es ein Buch eben kann, ihnen in die Hände zu arbeiten getrachtet.

Mit allen übrigen Faktoren des physikalischen Unterrichtes hat das Lehrbuch die eine Aufgabe gemeinsam, das natürliche, noch

icht physikalische Denken auf die Pfade des physikalischen enkens erst hinüberzuleiten. Und diese Aufgabe ist viel schwieriger s die, einen bloßen wie immer knappen oder ausführlichen Auszug ıs der physikalischen Wissenschaft zu geben; denn je mehr die Physik re eigene Welt von Methoden und Begriffen ausbildet, um so mehr entemdet sie sich fürs erste dem naiven Anschauen und Denken über aturdinge, wie es sich im Kinde, im Knaben und Jünglinge nicht esentlich anders als auch in dem einer spezifisch physikalischen ildung entbehrenden sogenannten gebildeten Erwachsenen täglich und ündlich in bestimmten Mängeln (vielleicht auch ab und zu in Vorigen) äußert.

Der erste Fehler also, den ein Physiklehrbuch zu vermeiden hat, t der, daß es nicht physikalische Denkweise schon dort voraussetze, o ja alle früher genannten Faktoren ein solches Interesse erst planäßig hervorzulocken und zu entwickeln haben. Während der ersten ahre der Abfassung des vorliegenden Buches hatten wir die Absicht, in möglichst knapp gefaßtes Lehrmittel herzustellen, welches dem Schüler das Lernen namentlich nur durch möglichst deutlichen logischen Aufbau, scharf gefaßte Definitionen u. dgl. hätte erleichtern sollen. Mehr und mehr aber gewannen wir während jener Arbeit den Eindruck, daß gerade durch solche Knappheit nur allzuleicht auch einem gänzlich verfehlten Unterrichtsvorgange hätte Vorschub geleistet, ja namentlich der junge, unerfahrene Lehrer zu einem solchen hätte verführt werden können. Denn ginge der Unterricht dann wesentlich auf ein Einlernen dieser Definitionen, Ableitungen usf. aus, ohne die erforderliche allmähliche psychologische Vorbereitung dieser logischen Endergebnisse, so hätte ein solcher Unterricht keinen merklich besseren Erfolg, als wenn die Definitionen fehlerhaft, die Ableitungen unstreng usf. gewesen wären. Der wissenschaftlich beste physikalische Unterricht prallt an der überwiegenden Mehrzahl der Schüler, selbst der gut begabten und fleißigen, völlig wirkungslos ab, wenn er es verschmäht, das erst zu entwickelnde physikalische Denken des Schülers in Beziehung zu setzen mit seinem übrigen schon vorhandenen Gedankenkreis. Es ist nun einmal die Tatsache nicht aus der Welt zu schaffen, daß den drei oder vier (auf deutschen Gymnasien nur zwei) wöchentlichen Stunden, während deren der Schüler in der Schule physikalisch denkt, 22 bis 27 andere gegenüberstehen, in welchen sein Gedankenverlauf ein dem exakt-physikalischen mindestens fremder, nicht selten geradezu entgegengesetzter ist. Eine für den ganzen weiteren Erfolg des Unterrichts entscheidende Aufgabe fällt hier demjenigen Teile zu, welchen die wissenschaftliche Didaktik was immer für eines Faches als die „Stufe der Vorbereitung“ bezeichnet.

Aus dieser Rücksicht heraus ergab sich im Fortgange der Arbeit der Plan, von dem Buche drei Ausgaben zu veranstalten: A eine große „Physik“, das vorliegende Buch (samt Zusätzen 954 Seiten); B eine kleinere, „Naturlehre“ (400 Seiten) für die Hand des Schülers der oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen und verwandter Lehranstalten, und C eine kleinste, „Repetitorium der Physik“.

Der auf den Titelblättern so vieler älterer Bücher gebräuchliche Zusatz „Für den Schulunterricht und zum Selbststudium“ enthielt das Bekenntnis, daß mündlicher Unterricht und Lehrbuch noch nicht in das richtige Verhältnis zu einander und zu den Bedürfnissen des Lehrers und des Lernenden getreten waren. Denn wozu ein mündlicher Unterricht, der nur das Lehrbuch nachsagt? Wozu ein Schulunterricht „nach dem Lehrbuch“, wenn jeder Leser aus dem Lehrbuche sich ebenso gut selbst unterrichten kann? Die vorliegende große Ausgabe A des Buches enthält also außer dem festen Lernstoffe, den wir in der Tat nicht nur durch möglichst scharfe Formulierungen, sondern auch durch die typographischen Mittel des Groß- und Fettdruckes schon für das Auge hervorgehoben haben, auch noch dasjenige, was der Lehrer an Vorbereitungen, historisch interessanten Notizen u. dgl. zur Belebung des Lehrstoffes hinzufügen kann.

In der Schülerausgabe B aber konnte alles dies füglich wegbleiben, da es im Gedächtnis des Schülers ohnedies willig haftet, falls es seine Aufgabe, Interesse zu erregen, beim mündlichen Unterricht in der gehofften Weise erfüllt hat. Die Ausgabe B (die am 18. Juni 1903 die behördliche Approbation für alle österreichischen Lehranstalten erhalten hat) konnte sich also in der Tat auf jene ursprünglich beabsichtigten Definitionen, kurzen Ableitungen u. dgl. beschränken; wobei wir aber auch hier noch den unwillkommenen Nebeneindruck der Dürre zu vermeiden bestrebt waren. — Indem wir jene Zugaben, die der mündliche Unterricht (sei es in dieser, sei es in irgend einer anderen gleichwertigen Form) sich nicht wird nehmen lassen, in der großen Ausgabe beibehalten haben, mag diese als Handbuch des Lehrers[1]) gelten (wie sie von mehreren Freunden, die Einblick in die Druckbogen genommen hatten, genannt worden ist). Aber auch zum „Selbststudium“ mag nun die große Ausgabe A brauchbar befunden werden von jener nicht geringen Zahl von Lesern, die sich unabhängig von jedem Schülerbedürfnis für Inhalt und Methode der modernen Physik

---

[1]) Eine ausführliche Didaktik des physikalischen Unterrichtes (in der u. a. auch meine Einzelbeiträge zur Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, 1887 bis jetzt, zu sammeln wären) gedenke ich nach ausreichender Erprobung unseres Schulbuches während der nächsten Jahre zu veröffentlichen.

nteressieren und mehr oder minder lebhaft es vermissen, einen uten Physikunterricht zu rechter Zeit empfangen zu haben.

Das „Repetitorium der Physik“ endlich mag dem leidigen 'rüfungszweck dienen; aber auch hier wird gerade die Beschränkung uf den allerknappsten Grundstock von Formeln u. dgl. dem Wahne ntgegentreten, als könne beim Vorbereiten auf ein Physikexamen das loße Lernen eines Buches die Hauptsache sein. Besteht dagegen das xamen zum wesentlichsten Teile im Lösen von Aufgaben, so wird in Überblick über die bei diesen in Anwendung kommenden Formeln nd Definitionen auch im letzten Augenblick noch willkommen sein.

Nach allem Gesagten also hoffen und wünschen wir, daß nach der idaktischen Seite hin das vorliegende Buch den vieljährigen Erörte-ungen der „Lehrbuchfrage“ gerecht geworden sei. Es war mir ne große Freude, daß zur Zeit, da unser Buch fast abgeschlossen ar, nämlich 1901 auf der Hauptversammlung des Vereines zur Förde-ung des Unterrichtes in der Mathematik und den Naturwissenschaften Gießen, auf jene „Frage“ folgende klare und scharfe Antwort von riedrich Poske gegeben und durch die volle Zustimmung der Ver-ammlung sanktioniert worden ist:

„Diese Frage ist bereits 1896 Gegenstand der Erörterung von seiten er Herren Schwalbe und Pietzker gewesen. Beide haben sich zu unsten einer systematischen Anordnung des Stoffes im Gegensatz ur methodischen ausgesprochen. Man kann dies gelten lassen, wenn as Systematische nicht ins einseitig Deduktive ausartet. Wenn die nordnung zu formalsystematisch ist, so wird der Gebrauch des Lehr-uchs bei und neben dem methodischen Unterricht unbequem und die chüler werden in dem Buche nie recht zu Hause sein . . . Ist die nordnung zu methodisch, so wird dies leicht für den Lehrer eine essel und überdies für den Unterricht, der auch im Aufsuchen der chtigen Methode den Schein der Unfreiheit vermeiden sollte, geradezu n Nachteil. Am meisten zweckentsprechend würde ein Lehrbuch sein, as den Stoff in übersichtlicher Anordnung darböte und den metho-ischen Gang weder zu genau vorschriebe noch auch ihm allzu große chwierigkeiten in den Weg legte . . . Ich bin übrigens der Meinung, elche Art von Lehrbuch man auch zur Verfügung hat, es sollte im nterricht selbst möglichst wenig benutzt werden. Die alte Sitte, aragraph für Paragraph zu absolvieren, dürfte mehr und mehr einer reieren Behandlung des Gegenstandes weichen . . . Keine Lehrbuch-hysik, sondern lebendige Physik muß die Losung sein. Die Lehrbuch-hysik führt zu Dogmatismus, d. h. zu dem geraden Gegenteil dessen, orin der Bildungswert der Physik besteht. In fast allen anderen ächern lernt man aus dem Lehrbuch, hier sollen die Schüler aus den

Erscheinungen selber und aus der von Lehrer und Schülern gem
sam vorgenommenen Bearbeitung dieser Erscheinungen lernen. D
noch können wir das Lehrbuch, wenigstens auf der Oberstufe, nicht e
behren, schon der systematischen Übersicht des Stoffes wegen, die
Abschluß des Unterrichts nicht fehlen darf . . . Ich möchte das G
sagte kurz so formulieren, daß das Lehrbuch den Unterricht beglei
aber nicht beherrschen soll. Ich könnte auch sagen: Ein Lehrbu
der Physik ist nicht dazu da, damit danach unterrichtet wir

Übrigens wird, wenn wir uns auch in der Lehrbuchfrage zu d
Systematikern zählen, der Methodiker nicht verkennen, daß wir nic
wenig Nachdenken daran gewendet haben, namentlich in den erst
Partien des Buches, wo es im Schüler sozusagen erst das Gewissen fü
die charakteristische Methode der Physik überhaupt zu wecken gilt, de
methodischen Vorgehen ja keine Schwierigkeiten zu bereiten, sonder
ihm den Weg sogar möglichst überzeugend vorzuzeichnen (Freun
Maiß hat darauf bestanden, daß jene Teile fünf- bis achtmal ne
redigiert wurden). Wir haben nämlich die §§ 2 bis 13 (Phoronomi
des Punktes) in drei größere didaktische Einheiten gegliedert. Di
erste dieser Einheiten (§§ 2 bis 6) beschäftigt den Schüler mit de
Vorstellungen von Geschwindigkeit und Beschleunigung; au
gegangen wird dabei von wirklichen *Versuchen* über solche Bewegunge
(an der Fallrinne u. dgl.), in denen der Schüler veränderliche un
konstante Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sozusagen mit leit
lichem Auge sehen kann, worauf erst die abstrakten mathematische
Mittel der Beschreibung solcher Bewegungen (§§ 3, 4, 5 und alles bi
herige zusammenfassend § 6) folgen. In einer zweiten didaktische
Einheit lenkt § 7 durch wirkliche *Versuche* über Wurfbewegung di
Aufmerksamkeit auf die Form der Bahn und damit zusamme
hängend auf Richtung und Krümmung, wogegen der abschließend
§ 11 eine zusammenfassende Anwendung der bis dahin erworbene
mathematischen Mittel in der rechnerischen und konstruktiven Behan
lung der Wurfbewegungen gibt. Eine dritte didaktische Einheit bilde
endlich die kreisenden und schwingenden Bewegungen (§§ 12 und 1
wobei wieder von *Versuchen* ausgegangen und die Betrachtung bis z
den Analogien zwischen Geschwindigkeit und Richtung gefüh
wird. Mit dieser Analogie ist auch derjenige allgemeine be
schreibende Gesichtspunkt von Geschwindigkeits- oder Richtung
änderungen erreicht, von dem aus das Trägheits- und Beharrungsgese
in die erklärende Lehre von den Kräften, Massen, Arbeiten, Energie
weiterführt. — Wiewohl diese Vorrede nicht der Ort ist, didaktisch
Ratschläge zu geben, sei doch bemerkt, daß wir uns den wirkliche
Unterricht sogleich in der ersten Schulstunde mit eben jenem §

ı klassischen Betrachtungen Galileis über die wirklichen Erscheiagen im freien Fall, an der schiefen und an der wagerechten Ebene, gonnen denken (und seit langem auch selbst immer so in medias res gangen sind), wogegen die zwei kurzen Absätze I und II der „Einitung" und der exponierende § 1 der Mechanik erst bei späterer Gegenheit nachgetragen werden mögen. Dies eben wieder ein Beispiel, daß s im mündlichen Unterricht ganz natürliche Vorgehen sich nicht ohne iteres in einem gedruckten Buche wiedergeben und einhalten läßt.

Indem wir nun mit allen diesen Vorbehalten das Systematische ar nicht als Anfang und Mitte, wohl aber als das erstrebenswerte de und Ziel der physikalischen Unterweisung und Stoffgestaltung thalten, sind wir bei demjenigen Moment angelangt, das wir einngs als die wissenschaftliche Eigenart eines Physikbuches von der idaktischen unterschieden haben. In einem Elementarbuch können es glich nur die Auswahl und die Anordnung des Lehrstoffes sein, urch die es sich wissenschaftlich von seinesgleichen unterscheidet.

In der Auswahl war es unser Bestreben, möglichst sparsam zu in, den Stoff auf das wesentlichste, grundlegende zu beschränken. ereinfachung und Vertiefung sollten da Hand in Hand gehen. a wir eine Reihe ausgezeichneter Bücher besitzen — es seien nur s Beispiele Paul Reis und Dressel genannt — die es verstehen, it elementarmathematischen Mitteln auf knappen Raum eine so eraunliche Menge von Stoff zusammenzudrängen, daß man von relativer ɔllständigkeit des physikalischen Inhaltes sprechen kann, so dürfen r jeden Leser, der, nachdem er sich an unserem weitgehend vereinchten Stoffe klare physikalische Grundbegriffe geholt hat, auf ıe stoffreicheren Bücher behufs Ausbau seines Wissens verweisen. ıch wird erst, wer es in den Grundvorstellungen zu einer ihn selbst friedigenden Klarheit gebracht hat, den ihm täglich aus Zeitıriften, Feuilletons u. dgl. überreich zuströmenden Stoff allerneuester ysikalischer Einzelheiten mit eigentlichem Genuß jenem Grundstocke ines Wissens angliedern. Dies die Rechtfertigung so mancher Wegısung, die auch uns keineswegs immer leicht fiel. Immerhin aber ıien es uns schon wieder aus didaktischen Rücksichten unzulässig, ɜ Sparsamkeit soweit zu treiben, daß sie aus dem lebendigen Ganzen r physikalischen Anschauungs- und Denkwelt schließlich nur ein ɔcknes Gerippe herauslöst. Denn erfahrungsgemäß ist der Schüler r einen in dieser Weise vereinfachten Lehrstoff überhaupt nicht mehr haben. Ein bloßes Gerippe ist nun einmal nicht lebendig. Für das lernen der Elemente muß sich der Schüler jeweils dadurch belohnt ılen, daß er sich bis zu einer gewissen Höhe und Freiheit der physi-

kalischen Betrachtung emporgeführt sieht. So gipfelt unsere Darstellung der Dynamik des Punktes im engeren Sinn (§§ 15 bis 21) im Emporführen der Einzellehren von den Galilei-Newtonschen Prinzipien bis hinauf zu dem universellen Gesichtspunkt der allgemeinen Schwere. Parallel mit diesem Fortschreiten an der Hand der Leitbegriffe α) „Kraft“ und „Masse“ führen dann die Leitbegriffe β) „Arbeit“ und „Energie“ gleichsam auf einen zweiten ebenso hohen Gipfel, nämlich zum Begriff des Potentials, zunächst des Gravitationspotentials (§ 24).

Die angeführten Beispiele in Sachen der Auswahl führten von selbst auch auf das zweite wissenschaftliche Moment, die Anordnung des ausgewählten Stoffes; es möchte vielleicht dasjenige sein, worin das vorliegende Buch am meisten neue Wege zu beschreiten versucht hat. Gerber (Stargard) sagte kürzlich in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht (XIII, S. 187): „Die übliche Gliederung der Lehrbücher befriedigt gewiß niemanden; ein Ersatz durch Besseres ist jedoch viel schwieriger als usw.“. Nicht wenige sonst verdienstvolle Bücher scheinen im Gegensatz zu diesem Ausdrucke der Unbefriedigung vielmehr die Absicht zur Schau zu tragen, daß die logische Anordnung eines so realen Stoffes, wie es der physikalische ist, überhaupt etwas Gleichgiltiges sei; und vielleicht ließe sich dieser bewußte Gegensatz zur unendlichen Sorgfalt, die man in der Mathematik von jeher auf die rationale Anordnung der einzelnen Wahrheiten verwendet hat, aus dem erkenntnistheoretischen Gegensatz realer und idealer Erkenntnisgegenstände begründen. Wieder aber ist es mindestens von didaktischer Seite her zweifellos, daß es dem Schüler der Physik einen verwirrenden und darum abstoßenden Eindruck machen muß, von einer Einzelheit zur anderen ohne einen ihm verständlichen Plan mehr geworfen als geführt zu werden. Vielleicht darf aber neben diesem didaktischen Interesse an einer einleuchtenden Gliederung und neben dem fachwissenschaftlichen Interesse an physikalischen Einzelheiten auch diejenige Seite „philosophischen“ Interesses zu Worte kommen, die sich in der Richtung auf ein Ganzes äußert, und die hervorgeht aus dem Bedürfnisse, ganze große Gegenstandsgebiete gedanklich überzeugend zu beherrschen, wofür das natürliche äußere Zeichen eben doch immer wieder die ungezwungene und durchsichtige systematische Anordnung ist. Hier zur raschen vorläufigen Orientierung des Lesers nur wenige Bemerkungen über die gewählten Anordnungsprinzipien.

Daß wir nicht mit den „Allgemeinen Eigenschaften“ u. dgl. begannen, bedarf heute nachgerade keiner Rechtfertigung mehr. Aber auch Auseinandersetzungen über die „Methode der Physik“ und wieder eine Vorführung aller Meßapparate, die zum Teil selbst ein halbes Jahr später dem Schüler zum erstenmal entgegentreten (so der

onius beim Barometer), scheinen uns keine passende Einführung in e Physik, wenigstens keine solche, die vor dem eigentlichen physialischen Unterrichte auf Verständnis rechnen, geschweige denn das teresse des Schülers wecken können. So beginnen wir denn sogleich it der Mechanik. Daß hier die einstige Trennung von „Statik" und Dynamik" nicht in den Vordergrund gestellt wurde, bedarf ebenalls kaum mehr einer Rechtfertigung. Um so schärfer ist der Gegenatz zwischen Phoronomie (welche Bezeichnung deutlicher ist als „Kinematik") und Dynamik hervorgekehrt, und zwar im ersten Abschnitt, der Mechanik des Punktes, auch in äußerer Abgrenzung, dagegen in den übrigen Abschnitten, z. B. der Mechanik der starren Systeme, der Wellenlehre, wenigstens so, daß der Schüler überall weiß, ob er es mit einer rein beschreibenden Untersuchung der räumlichen und zeitlichen Eigenschaften allein, oder auch der Erklärung dieser Erscheinungen aus Kräften und Energien zu tun hat. Die Mode, welche über alles „Erklären", über die Begriffe der Ursache, der Kraft den Bann gesprochen hat, machen wir in völlig bewußter Weise nicht mit; wir hoffen aber, daß, wo in dem Buch von Kräften und Energien die Rede ist, der Schüler nicht den Eindruck bekommen kann, als seien das „bloße Wörter", oder, was nicht wesentlich besser wäre, bloße Zahlformeln. Wir meinen, daß durch die beharrlichen Hinweise auf die sachliche Grenze zwischen Beschreibung und Erklärung das logische Gewissen des Schülers für den Unterschied zwischen Tatsachen und Gesetzen einerseits, Hypothesen und Theorien andererseits, viel empfindlicher gemacht wird, als durch eine dogmatische Versicherung, die Mechanik (und desgleichen jedes andere Kapitel der Physik) habe es seit dem Jahre 1874, da Kirchhoff sein bekanntes Wort gesprochen, nur mehr mit dem „Beschreiben" zu tun. Wie sehr uns das Trennen von Beschreiben und Erklären, von Tatsache und Theorie, am Herzen gelegen ist, wird der Leser in allen Teilen des Buches in concreto bemerken; so in der Wärmelehre, wo zwischen der Tatsache des Wärmeäquivalentes und der kinetischen Wärmehypothese eine scharfe Grenze gezogen ist; in der Lehre vom Licht, wo innerhalb der zwei ersten Abschnitte grundsätzlich auf jede Vorwegnahme der Wellenlehre des Lichtes verzichtet ist; in der Lehre von den elektrischen Erscheinungen, wo die „Fluida" auch als Hilfsvorstellungen ganz hinter die energetische Behandlung mittelst des Potentialbegriffes zurücktreten, in der Chemie, wo die Atomhypothese Schritt für Schritt aus den einzelnen Tatsachen und Gesetzen gerechtfertigt wird. In demselben Sinne dürfte es noch als eine Abweichung vom Herkömmlichen, schon innerhalb der Mechanik, zu erwähnen sein, daß wir alles die Molekularmechanik Betreffende erst im V. Abschnitte dargestellt haben. Die

Wellenlehre folgt als VI. und letzter Abschnitt der Mechanik (
wie so häufig als ein Einschub in die Akustik); dies schon des
weil an den Vorstellungen aus der Wellenlehre ganz ebenso wie
Akustik auch die Optik und die Elektrizitätslehre interessiert sin

Die Zerlegung des gesamten physikalischen Lehrstoffes schien
am natürlichsten auf drei große Abschnitte zu führen: I. Mech
II. Lehre von Wärme, Schall und Licht, als die „Physik der Sin
qualitäten", III. Elektrische und magnetische Erscheinungen.
sprechen überwiegende Gründe dafür, daß die Elektrizitätslehre n
wie es jetzt häufig geschieht, der Optik vorangestellt wird, sondern
sie den Abschluß des gesamten physikalischen Unterrichtes bildet
hoffe, die wissenschaftlichen und didaktischen Gründe hierfür bald
legen zu können in einem Aufsatze „Über die natürlichste Anord
der Kapitel im physikalischen Unterricht und über die Elektriz
lehre als immanente Wiederholung des gesamten physikalischen l
stoffes").

Die drei dann noch folgenden Abschnitte „Aus der Astrono
„Aus der Meteorologie", „Aus der Chemie" können und sollen aus
bekannten Gründen des Zeitmangels (für Chemie hat das österreich
Obergymnasium nur drei bis vier Wochen!) ein Mindestmaß von l
stoff vorführen, dieses aber immerhin in einer Auswahl und Anord
daß sie sich dem übrigen Unterricht möglichst leicht und wirkun
einfügen lassen. Als Beispiel dafür, was hier dem Herkömml
gegenüber wünschenswert scheint, wolle man den Aufsatz „Die Met
logie an unseren Mittelschulen" (Vierteljahresber. des Wiener Ve
zur Förderung des physikalischen und chemischen Unterrichtes
vergleichen. Was speziell aus dem astronomischen Lehrstoff auf k
Fall erst in den letzten Wochen des letzten Schuljahres (oder auch
nicht) durchgenommen, sondern organisch mit der Lehre von den Plan
bewegungen verbunden, bezw. ihr vorausgeschickt werden muß, sag
Fußnote S. 78 (und S. 51 der behördlich approbierten Ausgabe l

Neuerungen inhaltlicher Art sind ferner die Zusätze aus der
gewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie, en
die Leitaufgaben. Diese Zusätze werden für den Gebrauch
Schüler in stark gekürztem Ausmaße als besonderes Hilfsbuch
Naturlehre (zur Ausgabe B, 93 Seiten) herausgegeben.

Der mathematische Anhang beabsichtigt einerseits, die
kömmliche Einleitung zur Physik um die Vorwegnahme der Mess
rate (z. B. des Nonius) zu entlasten; andererseits wünscht diese
hang ein innigeres Verhältnis zwischen der Mittelschulmathematik
Mittelschulphysik anzubahnen, worüber an anderen Orten schon

Treffliches gesagt worden ist; es seien vor allem die unermüdlichen Bemühungen Felix Kleins mit innigstem Danke und dem Wunsche vollen Erfolges genannt. Im einzelnen hier nur soviel, daß wir z. B. von „Krümmung“ im Physikunterricht bei Planetenbewegungen, bei Spiegeln und Linsen, bei elektrostatischen Apparaten u. dgl. sprechen — von „einhüllenden Flächen“ bei der Katakaustik, beim Huygens'schen Prinzip — von „Trajektorien“ bei Niveauflächen und Kraftlinien usw., daß aber der bisherige mathematische Unterricht all diesen Dingen sorgfältig aus dem Wege gehen zu müssen meinte. Im Gegensatz zu solchen vorübergehenden Ausblicken in die „höhere Mathematik“ (die aber in Wahrheit nirgends über das hinausgehen, was schon innerhalb des gegenwärtig eingebürgerten mathematischen Lehrstoffes, z. B. der analytischen Geometrie, ganz wohl in Form von interessanten Übungsaufgaben zur Sprache kommen kann) wollen andere ganz primitive Darstellungen (z. B. die Einführung in die Goniometrie zunächst nur durch konkrete Anwendungen der Funktion Tangens) eine Anregung dazu geben, daß und wie der herkömmliche mathematische Unterricht von gewissen Pedanterien (z. B. dem peinlichen Durchsprechen aller Kombinationen von positiven und negativen Winkeln vor der ganzen Goniometrie, oder auch nur der sogleich möglichst allgemein sein wollenden Definitionen aller Funktionen für alle Quadranten) ohne Schaden für das mathematische Denken, aber sehr zum Nutzen des mathematisch-physikalischen entlastet werden könnte.

Im logischen Anhang werden diejenigen Begriffe von Induktion, Gesetz u. dgl., die bisher in den Einleitungen zur Physik wirkungslos bleiben mußten, in solchem Zusammenhange dargestellt, daß sie während des Unterrichtes bei passenden Gelegenheiten herangezogen werden können. Im psychologischen Anhang werden einige Dinge, wie z. B. das Stereoskopischsehen, die Kontrasterscheinungen, die über bloße Physik gewiß hinausgehen und innerhalb dieser leicht in physiologisch und psychologisch sehr anfechtbarer Weise zur Sprache kommen, unter gleichmäßiger Berücksichtigung des physikalischen und des psychogischen Anteiles der Erscheinungen behandelt. Durch das Hinausrücken dieser philosophischen Grenzgegenstände an oder außer die Grenzen des Lehrbuches und Verweisung in das Hilfsbuch soll dem sehr verschiedenen Geschmacke der Lehrer an solchen halb außerphysikalischen Gegenständen der weiteste Spielraum gewahrt bleiben. Möge man aber diese philosophischen Beigaben auch als eine Konzession an das Lieblingsfach des Verfassers, die Philosophie, freundlich tolerieren. Daß wir nach wie vor nicht von der Verquickung, sondern von der reinlichen Scheidung der Naturwissenschaft und Philosophie das bleibende Heil beider Wissenschaftsgruppen erwarten, wurde

jüngst eingehend begründet in der Abhandlung: „Zur gegenwärti
Naturphilosophie“ [1]).

Endlich die Leitaufgaben: Über sie habe ich in der Zeitsc
für den physikalischen und chemischen Unterricht, Jahrgang XV, S.
einiges ausgeführt. Als wichtigster Gesichtspunkt gilt uns der,
durch diese vorwiegend den theoretischen Lehrstoff der Ph
ergänzenden Aufgaben (zum Unterschied von gewöhnlichen Übu
aufgaben) dem sehr verschiedenen Ausmaß der Begabung und Arb
willigkeit der verschiedenen Schülerindividualitäten weitestgehe
Rechnung getragen werden kann und soll.

Und nun nach diesem sachlichen Bericht über das während m
als zehnjähriger Arbeit an dem Buche Erstrebte noch ein Wort
innigsten Dankes an die Vielen, die an ihm mitgearbeitet haben.
ungewöhnlich harten äußeren Bedingungen, unter denen ich bis
Herbst 1903 zu arbeiten hatte, hätten mir ohne jene Mitwirkung
Vollendung dieser meiner Lieblingsarbeit überhaupt unmöglich gema
Was Eduard Maiß (der — wohl infolge jahrzehntelanger Übe
strengung — am 13. September 1900 einem Herzschlage erlegen
an dem Buche getan hat, habe ich im Anschluß an den von Karl H
verfaßten Nekrolog [2]) in der „Vierteljahrsschrift des Wiener Ver
zur Förderung des physikalischen und chemischen Unterrichtes“
zustellen versucht. Mögen die Manen des der Wissenschaft und
Schule bis in den Tod Getreuen die Widmung dieses Buches als Zeic
einer über das Grab hinaus treuen Freundschaft und Dankbar
freundlich annehmen. . . Nur das hilfsbereite Eintreten unseres gem
samen Kollegen und Freundes Karl Haas (Wien) hat mir nach je
jähen Schicksalschlag den Mut zu den Vollendungsarbeiten des Bu
gegeben, und zugleich mit dem herzlichsten Dank für die wäh
anderthalb Jahren geleistete Unterstützung spreche ich mein Bedau
aus, daß es ihm durch eine Überlastung mit dienstlichen und ält
litterarischen Verpflichtungen unmöglich war, auch bis ans Ende
arbeiter an dem Buche zu bleiben. Doppelt wertvoll wurde mir d
die stets bereite besonnene Hilfe meines Freundes Friedrich Po
der schon in vorausgegangenen Jahren das allmähliche Werden
Manuskriptes mit seinem beständigen Rate begleitet hatte. Wäh
der Drucklegung führte er dem Buche auch die Unterstützung

---

[1]) Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenscha
Sonderheft 2 der Zeitschr. f. den physik. u. chem. Unterr. Berlin, Springer,
(136 Seiten).

[2]) Sonderabdrücke der beiden Aufsätze sind Haas und ich an Teilnehm
abzugeben bereit.

Herrn M. Koppe (Berlin) bei der Anfertigung der astronomischen Tafel zu; desgleichen die Anteilnahme des Herrn Hahn-Machenheimer (Berlin) an der Korrektur des Buches. An dieser nahmen ferner teil meine lieben ehemaligen Schüler Maryan Smoluchowski (Lemberg), Fritz Hasenöhrl (Wien), mein alter Freund Ludwig Lechner (Baden bei Wien) und Herr Dr. Götting (Göttingen); ferner an Teilen der Korrektur die Herren Prof. Jul. Schönach und Dr. Oskar Straté. Die Ausführung des Abschnittes „Aus der Elektrotechnik", sowie die einschlägigen Leitaufgaben übernahm mein lieber ehemaliger Schüler Robert Edler (Wien), den größten Teil der Zeichnungen mein lieber ehemaliger Schüler William Unger stud. techn.; beim mathematischen Anhang war mir Herr Dr. Carda (Wien) behilflich. Die Bogen des Abschnittes „Aus der Astronomie" lasen Prof. Oppenheim (Prag) und Prof. Nabelek (Kremsier), die „Aus der Meteorologie" Prof. Trabert (Innsbruck) und Hauptmann Th. Scheimpflug, die dieser beiden Abschnitte Prof. Spitaler (Prag), die des Abschnittes „Aus der Chemie" Prof. Bamberger (Wien) und Ing. Böck (Wien). Zahlreiche wertvolle Ratschläge konnten so während der Korrektur noch berücksichtigt werden; andere, namentlich tiefer in den Aufbau der Darstellung eingreifende, hoffe ich im Falle einer neuen Auflage zu verwerten.

Der Verlagshandlung Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig danke ich nicht nur für die Bereitwilligkeit gegen alle meine Wünsche hinsichtlich der Anfertigung von 390 neuen Holzschnitten, zum teil kostspieliger Tafeln, farbiger Illustrationen im Text u. dgl. m., sondern auch für ihr einträchtiges Zusammenarbeiten mit der Verlagshandlung Karl Gerolds Sohn, die an der Ausgabe für Österreich beteiligt ist. Ich bin stolz darauf, die beiden Firmen zu gemeinschaftlicher Förderung unseres physikalischen Unterrichtes gewonnen und insbesondere die altberühmten Illustrationsschätze des erstgenannten Verlages auch der Mittelschuljugend meines Vaterlandes gegen einen mäßigen Preis des Buches zugänglich gemacht zu haben.

Das Schicksal hat es gefügt, daß ich dieses Buch der Mittelschule fast in demselben Augenblicke übergebe, da ich nach siebenundzwanzigjähriger Lehrtätigkeit am Gymnasium zur Fortführung und zum Abschlusse meines Lebenswerkes an die Hochschule berufen wurde. Möchten meine lieben, verehrten Kollegen von der Mittelschule mir und dem Buche immerdar so freundlich gesinnt bleiben, wie sie es mir in wertvollen Kundgebungen so oft bezeigt haben.

Prag-Wien, Weihnachten 1903.

Alois Höfler.



Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Erster Teil.

Mechanik.

I. Mechanik des Punktes.

A. Beschreibung einiger Hauptarten von Bewegungen. (Phoronomie des Punktes.)

B. Dynamik des Punktes.

a) Erklärung mechanischer Erscheinungen mittels der Begriffe Kraft und Masse (Dynamik im engeren Sinne).

Zweiter Teil.

Wärme, Schall, Licht.

(Physik der Sinnesqualitäten.)

Wärmelehre (Thermik und Kalorik).

B. Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Wärmegrad, Volumen und mechanischer Spannung.

C. Abhängigkeiten zwischen Wärmegraden, Wärmemengen und Aggregatzuständen.

D. Ausbreitung der Wärme.

E. Wärmequellen. Mechanische Wärmetheorie.

Lehre vom Schall (Physikalische Akustik).

A. Die Erregung des Schalles.

a) Abhängigkeit der Tonhöhe von der Schwingungszahl.

b) Schwingungen einiger musikalischer Klangerreger.

c) Abhängigkeit der Klangfarbe von den Teilschwingungen.

B. Ausbreitung des Schalles.

C. Die Wahrnehmung des Schalles.

Lehre vom Licht (Physikalische Optik).

A. Geometrische Optik.

Dritter Teil.

Elektrische und magnetische Erscheinungen.

Einleitung: Geschichtliches; Grunderscheinungen und vorläufige Hilfsvorstellungen.

I. Mechanische Erscheinungen an elektrischen Körpern und an elektrischen Ladungen.

II. Mechanische Erscheinungen an magnetischen Körpern.

III. Mechanische Kräfte zwischen Strömen und Magneten. Magneto- und Elektro-Induktion.

IV. Beziehungen der elektrischen zu den thermischen, chemischen und optischen Erscheinungen.

A. Stromarbeit und Wärme.

B. Stromarbeit und chemische Arbeit.

C. Elektrizität und Licht.

Anhang:

V. Aus der Elektrotechnik.

A. Anwendungen der elektromagnetischen und Induktionswirkungen.

B. Anwendungen der thermischen Wirkungen.

C. Anwendungen der elektrochemischen Wirkungen.

D. Leitungen. — Meß- und andere Nebenapparate.

Vierter Teil.

Astronomische, meteorologische, chemische Erscheinungen.

Aus der Astronomie.

Aus der Meteorologie.

C. Aus der meteorologischen Optik.

D. Elektrische Erscheinungen der Atmosphäre.

Aus der Chemie.

A. Vorversuche und Vorbegriffe.

B. Chemische Hypothesen und Theorien.

C. Einige Grundstoffe und deren Verbindungen.

Anhang.

A. Zusätze aus der angewandten Mathematik.

B. Zusätze aus der Logik und Psychologie.

a) Aus der Logik (und Erkenntnistheorie).

α) Aus der induktiven Logik.

β) Aus der deduktiven Logik.

Leitaufgaben.



Einleitung.

I. Naturerscheinungen.

Leuchten, Tönen, ein Blitz, ein Knall, die Bewegungen einer Maschine, das Wachsen und Welken einer Pflanze, das Zucken eines Muskels, die Leistungen unserer Sprechwerkzeuge . . sind **physische Erscheinungen** oder **Naturerscheinungen** im engeren Sinne.

Zu den Naturerscheinungen im weiteren Sinne gehören auch die Erscheinungen der psychischen Natur, kürzer: die **psychischen Erscheinungen**; über sie vergl. Anhang Nr. 30.

Anh. 30.

Im besonderen heifsen die oben angeführten Vorgänge an einer Pflanze, im Muskel und überhaupt alle physischen Erscheinungen, welche lebenden Körpern eigentümlich sind, **physiologische** Erscheinungen. Dagegen erfolgt z. B. die Fallbewegung eines lebendigen Körpers (der Sturz eines Menschen in einen Abgrund...) nach den nämlichen Gesetzen, wie die Fallbewegung eines leblosen Körpers (eines Steines, Regentropfens...).

Die den lebendigen und leblosen Körpern gemeinschaftlichen Erscheinungen heifsen **physikalische** (im weitesten Sinne).

Besondere Gruppen physischer Erscheinungen, und als solche den im engeren Sinne physikalischen beigeordnet, sind die chemischen, die astronomischen, meteorologischen u. s. f.

II. Naturlehre.

Schon die alltägliche (kunstlose, vorwissenschaftliche) Erfahrung macht uns mit vielen physikalischen (astronomischen, physiologischen...) Erscheinungen bekannt. Werden diese Erfahrungen zu einer möglichst vollständigen Beschreibung der Einzelerscheinungen weitergebildet und wird auf Grund einer solchen Beschreibung die Erklärung aller dieser Erscheinungen nach festen Methoden gesucht, so bildet der jeweilige Inbegriff solcher Erkenntnisse die **Naturwissenschaft.** Ihre einzelnen Disziplinen werden je nach der Besonderheit der von ihnen erforschten Erscheinungskreise als Physik, Chemie, Astronomie, Physiologie, Zoologie, Botanik, Mineralogie... bezeichnet. — Man fafst die vorwiegend beschreibenden Disziplinen

Zoologie, Mineralogie, Botanik (ferner Geognosie...) unter dem Nan
Naturgeschichte, die auch erklärenden, namentlich Physik u
Chemie (ferner Geologie...), unter dem Namen **Naturlehre** zusamm

Die physikalische Betrachtung der Naturerscheinungen unterscheidet s
von der aufserwissenschaftlichen namentlich durch sorgfältige Beachtung
quantitativen Merkmale der Erscheinungen. Deshalb ist eine der unentb
lichsten Hülfswissenschaften der Physik die Mathematik. — Einige Hauptlel
Anh. 1—29. der auf Physik angewandten Mathematik vergl. Anhang Nr. 1—29 [1]).

Durch den Fortgang der physikalischen Forschung selbst hat s
als die natürlichste Abgrenzung und Reihenfolge einzelner Grup
physikalischer Erscheinungen die folgende ergeben:

I. **Mechanische** Erscheinungen,
II. **Wärme-, Schall-** und **Licht**-Erscheinungen,
III. **Elektrische** und **magnetische** Erscheinungen.

Diesen drei Teilen der Physik (im engeren Sinne, umfassend
Mechanik, Thermik, Akustik, Optik, Elektrik, Magnet
werden in diesem Buche angeschlossen grundlegende Lehren aus

IV. **Astronomie, Meteorologie, Chemie.**

Über die Methode der Naturwissenschaft überhaupt, der Physik
Anh. 31 ff. besondere, vergl. Anhang, namentlich Nr. 31 ff.

---

[1]) Die beigesetzten Zeichen **Anh.** und **LA** beziehen sich auf
a) den Anhang „Zusätze aus der angewandten Mathematik, der Logik Psychologie",
b) die Leitaufgaben am Ende des Buches.

Erster Teil:

Mechanik.

§ 1. Gegenstand und Aufgabe der Mechanik.

Gegenstand der Mechanik sind die **Bewegungen** (nebst den „mechanischen Spannungen“ §§ 14, 17).

Als sich bewegend bezeichnen wir bekanntlich einen Körper (aber auch z. B. einen körperlosen Licht- oder Schattenfleck), der seinen Ort im Raume binnen bestimmter Zeiten verändert. — Mechanische Spannungen finden z. B. in den Muskeln eines Pferdes und in den Strängen statt, wenn es einen Wagen in Bewegung setzt, desgleichen in der Brücke, über die der Wagen fährt. . .

Die Aufgabe, welche der Mechanik angesichts der Bewegungs- (und Spannungs-) Erscheinungen erwächst, ist, diese Erscheinungen auf die einfachste und vollständigste Weise zu beschreiben und sie auf Grund solcher Beschreibung (durch Rücksichtnahme auf die Beziehungen zu den umgebenden Körpern) zu erklären (Anh. Nr. 32). Anh. 32.

Für die Einteilung der Mechanik bieten sich als besonders zweckmäfsig zwei Einteilungsgründe dar:

Erstens die Unterscheidung der **Phoronomie**, welche blofs die Beschreibung der Bewegungen zum Gegenstande hat, und der **Dynamik**, welche die Bewegungs- und Spannungszustände durch Wirken von „mechanischen Kräften“ und „mechanischen Energien“ erklärt (§ 14ff.).

Über die Einteilung dynamischer Vorgänge und Zustände in **kinetische** und **statische** vergl. § 14, § 17ff.

Der zweite Einteilungsgrund für die Gliederung der Mechanik ist gegeben in dem Unterschiede fester, flüssiger und gasförmiger Körper (**Geo-, Hydro-, Aeromechanik**); da aber an jedem Körper eine Vielheit von Punkten sich unterscheiden läfst, deren jeder im allgemeinen verschiedene Bewegungen zeigen kann, so empfiehlt es sich, mit einer **Mechanik des Punktes** zu beginnen.

Dabei wird zunächst der bewegte „Punkt" (das Bewegliche, der materielle Punkt, Massenpunkt) wie ein mathematischer Punkt ohne jede Ausdehnung gedacht. Aber auch die Bewegungen von Körpern, welche keineswegs „sehr klein" (Molekeln, Atome) zu sein brauchen, werden in der Mechanik des Punktes abgehandelt, insoweit wir von den Verschiedenheiten der Bewegungen, die den einzelnen Punkten des Körpers zukommen, „in erster Annäherung" absehen (Anhang Nr. 36). Wenn wir z. B. sagen, daſs sich Jupiter in einer Ellipse bewegt, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, so kann das nur von je einem Punkte des Jupiterkörpers und des Sonnenkörpers wirklich gelten. Aber selbst die Dimensionen des riesigen Jupiterkörpers sind so klein im Vergleiche zu den Dimensionen der Bahnen, die irgendwelche Punkte jenes Körpers beschreiben, daſs jene Beschreibung in erster Annäherung auf alle Punkte des Jupiter paſst. Die Annäherung wird besser, wenn wir als Repräsentanten aller dieser Punkte, d. h. des ganzen Körpers, den „Massenmittelpunkt" (Schwerpunkt, § 28) des Jupiter wählen; bei Berücksichtigung der „Störungen" (§ 21), welche Jupiter seitens der übrigen Planeten erfährt, gelangen wir zu noch genaueren Beschreibungen u. s. f. — Dagegen müssen wir über die Mechanik des Punktes jedenfalls hinausgehen, sobald wir auch auf die Rotation des Jupiter um seine Achse, auf die Bewegung der wolkenartigen Gebilde an seiner Oberfläche u. s. f. Rücksicht nehmen wollen (— desgleichen auch schon bei der Rotation eines einzelnen Atoms).

Anh. 36.

Nach der Mechanik des Punktes (I. Kap.) folgt eine Mechanik der starren Systeme (II. Kap.), der vollkommenen Flüssigkeiten (III. Kap.), der vollkommenen Gase (IV. Kap.), und erst nach Untersuchung dieser künstlich vereinfachten Gebilde kann die Mechanik der wirklichen festen, flüssigen und gasförmigen Körper im Zusammenhange mit der Mechanik der sogen. Molekularwirkungen (V. Kap.) behandelt werden. Eine zusammenhängende Mechanik der Schwingungen und Wellenbewegungen (VI. Kap.) bildet den Abschluſs der Mechanik und zugleich eine Hauptgrundlage für alle späteren Abschnitte der Physik, namentlich der Lehren vom Schall und vom Licht.

I. Mechanik des Punktes.

A. Beschreibung einiger Hauptarten von Bewegungen. (Phoronomie des Punktes.)

§ 2. Bewegung im freien Falle, an der schiefen Ebene und an der wagrechten Ebene.

Geschichtliches. In vorgeschichtliche Zeiten reichen die Erfahrungen zurück, daſs Körper Gewicht haben, und daſs sie fallen; ferner daſs ein fallendes Baumblatt hin und her flattert, ein losgelassener Stein in einer lotrechten Geraden abwärts fällt. Der Stein zeigt dabei eine „beschleunigte" Bewegung (aus je gröſserer Höhe er gefallen ist, um so stärker trifft uns sein Stoſs); bei fallenden Regentropfen kann die Beschleunigung des Sinkens unmerklich, d. h. das

sinken annähernd gleichförmig werden; noch kleinere Tröpfchen (bei „Nebel-teilchen") schweben annähernd ruhig in der Luft; Rauch steigt empor.

Im Hinblick auf solche alltäglichen Erfahrungen glaubten die griechischen Naturphilosophen, „schwere" und „leichte" Körper unterscheiden zu sollen, je nachdem sie „von Natur" ein Bestreben haben, möglichst tiefe, bezw. hohe Stellen unter, an und über der Erdoberfläche aufzusuchen. (Heute erklären wir die Erscheinungen des Aufsteigens „leichter" Körper aus dem „Auftrieb der Körper in der Luft", § 46, und nennen alle Körper „schwer".) Aristoteles (384 bis 322 v. Chr.) lehrte, dafs ein zehnmal so grofser Körper zehnmal so schnell falle (im nämlichen Mittel, z. B. Luft).

Galilei (1564 bis 1642) zeigte gegenüber diesen Lehren zunächst durch Schlüsse aus „Gedankenexperimenten" (indem er Steine einzeln und zusammen fallend dachte), dafs vielmehr „alle Körper gleich schnell fallen". [Dies hatte schon früher auch Benedetti gelehrt. Heute sagen wir: **Die Fallzeit ist vom Gewichte und von der stofflichen Beschaffenheit unabhängig** und nur von der Fallstrecke (Fallhöhe) abhängig.] Nach späteren Erzählungen soll bei Fallversuchen am schiefen Turm zu Pisa z. B. eine Kanonenkugel von 100 Pfund der Kugel von $1/_2$ Pfund nach einer Fallhöhe von 200 Fufs „kaum eine Hand breit" voraus gewesen sein. Solche kleinen Abweichungen, sowie das beträchtliche Zurückbleiben „leichter" Körper erklärte Galilei aus dem Unterschiede des Luftwiderstandes. [*Versuch* mit dem auf einer Münze liegenden und mit ihr fallenden Papierblättchen. Nach Erfindung der Luftpumpe (um 1650) wurden jene Galileischen Grundlehren mittels der Newtonschen „Fallröhre" noch direkter bestätigt. (*Versuch* !).]

Galilei legte sich überdies die Frage vor, nach welchem mathematischen Gesetze die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers zunehme.

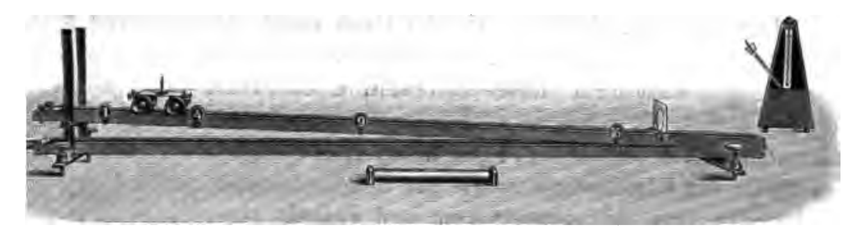


Fig 1. Schienenapparat als schiefe Ebene. — Libelle. — Metronom.

Er vermutete zuerst fälschlich, dafs die **Geschwindigkeit** proportional dem zurückgelegten Wege, und dann richtig, dafs sie **proportional der verflossenen Zeit** wachse (1604). Um diese, zunächst die veränderliche Geschwindigkeit betreffende Vermutung mittelbar zu prüfen, stellte er Versuche über die während verschiedener Fallzeiten durchlaufenen Wege an. Er liefs Kugeln längs einer glatten Rinne („Fallrinne"), die wenig gegen den Horizont geneigt war, hinabrollen, mafs die während der Bewegung verstreichenden Zeiten (mittels einer Art Wasseruhr) und die vom Ausgangspunkt an zurückgelegten Wege. Indem er hierbei die für die Bewegung an der schiefen Ebene gefundenen Gesetze als eine Bestätigung seiner Vermutung über den freien Fall ansah, benutzte er den Gedanken (über seine nachträgliche Rechtfertigung vergl. § 6), dafs die Bewegung im freien Falle und an der schiefen Ebene einander mechanisch ähnlich seien und sich nur in einer konstanten Gröfse, z. B. der Fallstrecke der ersten Sekunde, voneinander unterscheiden. —

Diesen grundlegenden Versuchen mit der Fallrinne entsprechen die folgenden:

I. *Versuche* 1a). Ein Wägelchen rollt über eine Schienenbahn [Fig. 1 (a. v. S.); in Ermangelung: eine Kugel über ein geneigtes Brett] herab, während ein Metronom Sekunden schlägt. Wir erteilen der Bahn zunächst durch Ausprobieren z. B. eine solche Neigung, dafs der Wagen in 4 sec eine Strecke von 80 cm zurücklegt. Er durchmifst dann binnen

der **Fallzeiten** von	1	2	3	4	5	. . . .	sec
die **Fallstrecken** von	5	20	45	80	125	. . . .	cm.

Setzen wir hierin statt der besonderen Zahlen der ersten Reihe **allgemein** t **sec**, so lassen sich die besonderen Zahlen der zweiten Reihe **allgemein durch** **5 cm** . t^2 darstellen; und wir erhalten (durch „logische Induktion", Anh. Nr. 31, 32, 34) als die gesuchte mathematische Beziehung zwischen den Fallstrecken und Fallzeiten

Anh. 31, 32, 34.

$$s = 5t^2,$$

worin wir allgemein mit s die Mafszahl der Fallstrecke (kurz: des „Weges" s, *spatium*) in Centimetern bezeichnen, die während der ganzen Fallzeit von t Sekunden (kurz: während der „Zeit" t, *tempus*) zurückgelegt worden ist.

Jene Gleichung $s = 5t^2$ erlaubt noch eine zweite Verallgemeinerung auf Grund folgender Überlegungen und Versuche: Hätten wir die Schienen mehr oder weniger steil eingestellt, so hätten wir nach allbekannten Erfahrungen über das Rollen oder Gleiten von Körpern über schiefe Ebenen erwarten dürfen, dafs in 1, 2 . . . t sec mehr, bezw. weniger als 5, 20 . . . $5t^2$ cm zurückgelegt werden. Wir bestätigen jene Erfahrungen und Erwartungen durch folgende

Versuche 1b). Erteilen wir der Bahn durch Ausprobieren solche Neigungen, dafs die „Fallstrecke der ersten Sekunde" (der „**Anfangsweg**") statt 5 cm andere Strecken, z. B. 10 cm, 1 cm, **allgemein** a cm, beträgt, so treten an Stelle der Zahlenreihe 5, 20, 45, 80 . . . cm nunmehr: 10, 40, 90, 160 . . . cm, bezw. 1, 4, 9, 16 . . . cm; ebenso tritt an Stelle der Gleichung $s = 5t^2$ die allgemeinere Beziehung zwischen Fallstrecke s cm, Anfangsweg a cm und Fallzeit t sec:

$$s = a t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\textit{Gesetz } 1);$$

in Worten: Die von einem Körper beim Fallen längs der schiefen Ebene zurückgelegten **ganzen Fallstrecken wachsen wie die Quadrate der ganzen Fallzeiten.**

II. Den jeweiligen Grad der Steilheit der schiefen Ebene können wir messen entweder durch die **Neigungswinkel** ε, ε' . . . (Fig. 2) oder aber durch das Verhältnis der „Höhe" h, h' . . . zur jeweiligen „Länge" l der schiefen Ebene $\frac{h}{l} = \sin \varepsilon$, welches als „**Neigung**" („Steigung") der Ebene bezeichnet wird.

So gibt man auch bei Eisenbahnen das Verhältnis der vertikalen Erhebung zur durchlaufenen Bahnstrecke an. — Ein anderes Maſs wäre $\frac{h}{b} = tg\,\varepsilon$, wo b die „Basis" der schiefen Ebene ist; wir nennen dieses Verhältnis insbesondere das **Gefälle** der schiefen Ebene; vergl. § 24 über das Gefälle von Bergabhängen [1]).

Fig. 2.

Die untere Grenze aller schiefen Ebenen ist die wagrechte Ebene, für welche $\varepsilon = 0$ und $h = 0$, also $\sin\varepsilon = 0$ ($tg\,\varepsilon = 0$) ist; die obere Grenze ist die lotrechte Ebene, für welche $\varepsilon = 90^\circ$ und $h = l$, also $\sin\varepsilon = 1$ ($tg\,\varepsilon = \infty$) ist.

Welche Gröſse für ε, bezw. $\sin\varepsilon$ beim bisherigen Ausprobieren gewählt werden muſste, damit ein bestimmter Anfangsweg a (allgemeiner ein bestimmtes s bei bestimmtem t) erzielt werde, hängt sehr von der Gröſse der Reibung an den Achsen des Wagens und an den Schienen ab (in viel geringerem Maſse vom Widerstande der Luft. Sehr wesentlich ist es aber auch, ob ein gröſserer oder kleinerer Teil des sich bewegenden Körpers nicht bloſs fortschreitende, sondern auch drehende Bewegungen macht; so legen namentlich rollende Kugeln, noch auffälliger Reifen, binnen gleicher Zeiten viel kleinere Wege zurück, als die ohne Reibung gleitend gedachten Körper, LA 93, wie auch Galileis rollende Kugeln hinter dem rollenden Wagen zurückgeblieben wären. Im folgenden wird von den Drehungen der Räder des Wägelchens abgesehen). — Wird eine sehr starke Neigung (sehr steile Bahn), d. h. h beinahe so groſs wie l gewählt, so sind die Versuche nicht mehr wohl ausführbar, da dann die Bewegung zu rasch verläuft; sie geht für $\varepsilon = 90^\circ$, also $\sin\varepsilon = 1$ und $h = l$ in den freien Fall über. — Suchen wir aber zunächst nur die allgemeine Erfahrung, daſs dem gröſseren Winkel ε auch der gröſsere Anfangsweg a_ε und dem freien Falle der gröſste solche Wert $a_{90} = a$ entspricht, wieder schärfer zu fassen als eine mathematische Beziehung zwischen Anfangsweg und Neigung (wie Galilei diese Aufgabe löste, vergl. § 6), so liegt am nächsten die Vermutung, daſs die Anfangswege auf schiefen Ebenen sich verhalten wie deren Neigungen; also $a_\varepsilon : a'_\varepsilon = \frac{h}{l} : \frac{h'}{l'}$, oder wenn speziell $l' = l$ gewählt wird, $a_\varepsilon : a'_\varepsilon = h : h'$.

LA 93.

Diese Vermutung wird bestätigt, wenn wir darauf achten, wie groſs die Höhe h der schiefen Ebene bei gegebener Länge gewählt werden muſs, damit ein vorgeschriebener Anfangsweg, z. B. $a_\varepsilon = 5$ cm, zu stande komme, und wenn wir bei gleicher Länge l das h jetzt 2, 3 . . . mal so groſs als früher wählen: wir finden dann das a_ε auch 2, 3 . . . mal so groſs; nämlich für eine Bahn und einen Wagen von bestimmter (noch ziemlich groſser) Reibung etwa durch

Versuche 2): $l = 100$ cm, $h = 2{,}5$ cm, also $\frac{h}{l} = \frac{1}{40}$; $a_\varepsilon = 5$ cm

$l = 100$ cm, $h' = 5$ cm, also $\frac{h'}{l} = \frac{1}{20}$; $a'_\varepsilon = 10$ cm.

Ist so durch Ausprobieren der zu einer bestimmten Neigung gehörige Anfangs-

[1]) Hiernach spricht man dann auch vom Druckgefälle § 49, 191, Potentialgefälle § 24, Temperaturgefälle § 79, die alle nach tg, nicht nach $\sin$ gemessen werden.

weg gefunden, so würde sich auch der Anfangsweg für den freien Fall aus der Proportion $a_t : a = h : l$ ergeben; nämlich z. B. 5 cm : a cm = 1 : 40, also a = 200 cm. Da aber diese Zahl ohne Rücksicht auf die Reibung an der schiefen Ebene erschlossen ist, so mufs für den freien Fall, wo es keine Reibung gibt, der Anfangsweg noch gröfser sein. Bezeichnen wir mit a den wahren, aber einstweilen noch nicht genau bekannten Wert der Fallstrecke in der ersten Sekunde beim freien Fall, so bilden den zusammenfassenden Ausdruck für die gesuchte Beziehung zwischen Anfangsweg und Neigung an einer schiefen Ebene für alle Werte von $\varepsilon = 0°$ bis $\varepsilon = 90°$ die Gleichungen:

$$a_t = a \cdot \frac{h}{l} \quad \text{oder} \quad a_t = a . \sin \varepsilon \quad \cdot \quad (\textit{Gesetz 2});$$

in Worten: Der von einem Körper (ohne Drehung und ohne Reibung) beim Fallen längs der schiefen Ebene zurückgelegte **Anfangsweg** (Fallstrecke der ersten Sekunde) ist **in dem Verhältnisse der Neigung kleiner als der Anfangsweg in der 1. Sekunde beim freien Fall.** — LA 1. Diskussion der Gleichungen (2) in Bezug auf h, l und ε. — LA 1.

Die für die ganze Physik wichtige Gröfse a scheint zwar leicht unmittelbar (d. h. auch ohne Berechnung des a aus a_t) bestimmbar, indem man einen Körper von so grofser Höhe über dem Boden oder sonst einem festen Ziel frei fallen läfst, dafs die Fallzeit genau 1 sec beträgt; oder schon minder unmittelbar auf Grund der Gleichung $s = at^2$, indem man zu irgend welchen t die zugehörigen s mifst. [Galilei gibt „100 Ellen für 5 sec" an — das wäre für 1 sec nur 4 Ellen ≠ 8 Fufs statt der richtigen a ≠ $15^1/_2$ Fufs![1]] Durch solche mehr oder minder unmittelbaren Versuche ist aber nur geringe Genauigkeit zu erzielen, da infolge der alsbald sehr grofsen Geschwindigkeiten kleinen Unterschieden der gemessenen Zeitstrecken schon grofse Unterschiede in den Wegen entsprechen. Es bedarf daher entweder bei mäfsig kleinen Fallstrecken besonderer Vorrichtungen zur genauen Messung sehr kleiner Zeitunterschiede (Chronoskope, vergl. Anhang Nr. 34) oder bei mäfsig grofsen Fallzeiten sehr grofser Fallstrecken; hier machen sich aber dann wieder andere Schwierigkeiten (Luftwiderstand, Abweichung infolge der Erddrehung. § 34) geltend. Anh. 34.

Fig. 3.

25 m

15 m

5 m

An Neumanns Fallmaschine (einer Vereinfachung der Apparate von Babo, Lippich und anderen) zeichnet eine schwingende Feder, welche mit einem Block frei fällt, auf ein ruhendes Blatt „Fallkurven", aus denen sich das Fallgesetz $s = at^2$ und annähernd auch a selbst ableiten läfst (LA 19). Ähnliches leisten noch einfacher Augusts Fallkugeln (Fig. 3). LA 19.

Noch weniger genaue Werte als die unmittelbare Methode zur Bestimmung von a im freien Falle liefert die mittelbare Methode mittelst wirklicher schiefer Ebenen (da es reibungslose nicht gibt). Gleichwohl lassen sich die vollkommensten Versuche zur Bestimmung von a, nämlich die mit Pendeln (§ 12 und § 33) vergleichen mit dem Hin- und Herfahren des Wägelchens auf einer Folge von schiefen Ebenen, nämlich auf einem Kreisbogen, Fig. 4. — Durch solche Pendelversuche ergab sich der Wert von a für verschiedene Orte der Erdoberfläche etwas verschieden. Den für mittlere geographische Breiten geltenden Wert von a = 4,905 m = 490,5 cm (§ 6) runden wir einstweilen ab zu folgendem Wert der **Fallstrecke in der 1. sec beim freien Fall** a ≠ **500 cm = 5 m.**

Anh. 21. [1]) Über das Zeichen ≠ für annähernde Gleichheit vergl. Anhang Nr. 21.

III. Wie der freie Fall die obere, so stellt die Bewegung auf der wag- ·echten Ebene eine untere Grenze für die Bewegungen auf der schiefen Ebene dar. — Befindet sich uf einer wagrechten Ebene ein örper in Ruhe, so gerät er be- anntlich nicht „von selbst" in ewegung. Um den Körper schon it einer bestimmten Geschwin- gkeit auf die wagrechte Ebene langen zu lassen, werde die eine lfte des Blechstreifens nach . 5 gerade gestreckt, wobei Wagen in stetigem Über- ge von dem krummen auf wagrechten geraden Streifen ; aber auch die geringe Un- igkeit schadet nicht bei ndem

Fig. 4.

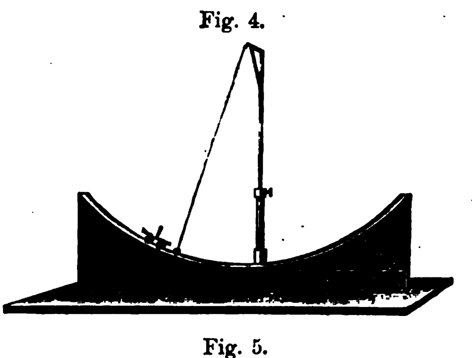
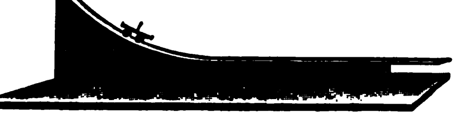


Fig. 5.



Versuch 3). An die eine ıfe Ebene darstellenden enen (welche bei den nden Versuchen immer nur wenig geneigt sind) stoßen in einem ıpfen Knie wagrechte Schienen (Fig. 6), auf welche das Wägel-



Fig. 6.



aus kleinerer oder größerer Höhe herabrollt und in gleichen ın gleiche Wege zurücklegt, kurz: in **„gleichförmiger Bewegung"** ərläuft. War dabei die Neigung der schiefen Ebene und die Fall- ke so gewählt, daß auf der wagrechten Ebene während der ersten ınde a cm zurückgelegt werden, so besteht zwischen den

während	1	2	3	...	t sec
ckgelegten Wegen von	a	$2a$	$3a$	...	ta cm die Beziehung

$$s = at \quad \ldots\ldots \quad (\textit{Gesetz } 3);$$

Vorten: **Die von einem Körper bei der Bewegung längs einer rechten reibungslosen Ebene zurückgelegten Wege wachsen ach wie die Zeiten.** — LA 1.

Ist bei den Versuchen 3) die Reibung beträchtlich, so legt auf der wagrechten Bahn der Wagen in jeder folgenden Sekunde einen kleineren Weg zurück als in der vorhergehenden: seine Bewegung ist nicht mehr annähernd gleichförmig, sondern merklich verzögert, und er kommt allmählich zur Ruhe. Man kann diesen Einfluſs der Reibung „kompensieren“, wenn man den zweiten Teil der Schienenbahn statt wagrecht ebenfalls etwas nach abwärts geneigt einstellt.

Was wird geschehen, wenn wir den Wagen von schief abwärts geneigten Schienen auf schief aufwärts gestellte hinüberlaufen lassen? (Vergleichung mit der Bewegung des Wägelchens nach Fig. 4.) Vergleiche die Höhen des Ab- und Ansteigens bei verschiedenen Neigungen der schiefen Ebenen! —

Die in diesem Paragraphen auf einige besondere Arten wirklicher Bewegungsvorgänge angewendeten Methoden der mathematischen Beschreibung werden im folgenden ausgedehnt auch auf andere, allenfalls selbst bloſs gedachte Bewegungen (Vergleichung mit der Ausmessung wirklicher und bloſs „geometrischer“ Flächen und Körper!).

§ 3. Abhängigkeit des Weges von der Zeit (Weg-Zeit-Gesetz).

I. Eine ähnliche Bewegung, wie der Wagen auf der wagrechten Ebene im Versuch 3 des vorigen Paragraphen, macht auch z. B. eine Bleistiftspitze, die wir

Fig. 7. O 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 $s = \frac{1}{2}t$

Fig. 8. O 1 2 3 4 5 6 7 8 9 $s = t$

Fig. 9. O 1 2 3 4 $s = 2t$

$s = at$

Fig. 10. O 1 2 3 4 $s = \frac{1}{2}t^2$

Fig. 11. O 1 2 3 $s = t^2$

Fig. 12. O 1 2 $s = 2t^2$

$s = at^2$

längs der Geraden in Fig. 7, 8, 9 so bewegen, daſs sie sich, während wir Sekunden zählen (sprich: 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4 . . .), zu den Zeitpunkten 0, 1, 2, 3, 4 . . . in den Bahnpunkten O, 1, 2, 3, 4 . . . befindet. — Hierbei muſs aber jede ruckweise Verschiebung des Bleistiftes möglichst vermieden werden, d. h. wir erhalten nur dann eine „gleichförmige“ Bewegung, wenn nicht nur während der ganzen Sekunden z. B. an Fig. 8 je ein ganzes Centimeter zurückgelegt wird, sondern wenn auch auf jede 0,1, 0,01 . . . sec die gleichen Wege von 0,1, 0,01 . . . cm entfallen. Somit definieren wir allgemein:

Eine **gleichförmige Bewegung** hat ein Punkt, wenn er in (beliebig kleinen) **gleichen Zeiten gleiche Wege** zurücklegt. — Alle gleichförmigen Bewegungen werden beschrieben durch Gleichungen von der Form $s = at$, wobei a die Maſszahl des während je 1 sec, s die Maſszahl des während t sec zurückgelegten Weges ist.

II. Eine ähnliche Bewegung wie der Wagen auf der schiefen Ebene in Versuch 1 des vorigen Paragraphen macht auch z. B. eine Bleistiftspitze, welche entsprechend Gleichungen von der Form $s = at^2$ längs der Geraden in Fig. 10, 11, 12 bewegt wird. Hierbei werden (nicht wie bei den gleichförmigen Bewegungen in gleichen Zeiten gleiche, sondern) **in gleichen aufeinander folgenden Zeiten immer gröfsere Wege** zurückgelegt; solche Bewegungen heifsen **beschleunigte.** Um wieviel die Wege der aufeinander folgenden Sekunden wachsen, läfst sich aus der Gleichung $s = at^2$ berechnen. Ist nämlich z. B. $s = 1\,\text{cm}\,.\,t^2$, so entfallen auf die 1. Sekunde, 2. Sekunde, 3. Sekunde . .

1 cm, 4 cm — 1 cm = 3 cm, 9 cm — 4 cm = 5 cm

Allgemein: Für $s = at^2$ ist der Weg in der t^{ten} Sekunde $\sigma = at^2 - a(t-1)^2 = a(2t-1)$, wobei $(2t-1)$ die t^{te} ungerade Zahl darstellt (Anh. Nr. 10). — Aus diesen „Sekundenwegen“ finden wir durch nochmalige Subtraktion, um wieviel mehr Weg in jeder folgenden Sekunde zurückgelegt wird als in der vorausgehenden: nämlich z. B. speziell für $s = 1\,.\,t^2$ ist $3 - 1 = 2$, $5 - 3 = 2$ . . . cm. Allgemein: Für $s = at^2$ ist $3a - a = 2a$, $5a - 3a = 2a$, . . . $(2t-1)a - (2t-3)a = 2a$ **cm.** Da also bei Bewegungen, welche dem Gesetze $s = at^2$ entsprechen, die in gleichen aufeinander folgenden Zeiten zurückgelegten Wege immer um den gleichen Betrag $2a$, d. i. um **das Doppelte des Weges der ersten Sekunde** wachsen, und diese Mafszahl $2a$ zugleich die Mafszahl der „Beschleunigung“ einer solchen Bewegung ist (§§ 5, 6), so heifst diese besondere Art beschleunigter Bewegungen **gleichmäfsig beschleunigte** Bewegung (LA 1).

Anh. 10.

LA 1.

Die Beispiele I und II sind die einfachsten Vorbilder für folgende allgemeine Methode zur mathematischen Beschreibung von Bewegungsvorgängen:

Die Bewegung eines Punktes (sei es, dafs sie in der Natur wirklich vorkommt oder dafs sie nur gedacht wird) ist vollständig beschrieben, wenn gegeben ist: 1. die **Bahn** (§ 8), d. h. die vom Punkte zu durchlaufende Linie (Fig. 1 und Figg. 3 bis 13); 2. ein Punkt O der Bahn als **Anfangspunkt** für die „Wege“, z. B. OM, später OM'[1]); 3. ein **Anfangszeitpunkt** für die „Zeiten“; 4. eine **mathematische Beziehung zwischen der Mafszahl s des Weges und der Mafszahl t der Zeit.** Diese Beziehung nennen wir das **Weg-Zeit-Gesetz.**

Fig. 13.

Dabei setzen die Mafszahlen s und t bestimmte Mafseinheiten voraus. Im C-S-G-System (sprich: Centimeter-Sekunden-Gramm-System, Anhang Nr. 1) ist Längeneinheit (LE) das **Centimeter** (= $^1/_{100}$ Meter,

Anh. 1.

[1]) Der physikalische Gebrauch des Wortes „Weg“ weicht manchmal von dem gewöhnlichen ab. Geht z. B. ein Wanderer längs einer Strafse von O über M nach M' und von da nach M zurück, so hat er nach gewöhnlicher Ausdrucksweise den Weg $OMM'M$ zurückgelegt; nach der physikalischen Ausdrucksweise ist, sobald er von M' nach M zurückgekehrt ist, auch jetzt sein „Weg“ nur die Länge des Bogens OM.

Anh. 3. Anhang Nr. 3); **Zeiteinheit** (ZE) ist die **Sekunde mittlerer Son**
Anh. 4. **zeit** (= $^1/_{86400}$ des mittleren Sonnentages, Anhang Nr. 4).

Jede mathematische Beziehung zwischen s und t [von der Form $s =$
Anh. 12. Anhang Nr. 12] kann als ein Weg-Zeit-Gesetz angesehen werden. In der
ist nur ein kleiner Teil solcher denkbaren Beziehungen mehr oder mind
nähernd verwirklicht, z. B. $s = at^2$ (annähernd) im freien Fall und dergl., s
bei Bewegungen auf reibungslosen wagrechten Ebenen (allgemein bei Beweg
gemäfs dem Trägheitsgesetz, § 15), $s = a \sin \alpha t$ bei einfachen Schwing
(§ 12) u. s. f. —

Dabei haben wir in § 2 die Gesetze $s = at^2$ und $s = at$ aus Einzel
achtungen durch Verallgemeinerung (induktiv) gefunden. Ist umgekehrt zuer
Anh. 31. allgemeines Weg-Zeit-Gesetz gegeben, so können wir (deduktiv, Anh. N
durch Einsetzen beliebig vieler spezieller Werte von t (als der unabhängig
änderlichen Gröfse) die zugehörigen speziellen Werte von s (als der abhängig
änderlichen Gröfse) ermitteln, wobei die „Konstanten" (z. B. a in $s = at$
$s = at^2$, ebenso a und α bei $s = a \sin \alpha t$) als gegeben zu betrachten sind. –
den verschiedenen Werten von s lassen sich dann auch die Werte für die ein
Sekunden, Zehntel-, Hundertstelsekunden u. s. f. berechnen, so dafs wir -
Feststellungen 1, 2, 3 vorausgesetzt — schon durch das Weg-Zeit-G
allein die Bewegung vollständig beschreiben könnten.

Tatsächlich fassen wir aber aufser Zeit und Weg auch noch andere I
schaften der Bewegung, namentlich Geschwindigkeit und Beschleuni
an einer Bewegung mehr oder weniger unmittelbar auf, deren Gröfsen abe
aus dem Weg-Zeit-Gesetze ebenfalls durch blofse Rechnung (rein deduktiv
leiten lassen.

§ 4. Geschwindigkeit.

Die Bewegung einer Schnecke nennen wir „langsam", die eines Eilzuges „sch
— Jeder Bewegung kommt eine **Geschwindigkeit** zu, deren Gröfse bemessen
nach der Gröfse des Weges, der binnen bestimmter Zeit zurückgelegt word

Die **Einheit der Geschwindigkeit** (Geschwindigkeitsein
GE) schreiben wir einem Punkte zu, der die **Einheit des Weg**
der **Einheit der Zeit** zurücklegt. Im C-S-G-System wird als 1 G
Geschwindigkeit eines Punktes gewählt, welcher **1 cm in 1 sec** (1 cm pe
zurücklegt[1]), also z. B. die Geschwindigkeit des Punktes nach F

Über die Abhängigkeit der Gröfse jeder anderen Geschwindigkeit vo
Gröfsen des Weges und der Zeit setzen wir allgemein fest:

1. Legt ein Punkt 2, 3 ... s cm in 1 sec zurück, so ist
Geschwindigkeit 2, 3 ... s GE.

[1]) Ein kurzer Name für diese GE wäre **Cel** (— von *celeritas*, woher auch die B
nung c, vorzugsweise für *constante* Geschwindigkeit) nach Analogie von Dyn (§ 16
(§ 22) u. dergl.; weniger bequem Secundencentimeter nach Analogie von Kilog
meter u. dergl. — Allgemein bezeichnet man eine *variable* (oder konstante) Geschw
keit mit v; das Merkwort *velocitas* ist übrigens sprachlich völlig gleichbedeutend mit *cel*
Das in der gewöhnlichen Sprache als mit „Geschwindigkeit" gleichbedeutend gebr
Wort „Schnelligkeit" ist in der Physik nicht gebräuchlich.

2. Legt ein Punkt die s cm in 2, 3 ... t sec zurück, so ist seine **schwindigkeit** $c = \frac{s}{2}$, $c = \frac{s}{3} \cdots c = \frac{s}{t}$ GE. Aus dieser Gleichung für die **konstante Geschwindigkeit** $c = \frac{s}{t}$ folgt: $s = ct$, $t = \frac{s}{c}$; **le** drei Gleichungen in Worten!

Man pflegt häufig abkürzend zu sagen: 1. Geschwindigkeit ist der **Weg in** **r Zeiteinheit.** 2. Geschwindigkeit ist **Weg dividiert durch Zeit.** Eigentlich **meint** sind in diesen Fällen (und in allen ähnlichen der Geometrie und der **hysik)** die Beziehungen zwischen den Mafszahlen. So z. B. besagt der Satz 1: **ie Mafszahl** der Geschwindigkeit ist gleich der Mafszahl des in der Zeiteinheit **rückgelegten** Weges. Dabei stimmt die Gleichung $s = ct$ der Form nach überein **it** der Gleichung $s = at$, welche im vorigen Paragraphen als Weg-Zeit-Gesetz **ir** die gleichförmige Bewegung bezeichnet worden ist. Die Gröfse a war **ort** wirklich die Mafszahl des in der ersten und ebenso in jeder folgenden Sekunde **urückgelegten** Weges; die Linien-Gröfse a ist also mafszahlengleich mit der **leschwindigkeits**-Gröfse c. Die Mafseinheiten sind dagegen verschieden, **nd** die Gleichung $c = a$ sagt nur: Die Geschwindigkeit enthält ebenso viele **eschwindigkeitseinheiten**, wie der in einer Sekunde zurückgelegte Weg Längeneinheiten enthält; welches denn auch erst der vollständige Sinn des obigen abgekürzten Satzes 1 ist.

Ähnliches gilt von dem abgekürzten Satze 2; insbesondere ist es (nach welchen Sätzen über das Dividieren „benannter Zahlen?") unmöglich, den Weg selbst durch die Zeit selbst zu dividieren. — Dies ist namentlich auch festzuhalten, wenn für die Geschwindigkeits-**Einheit** selbst die **Dimensions**bezeichnung $\frac{cm}{sec}$ oder **cm sec**$^{-1}$ benutzt wird (ähnlich wie man die Flächeneinheit durch cm^2, die Volumeinheit durch cm^3 symbolisiert — vergl. math. Anhang Nr. 6, 7). Anh. 6, 7.

Für sehr grofse Geschwindigkeiten empfehlen sich auch andere Einheiten statt 1 cm sec^{-1}. So wird die Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges gemessen nach der Geschwindigkeit eines Punktes, der in je einer Stunde 1 km zurücklegt, die zu bezeichnen ist durch 1 km h^{-1}. So ist die durchschnittliche (nicht zu verwechseln mit der „mittleren", s. u.) Geschwindigkeit eines Lastzuges 30 bis 50 km h^{-1}, die gröfste eines Eilzuges 90 km h^{-1}. In gleicher Weise gelten die Geschwindigkeitsgröfsen einiger annähernd gleichförmiger Bewegungen nach LA 2. LA 2.

Die bisherigen Definitionen und Gleichungen haben alle stillschweigend eine gleichförmige Bewegung vorausgesetzt. Die weitaus meisten der wirklich vorkommenden (und sonst noch denkbaren) Bewegungen sind **ungleichförmig** (Bewegung eines Eisenbahnzuges beim Ausfahren aus der Station, auf der Strecke, beim Einfahren in die nächste Station). Mafsformeln der Geschwindigkeit für solche ungleichförmigen Bewegungen lassen sich, anknüpfend an die für die konstante Geschwindigkeit, gewinnen durch Einführung der Begriffe „**mittlere Geschwindigkeit** innerhalb einer bestimmten Zeitstrecke" und „**Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkte (augenblickliche Geschwindigkeit)**"; nämlich so:

Hat ein Punkt binnen t sec längs seiner Bahn $OM = s$ cm (Fig. 13) und binnen t' sec den Weg $OM' = s'$ cm zurückgelegt, so

entfällt auf die Zeitstrecke $\tau = (t' - t)$ sec die Wegstrecke $\sigma = (s' - s)$ cm und seine Geschwindigkeit wäre, wenn überall konstant, zu messen durch $c = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{s' - s}{t' - t}$ cm sec^{-1}. Eben diese Gröfse wählen wir aber auch für alle (ungleichförmigen oder gleichförmigen) Bewegungen des Punktes von M bis M' als Mafszahl seiner

mittleren Geschwindigkeit (für die Zeitstrecke von t bis t'):

$$v_m = \frac{s' - s}{t' - t}.$$

Mittels dieser Gleichung läfst sich eine um so genauere Beschreibung der wirklichen Bewegung des Punktes geben, für je mehr und je kleinere Zeitstrecken $(t' - t), (t'' - t') \ldots$ die zugehörigen Wegstrecken $(s' - s), (s'' - s') \ldots$ bekannt sind (LA 3, 4). — Eine vollkommen genaue Angabe der Geschwindigkeit, mit welcher der bewegte Punkt den Punkt M der Bahn durchläuft, erhält man erst durch folgende Methode (vergl. math. Anhang Nr. 13):

LA 3, 4.
Anh. 13.

Wir wählen den Punkt M' unendlich nahe bei M. Es wird dann sowohl die Wegstrecke $(s' - s)$ wie die Zeitstrecke $(t' - t)$ unendlich klein, und es ergibt sich folgende Mafszahl für die nach Verlauf von t sec erreichte

augenblickliche Geschwindigkeit (im Zeitpunkte t):

$$v = \frac{s' - s}{t' - t} \text{ für } t' = t.$$

Wie auf Grund dieser Definitionsgleichung die Geschwindigkeit v in jedem beliebigen Zeitpunkte für je eine Bewegung mit gegebenem Weg-Zeit-Gesetz sich ermitteln läfst, wird zunächst ersichtlich aus folgenden zwei Anwendungen:

1. Für $s = at$ ist $v_m = \frac{at' - at}{t' - t} = a$. D. h.: Bei Bewegungen nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at$ ist die Mafszahl der Geschwindigkeit gleich der Mafszahl des in je einer Sekunde zurückgelegten Weges. — Die Geschwindigkeit $v = a$ ist ferner in diesem (und nur in diesem) Falle unabhängig von t, d. h. sie ist zu allen Zeiten die gleiche; also: die Bewegung nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at$ ist **gleichförmig**, oder: von **konstanter Geschwindigkeit** $v = c = a$. —

2. Für $s = at^2$ ist $v_m = \frac{at'^2 - at^2}{t' - t} = a(t' + t)$. Für $t' = t$ wird somit $v = 2at$. Die Geschwindigkeit dieser Bewegungen wächst also gleichmäfsig (einfach proportional) mit der Zeit; die Bewegungen nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at^2$ sind **gleichmäfsig beschleunigt**, oder: von **konstanter Beschleunigung**.

§ 5. Beschleunigung.

Folgen wir dem auf der geneigten Schienenbahn herabrollenden Wagen mit dem Blicke, so fällt uns nicht nur seine jeweilige Geschwindigkeit auf, sondern auch, dafs diese Geschwindigkeit in bestimmtem Mafse wächst, oder dafs er eine bestimmte **Beschleunigung** hat. Und zwar erkennen wir, dafs bei starker

:hst die Geschwindigkeit eines Punktes in 1 sec um 2, 3 ... V GE, ıeine Beschleunigung 2, 3 ... V BE; gewinnt er den Gegkeitszuwachs V statt in 1 sec erst in t sec, so ist seine

ıte) Beschleunigung $b = \frac{V}{t}$ BE; also $V = bt, t = \frac{V}{b}$ (in Worten!).

für die Beschleunigung eine Dimensionsbezeichnung analog der der Gekeit zu bekommen, beachte man, daſs in $b = \frac{V}{t}$ der Zähler V als Gekeitszuwachs selbst schon von der Dimension einer Geschwindigkeit, also st; die Beschleunigung hat sonach die Dimension $\frac{\text{cm sec}^{-1}}{\text{sec}} = \text{cm sec}^{-2}$. Benutzung dieses Symbols lautet obige Definition noch kürzer: **Im tem ist 1 BE = 1 cm sec⁻²**.

Anfänger hüte sich, die Begriffe Geschwindigkeit und Beschleu- miteinander zu verwechseln. Es kommt z. B. die Beschleunigung einem Punkte zu, der am Anfang einer Sekunde die Geschwindigkeit 0, dieser Sekunde die Geschwindigkeit 1 cm sec^{-1} hat; aber auch wenn ıer Sekunde die Geschwindigkeit z. B. von 5 auf 6 cm sec^{-1} oder von 1001 cm sec^{-1} wächst, ist die Beschleunigung 1 cm sec^{-2}. Desgleichen ›eschleunigung eines Punktes 981 cm sec^{-2}, gleichviel ob seine Gekeit binnen 1 sec von 0 auf 981, oder von 1 auf 982, oder von 981 auf ıec^{-1}, oder von 981 000 auf 981 981 cm sec^{-1} ... wächst.

bisherigen Definitionen und Gleichungen haben stillschweigend eine ıſsig beschleunigte Bewegung vorausgesetzt. Bei ungleichmäſsig nigten Bewegungen ergeben sich analog den Gleichungen für v_m und v Iaſsformeln (Anh. 13) für die

Anh. 13.

$$\textbf{mittlere Beschleunigung } w_m = \frac{v' - v}{t' - t},$$

Anwendung zunächst auf die im § 4 betrachteten zwei Bewegungen:

1. Für $s = at$ war $v = a$, somit ist $w_m = \frac{a - a}{t' - t} = 0$ und daher auch $w = 0$; d. h. **die gleichförmigen Bewegungen oder die Bewegungen von konstanter Geschwindigkeit haben die Beschleunigung Null.**

2. Für $s = at^2$ war $v = 2at$ und daher ist $w_m = \frac{2at' - 2at}{t' - t} = 2a$ und also auch $w = 2a$; d. h. bei Bewegungen mit dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at^2$ ist die **Beschleunigung konstant** (von der Zeit t unabhängig). Da diese Bewegungen für die ganze Physik von besonderer Bedeutung sind, so behandeln wir sie im folgenden Paragraphen noch einmal im Zusammenhange.

LA 6. 3. Die Bewegungen mit anderen Weg-Zeit-Gesetzen, z. B. $s = at^3$ (LA 6), $s = a \sin \alpha t$ (§ 12) ergeben auch den Wert von w noch **abhängig** von t, d. h. sie zeigen zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Beschleunigungen; u. sw. sind **alle** Bewegungen aufser denen nach den Weg-Zeit-Gesetzen $s = at$ und

LA 5. $s = at^2$ (und dem verallgemeinerten $s = at^2 + Ct + S$, LA 5) **ungleichmäfsig beschleunigt.** — Sie lassen sich weiter unterscheiden in solche, bei denen die Beschleunigung wächst, und solche, bei denen sie **abnimmt**. Auch die Gesetze einer solchen Zu- bezw. Abnahme können wieder sehr mannigfaltige sein. — Insbesondere nicht mit dem Begriff einer positiven, aber abnehmenden Beschleunigung ist zu verwechseln der Begriff der

Verzögerung = Abnahme der Geschwindigkeit. Ihre absolute Gröfse wird gemessen durch die Anzahl der GE, um welche sich die Geschwindigkeit in je 1 sec vermindert.

Inwiefern Verzögerung = negative Beschleunigung, vergl. § 8. — Ein Beispiel einer verzögerten Bewegung gibt die Bewegung eines über eine schiefe Ebene (auch eine krumme Bahn, vergl. Fig. 4) nach einmaligem Anstofs hinanrollenden Wagens oder die eines vertikal aufwärts geworfenen Körpers (§ 11).

§ 6. Gleichmäfsig beschleunigte Bewegungen
(Zusammenfassung).

Durch Anwendung der allgemeinen Formeln für v und w auf das specielle Weg-Zeit-Gesetz $s = at^2$ erhielten wir in den beiden vorigen Paragraphen die

Anh. 13. natürliche Reihe von Beziehungen (math. Anhang Nr. 13):

$$s = at^2 \ldots (1a) \qquad v = 2at \ldots (2a) \qquad w = 2a \ldots (3).$$

Die Gleichung (3) besagt, dafs **Bewegungen, bei denen der Weg s mit dem Quadrate der Zeit t wächst, eine konstante Beschleunigung** haben, deren **Mafszahl b das Doppelte der Mafszahl a** des **Weges der 1. Sek.** (kurz des „Anfangsweges") ist; also

$$2a = b \quad \text{oder} \quad a = \frac{b}{2}.$$

Wenn wir daher in die beiden obigen Gl. (1 a) und (2 a) statt der konstanten Gröfse a die konstante Gröfse b einführen, so erhalten wir für alle beliebigen gleichmäfsig beschleunigten Bewegungen die beiden Hauptgleichungen:

Gesamtweg $s = \frac{b}{2}t^2$ (1 b), **Endgeschwindigkeit** $v = bt$ (2 b); in Worten!

Da diese zwei Gleichungen die vier Gröfsen t, b, v, s enthalten, so ergeben sich 12 Aufgaben (LA 7); besonders fruchtbar werden (§§ 22, 23) die Beziehungen: LA 7.

$$s = \frac{v^2}{2b} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{2bs} \quad \text{(in Worten!)}$$

Da auch der freie Fall nach dem Gesetze $s = at^2$ erfolgt (§ 2), wo für alle Körper derselbe Wert $a \neq 500\,\text{cm} = \mathbf{5\,m}$ gilt, so ist speziell für den freien Fall $b \neq 1000\,\text{cm}\,\text{sec}^{-2} = \mathbf{10\,m\,sec^{-2}}$ ein annähernder Wert der **„Schwerebeschleunigung"** g (*gravitas*).

Für Orte mittlerer Breite ergaben Pendelbeobachtungen (§ 12, 33):

$$g = \mathbf{981\,cm\,sec^{-2}} \neq 1000\,\text{cm}\,\text{sec}^{-2} = 10\,\text{m}\,\text{sec}^{-2}.$$

Somit gelten speziell beim freien Fall die Gleichungen für die

Fallstrecke $s = \frac{g}{2}t^2$ (1 c), **Fallgeschwindigkeit** $v = gt$ (2 c); in Worten!

Da ferner auch der Fall an der schiefen Ebene nach dem Gesetze $s = a_s t^2$ erfolgt (§ 2, Versuch 2), so ist auch diese Bewegung gleichmäfsig beschleunigt; und zwar ist für sie

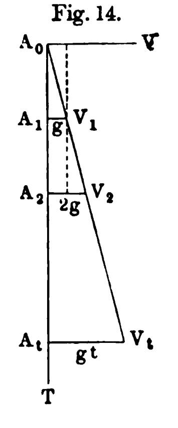
$$b = 2a_s = g_s = g \sin \varepsilon = g \cdot \frac{h}{l} \quad \ldots \quad (4)$$

Als Folgerungen hieraus verschiedene hübsche Beziehungen, z. B. das Gesetz vom „Sehnenfall" (LA 8). — LA 8.

Ergänzung zum *Geschichtlichen.* Nach § 2 gingen bei Galilei der wirklichen Durchführung seiner klassischen Versuche an der Fallrinne mehrere einstweilen noch unbewiesene Vermutungen voraus. Es werde nun nachträglich von den drei wichtigsten gezeigt (und zwar in der uns heute, noch nicht aber Galilei geläufigen Formelsprache), dafs sie mit den Tatsachen im Einklang waren:

1. Aus dem vorerst nur vermuteten Gesetze $v = gt$ leitete Galilei das durch seine Versuche erst direkt zu bestätigende Gesetz $s = \frac{1}{2}gt^2$ ab durch folgende graphische Methode: Die Fallzeiten 1, 2 . . . sec seien längs der Geraden A_0T (Fig. 14) durch die Strecken A_0A_1, $A_0A_2 \ldots$, die Fallgeschwindigkeiten g, $2g$ . . . durch die zu A_0T normalen Strecken A_1V_1, $A_2V_2 \ldots$ versinnlicht. Hätte die Endgeschwindigkeit g der ersten Sekunde schon zu Beginn und während der ganzen ersten Sekunde bestanden und wäre also die Bewegung gleichförmig erfolgt, so wäre der zurückgelegte Weg (nach der Gleichung $s = ct$) gleich $g \cdot 1$ und somit dargestellt durch das ganze Rechteck aus A_0A_1 und A_1V_1. Da aber nach der Annahme $v = gt$ die Geschwindigkeit vom Anfangswerte nur allmählich, und zwar in gleichmäfsigem Wachsen bis zum Endwerte g zunahm, so wird der zurückgelegte Weg nur durch das halbe Rechteck aus A_0A_1 und A_1V_1, d. i. durch das Dreieck $A_0A_1V_1$ dargestellt. Ähnlich der Weg während einer späteren Sekunde durch je ein Trapez, z. B. $A_1A_2V_2V_1$; der ganze Weg während t sec also wieder durch das Dreieck $A_0A_tV_t$, dessen Fläche gleich ist $\frac{1}{2}t \cdot gt = \frac{g}{2}t^2$. — Dieselbe Gleichung ergibt sich auch arithmetisch (LA 9). LA 9.

Fig. 14.



2. Indem Galilei das Gesetz $s = \frac{g}{2} t^2$ für die frei fallenden Körper als durch die Versuche mit den an schiefen Ebenen rollenden Kugeln erwiesen annahm, hatte er stillschweigend mit angenommen, daſs beiderlei Bewegungen einander mechanisch ähnlich seien. In der Tat gilt dies von allen gleichmäſsig beschleunigten Bewegungen, indem je eine solche durch den Wert ihrer **„charakteristischen Beschleunigung"** b bestimmt und von allen übrigen unterschieden ist. Sind z. B. für zwei solche Bewegungen die Beschleunigungen b_1 und b_2, so entsprechen je einem und demselben Werte von t die Beziehungen:

$$s_1 = \frac{b_1}{2} t^2 \qquad s_2 = \frac{b_2}{2} t^2 \qquad \text{also} \quad s_1 : s_2 = b_1 : b_2 \quad . \; . \; . \quad (5) \quad \text{(in Worten!)}$$

$$\text{und} \quad v_1 = b_1 t \qquad v_2 = b_2 t \qquad \text{also} \quad v_1 : v_2 = b_1 : b_2 \quad . \; . \; . \quad (6) \quad \text{(in Worten!)}$$

3. Zur Beziehung $a_s = a \sin s$ oder $a_s : a = h : l$, aus welcher sich alle übrigen Beziehungen zwischen freiem Fall und schiefen Ebenen ableiten lassen, gelangte Galilei, indem er von dem Satze ausging, daſs ein Körper beim Durchfallen derselben Niveaudifferenz im freien Falle und auf einer schiefen Ebene (auch auf einem Kreisbogen, wie z. B. ein Pendelkörper, vergl. Fig. 75, S. 103) dieselbe Endgeschwindigkeit erlange. Dieser Satz ergibt sich sofort als ein besonderer Fall der Gleichung $v = \sqrt{2 b s}$, nämlich:

$$v_s = \sqrt{2 g_s l} = \sqrt{2 g \cdot \frac{h}{l} \cdot l} = \sqrt{2 g h} = v.$$

Merkwürdig ist, daſs Galilei jenen Satz in den *„Discorsi"* noch nicht aus allgemeineren Sätzen ableitete (erst von Galileis Nachfolgern wurde er aus dem Satze vom Kräfteparallelogramm abgeleitet, § 17), sondern er scheint ihn genial erschaut zu haben in Übereinstimmung mit den Überlegungen, welche wir heute als energetische (§ 23, S. 102) bezeichnen.

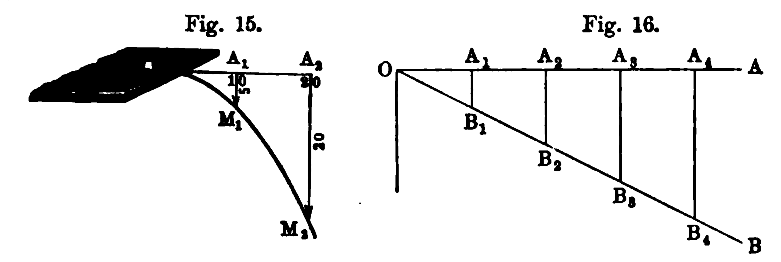
§ 7. Bewegung geworfener Körper.

Geschichtliches. Wiewohl man gewiſs von jeher, z. B. beim Ballspiele, beobachtet hatte, daſs ein in wagerechter oder schiefer Richtung geworfener Ball eine gewisse krumme Linie beschreibt (deren Gestalt und Gröſsenverhältnisse den Spieler beim Werfen und Auffangen der Bälle sogar einigermaſsen geläufig sein muſsten), so war doch die theoretische Beschreibung solcher Wurfbewegungen bis auf Galilei so sehr im Dunkeln, daſs noch in einem Buche vom Jahre 1561 behauptet wurde, eine Kanonenkugel gehe so lange in gerader Linie fort, bis ihre Geschwindigkeit ganz erschöpft sei, worauf sie dann lotrecht herabfalle. Etwas später wurde behauptet, der Weg einer Kanonenkugel sei zuerst eine gerade Linie, dann ein Kreisbogen und zuletzt falle sie lotrecht herab.

Galilei schloſs an die Darstellung der Bewegung frei und an schiefen Ebenen fallender Körper (Dritter Tag der *Discorsi*) unmittelbar die der Bewegung geworfener Körper (Vierter Tag der *Discorsi*). Das wesentlich Neue seiner Methode war, die wirklich vorkommenden Bewegungen in Gedanken zu „zerlegen" in eine gleichförmige Bewegung nach der Richtung der dem geworfenen Körper erteilten „Anfangsgeschwindigkeit" und in eine gleichmäſsig beschleunigte in der Richtung des freien Falles. —

Als „geworfen" bezeichnet die Physik nicht nur z. B. einen Stein, dem wir mit der Hand eine Bewegung erteilen und den wir dann loslassen, sondern

ch die Bewegung eines Projektiles, nachdem es das Geschütz verlassen hat; die ewegung einer Kugel, welche über eine wagrechte oder schiefe Tischplatte gellt war und über deren Rand hinabstürzt; die Wassertropfen des Strahles, welcher is dem Spritzenschlauche strömt u. dgl. m. Dabei ist z. B. die Bewegung des ojektiles „Wurfbewegung" von dem Zeitpunkte an, da es den Lauf verssen hat und nicht mehr dem Drucke der Pulvergase, sondern nur noch der chwerkraft unterworfen ist. — Ohne jetzt schon auf diese „Kräfte" („dynaisch") einzugehen, können wir nach GALILEIS Methode die Bewegung selbst auf lgende Art (rein „phoronomisch") beschreiben, und zwar zunächst den



Horizontalen Wurf. War z. B. eine Kugel über eine wagrechte ischplatte in gerader Linie gerollt (Fig. 15), so beschreibt sie vom ande des Tisches an eine krumme Linie in der durch jene Gerade eineutig bestimmten vertikalen Ebene, der „Wurfebene". Von jener agrechten Geraden als Tangente zweigt die krumme Bahn nach abärts so ab, daſs ihre konkave Seite nach unten gewendet ist.

Würde die Kugel sogleich vom Rande an längs einer Geraden, also unter inem bestimmten endlichen Winkel AOB (Fig. 16), von der Horizontalen bzweigen, so kämen auf die wagrechten Strecken OA_1, OA_2, AO_3 . . . (Fig. 16) ie ihnen proportionalen lotrechten Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 . . . Schon in flüchtiger Blick auf die von geworfenen Körpern wirklich durchlaufenen rummen Bahnen zeigt dagegen, daſs auf die wagrechten Strecken OA_1, OA_2 . . . Fig. 15) Senkungen A_1M_1, A_2M_2 . . . kommen, welche in rascherem Verhältnis ls jene bei der Geraden $AB_1B_2B_3$ . . . wachsen. — Es liegt nahe, zu vermuten, daſs diese Senkungen oder Fallstrecken bei geworfenen Körpern die gleichen seien wie bei frei fallenden Körpern. Diese Vermutung läſst sich bestätigen durch

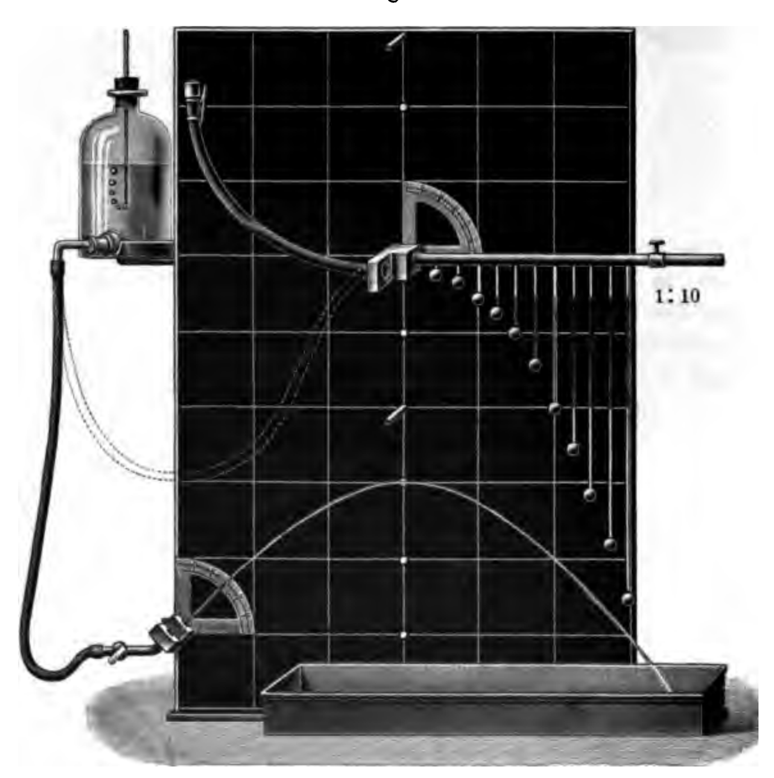
Versuche (Fig. 17 a. f. S.): Eine Reihe von Loten sind (an einer in einer geschlitzten Röhre ausziehbaren Spiralfeder) so angebracht, daſs die oberen Enden eine (wagrechte oder schiefe) Gerade bilden, und die Lote bald kleinere, bald gröſsere, aber immer untereinander gleiche Abstände, somit vom Anfang O der Reihe solche Abstände haben, die sich verhalten wie 1 : 2 : 3 . . . Die Lotlängen sind nach dem Verhältnisse 1 : 4 : 9 . . . gewählt, so daſs die Lotkörper in eine nach unten konkave Kurve zu liegen kommen: es ist eine Halbparabel (math. Anh. Nr. 23). — Erteilt man einer Kugel (indem man sie durch eine gekrümmte Röhre herabrollen läſst, oder mittels einer Federkanone . . .) in der Richtung der wagrechten Geraden, von welcher an die Lotlängen gezählt werden, eine entsprechende Anfangsgeschwindigkeit", so hält sich die Kugel an die durch die Lotkörper vorgezeichnete Halbparabel. Sind z. B. die Lotlängen $A_1M_1 = 5$ cm,

Anh. 23.

$A_2M_2 = 20$ cm, $A_3M_3 = 45$ cm . . ., so entsprechen diesen Fallstrecken Fal
von 0,1, 0,2, 0,3 . . . sec; sind dann die Abstände $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 \ldots =$
so bilden die Pendelkörper eine Parabel vom „Parameter" $p = 10$ cm.
die Spiralfeder so weit zusammengeschoben, dafs $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 \ldots =$
sind, so ist für diese steilere Parabel $p = 2{,}5$ cm. Damit die geworfene
sich an die so vorgezeichneten Parabeln hält, müssen die Anfangsgeschw
I.A 11. keiten 100, bezw. 50 cmsec^{-1} betragen (LA 11). — Parabolische Wasserst

Wird die Spiralfeder schief oder (nahezu) lotrecht gestellt, so bild
Pendelkörper die dem „schiefen Wurf" entsprechenden Parabeln, bezw. (n

Fig. 17.



die dem „vertikalen Wurf" entsprechende vertikale Gerade. Beachte in
letzten Fällen die Symmetrie des auf- und absteigenden Astes der
— Konstruktion von Wurfparabeln bei gegebener Anfangsgeschwindigkei
14, 15. Richtung (LA 14, 15). —

So bilden die Wurfbewegungen ein erstes Beispiel für mehrere allgem
teils phoronomische, teils dynamische Begriffe und Sätze. Phoronomisch
Gestalt der Bahn (einschliefslich „Richtung", „Krümmung", folg.
graph), die Zerlegung und Zusammensetzung von Bewegu
(§ 10). Dynamische: das Trägheitsprinzip (§ 15), das Unabhängig
prinzip (§ 15).

}. Gestalt der Bahn. — Richtung. Krümmung. — Vektoren der Bewegung.

Geraden bewegen sich alle Punkte eines frei fallenden (vertikal ge-
ı) oder an schiefer Ebene gleitenden Körpers, eines auf geraden Schienen
n Eisenbahnzuges (mit Ausnahme der Punkte der Räder, welche „Zykloiden",
. 24, beschreiben, sowie mehrerer Teile der Lokomotive); in Parabeln Anh. 24.
sich Körper, welche in horizontaler oder schiefer Richtung geworfen
in Kreisen bewegen sich die Teilchen eines Schleifsteines, eines
;rades; in Ellipsen die Mittelpunkte der Planeten in Bezug auf Sonne
sterne. . . . Sehr verwickelt sind die Bahnen der Planeten in Bezug auf
d Fixsterne, die Bewegung eines Punktes der Erdoberfläche oder des Erd-
mit Rücksicht auf Drehung und Umlauf der Erde um die Sonne, eines
der Mondoberfläche u. s. f. — um so mehr die Bewegung eines Punktes
ıigenen Leibes während einer Turnstunde (in Bezug auf das Zimmer, den
raum . . .) u. dergl. m.

ısichtlich der Frage, ob alle geometrisch denkbaren Linien auch
n" für bewegte Punkte werden können, ist zu unterscheiden, ob das
he als ein „materieller Punkt" voraus-
wird oder nur als ein unkörperlicher Licht-
attenfleck u. dergl. — Ein **materieller** Punkt
h nur 1. in einer überall zusammenhängenden
ı) Linie bewegen, welche 2. keine scharfen
at (keine Unstetigkeiten der Richtung).
in der Natur gegebenen Kräften wäre die
g eines materiellen Punktes z. B. längs der
BC (Fig. 18) höchstens dann verträglich, wenn
schwindigkeit bis zur Ecke B hin sich auf
ig verkleinert und von der Ecke an wieder
an stetig wächst (so in dem Grenzfall eines
geworfenen Körpers, bei welchem der höchste
ne Art Ecke der auf- und absteigenden Bahn
. — Dagegen kann ein Licht- oder Schatten-
e er z. B. in dem Versuch nach Fig. 30,
s Bewegliches dient) von dem Schirm, auf
ich längs $1, 2$ (Fig. 19) bewegt, überspringen auf einen dahinter stehen-
rm $2, 3$. Desgleichen springt ein Spiegel- oder Linsenbild (§§ 103, 107) im
sogar von $+\infty$ nach $-\infty$. — Auf einem geknickten Schirm kann auch
tetigkeit in der Richtung eintreten. Mit Rücksicht auf letztere Beispiele
ir für die uns einstweilen noch allein beschäftigende rein phoronomische
ıng der Bewegungen allgemein sagen:

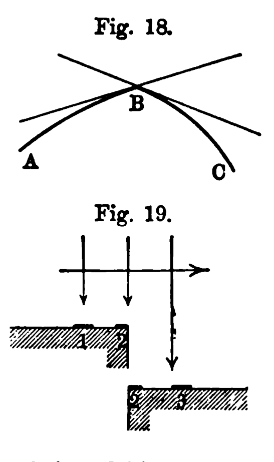


Fig. 18. Fig. 19.

le erdenklichen Linien können **Bahnen** für die (wirklichen
ofs gedachten) Bewegungen von Punkten sein.

e Bahn kann in zweierlei Sinn durchlaufen werden (z. B. eine Eisen-
:ke hin und zurück). Ungenau wird statt vom „Sinne" einer Bewegung
ı deren „Richtung" („Richtung" Wien—Graz, „Richtung" Graz—Wien)
Genau sollte der Ausdruck „Richtung" nur verwendet werden wie folgt:

Mit der Gestalt der Bahn eines Beweglichen ist auch für jeden Punkt der Bahn die **Richtung** des Linienelementes und hiermit die Richtung der Bewegung des Beweglichen in diesem Bahnelement gegeben. Ist nämlich die Bahn eine Gerade, so ist die Richtung der Bewegung an jeder Stelle die Richtung der **Geraden** selbst. Da sich ferner der Begriff der „Richtung" von der Geraden auf krumme Linien dadurch übertragen läfst, dafs man sich in jedem Punkte der krummen Linie die Tangente gelegt denkt (Anhang Nr. 13), so bezeichnet man als die Richtung der Bewegung, welche dem Beweglichen beim Passieren des Tangierungspunktes zukommt, die Richtung dieser **Tangente** selbst (Fig. 13).

Anh. 13.

Die Bewegungen in geraden Bahnen sind Bewegungen von **konstanter Richtung**, die Bewegungen in krummer Bahn sind Bewegungen von **veränderlicher Richtung.**

Je nachdem schon nach kürzerem oder längerem Bahnstücke Richtungsänderungen von bestimmter Gröfse (gemessen durch den Winkel zwischen den Tangenten am Anfangs- und am Endpunkte des Bahnstückes) auftreten, heifst dieses Bahnstück mehr oder weniger **gekrümmt.** (Fig. 13, S. 11. — Über das Mafs der Krümmung vergl. Anhang Nr. 26.)

Anh. 26.

Die auf die Geschwindigkeit und auf die Richtung bezüglichen Gröfsen zeigen zu einander gewisse Analogien, indem einander entsprechen:

Phoronomisch:	Geometrisch:
1. Das **Weg-Zeit-Gesetz,** als Beziehung zwischen s und t [$s = f(t)$].	1. Die **Gleichung der Linie als** [Be]ziehung zwischen y u. x [$y = F($
2. Die **Geschwindigkeit,** gemessen durch $v = \frac{s' - s}{t' - t}$ für $t' = t$ (konstante, veränderliche Geschwindigkeit).	2. Die **Richtung,** gegeben durch $tg\, \tau = \frac{y' - y}{x' - x}$ für $x' = x$ (konsta[nte,] veränderliche Richtung).
3. Die **Beschleunigung** (kleinere, gröfsere; konstante, veränderliche).	3. Die **Krümmung** (kleinere, gröfse[re;] konstante, veränderliche).

Vektoren der Bewegung. — Der Abstand zweier Punkte A und B h als solcher zwar eine **Gröfse,** aber noch keine Richtung. Aber schon wenn w uns einen Punkt M von A nach B binnen beliebiger Zeit (gleichförmig oder u gleichförmig) verschoben denken, kommt dieser Verschiebung (Dislokatio als Strecke oder geradliniger „Weg" gedacht) eine **Richtung** zu. — Wir könn ferner die (im § 4 zunächst nur ihrer Gröfse nach bestimmte) Geschwindigke mit dem im vorliegenden Paragraphen entwickelten Begriff der Richtung einer B wegung zu einem einheitlichen Begriffe so verbinden, dafs der Geschwindigke in diesem erweiterten Sinne auch Richtung zukommt; ähnlich wie m sehr häufig bei einer Strecke an ihre Länge und Richtung zugleich denkt.

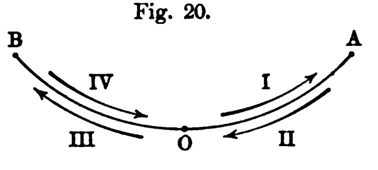
Auf gleiche Weise kommt auch jeder Beschleunigung sowohl Gröfse v Richtung zu.

Alle gerichteten Gröfsen (im Gegensatze zu den richtungslosen Gröfs

oder **Skalengröſsen**) lassen sich sehr zweckmäſsig veranschaulichen durch Pfeile (**Vektoren**, Anhang Nr. 8), deren Richtung direkt die Richtung dieser Gröſsen angibt. Überdies kann die Länge des Pfeiles auch noch direkt die Gröſse von Verschiebungen, dagegen nur nach an sich willkürlichen Maſsstäben auch die von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen angeben. Vergl. z. B. die Pfeile in Fig. 13, S. 11. Anh. 8.

In welcher Weise insbesondere **positive und negative Richtungen** aller dieser Gröſsen unterschieden und miteinander in Einklang gebracht werden können, erhelle aus folgendem Beispiele der Bewegung eines Wägelchens, das auf einer nach oben konkaven Bahn (dem gekrümmten Blechstreifen, Fig. 4, § 2 und Fig. 20) hin- und herrollt, so daſs O der tiefste Punkt eines in vertikaler Ebene liegenden Kreisbogens ist. Drücken die krummen Pfeile zunächst nur den jeweiligen Bewegungs-Sinn aus, so sind überdies folgende **Vektorgröſsen** zu unterscheiden:

Fig. 20.



1. Wege. Werden Wege auf dem Bahnstück rechts von O (von O bis A, in I und II) als positiv gerechnet, so sind die links von O (von O bis B, in III und IV) negativ.

2. Geschwindigkeiten. Wird die Bewegung im Sinne von B über O gegen A (in IV und I) als Vorwärtsbewegung oder als eine Bewegung mit positiver Geschwindigkeit gerechnet, so ist die Rückwärtsbewegung von A über O nach B (in II und III) eine mit negativer Geschwindigkeit (vergl. § 12, Gl. 6).

3. Beschleunigungen. Würde die Bewegung bei wachsender Geschwindigkeit — von deren verschiedenen Vorzeichen zunächst abgesehen — (beim Bergabfahren in II und IV) als positiv beschleunigte gezählt, so wäre die mit abnehmender Geschwindigkeit (beim Berganfahren in I und III) eine mit negativer Beschleunigung. Mit Rücksicht auf (2.) ist aber die Beschleunigung in II negativ, in III positiv zu zählen (vergl. § 12, Gl. 7).

Beachte, daſs die Vorzeichen von Weg (1.) und Beschleunigung (3.) in diesem Beispiele in allen vier Vierteln der Bewegung einander entgegengesetzt sind. — Wie wären die Vorzeichen von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung auf einer nach oben konvexen Bahn (z. B. wenn ein mit hinreichender Geschwindigkeit herankommender Wagen über eine gewölbte Brücke fährt)? — Allgemein gilt:

Da wir im § 5 Bewegungen mit abnehmender Geschwindigkeit als verzögerte bezeichnet haben, so sind **Verzögerungen** als **negative Beschleunigungen** und die Beschleunigungen in dem (im § 5 zunächst allein vorausgesetzten) engeren Sinne der Zunahme einer Geschwindigkeit als positive Beschleunigungen zu bezeichnen.

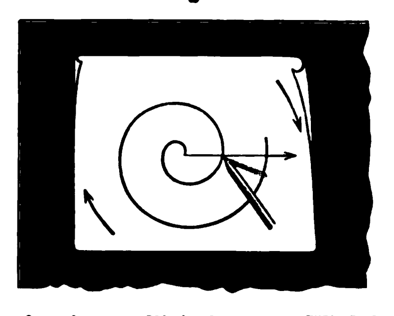
§ 9. Relative und absolute Bewegung.

In den bisherigen Betrachtungen wurde von der Bewegung bezw. Ruhe eines Punktes oder Körpers so gesprochen, als wäre sie eine ihm selbständig zukommende („absolute") Eigenschaft. Bei einiger Überlegung werden wir dagegen bald inne, daſs meistens (oder immer?, Anhang Nr. 41) ein zweiter Körper, der **„Bezugskörper"** (ein „physisches Koordinatensystem", vergl. Anhang Nr. 11), Anh. 41. Anh. 11.

ausdrücklich oder stillschweigend mitgedacht wird, in Bezug auf welchen die **relative** Bewegung oder Ruhe stattfindet; so in folgenden Beispielen:

1. Wenn z. B. die Bewegungen nach Fig. 7 bis 9 (S. 10) als geradlinige gleichförmige bezeichnet wurden, so hiefs das, dafs sich die Bleistiftspitze in Bezug auf das Papier geradlinig gleichförmig bewegt habe; ebenso bei allen Nachbildungen von Bewegungen auf dem Papier oder der Schreibtafel. Für den wirklichen freien Fall, die Wurfbewegung u. dergl. ist Bezugskörper die Erde, für die Bewegung des Wägelchens (Figg. 1, 6, 36, 37, 38 . . .) das Schienenpaar (und die Erde . .) u. s. f.

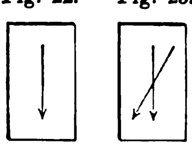
Fig. 21.



2. Solange bei jenen Bewegungen nach Fig. 7 bis 9 das Papier in Bezug auf die Tischplatte in Ruhe ist, hat sich die Bleistiftspitze ebenso wie in Bezug auf das Papier auch in Bezug auf die Tischplatte gleichförmig geradlinig bewegt. Wird dagegen das Papier um eine durch den Anfangspunkt gehende zur Papierfläche normale Gerade (Fig. 21) gleichförmig gedreht, so zeichnet die Bleistiftspitze, indem sie in Bezug auf die Tischplatte sich immer noch gleichförmig geradlinig bewegt, auf die Papierfläche eine Spirale. (Eine solche Spirale erhalten wir auch, wenn wir uns die Fig. 7 auf dem Lineale vorzeichnen und, während wir den Bleistift in Bezug auf das Lineal bewegen, das Lineal in Bezug auf das Papier entsprechend drehen.)

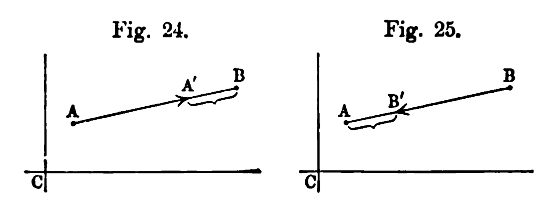
Ähnlich: Fallen Regentropfen lotrecht zur Erde, so erzeugen sie an den Fenstern eines ruhenden Eisenbahnzuges lotrechte Streifen (Fig. 22); bewegt sich der Zug mit konstanter Geschwindigkeit, so sind die Streifen schief (Fig. 23). Die gleichen schiefen Streifen an den Fensterscheiben zeigen sich aber auch, wenn der Eisenbahnzug ruhig steht, die Tropfen aber in schiefer Richtung zur Erde niedergehen, falls nämlich zur Fallbewegung noch eine seitliche Bewegung infolge eines Windes kommt, welche entgegengesetzte Richtung, aber gleiche Geschwindigkeit wie früher der Eisenbahnzug hat. — Das Ergebnis, dafs die Bewegung des Eisenbahnzuges (A) ersetzbar ist durch eine entgegengesetzte Bewegung der Tropfen (B), läfst sich allgemeiner so ausdrücken:

Fig. 22. Fig. 23.



Ist A in Bezug auf C (Fig. 24) in Bewegung, B in Bezug auf C in Ruhe, so ist die relative Bewegung von A in Bezug auf B die gleiche, wie wenn A in Bezug auf C in Ruhe wäre (Fig. 25) und B eine der früheren Bewegung von A gleiche entgegengesetzte Bewegung hätte.

Fig. 24. Fig. 25.



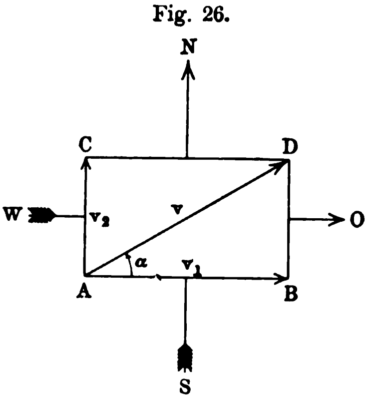
Insoweit für die Zwecke einer Betrachtung blofs die relative Lage von A und B in Betracht kommt, sind die Bewegungen nach Fig. 24 und 25 vollständig gleichwertig; nicht mehr aber, wenn die Lagen A, B und C in Betracht gezogen

werden sollen. — So bei den bekannten Täuschungen, dafs uns die Brücke stromaufwärts zu schwimmen, die Karussellwände sich zu drehen scheinen, wobei die weitere Umgebung (Flufsufer, Baugrund des Karussells und dessen sonstige Umgebung) den mehr oder weniger deutlich mitgedachten Bezugskörper C darstellen. — Inwieweit der Gegensatz zwischen der vor- und nachkopernikanischen Auffassung, z. B. eines Sonnenaufganges, dem Schema der Figuren 24 und 25 entspricht, vergl. § 179 ff.

§ 10. Zerlegung und Zusammensetzung der Bewegungen.

Befinde ich mich in der Ecke A des Zimmers $ABDC$ (Fig. 26), so ist es mir offenbar unmöglich, mich zugleich längs AB und längs AC zu bewegen; der Begriff einer „Zusammensetzung zweier (oder mehrerer) Bewegungen" würde, so gefafst, eine Unverträglichkeit einschliefsen (nämlich die, dafs derselbe Körper an zwei verschiedenen Orten gleichzeitig sein soll). — Bewege ich mich dagegen von A längs der Diagonale nach D, so hat es einen durchaus anschaulichen Sinn, mir diese Bewegung in die zwei Bewegungen längs AB und längs AC „zerlegt" zu denken. Ist nämlich das Zimmer z. B. nach den Hauptrichtungen des Horizontes WO und SN orientiert, so habe ich mich während der Bewegung von A nach D wirklich streng gleichzeitig sowohl der östlich wie der nördlich gelegenen Wand genähert (bezw. von der westlich wie von der südlich gelegenen Wand entfernt).

Fig. 26.



Ähnlich wie die geradlinige Bewegung längs AD konnten wir uns auch die krummlinige Bewegung der geworfenen Körper (Fig. 16, 17) in zwei Bewegungen zerlegt denken. — Am nächsten dürfte es dabei den Meisten liegen, sich den horizontal geworfenen Körper hauptsächlich als mit der wagrechten Anfangsgeschwindigkeit weitergehend und nur nebenher während dieser wagrechten Bewegung sich allmählich mehr und mehr senkend vorzustellen. Mit gleichem Rechte können wir uns aber auch umgekehrt vorstellen, dafs der Körper, während er in einer Vertikalen fällt, sich mit dieser Vertikalen seitlich nach horizontaler Richtung verschiebt (— auch das Nebeneinandersetzen der Lote am Wurfapparate entspricht dieser zweiten Vorstellungsweise). Wollen wir schliefslich keiner der beiden Teilbewegungen vor der anderen einen Vorzug einräumen, so denken wir uns die wagrechte und die lotrechte geradlinige Bahn parallel zu sich verschoben, und in dem so stetig sich vergröfsernden Rechtecke befindet sich der geworfene Körper in der jeweiligen „vierten Ecke" (d. h. in der dem Ausgangspunkt diagonal gegenüber liegenden). — So gelangen wir zum allgemeinen

Satz von der Gleichwertigkeit aufeinander folgender und gleichzeitiger Verschiebungen: Wird ein Punkt zuerst längs der Parallelogrammseite AB (Fig. 27) und irgend wann später längs der anstofsenden Seite BD verschoben, so ist seine Endlage D in Bezug

auf A dieselbe, als ob gleichzeitig mit seiner Bewegung von A na B diese Strecke parallel zu sich aus der Lage AB nach CD v schoben worden wäre. — Die Verschiebung von A nach B und von B nach D heifsen die **komponierenden Verschiebungen,** Verschiebung von A nach D die **resultierende Verschiebung.**

Indem hier von den Verschiebungen (Dislokationen), noch nicht von d wirklich durchlaufenen Wegen die Rede ist, ist nur die Endlage D als vier Ecke des **„Verschiebungsparallelogramms"** in Bezug auf die Anfangslage A b stimmt. — Zeige, dafs sich dieselbe E lage auch ergibt, wenn zuerst die V schiebung AC und dann CD eintri ferner wenn der Punkt abwechselnd e Stück parallel AB, dann parallel AC, da wieder parallel AB u. s. f. sich bewegt. Ob sich der Punkt von A nach D wirkl längs der geradlinigen Diagonale d Parallelogramms bewegt, hängt ganz d von ab, ob die beiden Bewegungen gleic artig (d. h. beide gleichförmig oder beide gleichmäfsig beschleunigt — vergl. jedo z. B. auch die Zusammensetzung zweier „Sinusschwingungen" zu einer geradlinig Schwingung, Fig. 245, S. 231), oder aber ungleichartig sind. — Nämlich:

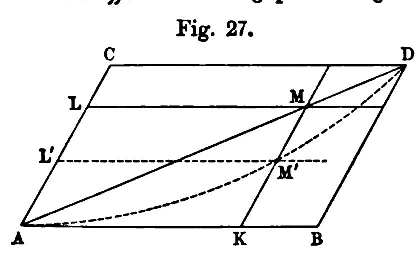


Fig. 27.

1. Stellen im Parallelogramm (Fig. 27) die Seiten AB und A die binnen gleicher Zeiten in **gleichartigen** Bewegungen zurü gelegten Wege nach Länge und Richtung dar, so ist die **Gerade** A der resultierende Weg: **Parallelogramm der Wege.**

Beweis: a) Die Bedingung, dafs die Bewegungen längs AB und AC gleich artig seien, läfst sich ausdrücken durch $AB : AK = AC : AL$, wenn K und L diejenigen Örter sind, in welchen sich der bewegliche Punkt für jede der beide Teilbewegungen in demselben Zeitpunkte befinden müfste. Indem er sich dann gemäfs dem Gesetze von der Gleichwertigkeit der Verschiebungen wirklich im Punkte M befindet, gilt weiter: $\triangle AKM \sim ABD$ (oder ebenso: $\triangle AL$ $\sim ACD$); da hiernach $\measuredangle BAD = KAM$, so liegt M auf der Geraden AD. b) Sind die Bewegungen ungleichartig, so besteht z. B. für L' nicht mehr d obige Proportion wie für L, und es liegt dann auch M' nicht auf der Geraden A

2. Stellen in Fig. 27 AB und AC die in gleichförmigen B wegungen binnen je einer Sek. zurückgelegten Wege, also zugleic auch die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 dieser Bewegungen dar, stellt die Diagonale AD die resultierende Geschwindigkeit dar: **Parallelogramm der Geschwindigkeiten.**

Auch wenn die zwei sich zusammensetzenden Bewegungen nicht beide gleic förmig, ja wenn sie nicht einmal gleichartig sind, wenn aber für einen bestimmt Zeitpunkt sich die komponierenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 verhalten wie d Seiten AB und AC, so wird durch die Diagonale AD immer noch die resu tierende Geschwindigkeit v für diesen Zeitpunkt dargestellt. —

Für zwei zueinander normale Geschwindigkeiten (Fig. 26) ist $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Anwendung auf die veränderliche Geschwindigkeit beim horizontalen Wurf § 11.

nd die Winkel $\widehat{vv_1} = \alpha$, $\widehat{vv_2} = \beta$, so ist $v_1 = v \cos \alpha$, $v_2 = v \cos \beta = v \sin \alpha$. Die Gleichungen bilden die Lösung der **Aufgabe**: Eine gegebene Geschwindigkeit nach zwei zueinander normalen Richtungen zu zerlegen, oder: Aus einer nach Richtung und Gröfse gegebenen Geschwindigkeit eine Komponente nach anderer gegebener Richtung auszusondern. Für $\alpha = 0°$ ist $v_1 = v$; für $\alpha = 90°$ ist $v_1 = 0$; in Worten?

3. **Stellen in Fig. 27 AB und AC die Beschleunigungen b_1 und b_2 zweier gleichmäfsig (oder auch für je einen gegebenen Augenblick w_1 und w_2 zweier ungleichmäfsig) beschleunigter Bewegungen dar, so stellt die Diagonale AD die resultierende Beschleunigung b (bezw. w) dar: Parallelogramm der Beschleunigungen.**

Beweis ähnlich wie bei 2., indem gemäfs den Gleichungen (5) und (6) in § 6 sich ebenso wie die Wege auch die Beschleunigungen verhalten. — Wieder ist (wie bei den Geschwindigkeiten v, v_1, v_2) $b_1 = b \cos \alpha$, $b_2 = b \sin \alpha$. Von letzterer Gleichung ist der wichtigste besondere Fall die aus den Versuchen des § 2 und den Rechnungen des § 6 gefundene Gleichung $g_s = g \sin \varepsilon$ für die Beschleunigung an der schiefen Ebene.

Durch einen ähnlichen Schlufs wie aus 1. auf 2. und 3. wird endlich im § 17 die Parallelogrammkonstruktion auch auf die Kräfte übertragen werden („**Kräfteparallelogramm**"; im Gegensatze zu diesem fafst man die dreierlei Parallelogramme der Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auch zusammen unter dem Namen der „**Bewegungsparallelogramme**"). Dort (§ 17) auch erst die allgemeinen Formeln für die Abhängigkeiten zwischen Gröfsen und Richtungen von „**Vektoren**" überhaupt. Für jetzt nur folgende einfachste Sätze:

Die Resultierende zweier gleich-, bezw. entgegengesetzt gerichteter Wege, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen ist gleich deren Summe bezw. Differenz.

Eine praktische Anwendung dieses Satzes über die Addition der Geschwindigkeiten bietet z. B. die amerikanische Stufenbahn. Man tritt von dem Strafsenpflaster auf einen mäfsig bewegten Streifen, von diesem auf einen zweiten schneller bewegten, u. s. f. auf einen dritten und vierten, welcher dann in Bezug auf das Strafsenpflaster eine so grofse Geschwindigkeit hat, dafs es nicht mehr ohne Gefahr wäre, von der Strafse direkt ihn zu betreten und sich mit ihm vorwärts bewegen zu lassen. — Zugleich bietet diese Einrichtung ein Beispiel für den Satz: Bewegen sich zwei Punkte A und B längs derselben Geraden mit den absoluten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (wobei, genauer genommen, diese Geschwindigkeiten in Bezug auf einen beliebigen Punkt C dieser Geraden verstanden sind), so ist ihre **relative Geschwindigkeit** bei **entgegengesetzter** Richtung gleich ihrer **Summe**, $v = v_1 + v_2$, bei **gleicher** Richtung gleich ihrer **Differenz**, $v = v_1 - v_2$ (Bewegung zweier Eisenbahnzüge, die einander entgegen-, bezw. nebeneinander herfahren). — Ähnliche Sätze über relative Beschleunigungen.

§ 11. Konstruktion und Berechnung der Wurfbewegungen (Zusammenfassung).

Nachdem wir in § 7 die in der Natur wirklich vorkommenden Wurfbewegungen in eine gleichförmige und in eine gleichmäfsig beschleunigte Komponente

$$s = -ct + \frac{g}{2}t^2 \ldots (5), \qquad v = -c + gt \ldots (6).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Spezialisierung:

1. Die Steigzeit t_1: Der Körper steigt so lange, bis $v = 0$ geworden ist. Setzen wir also in Gl. (6) an Stelle von v und t die speciellen Werte 0 und t_1, so ergibt sich: $0 = -c + gt_1$ und $t_1 = \frac{c}{g} \cdots (7)$.

2. Die Steighöhe h: Wir setzen in (5) $t = t_1$ und $s = h$, dann folgt $h = -c \cdot \frac{c}{g} + \frac{g}{2} \cdot \frac{c^2}{g^2}$ oder: $h = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{g} \cdots (8)$, worin das Zeichen „–" nur besagt, dafs die Erhebung in der der Richtung des freien Falles entgegengesetzten Richtung stattgefunden hat. — Somit nach (7) und (8):

Beim vertikalen Wurf aufwärts wächst **die Steigzeit wie die erste, die Steighöhe wie die zweite Potenz der Anfangsgeschwindigkeit;** Steigzeit und Steighöhe sind der Schwerebeschleunigung einfach verkehrt proportional.

LA 10. Eine numerische Erläuterung dieser und der folgenden Gesetze in LA 10.

3. Welche Zeit t_2 braucht der Körper, um aus der Steighöhe wieder in den Anfangspunkt zurückzufallen? — Antwort: In der Gleichung $s = \frac{g}{2}t^2$ setzen wir $s = h$ und $t = t_2$, woraus folgt: $t_2 = \frac{c}{g} = t_1$ (in Worten?). — Zum gleichen Ergebnis führt auch die Gleichung (5) allein, indem man $s = 0$ setzt, worauf die Gleichung zweiten Grades $-ct + \frac{g}{2}t^2 = 0$ für t die beiden Wurzeln 0 und $2 \cdot \frac{c}{g}$ gibt. Hier entspricht $t = 0$ dem ersten, $t = 2 \cdot \frac{c}{g} = t_1 + t_2$ dem zweiten Durchgange durch das Anfangsniveau.

4. Mit welcher Geschwindigkeit v_2 kommt der aufwärts geworfene Körper wieder in seinem Ausgangspunkt an? — Antwort: Wir setzen in Gleichung (6) $t = \frac{2c}{g}$, woraus folgt: $v_2 = -c + g \cdot \frac{2c}{g} = +c$ (in Worten; was bedeutet hier das Zeichen „+"?). — Oder: $v_2 = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{2g \cdot \frac{c^2}{2g}} = c$. —

Den vertikalen Wurf abwärts beschreiben die Gleichungen $v = c + gt$ und $s = ct + \frac{g}{2}t^2$; sie liefern keine besonders bemerkenswerten Spezialisierungen.

III. Schiefer Wurf. Ein Körper habe eine Anfangsgeschwindigkeit von c cm sec^{-1} in einer Richtung, die mit der wagrechten den **„Elevationswinkel"** ε^0 einschliefst (Fig. 29). — Die **Konstruktion** der Bahn unterscheidet sich von der beim horizontalen Wurf nur dadurch, dafs die Strecken c, $2c$, $3c$, ... tc cm längs der **schiefen** Richtung aufzutragen sind; die Senkungen um $\frac{g}{2}$, $4 \cdot \frac{g}{2}$, ... $t^2 \cdot \frac{g}{2}$ cm erfolgen aber ebenfalls in vertikaler (nicht etwa in der zu jener Anfangsrichtung normalen) Richtung. — LA 14.

LA 14.

Behufs **Berechnung** der den schiefen Wurf beschreibenden Gröfsen zerlegen die Anfangsgeschwindigkeit c in eine horizontale Komponente $c \cos \varepsilon$ und eine tikal aufwärts gerichtete $-c \sin \varepsilon$. Diese vertikale Komponente der Anfangschwindigkeit setzt sich zusammen mit der Fallgeschwindigkeit; so dafs der iefe Wurf auch als vertikaler Wurf, zusammengesetzt mit einer horizontalen schiebung, die von der Fallbeschleunigung unbeeinflufst ist, angesehen werden n. — Die Gleichungen für den vertikalen Wurf lauten somit:

$$x = -c \sin \varepsilon \cdot t + \frac{g}{2} t^2; \qquad v_x = -c \sin \varepsilon + g t;$$

$$y = c \cos \varepsilon \cdot t; \qquad v_y = c \cos \varepsilon.$$

Die Ableitung der Gleichung der Wurfparabel für diesen allgemeinen Fall gl. LA 16. — Aus diesen Gleichungen ergeben sich durch Spezialisierungen (in selben Reihenfolge wie beim vertikalen Wurf) zunächst die Gesetze 1 bis 4: LA 16.

1. Die **Steigzeit** $t_1 = \frac{c}{g} \sin \varepsilon$. — 2. Die **Steighöhe** $h = \frac{c^2 \sin^2 \varepsilon}{2g}$.

3. Die Zeit des Sinkens aus der gröfsten Höhe in das Anfangsiveau ist der Steigzeit gleich.

4. Der Körper kommt **in das Anfangsniveau mit der Anfangsschwindigkeit.** (Beachte auch die Symmetrie der Richtungen!)

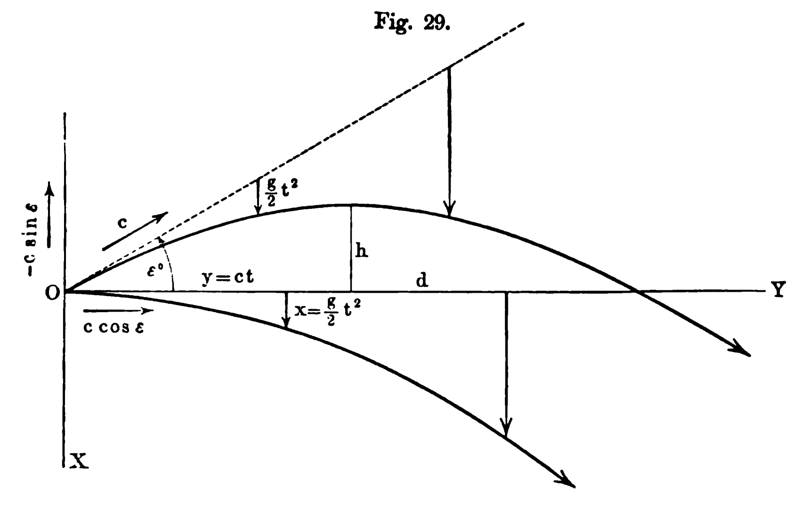


Fig. 29.

Dem schiefen Wurf eigentümlich sind ferner die Gesetze 5 bis 7:

5. Die **Wurfweite** $d = c \cos \varepsilon \,.\, 2 \cdot \frac{c \sin \varepsilon}{g} = \frac{c^2}{g} \sin 2\varepsilon$.

6. Die gröfste Wurfweite entspricht dem Elevationsnkel 45°; denn das Maximum von $\sin 2\varepsilon = 1$ gehört zu $2\varepsilon = 90°$.

7. Zu komplementären Elevationswinkeln gehören gleiche urfweiten; denn $\sin 2(45° - \alpha) = \sin 2(45° + \alpha)$.

Inwiefern bilden der vertikale und der horizontale Wurf Grenzfälle des iefen? Zeige dies durch Spezialisierung der Gleichungen! — LA 14—18. LA 14—18

Aus der Ballistik. Die bisher behandelten Wurfgesetze bilden nur eine erste Annäherung an das tatsächliche Verhalten der Projektile, deren möglichst genaue Kenntnis dem Artilleristen unentbehrlich ist. Vor allem erfahren die Wurfbahnen eine wesentliche Abänderung durch den Luftwiderstand, so zwar, dafs z. B. beim schiefen Wurf der absteigende Ast der Wurflinie steiler ist als der aufsteigende (**„ballistische Kurve"**). Ferner weichen die Geschosse merklich aus der durch die Anfangsrichtung bestimmten Vertikalebene ab. Dies erklärt sich zum Teil aus der Rotation der Erde (vergl. § 34), zum Teil aus dem Einflusse des Luftwiderstandes auf die bei gezogenen Geschützen in schnelle Rotation um ihre Achse versetzten Spitzgeschosse (vergl. § 28, Fig. 110).

§ 12. Kreisende und schwingende Bewegungen.

Geschichtliches. Galilei soll (nach einer Erzählung seines Schülers Viviani) in seinem 17. Lebensjahre (1581) im Dome zu Pisa an einer schwingenden Ampel beobachtet haben, dafs trotz allmählicher Abnahme der Schwingungsweite die Schwingungsdauer sich nicht merklich ändere. Später verglich Galilei zwar schon die Bewegung des Pendelpunktes im Kreisbogen mit der Bewegung eines Körpers beim Hinab- und Hinaufgleiten an schiefen Ebenen (vergl. Fig. 4, S. 9, hierzu LA 24); aber er gab noch in seinem letzten grofsen Werke, den *Discorsi* (1638), ein Gesetz für die Schwingungsdauer des Pendels an, wonach $T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}$ wäre, in welcher Formel aber der Faktor 8, wie sich gegen Ende dieses Paragraphen zeigen wird, durch 2π zu ersetzen ist. — Es könnte scheinen, dafs sich diese Abweichung durch direkte Versuche hätte verraten (bezw. der Faktor 2π empirisch hätte finden lassen) müssen, wenn beobachtet worden wäre, wie grofs bei gegebenem l und g das jeweilige T ist. Tatsächlich war aber durch Galileis direkte Versuche über den freien Fall und den Fall an schiefen Ebenen der Wert von g hierfür noch nicht hinreichend genau bekannt. Auch heute noch wird ja umgekehrt erst durch Messungen von T und l an Pendeln der Wert von g bestimmt (§ 33), worin die hauptsächlichste Bedeutung des Pendels für die theoretische Physik liegt.

I.A 24.

Die richtige Theorie des Pendels (und zwar des einfachen wie des zusammengesetzten, über letzteres vergl. § 33) hat erst Huygens (1629—1695) in der wichtigen Schrift *„Horologium oscillatorium"* (1673) gegeben. —

Das **einfache** (punktuelle, mathematische) Pendel wird gedacht als ein schwerer Massen-Punkt an einem masse- und schwerlosen Faden von bestimmter unveränderlicher Länge, der **„Pendellänge"**.

Anh. 36

Zu dieser wissenschaftlichen Fiktion (log. Anh. Nr. 36) sind wir dadurch genötigt, dafs jedes wirkliche, „physische" Pendel (z. B. ein Uhrpendel) schon nicht mehr ein einfaches, sondern ein zusammengesetztes Pendel ist, bei dem der Begriff der „Pendellänge" nicht mehr ohne weiteres anwendbar wäre. (Insbesondere läfst sich zeigen, dafs nicht etwa der Abstand des Mittelpunktes einer Pendelkugel vom Aufhängepunkte als Pendellänge gelten darf, LA 98).

LA 98.

Vorversuche mit einem annähernd einfachen Pendel (einem Blei- oder Platinkügelchen an einem möglichst leichten und dünnen Faden oder Draht) 1. Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Schwingungsweite (speciell auch bei deren Abnahme infolge Luftwiderstand und Reibung; umgekehrt

Pendelfaden oder Draht beschreibt je nach der Art der Aufhängung und des Pendelkörpers eine Ebene (diese läfst sich namentlich sichern durch e Aufhängung" des Pendelkörpers), teils elliptische Kegel- oder gelmäntel (bei biegsamem Faden oder „Cardanischer Aufhängung" des Die Gesetze der a) ebenen Schwingungen, b) Kegelschwingungen iteinander in engem Zusammenhange, wie aus den Versuchen 4 bis 6 ·echnerischen Behandlung (s. u. I, II) erhellen wird.

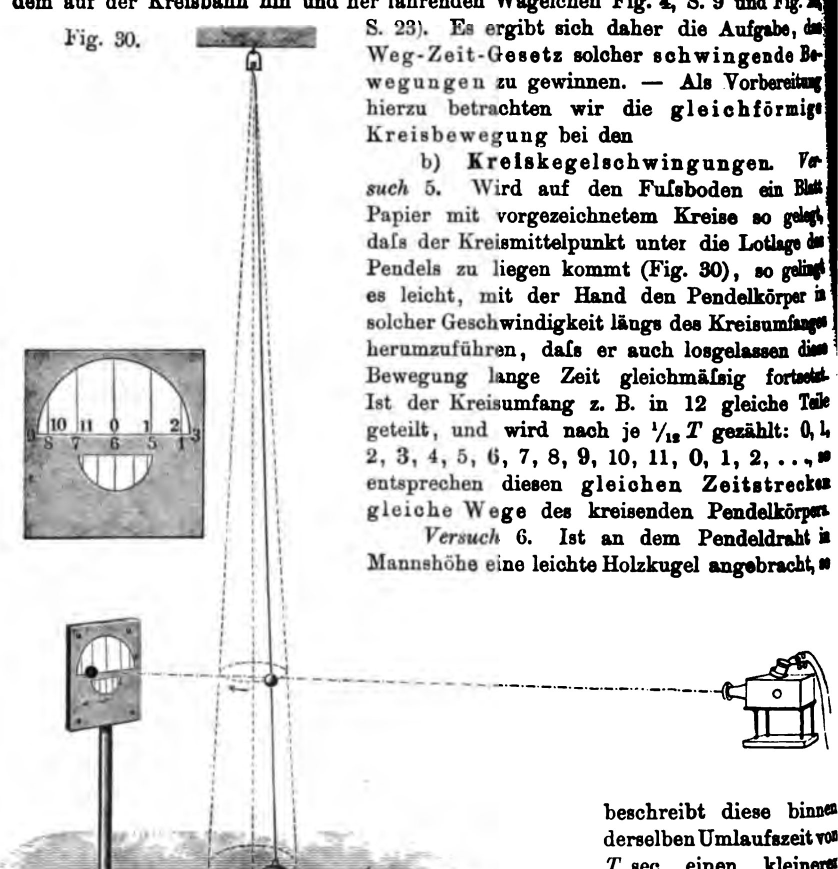
Ebene Schwingungen des Pendels. *Versuch* 4. Der örper wird aus seiner tiefsten Lage, der **Lotlage (Mittellage),** höhere gehoben und von dieser ohne jeglichen seitlichen Ansgelassen (Herausheben mittels Fadens, der dann durchgebrannt Das Pendel bewegt sich so in einer vertikalen Ebene, der **gungsebene,** und zwar, da der Aufhängepunkt des Fadens und ɪnlänge als unveränderlich vorausgesetzt sind, bewegt sich jeder 'unkte in einem Kreisbogen hin und her, indem er dieselbe iederholt in gleicher Weise (**„periodisch"**, schwingend, ɜnd) durchläuft. — In verschiedenen Zeitpunkten bildet der ıit der Lotrechten verschiedene Winkel; diese (bezw. die zuge- Bogen) heifsen die jeweiligen **Elongationen** des Pendels. Die ɪrreichte Elongation heifst die **Schwingungsweite** (Amplitude), · und Hergang des Pendels **volle Schwingung,** ihre Dauer von **:hwingungsdauer** (Schwingungszeit, Periode). Das Steigen aus · in die Grenzlage, wie das Sinken aus der Grenz- in die Lotordert je $\frac{T}{4}$ sec. — Ist $T = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{n}$ sec, so führt das l, 2, 3 . . . n Schwingungen in je 1 sec aus; allgemein ist seine **gungszahl** $n = \frac{1}{T} \cdots (1)$; daher auch $T = \frac{1}{n} \cdots (2)$; in Worten!

den Grenzlagen klein, nahe der Lotlage grofs ist. (Das Pendel übt auf die ent-gegengehaltene Hand dort einen schwachen, hier einen starken Stofs aus; ähnlich wie ein sich selbst schliefsender Türflügel, der um seine Mittellage hin und her schwingt, leichter nahe der Grenz- als der Mittellage aufzuhalten ist; alles ähnlich dem auf der Kreisbahn hin und her fahrenden Wägelchen Fig. 4, S. 9 und Fig. 2?, S. 23). Es ergibt sich daher die Aufgabe, das Weg-Zeit-Gesetz solcher schwingende Bewegungen zu gewinnen. — Als Vorbereitung hierzu betrachten wir die gleichförmige Kreisbewegung bei den

b) **Kreiskegelschwingungen.** *Versuch* 5. Wird auf den Fufsboden ein Blatt Papier mit vorgezeichnetem Kreise so gelegt, dafs der Kreismittelpunkt unter die Lotlage des Pendels zu liegen kommt (Fig. 30), so gelingt es leicht, mit der Hand den Pendelkörper in solcher Geschwindigkeit längs des Kreisumfanges herumzuführen, dafs er auch losgelassen diese Bewegung lange Zeit gleichmäfsig fortsetzt. Ist der Kreisumfang z. B. in 12 gleiche Teile geteilt, und wird nach je $^1/_{12}\,T$ gezählt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 0, 1, 2, . . ., so entsprechen diesen gleichen Zeitstrecken gleiche Wege des kreisenden Pendelkörpers.

Versuch 6. Ist an dem Pendeldraht in Mannshöhe eine leichte Holzkugel angebracht, so

Fig. 30.



beschreibt diese binnen derselben Umlaufszeit von T sec einen kleineren wagrechten Kreis eben so gleichförmig. Durch Schattenprojektion erhalten wir eine der Bewegung des Pendelkörpers bei Versuch 4 annähernd ähnliche schwingende Bewegung des Schattens der Holzkugel, wenn wir in möglichst grofsem Abstande von der Holzkugel in gleicher Höhe eine kräftige Lichtquelle aufstellen, so dafs die Holzkugel auf einen hinter dem Pendel normal zu den Lichtstrahlen aufgestellten Schirm einen Schatten wirft. Der Schattenfleck bewegt sich längs einer wagerechten Geraden, welche (falls die Lichtstrahlen als parallel zueinander einfallend gedacht werden) gleich ist dem Durchmesser des Kreises, in dessen Umfang die Holzkugel sich bewegt. Diese Bewegung des Schattenfleckes ist ungleichförmig, und zwar (wieder ähnlich

uch 7. Läſst man beim Versuch 5 das Pendel in einem Kreise von (z. B. halbem) Halbmesser kreisen, so bleibt trotzdem dessen Umlaufs- : annähernd) gleich; bei Versuch 6 schwingt daher der Schatten auch leichen Schwingungsdauer längs des ngen Durchmessers. —

bisher gewonnenen physikalischen An- n fassen wir nun in folgende phoro- Begriffe von Kreisungen und Sinus- ungen:

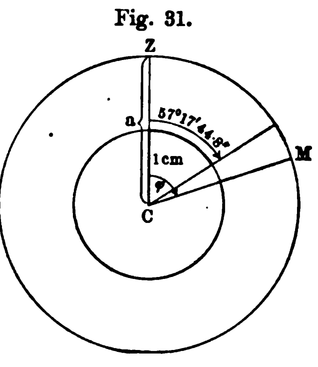


Fig. 31.

)ie gleichförmige Kreisbewegung reisende Bewegung oder Krei- Längs des Umfanges eines Kreises ı Halbmesser (Fig. 31) bewege sich :t M (die Spitze des Bleistifts, eines rs ...) mit gleichbleibender Ge- gkeit c cm sec^{-1}. Die Zeit, binnen ər Punkt M den vollen Umfang $2\pi a$ cm, z. B. von Z bis ıach Z, einmal zurücklegt, heiſst die **Umlaufszeit**; beträgt , so hat der kreisende Punkt M die Geschwindigkeit oder

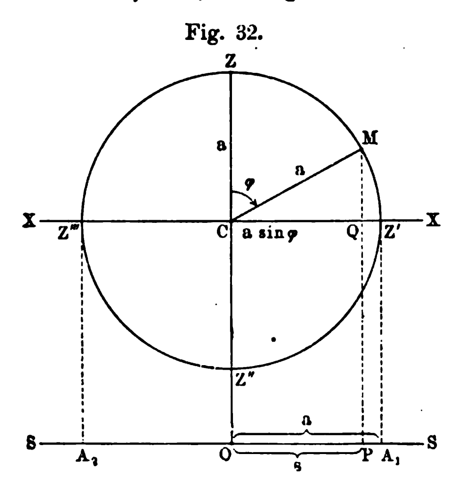
ɪchwindigkeit $c = \frac{2\pi a}{T}$ cm sec^{-1} ... (3), also $T = \frac{2\pi a}{c}$ sec.

kelgeschwindigkeit. Bekanntlich haben z. B. alle Minutenzeiger, ı lange, in gewissem Sinne gleiche Geschwindigkeiten, nämlich geschwindigkeiten von 360° per Stunde", wiewohl die Spitzen kurzer Zeiger lie Spitzen langer groſse Geschwindigkeiten in dem bisherigen ıes Wortes (§ 4 ff.) haben, die wir von jetzt an zum Unterschiede von schwindigkeit" auch „Bahngeschwindigkeit" oder „lineare Geschwindig- ıennen werden. Näheres über Winkelgeschwindigkeit und Winkel-

Winkelgeschwindigkeit $\alpha = \frac{2\pi}{T}$, somit $\alpha T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{\alpha}$

Durch Einführung dieser Hülfsgröfse α in die obige Gleichung c wird einfacher $c = \alpha a$. — Durchstreicht während t sec der Leitstrahl den $ZCM = \varphi$ WE, so ergibt sich als Beschreibung der gleichför Drehung des Leitstrahls $\varphi = \frac{2\pi}{T} t$ (dies analog dem We Gesetz $s = ct$ eines in belie formter Bahn gleichförmig wegenden Punktes, also au gleichförmig kreisenden P

Fig. 32.



II. **Die Sinusschwi** (einfache, harmoni Schwingung). — Der län Umfangs eines Kreises vo Halbmesser gleichförmig kre Punkt M (Fig. 32) werde a in der Ebene des Kreises li Gerade, z. B. XX oder SS Q, bezw. P projiziert. E sprechen dann einander die des kreisenden Punktes M in Z, Z', Z'', Z''', Z, Z', und des schwingenden Punktes P in O, A_1, O, A_2, O, A_1, Ferner ist die Umlaufszeit T des kreisenden Punktes gleic **Schwingungsdauer** des schwingenden Punktes, und der **Radi** Kreisung (Leitstrahl) ist gleich der **Amplitude** der Schwingu Die **Elongation** $OP = s$ hängt von der seit dem letzten Dur durch den Punkt Z, bezw. O verflossenen Zeit t ab nach den Gleich $OP = CQ = CM \sin (\sphericalangle QMC) = a \sin \varphi$, also

$$s = a \sin \alpha t \quad \text{oder} \quad s = a \sin \frac{2\pi}{T} t \ldots (5)$$

Wegen dieses Weg-Zeit-Gesetzes werden die aus der Proje einer gleichförmigen Kreisung hervorgehend gedachten S gungen **„Sinusschwingungen“** genannt.

Setzen wir in Gleichung (5) z. B. speciell $t = \frac{T}{4}$, so wird $\frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{T} \cdot\cdot$ und $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^0 = 1$; somit $s = a$. Ebenso für $t = \frac{T}{12}$ wird $s = a$ $= a \sin 30^0 = \frac{a}{2}$ u. s. f. Bewegte sich z. B. bei Versuch 5 die Holzk einem Kreise von a cm Halbmesser, so entsprechen für die schwingende Be des Schattens im Versuch 6 einander:

$$\frac{-\ a \sin \alpha t}{-\ t} = a\,\frac{2 \cos \frac{\alpha t' + \alpha t}{2} \sin \frac{\alpha t' - \alpha t}{2}}{t' - t} = \alpha\, a \cos \alpha\, \frac{t' + t}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \frac{t' - t}{2}}{\alpha \cdot \frac{t' - t}{2}},$$

r $t' = t$ wird[1]): $v = \alpha\, a \cos \alpha t$ . . . (6). — Hieraus folgt weiter:

$$\frac{-\ \alpha a \cos \alpha t}{-\ t} = \alpha a\,\frac{-2 \sin \frac{\alpha t' + \alpha t}{2} \cdot \sin \frac{\alpha t' - \alpha t}{2}}{t' - t} = -\,\alpha^2 a \sin \alpha\, \frac{t' + t}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \frac{t' - t}{2}}{\alpha \frac{t' - t}{2}},$$

r $t' = t$ folgt: $w = -\,\alpha^2 a \sin \alpha t$ oder $w = -\,\alpha^2 s$ . . . . (7).

hische Herleitungen der Gleichungen (6) und (7) vgl. LA 20. LA 20.

ɜsondere besagt die überaus fruchtbare Gleichung (7) (analog wie für en nach dem Weg-Zeit-Gesetze $s = a t^2$ folgte, dafs die Beschleunigung weder von t noch von s abhänge, sondern dafs sie konstant sei):

jeder Sinusschwingung ist die Beschleunigung w ɜrlich, und zwar so, dafs w **der jeweiligen Elongation** s ingenden Punktes von der Mittellage **direkt proportional, tgegengesetzt gerichtet** ist.

leiche hiermit den Gegensatz der Vorzeichen für Wege und Begungen bei der Bewegung des Wägelchens, Fig. 20, S. 23. — Aus der (7) folgt weiter als besonders merkwürdige Eigenschaft der hronismus von Sinusschwingungen. Als sich bei Versuch 6 und 7 ıgel einmal in einem Kreise von a cm, ein andermal nur von $^1/_2\,a$ cm Halbwegte, waren die Umlaufszeiten des Pendelkörpers gleichwohl vonnicht merklich verschieden, und daher war auch bei diesen Versuchen verschiedenen Amplituden a und $^1/_2\,a$ die Schwingungsdauer die oder: die Schwingungen waren **isochron.** Dementsprechend ist auch in Zeit-Gesetzen beider Bewegungen, $s = a \sin \alpha t$ und $s = \frac{a}{2} \sin \alpha t$, die ungsdauer nur von $\alpha = \frac{2\pi}{T}$, nicht von der Amplitude a, bzw. $\frac{a}{2}$;. — Nach der in Gl. 7 ausgesprochenen Haupteigenschaft der Sinus-

$w_1 = -\alpha^2 \cdot (-1) = \alpha^2$ und $\alpha = \sqrt{w_1}$. Hiermit nehmen Gl. (7) und Gl. (4) die physikalisch noch bedeutsameren Formen an:

$$w = -w_1 s \ldots (8) \qquad \text{und} \quad T = 2\pi \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{w_1}} \cdots (9)$$

Durch Umkehrung des obigen Satzes über die in Gleichung (7) oder (8) ausgedrückte Grundeigenschaft der Sinusschwingungen erhalten wir nämlich den folgenden Satz, welcher die Ableitung der Schwingungsdauer einer Sinusschwingung blofs aus deren charakteristischer Beschleunigung erlaubt:

Ist bei einer Bewegung die Beschleunigung w der jeweiligen von einer Mittellage O aus gezählten Elongation s direkt proportional, aber entgegengesetzt gerichtet, so ist die Bewegung eine Sinusschwingung. Hat der Punkt in 1 cm Abstand von der Mittellage die charakteristische Beschleunigung w_1, so ist, unabhängig von der Amplitude der Schwingung, die

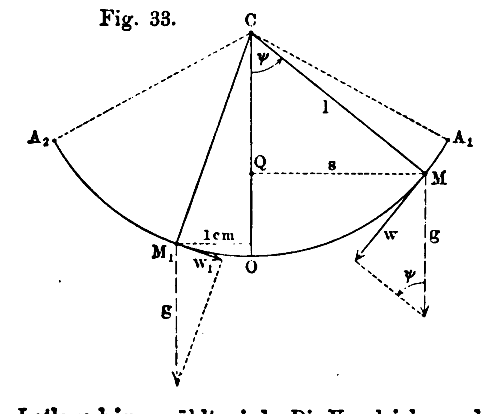
Schwingungsdauer der Sinusschwingung $T = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{w_1}}$ . . (9)

Eine der wichtigsten Anwendungen der Gleichung (9) besteht in der Lösung der

Aufgabe: Die ebenen Schwingungen des einfachen Pendels von der Länge l cm an einem Orte mit der Schwerebeschleunigung g cm sec^{-2} sind zu beschreiben durch die Schwingungsdauer T (ferner durch die Schwingungszahl n und durch das Weg-Zeit-Gesetz).

Auflösung: Da infolge der unveränderlichen Pendellänge l der Pendelkörper auf einem Kreisbogen zu bleiben gezwungen ist, so entspricht jeder beliebigen durch den Winkel ψ (Fig. 33) gemessenen Elongation ein Element des Kreisbogens, welches dieselbe Neigung gegen die wagrechte Richtung hat, wie eine schiefe Ebene von der Neigung ψ. Daselbst ist gemäfs dem Gesetz 4, § 6, die Komponente der Schwerebeschleunigung

Fig. 33.



$$w = -g \sin\psi = -g \cdot \frac{s}{l}, \quad \text{also}$$

$$w = -\frac{g}{l} \cdot s \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

wobei das Minuszeichen besagt, dafs der Winkel ψ von der Lotlage weg, die Beschleunigung w gegen die Lotlage hin gezählt wird. Die Vergleichung der Formel (10) mit der allgemeineren (8) zeigt, dafs für das einfache Pendel die charakteristische Beschleunigung $w_1 = \frac{g}{l}$ ist. Daraus ergibt sich sofort durch Einsetzung in Gleichung (9) die

Schwingungsdauer des einfachen Pendels $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (11)

und die Schwingungszahl des einfachen Pendels $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$ (12)

Bezeichnen wir speziell die Länge des **Sekundenpendels** mit l_1, ergeben sich wegen $T = 2$ sec die besonderen Beziehungen:

$$l_1 = \frac{g}{\pi^2} \quad \text{und} \quad g = \pi^2 l_1 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (13)$$

Über die Verwertung dieser Beziehungen bei der praktischen Ermittlung von ür verschiedene Orte der Erde vgl. § 33.

Indem in Gleichung (11) T nur von l und g, nicht von der Amplitude a hängt, scheint in dieser Gleichung selbst auch schon der Beweis für den Isoronismus der Pendelschwingungen zu liegen. Doch ist zu bemerken, ß bei ihrer Herleitung s nur annähernd, nicht genau dieselbe Bedeutung hat ie in der allgemeinen Gleichung für Sinusschwingungen. Denn in Gleichung (7) edeutete s den vom schwingenden Punkte wirklich zurückgelegten (geradlinigen) Weg; bei der Ableitung der Pendelformel aber bedeutet s die Halbsehne, ährend der wirklich zurückgelegte Weg jetzt der Kreisbogen ist. Die Abeitung trifft also nur mit demselben Maſse von Annäherung zu, als für den inus der Bogen gesetzt werden darf, also auch um so genauer, je kleiner ler Amplitudenwinkel ist (— eine bessere Annäherung vgl. LA 25). LA 25.

Nur insoweit jede Pendelschwingung von beliebiger Amplitude a mit einer igentlichen Sinusschwingung übereinstimmt, gilt auch

für das einfache Pendel das Weg-Zeit-Gesetz $s = a \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$ · · (14)

Eben diese Gleichung gibt nun auch die vollständige Beschreibung für die Bewegung z. B. des Wägelchens auf der (reibungslos gedachten) krummen Bahn n Fig. 4, S. 9. — Wie groſs die Amplitude beim Wägelchen oder beim Pendel wirklich wird, hängt ab entweder von der Grenzlage, aus welcher wir die Bewegung beginnen lassen, oder von der Stärke des Anstoſses, mit welchem wir es mit bestimmter Geschwindigkeit durch die Mittellage gehen lassen. —

Der Zusammenhang zwischen Pendelschwingung und geradliniger Sinuschwingung läſst sich anschaulich verfolgen, wenn wir beim obigen Versuch 6 en Pendelkörper statt in einem Kreise in einer ellipsenartigen (aber doppelt ekrümmten [math. Anh. Nr. 26]) Linie sich bewegen lassen, so daſs die groſse Achse der Ellipse der Ebene des Schirmes parallel zu liegen kommt. Der Schatten ler Holzkugel bewegt sich dann nicht mehr auf einer Geraden, sondern die Bahn les Schattens krümmt sich nach abwärts (*Versuch* 8). Lassen wir schlieſslich die kleine Achse der Ellipse (welche zur Ebene des Schirmes normal steht) immer kleiner und zuletzt Null werden, so ist die Kreisung der Holzkugel ebenfalls in eine Pendelschwingung übergegangen, welche nun mit der des Schattens kongruent ist (*Versuch* 9). — Anh. 26.

Andere Beispiele von Sinusschwingungen: Die Projektion kreisender Gestirne, z. B. der Jupitertrabanten, auf das Himmelsgewölbe (§ 187), des Kolbens bei Kurbelbewegung (§ 30), die Bewegung eines zwischen Spiralfedern eingespannten, auf wagrechten Schienen fahrenden Wägelchens (§ 18), überhaupt die Schwingungen sehr vieler elastischer Körper, z. B. jedes Punktes der Spiralfeder an Jollys Federwage (§ 51, LA 30), die Schwingungen einer Kette unter dem Träger der Atwoodschen Fallmaschine (LA 27), die Bewegung der Körper in einem Schachte längs des Erddurchmessers (Galileis Aufgabe, LA 30), die Schwingungen einer Flüssigkeit in einer kommunizierenden Röhre (LA 28). LA 30. LA 27. LA 30. LA 28.

Näheres über Schwingungen überhaupt, speziell auch über Zusammensetzung von Sinusschwingungen, vgl. im ganzen VI. Abschnitt, namentlich § 62.

§ 13. Normalbeschleunigung (centripetale Beschleunigung).

Geschichtliches. Sowie GALILEI die Wurfbewegung in eine gle förmige Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit nach der wagrechten l tung OY (vergl. Fig. 34 mit Fig. 28, S. 28) und eine gleichmäfsig besch nigte in der lotrechten, also zu ersterer normalen Richtung OX der fallenden Körper zu zerlegen lehrte (§ 7), so hat HUYGENS (in dem schon genan Werke „*Horologium oscillatorium*" 1673) auch die gleichförmige **Kreisbewe** in eine nach der Richtung der Kreistangente OY und eine dazu norn Bewegung ON zerlegt. NEWTON löste bald darauf die allgemeinere Aufgabe Bewegungen in **beliebigen** (weder parabolischen, noch kreisförmigen) **Bahnfor** mit **beliebigen** (konstanten oder veränderlichen) **Geschwindigkeiten,** un konnte so auf Grund der speziellen HUYGENSschen Aufgabe die annähernd k förmige Bewegung des Mondes um die Erde, und weiterhin allgemeiner elliptischen Bewegungen der Planeten um die Sonne mit der Bewegung eines der Erdoberfläche geworfenen Körpers vergleichen. —

Bei der Bewegung eines von O aus horizontal geworfenen Körpers muſ nach der konkaven Seite der Bahn gerichtete lotrechte Bewegung schon Anfangspunkte O die volle Beschleunigung g cm sec^{-2}, aber die Anfa geschwindigkeit Null haben; denn sonst würde sich die Wurfbahn n an die wagrechte Anfangsrichtung anschmiegen, sondern unter einem endli Winkel von ihr abzweigen (vergl. Fig. 16, S. 19). Ebenso haben wir uns jeder krummlinigen Bewegung zur **tangentialen Geschwindigkeit** **Normalbeschleunigung** oder **centripetale Beschleunigung** hinzukomn zu denken. — Die Gröfse dieser Normalbeschleunigung wird bei der gle förmigen Kreisbewegung wegen der überall gleichen Geschwindigkeit Krümmung einen konstanten Wert $b_\perp$ cm sec^{-2}, bei den übrigen krummli Bewegungen wird sie einen veränderlichen Wert $w_\perp$ haben ($b_\perp$ lies: b no $w_\perp$ lies: w normal). — Wir beginnen daher mit folgender

Speziellen Aufgabe: Wie grofs ist die Normalbeschleunigun eines Punktes, der auf dem Umfange eines Kreises von r cm D messer binnen der Umlaufszeit T sec mit der konstanten B geschwindigkeit c cm sec^{-1} sich bewegt?

Erste Ableitung: Denken wir uns den Kreis in vertikaler Ebene un Bewegliche den obersten Punkt des Umfanges passierend. Es entspricht dam Element des Kreises vom Radius r dem Elemente nächst dem Scheitel Parabel vom Parameter $p = r$ (Fig. 34; Anh. Nr. 26). Nun hatte sich bei de Berechnung des horizontalen Wurfes inversen Aufgabe (§ 11) aus den gegeb Gröfsen p und c als die zum Bahnelemente des Scheitels der Parabel no

Anh. 26.

Beschleunigung ergeben $g = \frac{c^2}{p}$. Da nun für den Kreis $g = b_\perp$, $p = r$, auch für das Kreiselement die

$$\text{konstante Normalbeschleunigung } b_\perp = \frac{c^2}{r} \cdots (1)$$

Durch diese erste Ableitung wird auch erst anschaulich, mit welchem R wir die Gleichung $s = \frac{b}{2} t^2$ anwenden in der folgenden

·eiten Ableitung: Legt der bewegliche Punkt den Kreisbogen

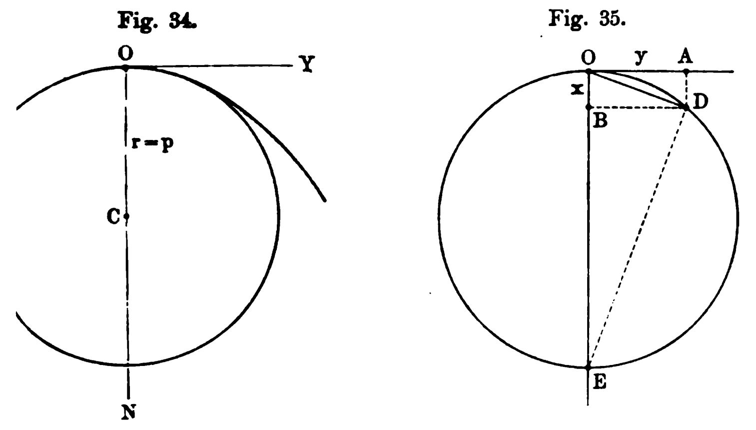


Fig. 35) binnen der kleinen Zeit τ zurück, so können wir uns Bewegung zerlegt denken in die gleichförmige längs der Tanmit der Geschwindigkeit $c \,\mathrm{cm\,sec}^{-1}$ und in die gleichmäfsig benigte längs OB mit der Beschleunigung $b_\perp \,\mathrm{cm\,sec}^{-2}$. Es sei $= BD = y$, $OB = x$. Dann ist $y = c\tau$, $x \doteq \frac{1}{2} b_\perp \tau^2$. Wegen $= \overline{OB} . \overline{BE} \doteq \overline{OB} . \overline{OE}$ ist $c^2\tau^2 = \frac{1}{2} b_\perp \tau^2 . 2r$, woraus: $b_\perp = \frac{c^2}{r}$. berdies ist wegen $c = \frac{2\pi r}{T}$ [§ 12, Gl. (3)] $\quad b_\perp = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$,

$$\text{auch} \quad b_\perp = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \quad \text{oder} \quad b_\perp = 4\pi^2 \frac{r}{T^2} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

ie Gleichung (1) besagt durch das Auftreten des c im Zähler, dafs, wenn m und demselben Kreise ein Punkt längs des Umfanges langsamer, bezw. er sich bewegt, die zu dieser Geschwindigkeit hinzukommende Beschleunileiner bezw. gröfser anzunehmen ist. (Ähnlich müfsten wir an der Mondche einen Stein mit kleinerer Geschwindigkeit horizontal werfen als an der rfläche, wenn er dort und hier kongruente Parabeln beschreiben sollte. die Analogie für die folgenden einzelnen Gesetze durch!) — Wird dagegen nkt mit derselben Bahngeschwindigkeit zuerst in einem grofsen, dann in kleinen Kreise bewegt, so ist in letzterem die Centripetalbeschleunigung . (Ist es ein Widerspruch, dafs die Gröfse r in Gleichung (1) im Nenner, chung (2) im Zähler auftritt?) Noch drei andere Ableitungen der Normalunigung und ihre Beziehungen zu einander vergl. LA 31. LA 31.

Vie und warum zu einer gleichförmig geradlinigen Bewegung eine zu rmale Beschleunigung hinzukommen müsse, damit eine gleichförmig nde Bewegung resultiere, läfst sich (aufser durch die Analogie zur Wurfng) noch auf mancherlei Art veranschaulichen. Z. B. War ein Käfer einen en Blechstreifen entlang gelaufen, so mufs sich seine Bewegung trotz

gleicher Geschwindigkeit ändern, wenn der Streifen krumm gemacht wird. Insbesondere lehrreich sind folgende drei

Anwendungen: 1. Wie erklärt es sich, daſs bei dem Versuch 5, S. zwischen dem Halbmesser a und der Bahngeschwindigkeit c des kreisenden Pendelkörpers eine bestimmte Beziehung bestehen muſs, damit das Kreisen in wagrechter Ebene gleichmäſsig fortdauere? Vgl. LA 32.

2. Ein in geringer Höhe über der Erde wagrecht abgeschossenes Projektil fällt bei immer gröſserer Anfangsgeschwindigkeit an immer entfernteren Stellen zu Boden. Würde die Anfangsgeschwindigkeit c so groſs (rund 8000 m $\sec^{-1}$, LA 33), daſs $\frac{c^2}{R} = g$, also $c = \sqrt{gR}$, wo R der Erdhalbmesser ist, so ginge es als neuer Trabant um die Erde in einem Kreise. (Warum ist ein solcher Versuch nicht ausführbar?)

3. Newtons „Mondrechnung“. Dem Monde kommt infolge seiner Bewegung um die Erde annähernd im Abstande $a = 60$ Erdradien binnen der Umlaufszeit $T = 27^1/_3{}^d$ eine centripetale Beschleunigung γ zu, welche rund $3600 = 60^2$ mal so klein ist als die Beschleunigung g der an der Erdoberfläche frei fallenden oder geworfenen Körper (LA 34). — Weittragende Folgerungen aus dieser Beziehung vgl. § 21

Allgemeine Aufgabe: Ein Punkt bewege sich längs einer Bahn von veränderlicher Krümmung (Fig. 13, S. 11) mit veränderlicher Geschwindigkeit. Wie groſs ist die (nun im allgemeinen ebenfalls veränderliche) Normalbeschleunigung $w_\perp$ in einem Bahnelemente mit dem Krümmungshalbmesser ϱ, wenn daselbst die Bahngeschwindigkeit v ist?

Diese Aufgabe findet z. B. Anwendung bei der Bewegung der Planeten, die in Ellipsen (also Kurven veränderlicher Krümmung) mit veränderlicher Geschwindigkeit (nach Keplers „Flächensatz“, § 19) erfolgen. — Vorausgesetzt, daſs sowohl die Geschwindigkeit v wie die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ sich nur stetig von Element zu Element der Bahn ändern, zeigt eine tiefer gehende Überlegung, daſs sich $w_\perp$ von $b_\perp$ nur um unendlich kleine Gröſsen höheren Ordnung (math. Anh. Nr. 21) unterscheiden kann. — Deshalb erweitert sich Gl. (1) zu folgendem

allgemeinen Wert der Normalbeschleunigung: $w_\perp = \frac{v^2}{\varrho}$ . . (

Indem auch bei nicht kreisförmigen Bewegungen die Normalbeschleunigung noch immer auch centripetale Beschleunigung genannt wird, ist unter dem „Centrum“, gegen welches das Bewegliche „hinstrebt“ (*petit*), der jeweilige Krümmungsmittelpunkt (Anhang Nr. 26) verstanden, der nur beim Kreis zusammenfällt mit dem „Mittelpunkte“ kurzweg. (Über eine dritte Bedeutung von „Centrum“ = Centralpunkt bei Centralbewegungen vergl. § 19.)

Zusammenfassung: Wie nach § 8 (Ende) zwischen Geschwindigkeit und Richtung mehrere Analogieen bestehen, so entsprechen einander bei gegebenem Weg-Zeit-Gesetz und gegebener Bahnform auch die

Änderung der Bahngeschwindigkeit, gemessen durch die Beschleunigung längs der Bahn, d. i. **die Tangentialbeschleunigung.**	Änderung der Bewegungsrichtung, gemessen durch die Beschleunigung normal zur Bahn, d. **die Normalbeschleunigung.**

Im erweiterten Sinne bedeutet somit „Beschleunigung“ teils Änderung (Vergröſserung oder Verkleinerung) der Geschwindigkeit, teils A

ıkung. In diesem Sinne können wir auch von nun an sämtliche denkbaren regungen eines Punktes einander gegenüberstellen als

1. **konstante Bewegungen** (gleichförmige im allgemeinen ıne), bei denen Geschwindigkeit und Richtung konstant ist: sind die **gleichförmigen geradlinigen Bewegungen**;

2. **veränderliche Bewegungen** (ungleichförmige oder eschleunigte im allgemeinen Sinne), bei denen sich die Geschwinigkeit oder die Richtung (oder beides) ändert: es sind die **ngleichförmig geradlinigen**, die **gleichförmig krummlinigen** und **lie ungleichförmig krummlinigen** Bewegungen.

---

§ 14. Mechanische Spannung. — Übergang von der Phoronomie zur Dynamik.

Die bisher erörterten Begriffe von Weglänge, Zeitstrecke, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Zusammensetzung von Bewegungen, Bahnformen, Bahnkrümmungen u. s. f. führen ausschliefslich auf **Raum** und **Zeit** als Vorstellungselemente urück (psych. Anh. Nr. 41). Diejenigen physikalischen Erscheinungen aber, Anh. 41. welche man unter dem Namen „mechanische Erscheinungen" zusammenfafst, weisen aufser jenen räumlichen und zeitlichen Merkmalen noch ein drittes af, zu dessen Bezeichnung die gewöhnliche Sprache am ungezwungensten das Wort **Spannung**" darbietet (psych. Anh. Nr. 41). Ziehen z. B. Pferde einen Wagen, so Anh. 41. önnen die Gestalt der Bahn, die Geschwindigkeit dieser Bewegung u. s. f. ganz ie nämlichen sein, wenn der Wagen leicht oder schwer beladen ist; im letzteren alle aber zeigen die Muskeln der Pferde, die Stränge, die Radachsen etc. viel ärkere Spannungen als bei geringer Belastung. Auch wird z. B. eine Kettenrücke, über die der schwer beladene Wagen fährt, in stärkere Spannung geraten s unter dem leicht beladenen. — Mit diesen Spannungszuständen gehen zwar nmer Hand in Hand Deformationen (da es absolut starre Systeme nicht gibt, 50); aber die Verlängerung, welche z. B. ein Kautschukstreifen durch Ziehen n beiden Enden erfährt, ist nicht selbst die Spannung des Streifens. Über pannungszustände bei „Gleichgewicht" vergl. § 17. —

Ist das mechanische Verhalten eines Körpers (Punktes) nach seinen räumichen, zeitlichen und Spannungsmerkmalen vollständig beschrieben, so **erklären** wir es, indem wir über den einen Körper hinaus auch auf die „Umgebung" achten, in welcher und durch welche der Körper gesetzmäfsige Änderungen dieses eines Verhaltens erfährt. Beachten wir z. B. an einem frei fallenden Körper und ebenso an einem durch sein Gewicht eine Schnur spannenden Körper, dafs zu allen Zeiten und an allen Orten diese Bewegung bezw. Spannung gegen die Erde hin (genauer: normal zur Erdoberfläche) gerichtet ist, so schliefsen wir aus dieser beobachteten Regelmäfsigkeit mit Recht, dafs Stein und Erde in einer **Abhängigkeitsbeziehung zu einander** stehen. Diese meinen wir im Grunde, wenn wir sagen, zwischen Stein und Erde wirke die „Schwerkraft". — Allgemein: Dafs zwischen zwei Körpern A und B eine **mechanische Kraft** (log. Anhang Nr. 35) Anh. 35. wirke, schliefsen wir, wenn wir die Bewegungs- und Spannungszustände von A in gesetzmäfsiger Weise sich ändern sehen mit bestimmten Änderungen der gegen-

weitert, dafs immer schwierigere Aufgaben auf Grund der nämlichen physikal
Einsichten mathematisch lösbar wurden.

Vor Galilei waren es nur Aufgaben des Gleichgewichts, der sogen. St
die mit Erfolg gelöst wurden. So sprach Archimedes, zunächst jedenfal
Grund praktischer Beobachtungen, die Gesetze für das Gleichgewicht am
(§ 29), für das Schwimmen der Körper (§ 40) u. dgl. aus, machte aber die
fahrungen zum Gegenstande streng wissenschaftlicher Untersuchung, inde
auch sie auf verhältnismäfsig einfache Tatsachen (das Gesetz des gleichar
Hebels, das Gesetz des Auftriebes) zurückzuführen, bezw. aus diesen
abzuleiten unternahm. —

Gegenwärtig werden die Gesetze der **Statik als spezielle Fälle** (ge
Grenzfälle) der **Kinetik** behandelt; es ist deshalb nicht mehr nötig, die Dyn
in Statik und Kinetik auch äufserlich zu trennen. —

Ehe wir an der Spitze des folgenden Abschnittes die drei Prinzipie
Dynamik in strenger Fassung formulieren, um dann die mehr oder minder spe
mechanischen Gesetze und Erscheinungen aus ihnen zu deduzieren, veranschau
wir diese Prinzipien durch folgende drei

Vorversuche: Die bei den Versuchen des § 2 benutzte Schienenbahn un
Wägelchen werden nach Fig. 36 so aufgestellt, dafs durch schwache Neigun
Schienen der Einflufs der Reibung wieder kompensiert wird. Es entspricht dan

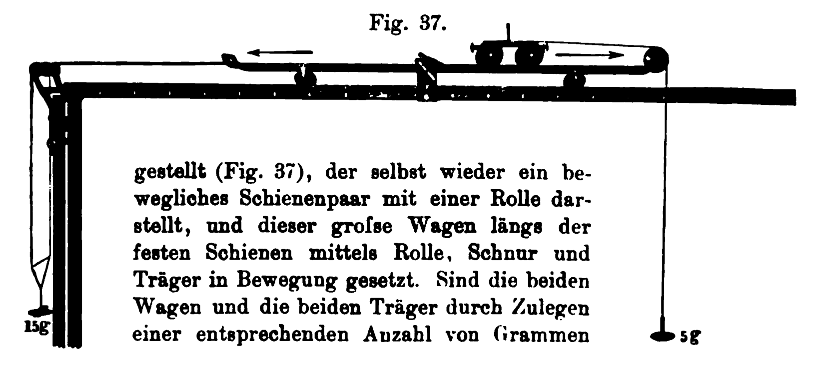
I. Trägheitsprinzip, dafs das Wägelchen auf einmaligen Anstofs gl

Fig. 36.

förmig weiterläuft. — Oder: Von dem Wagen führt übe
Rolle eine Schnur, an der ein „Träger" von 5 Gramm hängt, a
weitere Grammkörper zugelegt und von dem sie mittels eines
brochenen Tischchens wieder abgehoben werden können.
dem Einflufs des Trägers nimmt der Wagen eine Beschl
gung längs der Schienen an; wird aber der Träger beim
gehen durch das durchbrochene Tischchen teilweise entlastet
durch die vorgehaltene Hand oder das bedeckte Tischch
weiteren Sinken ganz aufgehalten, so bewegt sich der Wagen mit kleiner
schleunigung, bezw. gleichförmig weiter.

II. Unabhängigkeitsprinzip: Der kleine Wagen wird auf einen lä

Fig. 37.

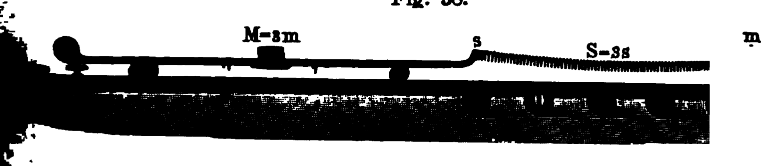


gestellt (Fig. 37), der selbst wieder ein be-
wegliches Schienenpaar mit einer Rolle dar-
stellt, und dieser grofse Wagen längs der
festen Schienen mittels Rolle, Schnur und
Träger in Bewegung gesetzt. Sind die beiden
Wagen und die beiden Träger durch Zulegen
einer entsprechenden Anzahl von Grammen

belastet, daſs die Beschleunigung des kleinen Wagens in Bezug auf den groſsen gleich und entgegengesetzt ist der Beschleunigung des groſsen Wagens in Bezug auf die Schienen, so bleibt bei gleichzeitigem Wirken der Träger der kleine Wagen in Bezug auf die Schienen in Ruhe.

III. **Gegenwirkungsprinzip:** Die Schienen werden horizontal ausgestreckt,

Fig. 38.



zwischen beiden Wagen eine Spiralfeder gespannt (Fig. 38) und dann die beiden Wagen so auseinander gezogen, daſs in der Spiralfeder eine Zugspannung entsteht. Losgelassen laufen die beiden Wagen gegeneinander. Haben die beiden Wagen samt entsprechender Belastung die gleiche Zahl von Grammen, so nehmen sie gleiche Beschleunigungen in Bezug auf die Schienen an und beschreiben daher gleiche Wege in gleichen Zeiten. Hat dagegen der eine Wagen z. B. dreimal so viel Gramm als der andere, so ist der von ihm zurückgelegte Weg dreimal so klein als der des anderen. — Abänderung des Versuches für Druckspannung!

Das Wort „**Gramm**“ wurde im vorstehenden ganz im Sinne des alltäglichen Sprachgebrauches, nämlich für diejenigen Messing- (Aluminium-, Platin-)Körper verwendet, welche vom Mechaniker mit der Bezeichnung 1 g (ähnlich wie Dekagramm, Kilogramm mit 10 g = 1 dkg, 1000 g = 1 kg) geliefert werden. Über die Definition des Gramms als Masseneinheit vergl. § 16.

B. Dynamik des Punktes.

a) Erklärung mechanischer Erscheinungen mittels der Begriffe Kraft und Masse (Dynamik im engeren Sinne).

§ 15. Die drei Prinzipien der Dynamik des Punktes.

I. Trägheits- und Beharrungsprinzip: a) **Wirkt auf einen Massenpunkt keine Kraft, so hat er keine Beschleunigung.**

Fig. 39. ——————M——————X

Ist hiernach ein Massenpunkt M (Fig. 39) von einem bestimmten Zeitpunkte an „sich selbst überlassen“, d. h. jeder mechanischen Einwirkung entzogen, und hatte er in jenem Zeitpunkte eine Bewegung mit bestimmter Geschwindigkeit c nach bestimmter Richtung MX, so bewegt er sich geradlinig gleichförmig mit jener Geschwindigkeit in jener Richtung weiter. — Daſs ein in Ruhe befindlicher Massenpunkt nicht „von selbst“ in Bewegung gerät, d. h. so lange

in Ruhe verbleibt, als er jeder mechanischen Einwirkung entzogen läfst sich als ein besonderer Fall (Grenzfall) des Gesetzes für Bewegung auffassen, nämlich für $c = 0$.

b) **Hat ein Massenpunkt Beschleunigung, so wirken ihn Kräfte.** — Nach der verallgemeinerten Bedeutung, welche Begriff „Beschleunigung“ zu Ende des § 13 erhalten hat, besagt di Satz b), dafs, so oft wir an einem Massenpunkte eine Veränder der Geschwindigkeit oder der Richtung (oder beides zugl beobachten, wir auch in seiner Umgebung bestimmte **Ursachen** (T ursachen) für das Zustandekommen dieser Geschwindigkeits- Richtungsänderungen entdecken können. Eben diese Ursachen Beschleunigungen bezeichnen wir dann als **„mechanische Kräf** (Über die Arten mechanischer Kräfte vergl. den folgenden Paragraph

Wie aus dem Gesetze a) das Gesetz b), so folgt aus b) auch a); beide Ges sind also sachlich äquivalent (aber darum noch nicht logisch identis Anh. 38. Anhang Nr. 38).

Nicht zulässig wären die beiden folgenden noch denkbaren Umkehru der Sätze a) und b): c) „Wirken auf einen Massenpunkt Kräfte, so hat er B schleunigung“. Dieser Satz gilt nämlich deshalb nicht, weil die **Kräfte** einan das **Gleichgewicht** halten können; die Bedingungen, unter welchen dies gesch werden im § 17 entwickelt. — Eben deshalb gilt auch nicht die Umkehru d): „Hat ein Massenpunkt keine Beschleunigung, so wirken auf ihn keine Kräf Vielmehr sind es in Wirklichkeit meistens gerade die Fälle eines solchen Glei gewichts von Kräften, in denen sich ein Körper so bewegt, wie wenn er ih blofs infolge der Trägheit bewegt (— nur unterläge er dann keiner Spannun

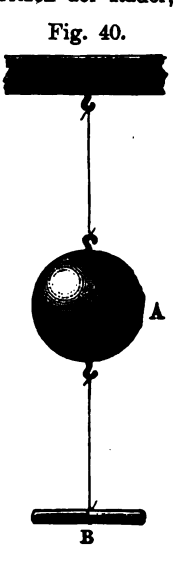
Beispiele: Ein Dampfbahn-, ein Pferdebahnwagen fährt von der Haltest mit zunehmender Geschwindigkeit ab, durcheilt mit nahezu konstanter Geschwi digkeit die „Strecke“ und läuft mit abnehmender Geschwindigkeit in der nächst Haltestelle ein. Die Dampfkraft der Lokomotive, bezw. die Muskelkraft der Pferd hat zu Beginn der Fahrt Beharrungswiderstand und Reibung zu überwind nach erlangter Fahrgeschwindigkeit steht sie mit der weiterhin allein zu übe windenden Reibung im Gleichgewichte; durch Verwendung der Bremsen wir die Reibung vor dem Anhalten gesteigert, so dafs sie über die Beharrung d Übergewicht erlangt (Gegendampf). — Auch bei den Vorversuchen zu Ende d vorigen Paragraphen war die gleichförmige Bewegung des Wägelchens nicht ei solche ohne alle Kräfte; sondern der Schwerkraft, die sonst das Wägelchen vo den (durch die) Schienen hätte hinabfallen machen, wurde durch den Widersta der Schienen das Gleichgewicht gehalten. Indem überdies jener gleichförmig Bewegung eine beschleunigte vorausging und eine verzögerte folgte, als das Wäg chen aufgehalten wurde und in stetigem Übergange aus der Bewegung zur Ruh gelangte, erläutert jener Vorversuch auch die folgenden, technisch viel gebraucht Begriffe

Anlauf, stationärer Gang, Endlauf. Ist ein Massenpunkt anfangs im Ruhezustande, so kann er aus diesem nur durch (gleich- mäfsig oder ungleichmäfsig) beschleunigte Bewegung, im sogenannten **Anlauf,** in den Zustand der Bewegung geraten. Solange dann diese

egung gleichförmig ist, wird sie als **stationärer Gang** bezeichnet. . der Punkt aus diesem Bewegungszustande wieder zur Ruhe zurückren, so kann das nur in (gleichmäſsig und ungleichmäſsig) verzerter Bewegung, im sogenannten **Endlauf** (Auslauf), geschehen.

Als augenfällige Beispiele für das Trägheits- und Beharrungsgesetz pflegen n angeführt zu werden: Das Ausspritzen einer Feder, das Spritzen der Räder, leifsteine, das Befestigen des Hammerkopfes an dem Stiel ch Aufstoſsen des Stieles auf den Amboſs; das Umfallen eines nschen beim raschen Anfahren oder Anhalten des Wagens springen in der Richtung der Fahrt!); das Überflieſsen des ssers einer rasch in Bewegung, bezw. rasch in Ruhe versten Wanne; ein Laufender kann nicht augenblicklich stehen iben (Bremsen der Wagen); Schwungräder. — Durchschieſsen er Fensterscheibe: bei groſser Geschwindigkeit macht das ojektil ein scharf abgegrenztes kleines Loch, bei kleiner Gechwindigkeit zertrümmert es die Scheibe. Ähnlich: Die Masse *A* ände sich zwischen zwei Fäden (Fig. 40). Wird unten an *B* asch gezogen, so reiſst der untere, wird an *B* langsam gezogen, o reiſst der obere Faden. Wird auf einen Menschen ein mboſs gelegt und auf diesen heftig gehämmert, so empfindet s der Mensch sehr schwach. — Bei den letzteren Versuchen st die Übertragung des Bewegungsimpulses durch verhältnisnäſsig groſse Massen hindurch von den zwischen den Massenilchen wirkenden Molekularkräften mit abhängig (§ 58). Inwieweit machen sich in diesen Erscheinungen neben dem auch das II. und das III. Prinzip der Dynamik geltend?

Fig. 40.



II. Unabhängigkeitsprinzip: **Die durch eine Kraft an einem assenpunkte hervorgerufene Beschleunigung ist unabhängig von m jeweilig schon vorhandenen Bewegungszustande des Punktes.**

Die auffallendsten Beispiele für dieses Prinzip geben, wie schon erwähnt S. 45), die Wurfbewegungen. So zeigen z. B. *Versuche* am Wurfapparat ig. 17, S. 20), daſs eine Kugel, mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit horintal geworfen, nicht früher und nicht später ein bestimmtes tieferes Niveau reicht als eine nur frei fallende. Das Sinken beider Kugeln schreiben wir derselben" Schwerkraft zu. Diese findet den Körper, der sich zum freien ll anschickt, in Ruhe, den horizontal geworfenen aber schon in Bewegung; eichwohl erhalten beide die gleichen Beschleunigungen, und nur deshalb rauchen sie auch zum Sinken aus dem einen in das andere Niveau die gleiche eit. — Ein noch einfacheres, wenn auch weniger auffallendes Beispiel gibt aber hon der freie Fall selbst. Denn auch bei ihm findet die Schwerkraft den örper anfangs mit der Geschwindigkeit Null, später mit immer gröſseren eschwindigkeiten vor, erteilt ihm aber doch immer die gleichen Geschwindigkeitszwüchse binnen gleicher Zeiten. —

III. Gegenwirkungsprinzip: **Jede mechanische Einwirkung ines Punktes *A* auf einen anderen *B* ist begleitet von einer leichgroſsen Gegenwirkung des *B* auf *A*.**

Beim Vorversuch zum III. Prinzip (S. 46) veranschaulichte uns die zwi[illegible]
die beiden Wägelchen (A und B) gespannte Spiralfeder die eine gegenseitige [illegible]
wirkung, welche gleichzeitig zwischen dem einen und dem anderen Wagen [illegible]
fand. Würde z. B. B losgebunden und die Feder nicht anderweitig befesti[illegible]
so käme es innerhalb des blofs aus dem Wagen A und der Feder beste[illegible]
Systems zu keiner Spannung und keiner Beschleunigung mehr; ebenso beim [illegible]
binden des A. Dafs wir hier die von der gespannten Feder auf beide Wagen [illegible]
geübten Kraftwirkungen als gleich bezeichnen, entspricht folgender Vorstell[illegible]
Anstatt A seitens B und B seitens A mittels einer und derselben Feder [illegible]
zu lassen, denken wir uns zuerst A allein und dann B allein durch die [illegible]
und einen passend belasteten Träger wie beim Versuch für das I. Prinzip besch[illegible]
nigt. Es würde dann beidemal die gleiche Belastung dem grofsen Wagen [illegible]
kleine, dem kleinen Wagen die grofse Beschleunigung erteilen.

Newton hat das zuerst von ihm ausdrücklich ausgesprochene Ge[illegible]
wirkungsprinzip erläutert durch den Hinweis auf die Anziehung zwischen [illegible]
und Magnet. Nicht nur der Magnet (den man sich mit Vorliebe als „aktiv" d[illegible]
wirkt auf das Eisen, sondern auch das (scheinbar „passive") Eisen auf den Ma[illegible]
Schwimmen beide mittels je einer Korkscheibe auf Wasser (*Versuch!*), so [illegible]
in Bezug auf das Wasser beide eine beschleunigte Bewegung gegeneinander [illegible]
an und üben nach erfolgter Berührung beide einen Druck aufeinander au[illegible]
Ebenso gewöhnte man sich erst seit Newton an die Auffassung, dafs nicht [illegible]
die Erde den Stein, sondern auch der Stein die Erde „anzieht". Dafs [illegible]
Anziehungen einander gleich seien, beweist Newton durch Hinweis [illegible]
dafs, wenn z. B. ein Berg durch die Erde stärker angezogen würde, als er [illegible]
anzieht, beide zusammen eine Bewegung in der Richtung Berg—Erde anneh[illegible]
müfsten.

Oft können wir uns vorstellen, dafs durch die Wirkung die Gegenwirk[illegible]
erst hervorgerufen werde. So wenn eine Schnur an einem in einer mass[illegible]
Mauer steckenden Haken befestigt ist, und wir in dem Mafse, wie wir mit [illegible]
Hand an der Schnur den Haken aus der Mauer herauszuziehen suchen, un[illegible]
Hand zur Mauer hingezogen empfinden. — Ebenso: Wenn ein Arbeiter einen [illegible]
bahnwagen zu verschieben hat und so unvorsichtig ist, seine Hand gegen [illegible]
herausragende scharfe Ecke oder einen Nagel wirken zu lassen, so empfindet [illegible]
die Gegenwirkung des Wagens so, wie wenn dieser ihm die Spitze in die H[illegible]
drücken wollte. Auch der Wagen auf den festen Schienen „weckt" durch sei[illegible]
Druck nach abwärts in diesen einen Gegendruck nach aufwärts. — Ein besond[illegible]
Fall solcher Gegenwirkung im engeren Sinne ist es auch, was wir im Anschl[illegible]
an das Gesetz I b als „Beharrungswiderstand" bezeichnen. An sich sagt [illegible]
Gesetz I b nur, dafs, wenn ein Massenpunkt sich nicht geradlinig und glei[illegible]
förmig bewegt, er durch äufsere Kräfte zu den Abweichungen von der Geradlinig[illegible]
keit und Gleichförmigkeit der Bewegung veranlafst wird. Es ist eine darüb[illegible]
schon hinausgehende und unter das Gesetz III fallende Tatsache, dafs er auf [illegible]
Körper, von denen jene Einwirkung ausging, ebenfalls eine Einwirkung ausübt. [illegible]
Nur in diesem Sinne darf man den (von Kepler zuerst gebrauchten) Ausdr[illegible]
vis inertiae, „Kraft der Trägheit", verstehen; denn ihrem ursprünglichen Begri[illegible]
nach stellt „Trägheit" einen Gegensatz zu „Kraft" dar (weshalb man auch z. B. [illegible]
nicht sagen soll: „die Trägheit bewirkt, dafs ein horizontal geworfener Körp[illegible]
diese Bewegungskomponente beizubehalten sucht" u. dergl.; sondern nur etwa [illegible]
„der Körper bewegt sich infolge der Trägheit" in horizontaler Richtung weiter" [illegible]
oder noch besser: er bewegt sich „gemäfs dem Trägheitsgesetze").

der Zugspannung, welche zwischen den die Beschleunigung erteilenden
fangenden Körpern auftritt) zu bemessen. So erwarten wir, dafs, wenn
r einen Wagen von 1 Tonne (1000 kg) in Bewegung zu versetzen, d. h. ihm
immte Beschleunigung zu erteilen vermag, 2, 3, . . . „gleich kräftige“
erforderlich sein werden, damit sie an einem Wagen von 2, 3, . . . Tonnen
he Bewegung hervorbringen. Dagegen erzielen 2, 3 . . . Arbeiter an
eine stärkere Bewegung, 1 Arbeiter erzielt an 2, 3 . . . Tonnen eine
re Bewegung, wobei er einen stärkeren Druck oder Zug als bei 1 Tonne
t. — Hier ist also nach der Zahl der Arbeiter deren **Kraft** als das der
unigung Förderliche, dagegen nach der Zahl der Tonnen das der
unigung Hinderliche, die **Masse**, bemessen worden. Wir vervoll-
ı diese Betrachtungsweise, indem wir die blofs qualitativen Vorversuche
des § 14 (S. 46) ausbilden zu folgenden quantitativen
suchen: Wir lassen wieder den Wagen durch den Träger in Bewegung
; diese ist beschleunigt. Wird ein Teil der Schnur durch eine elastische
er ersetzt, so zeigt sich diese, wenn der Wagen angehalten wird, stark,
in Beschleunigung ist, schwächer gespannt. Wenn der Träger während
ns weder mehr belastet noch entlastet wird, so stellt sich die Bewegung
hmäfsig beschleunigt heraus, indem während 1, 2, 3 . . . sec bei
stimmten, zunächst durch Ausprobieren zu findenden Verhältnis
n belastetem Träger und belastetem Wagen 5, 20, 45 . . . cm
legt werden; denn dann ist (wie in den Versuchen 1 des § 2) $a = 5$ cm
h § 6) die konstante Beschleunigung $b = 10 \text{ cm sec}^{-2}$. — Um diese
igung vorausberechnen zu können, schliefsen wir so: Hätte die
abwärts sinkende Masse des Trägers nicht die Masse des Wagens auf
ter Bahn nachzuschleppen, so würde der Träger frei fallen, seine Be-
also eine mit der Beschleunigung $b = g \neq 1000 \text{ cm sec}^{-2}$ sein. Diese
igung erhält der Träger, indem einerseits an ihm die Schwerkraft (als
Beschleunigung Förderliche) angreift, anderseits durch diese Kraft aber
e eigene Masse (als das infolge seiner „Beharrung“ der Beschleunigung
he) in Beschleunigung zu versetzen ist. Hat nun in dem
such 1 der Träger eine Masse von 5 g und hat er die Masse eines

der mit weiteren 5 g belastete Träger statt der Gesamtmasse 500 g eine w
1000 g in Bewegung zu versetzen hat. — Um weiter statt der Beschleunig
$b = 10 \text{ cm sec}^{-2}$ z. B. $b = 20 \text{ cm sec}^{-2}$ zu erhalten, wird entweder in

Versuch 3 die **Kraft verdoppelt**, d. h. wir legen zur Masse des Träg
noch 5 g und belasten den Wagen bis 490 g; oder es wird in

Versuch 4 die **Masse halbiert**, d. h. wir lassen die Masse des Trägers
sein und belasten den Wagen bis 245 g.

Ist also z. B. die Masse des unbelasteten Wagens 180 g und nennen wir
Anzahl der an der Schnur sinkenden Gramme m, die Gesamtzahl der zu b
schleunigenden Gramme M, so gehören folgende Zahlen zusammen:

$$m_1 = 5 \qquad M_1 = 5 + 180 + 315 = 500; \qquad b_1 = 10 \text{ cm sec}^{-2}$$
$$m_2 = 10 \qquad M_2 = 10 + 180 + 810 = 1000; \qquad b_2 = 10 \text{ cm sec}^{-2}$$
$$m_3 = 10 \qquad M_3 = 10 + 180 + 310 = 500; \qquad b_3 = 20 \text{ cm sec}^{-2}$$
$$m_4 = 5 \qquad M_4 = 5 + 180 + 65 = 250; \qquad b_4 = 20 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Gröfser als g kann b bei unseren Versuchen nie werden, wohl aber k
b bei Wahl von sehr kleinen m und sehr grofsen M **beliebig nahe der N**
kommen. — Allgemein ist bei allen jenen Versuchen $b = \frac{m}{M} g \text{ cm sec}^{-2}$. D
hier nur das **Verhältnis** $m : M$ vorkommt, so setzt diese Formel noch kein b
stimmtes Mafssystem für m und M voraus. —

Um nun für die bei diesen Versuchen sowie bei **sämtlichen mechanisch
Erscheinungen** auftretenden **Massen** und **Kräfte** feste **Mafseinheiten** und
Mafszahlen zu bekommen, schliefsen wir so: Legen wir die Träger, statt sie mit
Beschleunigung sinken zu lassen, ruhig auf die Hand, so empfinden wir einen
bei $m_1 = m_4 = 5$ g einen **schwächeren**, bei $m_2 = m_3 = 10$ g einen **stärkeren**
Druck; desgleichen einen **Zug**, wenn wir die Schnur oberhalb des Trägers an
fassen oder ihn an einer Spiralfeder aufhängen.

Denken wir uns anderseits, jene 5 oder 10 g (oder was immer für ein
anderer Körper) erhielten statt der Beschleunigung $g = 1000 \text{ cm sec}^{-2}$ an irgend
einem Punkte des Weltraumes nur eine Beschleunigung von 500 cm sec^{-2} (wie es
bei hinreichender Höhe über der Erdoberfläche wirklich ist, § 20, desgleichen
an der Oberfläche des Mondes 6 mal so klein, an der Oberfläche der Sonne
28 mal so grofs als an der Erdoberfläche), so würden wir die auf jene Körper
wirkende beschleunigende Kraft 2 mal so klein (bezw. 6 mal so klein, 28 mal so
grofs) nennen.

Wir messen also die **Gröfse der Kraft** einerseits (**statisch**) nach der
Druck- oder Zug-Spannung; anderseits (**kinetisch**) nach der **Beschleunigung**,
welche ein und derselbe Körper infolge dieser Kraft erfährt. — Dabei können sich an
dem Körper manche seiner Eigenschaften ändern (z. B. sein Wärmegrad und infolge
dessen sein Volumen, desgleichen sein Volumen durch Zusammendrücken und dergl.,
seine Farbe infolge Beleuchtung mit verschiedenfarbigem Licht und dergl.), ohne
dafs die für sein mechanisches Verhalten allein mafsgebende Gröfse, seine „**Masse**“,
sowie das nach der Gröfse dieser Masse sich richtende „**Gewicht**“ (d. i. die
statische Wirkung der Schwerkraft) sich ändert.

Bei der Feststellung aller Mafssysteme, welche über die Messung von Raum-
und Zeitgröfsen hinausgehen, war die erste Sorge, einen möglichst unveränderlichen
oder immer wieder in genauer Kopie herstellbaren **Normalkörper** behufs Ver-
gleichung von Stoffmengen festzustellen (Afs, Pfund der verschiedenen Staaten,
Unze, Gran, . . .). Im folgenden wird, wie auch schon früher (§ 3 ff), das

.meter-Sekunde-Gramm-System (Anh. 1) zu Grunde gelegt, in welchem lgenden Definitionen gelten: Anh. 1.

Einheit der Masse ist im C-S-G-System die Masse des „Gramm-›ers", d. i. die Masse desjenigen Körperchens, das nach wissen-ftlicher Prüfung (nämlich mittelbarer Vergleichung mit dem Pariser **grammkörper,** der wieder nach 1 dm³ reinen Wassers von 4° C ‹fertigt wurde, math. Anh. 5), die Bezeichnung **1 Gramm** (1 g) lten hat. — Ebenso schreiben wir allen, wie immer sonst be-ffenen Körpern die Masse von 1 g, bezw. von m g zu, welche an r guten Wage (§ 29) einem, bezw. m solchen Grammkörperchen Gleichgewicht halten. Anh. 5.

Einheit der Kraft ist die Kraft, die der Einheit der Masse Einheit der Beschleunigung erteilt. Im C-S-G-System wird als teinheit **1 Dyn** gewählt, d. i. die **Kraft, die der Masse von 1 g Beschleunigung von 1 cm sec⁻²** erteilt (LA 35). — Wie ferner ›big grofse Kräfte in Dyn gemessen werden, zeigt zunächst die LA 35.

Aufgabe: Mit wieviel Dyn wirkt die Schwerkraft auf eine se von m g, indem sie ihr die Beschleunigung von g cm sec^{-2} erteilt?

r.: Empfinge 1 g nur 1 cm sec^{-2}, so wirkte die Schwere mit 1 Dyn;
empfängt 1 g g cm sec^{-2}, so wirkt die Schwere mit g Dyn;
empfangen m g g cm sec^{-2}, so wirkt die Schwere mit mg Dyn.

Da wir uns dieselbe Anzahl mg Dyn auf die m g auch noch wirkend denken, . diese der Schwere nicht im freien Falle folgen können, sondern wenn sie ‹ine feste wagerechte Unterlage denjenigen Druck ausüben, welchen man das **lute Gewicht** *(pondus)* des Körpers nennt, so können wir die gefundene zahl mg der beschleunigenden Schwerkraft auch der Mafszahl p des ichtes gleichsetzen und erhalten als Mafsformel für die

stante Kraft der Schwere an einer Masse von m g (lies: m Gramm):

$$p = mg \text{ Dyn; somit } g = \frac{p}{m}, \quad m = \frac{p}{g} \text{ (in Worten!).}$$

Dafs die Schwere eine **„konstante Kraft"** sei, heifst vollständiger: ʒen wir einen Körper, z. B. einen Stein, ein Buch, . . ., an verschiedene kte A, B, C. . . . einer über einer Stelle der Erdoberfläche errichteten Lot-‹en (und zwar zu beliebigen Zeiten), und lassen wir ihn von diesen ver-denen Punkten aus einerseits frei fallen, so beginnt jede dieser Bewegungen ler gleichen Beschleunigung; halten wir anderseits den Körper an jenen ɜn fest, so übt er überall den gleichen Zug (Druck) aus (dafs beide hheiten nur annähernd zutreffen, vergl. § 20). Gesetzt nun, der Körper e im Punkte A frei fallen gelassen, so dafs er in dem tiefer gelegenen :te B mit einer Endgeschwindigkeit v ankommt, und wäre von B an die ere Null, so würde der Körper nach dem Trägheitsprinzipe (§ 15, I.) Bewegung mit der Geschwindigkeit v gleichförmig fortsetzen (vergl. die gung des Wagens am Schienenapparat bei Aufhalten des Trägers, sowie an ›ds Fallmaschine — s. u. — nach Abheben des Übergewichtes). Da aber in B wieder die Schwere in gleicher (kinetischer wie statischer) Gröfse wirkt, rhält er nach dem Unabhängigkeitsprinzipe (§ 15, II) auch hier die

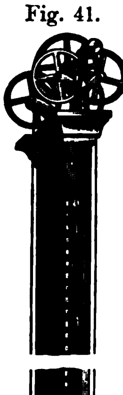
gleiche Beschleunigung, wie wenn er von B aus mit der Anfangsges keit Null sich zu bewegen begonnen hätte; und so in allen tiefer gelegene C, D . . . — So erklärt es sich also aus dem I. und II. Prinzipe der auch allgemein, dafs überhaupt an demselben Körper **eine konstante K konstante Beschleunigung erzeugt.**

(Eine logisch noch strengere Ableitung der Gleichung $p = mg$ u Verallgemeinerung $f = mw$ hätte ausschliefslich aus den Definitionen Kräfte", „gleicher Massen", „gleicher Beschleunigungen" und den drei Pri der Dynamik zu erfolgen; vgl. log. Anh. Nr. 37.

Anh. 37.

Die Gleichung $p = mg$ läfst sich zuerst verallgemeinern auch f konstante Kräfte, welche mit der Schwere nichts zu tun haben; z. B. das Wägelchen längs der wagrechten Schienenbahn, durch den sinkenden Träger ziehen zu lassen, durch die kraft unserer Hand so ziehen, dafs eine zwischen und das Wägelchen gespannte Feder während der g schleunigten Bewegung immer dieselbe Verlängerung solchen Fällen empfiehlt es sich, statt der Buchstaben welche speziell auf die Schwere sich beziehen (*pond* wicht, *gravitas* = Schwere), allgemeiner zu setzen konstant) und b (Beschleunigung, bleibend). Jene $p = mg$ verallgemeinert sich dann zu dem Satze:

Fig. 41.



Um an einer Masse von mg eine ko Beschleunigung von $b\,\mathrm{cm\,sec}^{-2}$ hervorzub bedarf es einer

konstanten Kraft $k = mb$ Dyn; da



$$b = \frac{k}{m}, \quad m = \frac{k}{b}, \text{ in Worten!}$$

Ein Beispiel zu dieser allgemeineren Gleichung bilden die obigen Versuche 1 bis 4 am Schienenappa Kraft, mit welcher die Schwere an den mg des Träger ist $p = mg$, wenn p die Anzahl der Dyn bedeutet, m die Schwerkraft den Träger abwärts zieht. Diese p D zugleich jene Kraft von k Dyn dar, welche der Gesamt die Beschleunigung $b\,\mathrm{cm\,sec}^{-2}$ erteilt, so dafs $k =$ hier $p = k$, also $mg = Mb$, so ist wieder $b = \frac{m}{M}$ die Versuche 1 bis 4 ergaben.



Wie durch den Schienenapparat l die Beziehungen zwischen p, m und g, b und b auch veranschaulichen durch

Atwoods (eigentlich Schobers, 17 maschine (Fig. 41). Diese besteht in lichen aus einer in vertikaler Ebene fixen Rolle (auf einer etwa 2 m hohen Säule mit Mafsstab), um welche eine Sc zwei Trägern von je μ g gelegt ist. W eine Träger losgeknüpft, so würde der a der Beschleunigung $g \neq 1000\,\mathrm{cm\,sec}^{-2}$ f

einen gemeinschaftlichen Kraftbegriff zusammengefafst. Und erst NEWTON h[illegible] die ganze Mannigfaltigkeit der ihrer **Herkunft** nach höchst verschiedenen K[illegible] (elektrische, magnetische Anziehungen und Abstofsungen, irdische und kosmi[illegible] Schwere, elastische und sonstige „Molekularkräfte" — s. u. —) unter denje[illegible] einen allgemeinen Begriff der **„beschleunigenden Kraft"** zusammen, wel[illegible] nur mehr nach der **einheitlichen Wirkung**, nämlich auf Grund des [illegible] harrungsgesetzes I b (§ 15) durch das **eine** Merkmal definiert ist, dafs die Wirk[illegible] je einer mechanischen Kraft in einer **Beschleunigung**, d. i. Abänderung der G[illegible] **schwindigkeit** oder (und) **Richtung** einer bewegten Masse besteht; wozu [illegible] die ebenfalls einheitliche **mechanische Spannung** im Falle des Gleichgewich[illegible] **zweier oder mehrerer** Kräfte (§ 17) kommt.

Ein vollständiger Überblick über die ganze Mannigfaltigkeit der unter d[illegible] einen Kraftbegriff fallenden mechanischen Kräfte ist noch nicht hier, sondern [illegible] auf Grund der ganzen Physik zu geben, indem nicht nur alle Arten **mechanisc[illegible]** Vorgänge (Stofs bewegten Wassers, bewegter Luft, Auftrieb in Flüssigkeiten [illegible] Gasen, Kapillarerscheinungen, . . .), sondern auch viele **aufsermechanis[illegible]** Vorgänge von Beschleunigungen oder (und) mechanischen Spannungen begl[illegible] sind. So besitzt heifser Dampf „Spannkraft", ein sich abkühlender Radr[illegible] drückt die Teile des Rades mit grofser Kraft zusammen und hält sie auch [illegible] nach der Abkühlung beisammen; zwei gleich- oder ungleichnamig elektrische P[illegible] erteilen einander Beschleunigungen und Ablenkungen aus der Lotlage ent[illegible] der Schwere u. s. f. — Eine feste Einteilung der mechanischen Kräfte ist auch [illegible] halb nicht zu geben, weil die Physik vielfach mit Erfolg bemüht war und [illegible] immer ist, einzelne dieser Kräfte aufeinander **zurückzuführen**: z. B. die „Steig[illegible] kraft" eines Luftballons auf den Auftrieb der Luft, diesen auf deren Gewicht[illegible] druck; ferner wird nach der kinetischen Wärmehypothese (§ 83) die Expansivkr[illegible] des heifsen Dampfes im Cylinder einer Dampfmaschine (aber auch der Luft [illegible] jedes anderen Gases bei jeder Temperatur) auf den Stofs der einzelnen Gasteilch[illegible] gegen den beweglichen Kolben, die unbeweglichen Wände u. s. f. zurückgeführ[illegible] So ist auch die Zurückführbarkeit der elektrischen und magnetischen „Anziehung[illegible] und Abstofsungen", die so lange als „fernwirkende Kräfte" galten, auf Übe[illegible] tragungen von Druck und Zug durch einen zwischen den bewegten Massen befin[illegible] lichen Stoff, den „Äther", wahrscheinlich geworden; dagegen ist eine analog[illegible] Zurückführung auch der irdischen und der von NEWTON entdeckten allgemein[illegible] Schwere bisher nicht gelungen. — Von diesen Theorien und Hypothesen über d[illegible] Zurückführbarkeit der Kräfte bleibt die Mechanik unabhängig, solange sie nur [illegible] Betracht zieht, **was alles man in Dyn messen kann**: irdische und kosmisc[illegible] **Schwere, elastische** Kräfte (einer Spiralfeder, eines zusammengedrückten Billar[illegible] balles, eines unter irgend welchem äufseren Druck stehenden Gases ...); **Kohäsi[illegible]** fester Körper (Zug-, Druck-, Bruchfestigkeit . . .); **Gegendruck** und [illegible] seitens **fester** Körper beim Einwirken von Kräften (Widerstand wagerechter [illegible] schiefer Ebenen gegen das Gewicht der auf ihnen liegenden oder sich bewegen[illegible] Körper, Spannung des Pendelfadens ...), **hydrostatischen Druck, Luftdru[illegible]** **Auftrieb; Druck** einander berührender Massen von verschiedener Geschwin[illegible] keit (während des **Stofses** unelastischer und elastischer Körper), **Druck** [illegible] Wasser- und **Luftströmungen** (bei Wasser-, Windmühlen . . .), **Kraft des Rü[illegible]** **stofses** (Turbinen, Raketen . . .), **Reibung** und Luftwiderstand (allgemein[illegible] **Widerstand des Mittels), Adhäsion** zwischen festen, zwischen festen und flüssi[illegible] Körpern, **Oberflächenspannung, Kapillarkräfte, osmotischen Druck**; me[illegible] nische Kräfte bei **Wärmeerscheinungen** (erhitzte Gase, gefrierendes Wasser), K[illegible]

bei **chemisch-thermischen** Erscheinungen (Explosivstoffe), **Muskelkraft** von Menschen und Tieren, mechanischen Druck und Zug bei **elektrostatischen, magnetischen, elektromagnetischen, elektrodynamischen** Erscheinungen.

Inwiefern wir überdies in Dyn auch solche Gröfsen messen dürfen, die wir nicht für eigentliche „Kräfte" halten, zeigen folgende Beispiele: 1. Die „**Reibung**"; geht ein Wagen von wagrechter auf eine ansteigende Strecke über, so ist durch die Muskelspannung der Pferde hier, wo Reibung und Schwerkraftskomponente zusammenwirken, nur ein gröfserer, aber qualitativ gleichartiger, Widerstand zu überwinden als dort, wo nur die Reibung wirkte. (Über die einzelnen Kräfte, welche sich zusammen als „Reibung" äufsern, vergl. § 59). — 2. Die „**Fliehkraft**" (§ 19); obwohl sie nur eine Gegenwirkung gegen die z. B. einen Stein an einem Faden im Kreise herumschwingende Centripetalkraft der Hand ist, äufsert sie sich doch in der Spannung des Fadens so, wie wenn an dem ruhenden Faden nach entgegengesetzten Seiten wirkliche Kräfte zögen. Ebenso 3. auch jede andere „**Kraft der Beharrung**" („*vis inertiae*" § 15, Ende), wie sie jede Masse äufsert, während ihr eine Kraft eine Beschleunigung erteilt.

Der einstmals angenommene Gegensatz zwischen „bewegenden Kräften" (z. B. der Schwerkraft, welche jederzeit bereit ist, einen losgelassenen Stein in positive, einen vertikal aufwärts geworfenen in negative Beschleunigung zu versetzen) und „Bewegungshindernissen" (welche, wie die Reibung, nur einem schon in Bewegung befindlichen Körper eine Verzögerung, nicht aber eine positive Beschleunigung erteilen zu können schien) ist kein durchgreifender, indem z. B. beim „Mitnehmen durch Reibung" (wenn etwa beim Vorversuch 2, S. 46 unter dem kleinen Wagen der grofse weggezogen und dadurch der kleine in Bewegung gesetzt wird) auch die Reibung Geschwindigkeiten vergröfsert. —

Desgleichen ist auch der einstmals angenommene Gegensatz von „Momentankräften", die durch **das Produkt** mc, und kontinuierlichen Kräften, die durch das Produkt mb gemessen werden, nicht aufrecht zu erhalten; denn jede Kraft braucht zu ihrer Wirkung endliche (und durch hinreichend feine Mittel mefsbare) Zeit. Auch z. B. die Spannkraft der Pulvergase wirkt auf die Kugel während der allerdings sehr kurzen Zeit, in der diese von dem hinteren bis an das vordere Ende des Laufes sich bewegt; desgleichen die elastischen Kräfte zweier Billardbälle während der kurzen Zeit ihrer Berührung im Stofs. — Unabhängig von dem Begriff der „Momentankraft" ist übrigens das Kraftmafs mc, welches als „**Bewegungsgröfse**" bezeichnet wird, doch nützlich, wo uns nicht die Vorgänge während des Wirkens einer Kraft (gleichviel übrigens, ob sie nur kurze oder lange Zeit wirkt), sondern nur die nach Aufhören der Kraft erlangte Endgeschwindigkeit c einer Masse m interessiert. Dies ist namentlich der Fall bei allen im engeren Sinne sogen. **Stofswirkungen**. Dafs gleichwohl auch dieses Kraftmafs mc nur eine Folge der Grundgleichung der Dynamik $f = mw$ ist, zeigen folgende Gleichungen und ihre Ableitung:

Stofsen zwei Körper (die hier als Massenpunkte aufgefafst werden, vergl. § 58) von m_1 und m_2 g Masse mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 aneinander, indem sie sich längs derselben Geraden in derselben Richtung so bewegen, dafs $c_1 < c_2$, so suchen sie ihre Geschwindigkeiten auszugleichen, bis ein Mittelwert (Anh. Nr. 9) erreicht ist, dessen Gröfse Anh. 9.

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \cdots (1) \text{ der Gl. } m_1(c - c_1) = m_2(c_2 - c) \cdots (2)$$

entspricht. Hier besagt (2): **Der Zuwachs an Bewegungsgröfse bei dem einen Körper ist gleich der Abnahme an Bewegungsgröfse beim anderen.** Diese Zunahme bezw. Abnahme von Geschwindigkeit des einen und anderen Körpers erfolgt gemäfs dem Gegenwirkungsprinzip (§ 15, III), vermöge dessen in jedem Zeitpunkte die Gröfse des Druckes, den der eine Körper vom anderen erfährt, dem Gegendrucke gleich ist.

Denken wir uns hiernach die Zeit der gegenseitigen Einwirkung beider Massen zerlegt in die sehr kurzen Zeitteilchen τ, τ', τ'', . . ., so können wir die Gröfse des Druckes und Gegendruckes als während dieser Zeiten konstant annehmen, und es erhalten daher z. B. während des Zeitteilchens τ die beiden Massen Beschleunigungen γ_1 und γ_2 gemäfs der Gleichung $m_1\gamma_1 = m_2\gamma_2$; ebenso im zweiten Zeitteilchen gemäfs $m_1\gamma'_1 = m_2\gamma'_2$ u. s. f. Es ist dann die gesamte

Geschwindigkeitszunahme für m_1 folgende: $c - c_1 = \gamma_1\tau + \gamma'_1\tau' + \gamma''_1\tau'' + \cdots$

daher: $m_1(c - c_1) = m_1\gamma_1 . \tau + m_1\gamma'_1 . \tau' + m_1\gamma''_1 . \tau'' + \cdots$

Geschwindigkeitsabnahme für m_2 folgende: $c_2 - c = \gamma_2\tau + \gamma'_2\tau' + \gamma''_2\tau'' + \cdots$

daher: $m_2(c_2 - c) = m_2\gamma_2 . \tau + m_2\gamma'_2 . \tau' + m_2\gamma''_2 . \tau'' + \cdots$

Da die rechten Seiten dieser Gleichungen gliedweise gleich sind, so ist die Gleichung (2), also auch (1), aus der Grundgleichung der Dynamik $f = mw$, speziell $k = mb$, abgeleitet. — Da hier die Gröfse mc schon in der Dimension (cm sec^{-1} g) sich von der Dimension der Dyn (cm sec^{-2} g) unterscheidet, so ist ersichtlich, dafs Bewegungsgröfsen nicht in Dyn gemessen werden können. —

Ebenfalls nicht in Dyn (sondern in **Erg**, § 22) werden die während des ganzen (ebenfalls wieder gleichviel, ob kurz- oder langdauernden) Wirkens von mechanischen Kräften vollzogenen Gesamtleistungen, die **mechanischen Arbeiten,** gemessen; z. B. die der Finger eines Klavierspielers beim Anschlagen der Tasten u. dergl. Es ist hier unzulässig, die „Gesamtkraft" eines Klavierspielers der ein Stück von 10000 Tönen auf Tasten gespielt hat, die durch je 100 Gewichtsgramm niederzuhalten sind, mit 10000 × 100 Gramm angeben zu wollen (LA 54) denn wenn auch zum Niederhalten einer Taste durch den auf eine bestimmte Stelle drückenden Finger eine Kraft von k Dyn erforderlich ist, so ist dagegen zum Verschieben der Taste von ihrer Ruhelage bis in die tiefste Lage eine gewisse Arbeit derjenigen Kraft erforderlich, welche während dieses Verschiebens gegen den Widerstand der Tasten geleistet wird. — Desgleichen wirkt zwar in jedem Zeitpunkte während der kurzen Zeitstrecke des sich Stofsens zweier Billardbälle zwischen ihnen eine elastische Kraft von einer bestimmten Anzahl Dyn; aber während der Zeitstrecke von der ersten Berührung bis zur gröfsten Abplattung (und ebenso wieder von da bis zum Auseinanderlaufen) der Bälle hat nicht eine bestimmte „Gesamtkraft" gewirkt, sondern es wurde eine bestimmte „Gesamtarbeit" geleistet. Ebenso vom Rammbären, während er den Pfahl bis zu gewisser Tiefe in die Erde treibt, u. dergl. m.

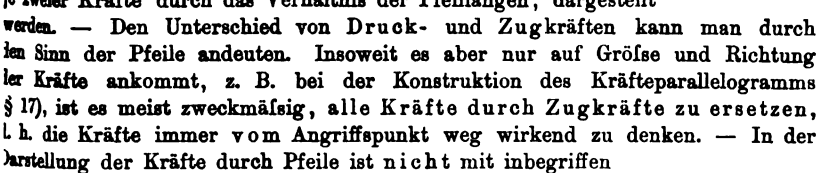
Nur für die in Dyn zu messenden mechanischen Gröfsen gelten folgende

Bestimmungsstücke einer Kraft: 1. Der **Angriffspunkt,** d. h. derjenige Punkt, welcher, wenn er nicht mit den übrigen Punkten des Körpers durch Kräfte verbunden wäre, während des Wirkens der Kraft allein eine Beschleunigung annähme; in Wirklichkeit pflegt aber der Angriffsort von Kräften meistens eine Fläche (z. B. beim Vorwärts

hieben eines Wagens mit der Hand) oder der ganze oder ein Teil
s Raumes zu sein, den der Körper einnimmt (so bei der Schwere). —
Die **Richtung** der Kraft, d. i. die Richtung jener Beschleunigung. —
. Die **Gröſse** der Kraft, welche gemessen wird durch eine Anzahl
on Dyn (bezw. Kraftgramm, Kraftkilogramm, s. u.).

Die Instrumente zur Messung von Kräften sind: 1. Die Hebelwage (§ 29),
. die Federwage (§ 51), 3. das **Dynamometer** (Fig. 42). Dabei werden 2. und 3.
eeicht, indem ihre elastische Kraft mehr oder minder mittelbar
erglichen wird mit den Schwerewirkungen an der Hebelwage. —
bei sehr vielen Kräften, wie Luftdruck, Druck in Wasserleitungs-
öhren . . ., kommt nebst der Anzahl der wirkenden Dyn noch
lie Anzahl der Quadratcentimeter der gedrückten Fläche in Be-
racht. Solche Wirkungen werden in Dyn per Quadratcenti-
neter (nach dem absoluten System, s. u., häufiger aber nach dem
irdischen System in **Atmosphären**, at, § 44) gemessen. Die In-
strumente zu solchen Messungen sind die Manometer (§ 47) und
speciell für den Luftdruck die Barometer.

Fig. 42.



Kräfte lassen sich durch **Pfeile** (Kraftvektoren, § 8, Anh. Nr. 8) darstellen, wobei Angriffspunkt und Richtung unmittelbar, die Kraftgröſse aber nur verhältnismäſsig, d. h. das Verhältnis je zweier Kräfte durch das Verhältnis der Pfeillängen, dargestellt werden. — Den Unterschied von Druck- und Zugkräften kann man durch den Sinn der Pfeile andeuten. Insoweit es aber nur auf Gröſse und Richtung der Kräfte ankommt, z. B. bei der Konstruktion des Kräfteparallelogramms (§ 17), ist es meist zweckmäſsig, alle Kräfte durch Zugkräfte zu ersetzen, d. h. die Kräfte immer vom Angriffspunkt weg wirkend zu denken. — In der Darstellung der Kräfte durch Pfeile ist nicht mit inbegriffen

Anh. 8.

4. die **Dauer** der Kraftwirkung. Die Kraft kann während der immer endlichen Zeit ihrer Wirkung Richtung und Stärke behalten (z. B. die Schwerkraft nahe der Erde) oder sie verändern (wie die auf einen Planeten während seines Umlaufes um die Sonne wirkende Gravitation dem Raume nach, die elektrische Anziehung oder Abstoſsung einer sich allmählich entladenden Sammelkugel der Zeit nach).

Zur Entwickelung des Massen-Begriffes. Die gewöhnliche Sprache bedient sich des Wortes „Masse" manchmal, um überhaupt nur irgend eine „Menge" zu bezeichnen, z. B. „eine Masse Menschen" („Konkursmasse"); wieder eine ganz andere Bedeutung ist die bei Bezeichnung von Stoffen; so, wenn wir von einer Fahrbahn aus „Zementmasse" oder von der Einhüllung eines Dampfrohres in eine „Wärmeschutzmasse" u. dergl. reden.

Der Begriff, welchen die gegenwärtige wissenschaftliche Physik mit dem Worte „Masse" verbindet, hat einen von dem angeführten Sprachgebrauch ganz abweichenden logischen Inhalt, der sich nur sehr allmählich aus den Erfahrungen und Theorien der Mechanik selbst erst entwickelt hat. — Wir sind geneigt, ein Gramm Wasser eine kleine, eine Tonne Kohle eine groſse Masse zu nennen. Welches quantitative Merkmal haben wir bei dieser Vergleichung im Auge? das Volumen? das Gewicht? — Indem Descartes (1596 — 1650), um von gröſserer oder kleinerer Masse zu sprechen, nur die Ausdrücke *corpus majus* und *corpus minus* (gröſsere, kleinere Körper) benutzte, scheint er zunächst nur das Volumen — indem Galilei (1564 — 1642) das verschiedene mechanische Verhalten der Körper

durch den Ausdruck *pondus* bezeichnete, scheint er nur das **Gewicht** im A
zu haben. Erst NEWTON (1642—1726) gebraucht den Ausdruck *massa* in b
stimmter Unterscheidung von *corpus* und *pondus*; und wiewohl NEWTONS Fassu
Massa est quantitas materiae (Masse ist Menge der Materie) selbst noch f
mell unvollkommen war, ist es doch der von NEWTON gemeinte Begriffsinh
welcher — trotz zahlreicher Anstrengungen, das Wort „Masse" von Grund aus u
zudefiniren (z. B. als bloſse Zahl, als Quotienten aus Kraft und Beschleunigung u. s. w.)
bis heute den wissenschaftlichen Begriff der Masse ausmacht. Um diesen Begr
aus den Erscheinungen zu entwickeln, gehen wir aus von Beispielen für die mit
sich verwandten, aber doch wohl voneinander zu unterscheidenden Begriffe

Körper, Stoffe, Materie; Massen. Eine Kupfermünze, e
Wassertropfen, eine Luftblase sind verschiedene **Körper**. An jede
derselben unterscheiden wir die räumlichen Eigenschaften (Volum
und Gestalt) und nebst diesen noch die vielerlei Qualitäten: d
Farbe, des Gewichtes, des Verhaltens beim Erwärmen, bei chemisch
Einflüssen u. s. w. Im Hinblick auf die letzteren Eigenschaften u
abgesehen von den räumlichen nennen wir Kupfer, Wasser, L
verschiedene **Stoffe** und sagen, daſs z. B. eine Kupfermünze und ei
Kupferkessel aus dem gleichen Stoffe bestehen. Alle Körper bez
Stoffe fassen wir zusammen unter der Bezeichnung **Materie**.

Wenn nun NEWTON jedem Körper eine bestimmte „Quantität der Materie"
als „Masse" zuschreibt, so ist diese Definition nicht zu verwerfen, sondern nur zu
ergänzen, damit sie sich mit dem gegenwärtigen Begriffe der Masse deckt.
Wenn wir uns z. B. von 1000 einzelnen Kubikcentimetern Wasser versichert
haben, daſs sie aus gleichem Stoffe bestehen (d. h. die gleichen chemischen Eigen-
schaften des reinen Wassers haben, unter gleichem Druck stehen, gleiche Tempe-
ratur besitzen...), und sie nun zu einem Körper von 1 Liter vereinigen, so enthält
dieser eine Körper einerseits eine 1000 mal so groſse „Menge" Wasser als 1 cm³,
anderseits stellt er auch nach dem gegenwärtigen Begriffe eine 1000 mal so groſse
„Masse" Wasser dar. Auch wenn wir einen Körper, ohne von seinem Stoffe
etwas wegzunehmen, auf kleineres Volumen bringen (z. B. das Mehl in der Lade),
ihn „verdichten", bleibt seine Stoffmenge und zugleich seine Masse unver-
ändert; ähnlich beim „Verdünnen" (der Luft in einem Cylinder durch Hinein-
oder Herausschieben des Kolbens, durch Abkühlen oder Erwärmen). — Aber der-
selbe Körper hat auſser Volumen und „Dichte" auch noch weitere quantitative
Eigenschaften: Gewicht, Beharrungswiderstand, chemische Wirkungsfähigkeit gegen-
über anderen Stoffen u. s. f. Es muſs ausdrücklich festgestellt werden, nach
welcher dieser Eigenschaften die „Quantität der Materie" eines Körpers be-
messen werden soll. Für die Mechanik werden wir eine Eigenschaft wählen
müssen, welche derselbe Körper unter den verschiedensten mechanischen Um-
ständen (räumliche Lage gegen andere Körper, Spannungszustände u. s. f.) unver-
ändert behält. Seit NEWTONS Entdeckung des Gravitationsgesetzes wissen wir aber
vor allem, daſs auch das Gewicht, nach welchem man im praktischen Leben so
häufig die Menge eines Stoffes bestimmt (z. B. beim Einkaufen von Fleisch,
Kohlen u. s. w.) die geforderte Konstanz nicht besitzt. Denn derselbe Körper
hätte (§ 21) an der Oberfläche der Sonne ein 28 mal so groſses Gewicht, an der
Oberfläche des Mondes ein 6 mal so kleines Gewicht als an der Erdoberfläche; ja
derselbe Körper hat schon nahe den Erdpolen ein gröſseres Gewicht als am

Nach $k = mb$ kommt der „Kraft" die Dimension g . cm sec^{-2} zu, und m kann schreiben: 1 Dyn = 1 cm sec^{-2} g.

Vor GAUSS (1833) war man vom Gewichtsdrucke des jeweiligen Norm körpers (z. B. der mancherlei „Pfunde") als Krafteinheit ausgegangen; auch na Einführung des **Kilogrammkörpers** (1800) hatte man unter „Gramm" zuerst n eine Krafteinheit (Kraftgramm, 𝔤[1]) nämlich den Gewichtsdruck verstand den ein Grammkörper, z. B. 1 cm^3 Wasser, auf eine horizontale ruhende Unt lage ausübt. Da dieser Gewichtsdruck dem Grammkörper nicht unabhängig v der besonderen Art der den Druck bewirkenden Kraft, sondern nur infolge d Anziehung zwischen Grammkörper und Erde zukommt, so heifst das v Kraftgramm als dynamischer Grundeinheit ausgehende Mafssystem d irdische (terrestrische) Mafssystem. — In diesem System war also Masseneinheit eine abgeleitete Gröfse, und zwar stellte $^1/_{981}$ eines Kubikce meters Wasser diejenige Masseneinheit dar, welche, da ihr die Erde in 45° geog Breite 981 cm sec^{-2} Beschleunigung erteilt, an diesen Orten einen Gewichtsdru von $mg = \frac{1}{981} \cdot 981 = 1$ 𝔤 ausübt. — Da nun aber die numerischen Werte von g i den vorhin festgesetzten Grundeinheiten (Centimeter und Sekunden) für verschieden Orte der Erdoberfläche beträchtlich verschieden sind (an den Polen 983, am Äquator 978 u. s. f., vergl. § 31), so mufs, damit das Kraftgramm überhaupt eine bestimmte Kraftgröfse darstelle, nicht nur die Lage des Grammkörpers zur Erde, sondern sogar zu einem ganz speziellen Orte auf der Erdoberfläche mi in seine Definition aufgenommen werden.

Die Bezeichnung „absolut" des anderen, neueren Mafssystemes besagt also dafs in den von der Masseneinheit, nicht von einer Gewichtsdruckeinheit aus gehenden Systemen nur die Festsetzung eines **Normalkörpers**, nicht auch di eines bestimmten Ortes, an dem sich dieser Körper befindet, zur Messung de Massen und hiernach erst der Kräfte (sowie der mechanischen Arbeiten, § 22 u. s. f. erforderlich ist. — Trotz dieses wissenschaftlichen Vorteiles des absolute Systems (das man deshalb gegenwärtig oft auch das physikalische Syste nennt, zumal es sich auch in anderen Kapiteln der Physik, z. B. der Elektrizitäts lehre, bewährt) bedient man sich doch auch des terrestrischen vielfach mi Vorteil; z. B. sagt man in der Technik noch immer, es herrsche in den Gurte einer Kettenbrücke eine Spannung von 1000 𝔨𝔤, indem man jene elastische Kraf unmittelbar mit dem Gewichtsdruck einer 1000 kg-Masse vergleicht, u. zw. mit den

---

[1]) Wir haben bezeichnet und werden bezeichnen mit
1 g das Massengramm (1 kg das Massenkilogramm, 1 mg das Massenmilligramm),
1 𝔤 das Kraftgramm (1 𝔨𝔤 das Kraftkilogramm),
g die Mafszahl der Schwerebeschleunigung (und zwar in der Regel die Zahl 981; ist für einen speziellen Ort mit der Breite φ gemeint, so schreiben wir $g\varphi$; § 31). —

1 mg lies: 1 Milligramm. — $p = mg$ lies: Die Mafszahl p der Gewichtseinheiten ist glei der Mafszahl m der Masseneinheiten mal der Mafszahl g der Beschleunigungseinheiten.

Diese verschiedene Bedeutung von g und g ergibt sich von selbst aus der in die Buche (gemäfs dem immer mehr durchgreifenden Gebrauche) festgehaltenen Bezeichnung Mafszahlen durch *Kursiv*-, der Mafseinheiten durch Antiqua-Lettern. — Wenn be Schreiben die Zeichen g und g verwechselt zu werden drohen (was aber bei richtigem gleitendem Denken und Sprechen nicht zu befürchten ist), so mag der Anfänger statt vorübergehend schreiben gr (die behördliche Bezeichnung für Gramm bleibt aber g).

Die Bezeichnungen 𝔤 und 𝔨𝔤 (schreibe 𝔤 und 𝔨𝔤) mag daran erinnern, dafs das irdis Mafssystem ein älteres ist, aber voraussichtlich ebenso dem absoluten weichen wird die Frakturschrift der Antiquaschrift.

einem beliebigen Orte der Erde, weil auch die gröfsten Unterschiede, welche se Gewichtskräfte gegeneinander aufweisen können, geringfügig zu sein pflegen gen die Elastizitätskräfte selbst (und namentlich gegen die Unterschiede zwischen r aus Sicherheitsgründen gewählten Tragfähigkeit und der wirklichen Beanruchung). Auch in der Hydro- und Aerostatik ist es noch üblich zu sagen, eine 'asser-, Quecksilbersäule, die Luft drücke mit 1, 2 . . . Atmosphären (at), d. i. nähernd gleich dem Gewichtsdruck von 1, 2 . . . Kraftkilogramm auf je 1 cm^2.

Überhaupt bleiben auch nach dem Ausgehen von der Masseneinheit 1 g s dynamischer Grundeinheit doch die Kräfte (und zwar vor allen die Schwerraft) diejenigen Gröfsen, mit deren Hülfe praktisch sogar jene Masseneinheit estimmt und kopiert wird. Denn indem man sich beim Herstellen des ersten ariser Kilogrammkörpers sowie seiner Kopieen und aller in den Handel gebrachten ewichtssätze der Wage bedient, wird erst aus der Gleichheit von Kräften len Gewichtsdrucken auf die Schalen einer richtigen gleicharmigen Hebelwage, 29) auf die Gleichheit der Massen geschlossen.

Auch die absolute Krafteinheit, das Dyn, veranschaulicht man sich am nmittelbarsten als den Gewichtsdruck, den der 981 ste Teil eines Kubikcentieters Wasser auf eine wagrechte Unterlage ausübt; annähernd also ist 1 Dyn er Druck, den wir empfinden, wenn wir 1 mg-Körperchen auf ein wagechtes Stückchen unserer Haut drücken lassen (allerdings ist dieser Druck chon beinahe unmerklich). Andere Versinnlichungen der Gröfse „1 Dyn" (LA 35). LA 35.

Für die Umrechnung von Massen- und Kraftangaben aus dem absoluten ysteme ins irdische und umgekehrt dienen nach allem Gesagten folgende Beziehungen:

1 irdisches Kraftgramm (1 g) $= 981$ Dyn; 1 Dyn $= \frac{1}{981}$ g $\neq$ 1 mg;
1 absolutes Massengramm (1 g) $= 981$ irdische Masseneinheiten;
1 irdische Masseneinheit $= \frac{1}{981}$ g $\neq$ 1 mg.

Vorläufiges über Dichte und spezifisches Gewicht (Näheres vergl. 41): Aus den Einheiten für Masse und Kraft ergeben sich zusammen it der Einheit des Volumens, 1 cm^3, auch Mafseinheiten und Mafsformeln r die **spezifische Masse** (Volummasse, **Dichte**) und für das **spezifische Gewicht** **Volumgewicht)** je eines Stoffes, nämlich:

Die **Einheit der Dichte** (DE) kommt dem Wasser bei 4° C. zu, a dieser Stoff als derjenige gewählt wurde, von dem die eine Voluminheit (1 cm^3) erfüllende Menge eine Masseneinheit (1 g) bilden soll.

Da nun z. B. 1 cm^3 Kupfer 9 g, 1 cm^3 Quecksilber 13,6 g Masse besitzt (wie ch durch direkte Wägung, bequemer und genauer durch indirekte hydrostatische lethoden ergibt, § 41), so legen wir dem Kupfer eine 9 mal, dem Quecksilber ne 13,6 mal so grofse Dichte bei als dem Wasser; oder: Kupfer hat eine Dichte 9, uecksilber 13,6 (nämlich eine Dichte von 13,6 DE). — Da ferner z. B. in 5 cm^3 upfer 45 g, in 10 cm^3 Kupfer 90 g Masse enthalten sind, so gilt allgemein:

Zwischen den Mafszahlen (m, v, d) für Masse, Volumen und ichte eines bestimmten Körpers bestehen die Beziehungen:

ichte (spez. Masse) $d = \frac{m}{v}$, daher $m = d.v$, $v = \frac{m}{d}$ (in Worten!).

Ebenso: **Spez. Gewicht** $s = \frac{p}{v}$, daher $p = s.v$, $v = \frac{p}{s}$ (in Worten!),

o p (*pondus*) das **absolute Gewicht** heifst (im Gegensatz zum spezifischen ewichte s). — Ferner ist wegen $p = mg$ auch $s = dg$; in Worten!

§ 17. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt. — Begriff des Gleichgewichtes.

Schieben mehrere Männer zugleich einen grofsen Stein, so wirken auf zwar mehrere Kräfte, aber er kann trotzdem nur eine einzige Beweg annehmen. — Welches nun auch die Angriffspunkte, Richtungen und Stärken Kräfte dieser Männer waren, so wäre es doch (abgesehen von dem besond Falle der „Kräftepaare", § 26) immer möglich, auch durch eine einzige Kr (z. B. die eines Pferdes) jenen Stein ebenso schnell und nach derselben Richt fortzuschleifen, wie dies durch die Kräfte der Männer wirklich geschehen ist.

Eine Kraft, welche dieselbe Wirkung hervorbringt wi zwei oder mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte, heifst di Resultierende jener Kräfte; diese heifsen die Komponente Zu mehreren gegebenen Kräften die Resultierende suchen, nen man die Kräfte zusammensetzen; zu einer Kraft zwei od mehrere Komponenten suchen, nennt man jene Kraft zerlegen.

Man darf den Ausdruck „Zusammensetzen" der Kräfte nicht so auffassen, dafs aus mehreren Kräften wirklich eine wird, sondern nur so, dafs, wen statt der mehreren wirklich vorhandenen Kräfte nur die Resultierende da wäre, sie dasselbe leisten würde, was die ersteren zusammen wirklich leisten.

Obige Definitionen gelten sowohl für die Zusammensetzung von Kräften an ganzen Körpern wie an einzelnen Punkten. Die folgenden Bestimmungen dagegen setzen gemeinsamen Angriffspunkt voraus (übrigens gleichviel, ob dieser selbst wieder als ein einzelner Punkt in einem starren oder flüssigen System oder ob er als einzelner Massenpunkt angenommen ist; wie sich die Aufgaben über verschiedene Angriffspunkte an einem starren System auf die mit gemeinsamem zurückführen lassen vergl. § 27).

Zwei Bewegungen mit Beschleunigungen b_1 und b_2 ergeben eine Bewegung mit der resultierenden Beschleunigung b, deren Gröfse und Richtung durch die Diagonale des Beschleunigungsparallelogrammes rein phoronomisch (§ 10) gefunden wird. Nehmen wir zu jener phoronomischen (also rein mathematischen) Betrachtung das dynamische Unabhängigkeitsprinzip § 15, II (als Erfahrungstatsache) hinzu, so folgt weiter, dafs, wenn die durch die Pfeile AB und AC (Fig. 43) dargestellten Kräfte von k_1 und k_2 Dyn an derselben Masse von m g angreifen, sie an ihr die Beschleunigungen $b_1 = \frac{k_1}{m}$, $b_2 = \frac{k_2}{m}$ cm sec^{-2} nicht nur hervorrufen, falls sie jede für sich wirken, sondern nach dem Unabhängigkeitsprinzipe auch dann wenn sie zugleich wirken. Sind dann die komponierenden Beschleunigungen b_1 b_2 und die resultierende b durch die Pfeile des Parallelogramms I dargestellt, s stellen die entsprechenden Stücke des nach dem Verhältnis $1 : m$ ähnliche

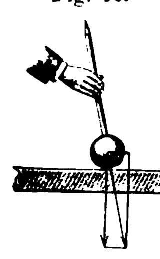
Fig. 43.

Statt zu sagen, zwei Kräfte halten einander das Gleichgewicht, sa
man auch häufig, „die Kräfte heben einander auf" (kompensieren, neutralisiere
sich). Es ist aber zu bemerken, dafs dies nur von den Bewegungswirkunge
(den **kinetischen,** nämlich den Beschleunigungen) gilt, nicht aber von de
statischen Wirkungen, den **mechanischen Spannungen,** die (wenigstens an Punkt
systemen, von welchen der einzelne Massenpunkt ein Grenzfall ist) bei de
Zusammenwirken zweier oder mehrerer Kräfte, aufser wenn alle gleich gerichtet
sind, jederzeit auftreten. Ihrer Richtung nach äufsern sie sich als **Zug-** oder
Druckspannungen, je nachdem die Kräfte aus- oder zueinander gerichtet
sind. — Auch hinsichtlich der Gröfse dieser statischen Wirkungen ist es bekannt
lich keineswegs gleichgültig, ob z. B. an den beiden Enden eines Seiles je ein
Kraft von 1 Dyn oder die gleichen Kräfte zweier Männer oder zweier Pferde
ziehen. Je gröfser die einzelnen (einander ganz oder teilweise „aufhebenden")
Kräfte, desto gröfser die Spannung. Bei einem bestimmten Betrage ziehen-
der Kräfte erfolgt sogar das Zerreifsen des Seiles; desgleichen bei zwei ein-
ander entgegenwirkenden Drücken Zerdrücktwerden. (Über Zug-, Druck-
festigkeit und einige andere Arten von Festigkeiten vergl. § 52.)

Speziell bezüglich des Aufhebens der Bewegungswirkungen zweier gleicher,
einander entgegengerichteter Kräfte ist auch zu bemerken, dafs dieses
Gleichgewicht nicht immer „Ruhe" bedeutet; denn falls ein Körper, während a
ihm zwei oder mehrere einander das Gleichgewicht haltende Kräfte angreifen
schon in Bewegung war, setzt er diese in **stationärem** Gange fort (§ 15, I).

Das Gleichgewicht der Kräfte ist das physikalisch bequemste Mittel, di
Gleichheit zweier Kräfte zu erkennen. Um z. B. zu entscheiden, ob die Muske
kraft meines Armes auf einen Stein, den ich bewege, mit der gleichen Stärk
wirkt wie die Schwerkraft, müfste ich behufs direkter Messung nach der Be
schleunigungswirkung gemäfs der Grundformel der Dynamik $f = mw$ (bezw
$k = mb$, $p = mg$, § 16) beobachten, ob ihm meine Hand eine Beschleunigun
von 981 cm sec^{-2} erteilt oder nicht, was nur schwer durch messende Versuch
festzustellen wäre. Halte ich dagegen den Stein mit ausgestreckter Hand so, dal
er sich weder ab- noch aufwärts bewegt, so weifs ich, dafs meine hierbei ang
wendete Muskelkraft gleich ist der Kraft, mit welcher die Erde auf ihn wirkt. -
Noch vollkommener können wir ein solches Gleichgewicht mit einer guten Wag
bestimmen. Ist z. B. an die Federwage (Fig. 208, S. 201) ein Körper gehängt, s
wird, sobald Gleichgewicht eingetreten ist, der elastische Gegenzug der Feder gleic
sein der Kraft, mit der dieser Körper gegen die Erde gezogen
wird. An einer gleicharmigen Hebelwage schliefsen w
aus der wagrechten Stellung des Wagebalkens oder dem „Ei
spielen" der Zunge, dafs die Schwerkraft die Belastungen beide
Schalen mit gleicher Stärke abwärts zieht; vergl. § 29.

Fig. 46.



Zerlegung von Kräften. Suchen wir durch d
Kraft der Hand (Fig. 46) z. B. eine glatte harte Kug
gegen ein glattes hartes Brett zu drücken, so erzeu
die zu diesem **normale** Komponente nur eine **Druc**
wirkung und nur die zum Brette parallele Komp
nente eine Bewegungswirkung. — Allgemeiner: Ist einem Masse
punkte m eine feste Bahn vorgeschrieben (vergl. in § 18 die Beispi
der schiefen Ebene und der Pendelbahn), und schliefst die Ri

abwärts bewegende Kraftkomponente $P = Q sin \varepsilon = Q \cdot \frac{h}{l}$ . . (1)

Zu 2. Da $Q = mg$ und $P = mg \, . \, sin \, \varepsilon$, so sind in die allgemeine Gleichung für konstante Kräfte $k = mb$ einzusetzen: $k = P = mg . sin \, \varepsilon$ und $b = g_\varepsilon$, daher $mg . sin \, \varepsilon = mg_\varepsilon$, und wegen Ausfalles des Faktors m ist die

Beschleunigung längs der schiefen Ebene $g_\varepsilon = g \, sin \, \varepsilon$ . . (2)

Es ergibt sich also aus der vorstehenden dynamischen Betrachtung die Erklärung für die in § 2 durch GALILEIS Versuche an der Fallrinne zunächst nur als phoronomische Tatsache bestätigten beschreibenden Gesetze für die Fallstrecken $a_\varepsilon = a \, sin \, \varepsilon = a \cdot \frac{h}{l}$, aus denen sich dann in § 6 durch ebenfalls rein phoronomische Ableitungen das beschreibende Gesetz für die Beschleunigungen: $g_\varepsilon = g \, sin \, \varepsilon = g \cdot \frac{h}{l}$ ergeben hat. —

Zu 3. Für die der Komponente P das Gleichgewicht haltende Kraft (P) kann vorgeschrieben sein, daſs sie a) parallel zur Länge, b) parallel zur Basis der schiefen Ebene, c) allgemein: unter einem beliebigen Winkel β gegen die Länge der schiefen Ebene wirken soll.

Im Falle a) ist $(P) = P$; daher gilt wie bei (1):

a) An einer schiefen Ebene herrscht Gleichgewicht, wenn die parallel zur Länge der schiefen Ebene aufwärts wirkende Kraft

$$(P_l) = Q \, . \, sin \, \varepsilon = Q \cdot \frac{h}{l} \quad . \; . \; . \quad (3);$$ in Worten

Im Falle b) ergibt sich aus dem Zerlegungsdreieck Fig. 49

b) An einer schiefen Ebene herrscht Gleichgewicht, wenn die parallel zur Basis wirkende Kraft

$$(P_b) = Q \, . \, tg \, \varepsilon = Q \cdot \frac{h}{b} \quad . \; . \; . \; . \quad (4);$$ in Worten!

Die allgemeine Aufgabe c) läſst sich auf a) zurückführen, indem von (P_β) in die Richtung der Länge der schiefen Ebene die Komponente $(P) \, cos \, \beta$ entfällt, so daſs zum Gleichgewicht erforderlich ist $(P) \, cos \, \beta = Q \, sin \, \varepsilon$, somit allgemein (Fig. 50)

$$(P) = Q \frac{sin \, \varepsilon}{cos \, \beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Wird hier $\beta = 0$, so ergibt sich wieder a); wird $\beta = \varepsilon$, so ergibt sich wieder $(P) = Q \frac{sin \, \varepsilon}{cos \, \varepsilon} = Q \, tg \, \varepsilon$, also b).

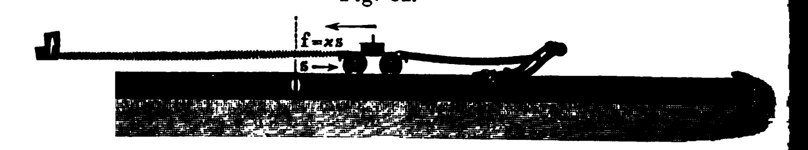
Diskussion der Gleichungen (1) bis (5) für verschiedene Werte von ε, einschlieſslich 0° und 90°. — Alle bisher entwickelten theoretischen Gleichungen werden in Wirklichkeit mehr oder minder modifiziert durch die

Reibung an schiefen Ebenen. In den vorstehenden Rechnungen wurde reibungsloses Gleiten angenommen (vgl. § 2). Es bietet aber die schiefe Ebene auch das praktisch bequemste Mittel, die Gröſse der Reibung zwischen einem Körper K und einer Fläche F in D. (oder Ig) zu messen. Hatte nämlich die Fläche zuerst eine wagrechte Lage und war der Körper auf ihr in Ruhe, so bleibt er auch in Ruhe, wenn die Fläche unter einem gewissen „Grenzwinkel“

geschlossen in derselben Hohllinse des Pendels, wodurch gleicher Luftwiderstand hergestellt war) schwingen liefs.

III. Verallgemeinerung: Kräfte bei Sinusschwingungen. — Versuch: Auf wagerechter Schienenbahn sei das (bei den Versuchen §§ 2, 14 benutzte) Wägelchen zwischen zwei elastische Spiralfedern gespannt, zwischen denen es

Fig. 52.



eine bestimmte Mittellage O (Fig. 52) einnimmt. Durch Anbringung von Zugkräften (wie in Fig. 36, S. 46) zeigt sich, dafs zu einer Verschiebung um 1, 2, 3 ... s cm Kräfte von x, $2x$, $3x$ ... sx Dyn erforderlich sind, gegen welche die elastischen Federn eine gleich grofse Gegenwirkung ausüben. Hat das (entsprechend belastete) Wägelchen mg, so erfährt es in dem jeweiligen Abstande s cm von O unter dem Einflusse der jeweiligen Kraft $f = -xs$ eine Beschleunigung $w = \frac{f}{m} = -\frac{x}{m}s$, und führt somit (vgl. § 12, Gl. 8) Sinusschwingungen aus von der

$$\textbf{Schwingungsdauer}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{x}} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

Aus dieser allgemeineren Formel ergibt sich wieder die spezielle für das einfache Pendel, indem hier $x = \frac{mg}{l}$. — Weitere Beispiele LA 27, 28, 29, 30.

, 28, 29, 30.

§ 19. Kräfte bei krummlinigen Bewegungen. Centralbewegungen.

In § 13 wurde gezeigt, dafs jeder Punkt, der sich in einer krummen Linie bewegt, eine **Normalbeschleunigung** (centripetale Beschleunigung) besitzt, deren Gröfse speziell für die gleichförmig kreisenden Bewegungen (Kreisungen) $b_\perp = \frac{c^2}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$ cm sec^{-2} und allgemein $w_\perp = \frac{v^2}{\varrho}$ cm sec^{-2} ist.

Indem wir nach dem Beharrungsgesetze (§ 15, Ib) jede Beschleunigung als durch eine Kraft bewirkt auffassen, deren Gröfse $f = mw$, bezw. spezieller $k = mb$ ist, werden wir auch die centripetale Beschleunigung durch eine den beweglichen Punkt aus seiner jeweiligen Richtung ablenkende **Centripetalkraft** bewirkt zu denken haben. Ist die Masse des sich bewegenden Punktes mg, so wirkt auf ihn die

$$\textbf{Centripetalkraft}\ f_\perp = m\cdot\frac{v^2}{\varrho}\ \textbf{Dyn} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\text{speziell bei Kreisungen: } k_\perp = m\cdot\frac{c^2}{r} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r\ \textbf{Dyn} \quad \ldots (2a, b).$$

Beispiele: 1. Ein Stein von mg Masse wird mittels eines Fadens von der Länge r cm binnen T sec einmal im Kreise gleichförmig herumgeschwungen. Dann ist in demselben Sinne, in welchem wir z. B. die Erde als „Sitz der Schwerkraft"

empfangenen Anstofses beim Verschieben) auf glatten wagrechten geraden Schienen mit bestimmter (mäfsiger) Geschwindigkeit und geht hinter ihm ein Arbeiter mit gleicher Geschwindigkeit einher, so empfindet dieser, wenn er die Hand an den Wagen legt, weder einen Druck noch einen Zug von seiten des Wagens. Sucht aber der Arbeiter den Wagen schneller oder langsamer zu bewegen, indem er ihm mit der Hand eine Beschleunigung oder eine Verzögerung erteilt, so empfindet er sogleich den Druck oder Zug des Wagens (und zwar sehr empfindlich, wenn er z. B. gegen eine scharfe Spitze des Wagens drückt). Sobald dann der Druck der Hand gegen den Wagen aufhört, setzt nun nicht etwa der Wagen den Druck gegen die Hand eine Zeitlang fort, sondern es hört auch diese Gegenwirkung genau gleichzeitig mit der Wirkung auf, und der Wagen bewegt sich mit der nunmehr erworbenen gröfseren, bezw. kleineren Geschwindigkeit fort. — Es ist also die Gegenwirkung, welche bei Richtungsänderungen durch die „Centrifugalkraft" (= Masse × Normalbeschleunigung) gemessen wird, durchaus analog derjenigen, welche bei Geschwindigkeitsänderungen der „Masse" als Beharrungswiderstand (= Masse × Bahnbeschleunigung) gemessen wird. — Dafs gleichwohl der Name Centrifugalkraft sich als zweckmäfsig bewährt hat, und dafs man diesen blofsen Beharrungswiderstand auch durch die Gl. (3) wie wirkliche Kräfte messen kann, hat den guten physikalischen Sinn, dafs, um z. B. an einer ruhenden Schleuder dieselbe mechanische Spannung hervorzubringen wie durch das Herumschwingen im Kreise, an beiden Enden Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen in gleichem Betrage von $k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$ wirken müfsten.

Über Fliehkräfte speziell bei der Rotation starrer Systeme (so bei den meisten Versuchen mit der „Schwungmaschine") vgl. § 31.

Bei krummlinigen Bewegungen in anderen Kurven als im Kreise ist die Centripetalkraft an jeder Stelle der Bahn nach einem anderen Punkte (dem jeweiligen Krümmungsmittelpunkte, Anh. Nr. 26) gerichtet. Ihre Gröfse $f_\perp = m\frac{v^2}{\varrho}$ wird dort Null, wo $\varrho = \infty$ ist, d. h. an geraden Teilen der Bahn; an scharfen Ecken, wo $\varrho = 0$, müfste sie unendlich grofs werden, solange v endlich ist; d. h. keine endliche Kraft vermag eine plötzliche (unstetige) Richtungsänderung zu bewirken (so wenig wie eine unstetige Geschwindigkeitsänderung).

Anh. 26.

Ganz allgemein ist als Centripetalkraft (— zu unterscheiden von der Centralkraft, s. u.) nur eine solche zu bezeichnen, welche rein normal zum jeweiligen Bahnelemente und somit auch nur rein ablenkend wirkt, d. h. gar keinen (— nicht etwa einen „unendlich kleinen" !) Beitrag zur Bahnbeschleunigung oder zur Bahngeschwindigkeit liefert. Das hierin vielleicht liegende Paradoxe löst sich, wenn man bedenkt, dafs ja z. B. auch bei einem horizontal geworfenen Körper die Schwerkraft im Scheitel der Bahn zwar sogleich den vollen Betrag der vertikalen Schwerebeschleunigung g, aber gar keinen Geschwindigkeitszuwachs längs des horizontalen Bahnelementes daselbst bewirkt. —

Ein spezieller Fall der krummlinigen Bewegungen sind die **Centralbewegungen**, bei denen der bewegte Massenpunkt aus seiner jeweiligen Richtung nur durch eine **„Centralkraft"**, d. i. eine Kraft abgelenkt wird, die stets gegen einen als unbewegt angenommenen Punkt, den **„Centralpunkt"**, gerichtet ist.

Ein spezieller Fall der Centralbewegungen wieder sind die gleichförmig kreisenden Bewegungen oder Kreisungen (§ 13). Die Centralkraft hat

kraft von C weg) verschoben, so gelangt er statt nach D in die vierte E
des Verschiebungsparallelogramms. Da nach dem Trägheitsgesetz $AB = 1$
ist $\triangle ABC = BDC$; da ferner nach dem Parallelogrammgesetz DI
ist, so ist $\triangle BCD = BCI$
auch $\triangle ABC = BCF$.
gleicher Weise ergibt sich f
drittes, viertes . . . Zeitteil
die Gleichheit der vom Lei
in gleichen Zeiten durchstric
Flächen. — Der Satz gilt, was i
für Strecken BE, FG . .
alle gleich oder nach irgend
Gesetz zu- oder abnehmend
zeitweilig gleich Null) gegen
(oder ganz oder teilweise auc
C weg) aufgetragen werden
nach dem Flächensatz die m
faltigsten Bahnformen entsp
können. — LA 43.

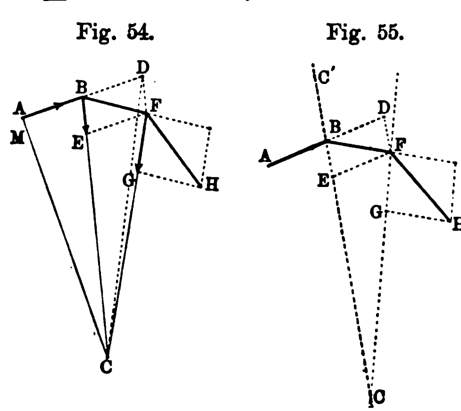


Fig. 54. Fig. 55.

LA 43.

Bemerkung: Indem bei der Konstruktion des Parallelogramms BDE geradlinige Diagonale gezogen wurde, war vorausgesetzt, dafs ebenso w Bewegung längs BD auch die längs BE eine gleichförmige sei. Die C kraft, welche diese Bewegung längs BE hervorrief, war dabei als ein Momentankraft vorausgesetzt, welche der bewegten Masse, wenn sie von A B angekommen ist, eine unendlich grofse Beschleunigung und hiernach wi einer unendlich kurzen Zeit eine endliche Endgeschwindigkeit erteilt, wor plötzlich zu wirken aufhört, so dafs sich die Masse schon von einem dem Pu unendlich nahen Punkte wieder mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. W solche Momentankräfte — vgl. §. 16, S. 57 — nirgends vorkommen und alle w vorkommenden Centralkräfte von endlicher Dauer und Gröfse sind und somi aus geradlinigen Stücken zusammengesetzte, sondern stetig gekrümmte l liefern müssen, so gilt doch der Flächensatz auch für solche nicht eig krumme, sondern gebrochene Linien; was daraus folgt, dafs er eben vo speziellen Voraussetzung über das Gesetz, nach welchem die Centralkraft schiedenen Punkten der Bahn wirkt, ganz unabhängig ist.

Die Bedingungen des Flächensatzes sind auch erfüllt bei den gleichf kreisenden Bewegungen; denn da hier in gleichen Zeiten gleiche Krei zurückgelegt werden, so auch gleiche Kreisausschnitte. Dabei kann Centr nur der Kreismittelpunkt sein. — Desgleichen auch bei den geradlinigen g förmigen Bewegungen; denn da hier in gleichen Zeiten gleiche Strecken gelegt werden, so sind auch alle Dreiecke CAB, CBD . . . flächengleich kann als Centralpunkt jeder beliebige nahe oder ferne Punkt des Raumes Gerade herum angenommen werden, die Centralkraft hat aber dann den Wert Null, was nur eine andere Form des Trägheitsgesetzes ist.

Wir werden nicht nur des Flächensatzes, sondern auch (namentlich i seiner Umkehrung bedürfen. — Es sei von der Fig. 55 zunächst n gebrochene Linie ABF als Bahn eines Massenpunktes gegeben und voraus dafs er die beiden Strecken AB und BF binnen gleicher Zeiten τ zurü Da wir nach dem Trägheitsgesetz wissen, dafs, wenn keine Kraft wirk Massenpunkt in der zweiten Zeit τ den Weg BD zurücklegen müfste, d

sie, dafs vor allem die **Richtung** der Kräfte zwischen der Erde und den von „angezogenen“ Körpern annähernd normal gegen die Erdoberfläche (worin ja der auffälligste Grund dafür liegt, gerade die Erde für den „Sitz“ Schwerkraft, genauer: für eine wesentliche Teilursache jener Erschein 1., 2., 3. zu halten). Für einigermafsen gröfsere Teile der Erdoberfläche läfst das Nichtparallelsein dieser Richtungen nur erschliefsen aus der Lage gegen dem Fixsternhimmel, nämlich der Lage des Zenits; **Bleilot** (Fig. 56) **Wasserwage** (Figg. 1 und 6) bilden daher auch wesentliche Bestandteile der „System des Horizonts“ in Beziehung stehenden astronomischen Instrum namentlich des Theodoliten und Zenitsektors (§ 176). Diese Instrumente sind es durch welche in erster Annäherung die Kugelgestalt, in zweiter Annäher die sphäroidische Gestalt und bei höchster erreichbarer Genauigkeit die wi Gestalt des Geoids erkannt wird; wozu dann noch die aus Lotabweichun erschlossenen lokalen Ungleichmäfsigkeiten in der Verteilung der Erdmasse (irdische Höhlungen, Anhäufung spezifisch leichterer, bezw. schwererer Ges u. dgl., § 178) kommen. — Nur insoweit über kleinen Teilen der Erdobe Bleilot und Zenitsektor keine merklichen Unterschiede in der Lage des Z aufweisen, darf die Richtung der Schwere für solche Nachbarorte als konst und die Erdoberfläche als eben angenommen werden.

Die **Gröfse** der Schwerkraft ist bei mäfsigen Erhebungen annähernd kon stant. Indem Galilei nirgends andeutet, dafs er die Bewegung frei fall Körper als eine nur **annähernd** gleichmäfsig beschleunigte erk habe, nahm er stillschweigend auch die Schwerkraft als nach vertikaler Rich überall von konstanter Gröfse an. Auch findet sich bei ihm keine Andeu darüber, ob er sich die Schwere in dieser Konstanz bis auf unendliche E fernungen von der Erde oder bis zu welchen Grenzen etwa sonst gedacht h Dagegen war sich Galilei überall bewufst, dafs die Richtung der Schwere verschiedenen Orten nicht gleich, sondern die zum Erdmittelpunkt, also z. B. Bewegung in einer „Horizontalen“ eigentlich eine Bewegung in einem Kreise

In den (namentlich durch die Lehre von den magnetischen und elektris Kräften) neuestens gebräuchlich gewordenen Ausdrücken können wir die aus bisher geschilderten Tatsachen erschlossenen Kraftwirkungen der Erde nach aufs (über die Kräfte im Erdinnern vgl. LA 30, 49) kurz so darstellen:

LA 30, 49.

Über hinreichend eng begrenzten Gebieten der Erdoberfläche ist das Gravitations-Kraftfeld der Erde homogen (Fig. 57 a), d. h. die Richtungen der Kräfte sind überall parallel, und die Gröfsen der auf je 1 g wirkenden Schwerkräfte sind einander gleich.

Wir wollen das so gedachte Kraftfeld der Erde im folgenden als „Galilei sches Kraftfeld“ bezeichnen; nur für ein solches dürfen wir ja z. B. bei horizontalen oder schiefen Wurf alle beschleunigenden Schwerkräfte als paralle die Senkungen genau proportional den Quadraten der Fallzeiten und sonach d Bahnen als Parabeln ansehen. — Indem aber ein halbes Jahrhundert spät Newton sein zunächst aus den himmlischen Bewegungen erschlossenes Gesetz d allgemeinen Gravitation wieder zurück anwendete auf die Erde, gab er stren Beweise dafür, dafs jene stillschweigende Annahme Galileis nur annähernd z treffe, und dafs vielmehr die Gröfse der Kraft, mit welcher die Erde je 1 g 1, 2, 3 . . . 59 . . . Erdradien über der Erdoberfläche, also in 2, 3, 4 . . . 60 . Erdradien vom Erdmittelpunkte anzieht, nur $^1/_4$, $^1/_9$, $^1/_{16}$ . . . $^1/_{3600}$ . . . der Kr beträgt, mit welcher sie 1 g an der Oberfläche anzieht. Wir werden das so

anziehenden und abstofsenden Körpern ausgebreiteten Mediums namentlich d[illegible] FARADAYS und MAXWELLS Forschungen sich aufgedrängt hat (vgl. §§ 144, 1[illegible]

§ 21. Allgemeine Gravitation.

Alle kinetischen Wirkungen der Massen des Weltalls aufein[illegible] (und auch die statischen Wirkungen, soweit solche vorkommen [illegible] zu beobachten sind) erfolgen gemäfs

NEWTONS Gravitationsgesetz: $f = \varkappa \cdot \frac{Mm}{r^2}$ **Dyn** . .

Hierin bedeutet die **„Gravitationskonstante"** $\varkappa$ die Kraft, mit wel[illegible] je zwei zunächst als Punkte gedachte Massen von je 1 g sich aus 1[illegible] Abstand anziehen; der Betrag dieser Konstanten $\varkappa =$ **6,685.1**[illegible] (Dyn per Gramm und Centimeter) wurde erst ein Jahrhundert [illegible] NEWTON gefunden (s. u. VI.). — Im übrigen besagt das Gesetz [illegible] **Je zwei Massen M und m wirken im Abstande r aufein[illegible] mit einer Kraft f, deren Gröfse nur von M, m und r abhä[illegible] ist** (dagegen unabhängig von der stofflichen Verschiedenheit, [illegible] Zugehörigkeit zu diesem oder jenem Weltkörper, der gegenseiti[illegible] Geschwindigkeit u. s. f.). **Die Richtung der Kraft ist die [illegible] Verbindungsstrecke von M und m;** da die Massen sich längs di[illegible] Geraden zu nähern suchen, wird die Kraft als „Anziehung" bezeich[illegible]

Die in Gl. (1) zusammengefafsten Behauptungen gliedern sich in

I.* das Abstandsgesetz: $f = \frac{C}{r^2}$ . . . (1I)

und II. das Massengesetz: $C = \varkappa . Mm$ . . . (1II)

I. Das Abstandsgesetz wurde von NEWTON zuerst streng ab-geleitet für die Bewegung der Planeten um die Sonne. Notwendi[illegible] und ausreichend waren hierfür die drei Keplerschen Gesetze[1]:

1. **Jeder Planet beschreibt eine Ellipse, in deren eine[illegible] Brennpunkte die Sonne steht.** — Dieses Gesetz gibt für je eine[illegible] Planeten unmittelbar die Gestalt der Bahn an. — Den kleinste[illegible] Abstand r von der Sonne hat der Planet im Perihel (Sonnennähe[illegible] den gröfsten R im Aphel (Sonnenferne). — Je kleiner der Unterschie[illegible] von R und r im Verhältnis zum „mittleren Abstand" a (der halbe grofsen Achse der Bahnellipse) ist, um so mehr nähert sich die Bah[illegible] einem Kreise, in dessen Mittelpunkte die Sonne steht.

In Fig. 59 ist $r:R = 1:2$ angenommen; daher die lineare Excentrizit[illegible] $FO = \frac{1}{3} PO$, $e = \frac{1}{3} a$; die numerische Excentrizität $\varepsilon = e:a = \frac{1}{3}$. Bei d[illegible] Erde dagegen ist $\varepsilon = \frac{1}{60}$ (math. Anh. Nr. 23 und LA 45).

Anh. 23. LA 45.

[1]) Das Nachfolgende setzt an astronomischen Anschauungen und Begriffen [illegible] in §§ 174 — 183 geschilderten und entwickelten voraus.

den Umlaufszeiten t, bezw. T sec, so gilt für deren centripetale B-schleunigungen $B_\perp$ und $b_\perp$:

$$B_\perp : b_\perp = 4\pi^2 \cdot \frac{r}{t^2} : 4\pi^2 \cdot \frac{R}{T^2} = \frac{r}{r^3} : \frac{R}{R^3} = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2} \quad \cdot \cdot \text{(4}$$

Um die centripetale Beschleunigung für einen beliebigen Planeten nicht n durch Proportion, sondern in absolutem Maſse zu erhalten, schreiben wir d dritte Keplersche Gesetz in der Form $\frac{1}{t^2} = \frac{konst}{r^3}$ oder $\frac{r}{t^2} = \frac{konst}{r^2}$ . . . (5

dann ist $b_\perp = 4\pi^2 \cdot \frac{konst}{r^2}$ cm sec^{-2}, oder abkürzend $b_\perp = \frac{Konst}{r^2}$, w

LA 46. $$Konst = 4\pi^2 . 3{,}282 . 10^{24} = 1{,}296 . 10^{26} \text{ (cm, sec)} \quad . . \quad (6) \quad . . \quad \text{(LA 4}$$

Auch für je einen Planeten ergibt sich die nämliche Beziehung (4 wobei wir aber die Bahn nicht mehr als Kreis ansehen dürfen, d es sonst keine Verschiedenheit der r und R gäbe. Sind r und R wieder speziell die Sonnennähe und die Sonnenferne, woselbst d Krümmungshalbmesser ϱ der Bahn einander gleich sind, V und v die Geschwindigkeiten daselbst, so ist (§ 13, allgemeine Aufgabe):

$$W_\perp : w_\perp = \frac{V^2}{\varrho} : \frac{v^2}{\varrho} = V^2 : v^2 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2} \quad . . . \text{(7)}$$

LA 47. Durch schwierigere Rechnungen (LA 47) hat Newton gezeigt, daſs auch fü **irgend einen Planeten in irgend einem Punkte seiner Bahn beim Abstande von der Sonne die Beschleunigung in der Richtung dieses Abstandes:**

$$w_r = \frac{Konst}{r^2}, \quad \text{wo wieder } Konst = 1{,}296 . 10^{26} \text{ (cm, sec)} \quad \cdot \cdot \text{(}$$

Diese phoronomische Gröſse *Konst* ist von dynamisch grundlegender B-deutung, da sie maſszahlengleich ist mit dem Produkte aus der Gravitation-LA 51. constante $\varkappa$ und der Sonnenmasse M; s. u. VI und LA 51.

II. Wie groſs die Massen der Sonne und je eines Planeten seien, ist al aus der Beschleunigung w_r, welche er gegen die Sonne hin hat, noch nicht erkennen. Denn sowie an einer bestimmten Stelle innerhalb des Kraftfeldes Erde alle Körper von beliebig groſser Masse dieselbe Beschleunigung erhalten, daher aus ihrer Beschleunigung allein kein Schluſs auf ihre Masse zu ziehen so wäre auch, wenn z. B. 10 Massen gleich der des Jupiter nebeneinander, ein Planet von 10facher Masse in der Jupiterbahn um die Sonne liefen, Beschleunigung gegen die Sonne keine andere als die des Jupiter selbst. I entspricht es auch, daſs wenn wir umgekehrt aus der vorläufig angenomm Gl. (1) die Beschleunigung W berechnen, welche die Masse m des Planeten g die Sonne hin infolge der Kraft $f = mW = \varkappa \frac{Mm}{r^2}$ erhält, $W = \varkappa \frac{M}{r^2}$ wird, in der Faktor m beiderseits ausfällt. (Erst wenn die Sonne eine gröſsere Mass hielte, etwa durch Hineinstürzen von Meteoriten, wie nach J. R. Mayers H these, § 196, würde diese gröſsere Sonnenmasse der gleichen Jupiterm auch eine gröſsere Beschleunigung erteilen. Eine solche merkliche Vergröſse der Sonnenmasse aber, oder daſs gar die Sonne bei unveränderter Masse ei stärker, einmal schwächer auf die Planeten wirke, sowie etwa ein zuerst s geladener und dann allmählich sich entladender elektrischer Körper auf ein

sches Pendel in seiner Nachbarschaft allmählich immer schwächer wirkt, vergl. 135, ist durch die immer merklich gleichbleibenden Umlaufszeiten der Planeten, t ihrer Bestimmung durch HIPPARCH und Frühere, ausgeschlossen.)

Ähnlich wie die Masse m des Planeten gegen die Sonne hin die obige Beschleunigung W, erhält durch die gleiche Kraft f die Masse M der Sonne gegen n Planeten hin die Beschleunigung $w = \varkappa \frac{m}{r^2}$. Da beide Beschleunigungen nander entgegengerichtet sind, haben Sonne und Planet in Bezug aufeinander ach § 9, Ende) die **Relativbeschleunigung** $W + w = \varkappa \frac{M}{r^2} + \varkappa \frac{m}{r^2} = \varkappa \frac{M+m}{r^2}$. Ruhe befindet sich also innerhalb des Systems Sonne-Planet nicht die Sonne, ondern der „Massenmittelpunkt" (§ 14, Vorversuch 3; § 28) dieses Systems. Dieser Punkt (nicht, wie es noch KEPLER in seinem ersten Gesetz stillschweigend orausgesetzt hatte, der Mittelpunkt der Sonne) steht im Brennpunkt der Ellipse des Planeten; ihn umkreist der Mittelpunkt der Sonne in einer der Planetenahn geometrisch ähnlichen Ellipse, die freilich sehr klein ist, weil M sehr grofs egen m ist. — Um wieviel der Sonnenmittelpunkt durch die Masse eines Planeten leichsam nach der entgegengesetzten Seite von dem gemeinschaftlichen Brennpunkte weggeschoben erscheint, äufsert sich am deutlichsten darin, dafs die Umaufszeit des Planeten etwas kürzer ist, indem er um den näheren Massenmittelpunkt kreist, als wenn er nach dem dritten Keplerschen Gesetze um den Sonnenmittelpunkt kreiste. Wirklich sind solche Abweichungen beobachtet worden, aber elbst für Jupiter, wo sie am gröfsten sind, würden sie wegen ihrer Kleinheit keine ehr genaue Bestimmung des wahren Massenverhältnisses (1048 : 1) gestatten.

Dagegen läfst sich aus den gegenseitigen Beschleunigungen dreier Körper des Sonnensystems auf das Verhältnis der Massen je zweier schliefsen. Ein Beispiel einfachster Art bietet folgende, auf alle Planeten mit Monden anwendbare Methode (nach welcher zuerst NEWTON das Massenverhältnis Sonne : Jupiter = 1067 : 1 angab): Nehmen wir wieder an, dafs die Sonne stillstehe im Mittelpunkte eines Kreises vom Halbmesser a, in welchem sich der Planet Jupiter binnen der Zeit T bewegt, und ebenso, dafs um Jupiter der äufserste Trabant in einem Kreise vom Halbmesser α binnen der Zeit t umlaufe, so ist die

eschl. des Jupiter zur Sonne $W = \varkappa \cdot \frac{M}{a^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{a^2}$ oder $\varkappa M = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2}$,

eschl. des Trabanten zum Jupiter $w = \varkappa \cdot \frac{m}{\alpha^2} = 4\pi^2 \frac{\alpha^3}{t^2} \cdot \frac{1}{\alpha^2}$ oder $\varkappa m = 4\pi^2 \cdot \frac{\alpha^3}{t^2}$,

mit das Verhältnis $M : m = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^2$ . . . (8).

Man kann das Teilnehmen des Centralkörpers an der Centralbewegung, sowie e schon zwischen drei umeinander kreisenden Massen (M, m, μ) eintretenden rwickelungen leicht veranschaulichen durch folgenden einfachen

Versuch (Fig. 60, a. f. S.). An der Decke des Zimmers sind zwei Schnüre betigt, welche unten in gleicher Höhe Massen M (1000 g) und m (200 g) tragen. erden die Schnüre zusammengedreht und dann losgelassen, so versetzen sie die iden Massen in kreisende Bewegungen, so dafs bei gleicher Umlaufszeit T ihre Abnde von der Lotlage sich verkehrt verhalten wie die Massen; $A : a = m : M$. bei kann man die zwischen den Massen wirkende Kraft versinnlichen durch eine ischen sie gespannte Spiralfeder oder einen Faden; wird dieser während sehr sch gewordener Drehung beider Massen durchgebrannt, so fliegen diese ausnander (ähnlich wie wir es uns von den Weltkörpern des Sonnensystems denken

müfsten, wenn zwischen ihnen die allgemeine Gravitation nicht mehr wirkte). — Wird ferner an die Schnur der kleinen Masse m eine noch kleinere Masse μ (= 20 g) durch einen Faden befestigt und dieser im gleichen Wick- lungssinne um die Schnur geschlungen, so kreist μ um so wie der Trabant um den Planeten. Dabei wird indem es ebenfalls um die gemeinschaftliche Lotlinie von m und μ kreist, nicht mehr die einfache Kreisbahn um die Lotlinie von M und m einhalten, sondern bald inner- bald aufserhalb dieser Bahn sich befinden. (Schatten- projektion der ganzen Erscheinung, wobei auch die Recht- läufigkeit und Rückläufigkeit der Planeten in ihrer Pro- jektion auf das Himmelsgewölbe veranschaulicht wird.) — Letzterer Versuch erläutert auch den Begriff der

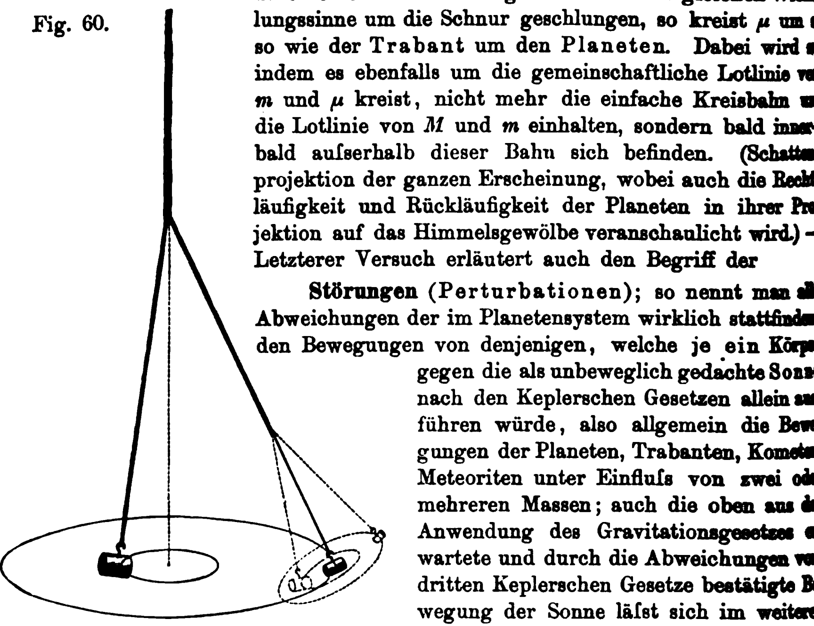


Fig. 60.

Störungen (Perturbationen); so nennt man alle Abweichungen der im Planetensystem wirklich stattfinden- den Bewegungen von denjenigen, welche je ein Körper gegen die als unbeweglich gedachte Sonne nach den Keplerschen Gesetzen allein aus- führen würde, also allgemein die Bewe- gungen der Planeten, Trabanten, Kometen, Meteoriten unter Einflufs von zwei oder mehreren Massen; auch die oben aus der Anwendung des Gravitationsgesetzes er- wartete und durch die Abweichungen vom dritten Keplerschen Gesetze bestätigte Be- wegung der Sonne läfst sich im weiteren Sinne als eine solche Störung auffassen. Insbesondere für die in den Keplerschen Gesetzen nicht zum Ausdruck kommende Wechselwirkung der Planeten untereinander ergeben sich folgende zwei Hauptarten von Störungsproblemen: 1. Direkte: Sind z. B. die Massen von Jupiter und Mars bekannt, so läfst sich berechnen, wie stark jeder durch den anderen aus seiner elliptischen Bahn um die Sonne abgelenkt und in seiner Bahn- geschwindigkeit beeinflufst wird. 2. Inverse: Sind an einem Planeten, z. B. Uranus, bestimmte Störungen beobachtet, welche sich aus der Wirkung der be- kannten Planeten, namentlich seiner grofsen Nachbarn Saturn und Jupiter, nicht erklären lassen, so liegt die Vermutung nahe, dafs ein direkt noch nicht beob- achteter Planet vorhanden sei, der diese Störungen bewirkt. So berechnete in der Tat Leverrier (mittelbar angeregt durch Bessel) Bahn, Umlaufszeit und Masse des Neptun, und Galle fand den neuen Planeten ganz nahe der vorausberechneten Stelle: die berühmteste Voraussage auf Grund des Gravitationsgesetzes (1846). —

Wie noch Newton selbst das Gravitationsgesetz nicht nur für die Wirkung zwischen Sonne und Planeten, für welche er es aus den Keplerschen Gesetzen abgeleitet hatte, sondern auch für die Wirkung der Planeten auf die Trabanten als gültig erkannt hatte, so gelang es ihm ebenso auch für die **Kometen**, von denen ein Teil, „die **periodischen**", geschlossene (kreisförmige oder elliptische) Bahnen, andere dagegen, „die **aperiodischen**", die anderen Arten der Kegel- schnittslinien (Parabel und Hyperbel) beschreiben. — Dafs aber das Gravitations- gesetz auch für Körper gilt, die gar nicht mehr unserem Sonnensystem angehören, erkannte ein Jahrhundert später W. Herschel; er beobachtete nämlich unter den Fixsternen die sogenannten **physischen Doppelsterne** (den Unterschied zwischen

sen und den blofs „optischen" vgl. § 188), von denen einige seither schon einen
›r mehrere vollständige Umläufe gemacht haben. Auch diese. Bewegungen
rden durch direkte Beobachtungen in gutem Einklang mit den Keplerschen
setzen (unter Rücksicht darauf, dafs die Bahnellipsen im allgemeinen gegen
sere Sehrichtung nicht normal liegen) für die Bewegung jedes Teiles um den
meinschaftlichen Massenmittelpunkt befunden. Sogar Voraussagungen von Fix-
ernen (ähnlich der des Planeten Neptun) sind durch Anwendung des Gravitations-
setzes auf die Fixsternwelt gelungen. So wurde ein Siriusbegleiter schon von
SSEL (1844) vorausgesagt, der dann später (1862) wirklich beobachtet wurde. —
Wiewohl also durch zahllose Ableitungen des Abstands- und des Massen-
setzes aus vorherigen Beobachtungen, sowie durch die auf das Gesetz gegründete
raussage noch nicht beobachteter Tatsachen, das Gravitationsgesetz als ein das
nze Universum umfassendes erwiesen gelten darf, so ist es doch möglich, ja
ch neuesten Untersuchungen (so von SEELIGER über das Hereinwirken des In-
griffes der übrigen Fixsterne in unsere Fixsterninsel) wahrscheinlich, dafs Newtons
setz doch nur annähernd gilt; noch wahrscheinlicher ist es überhaupt kein
etztes" Naturgesetz (wie es die drei Prinzipien der Mechanik sind, log. Anh. Nr. 37). Anh. 37.

Aber auch wenn das Gesetz (1) als streng gültig angenommen wird, bleibt zu
agen: In welchem Sinne und mit welchem Rechte durften überhaupt in der
leichung (1) M und m als Punkte fingiert werden? Dieser Nachweis wird da-
urch erbracht, dafs wir für je zwei Körper von gegebener Gestalt und
[assenverteilung unter jener Voraussetzung die aus den einzelnen Anziehungen
ler Punkte des einen Körpers auf alle Punkte des anderen resultierende Gesamt-
ziehung berechnen und das Ergebnis mehr oder minder mittelbar mit den
eobachtungen vergleichen. Das einfachste Problem solcher Art betrifft die

III. Wirkungen von Kugeln auf äufsere und innere
unkte. — Von diesen bewies schon NEWTON:

1. Eine gleichmäfsig und sehr dünn mit Masse belegte ugelfläche wirkt auf einen äufseren Punkt so, als ob die ganze asse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Dies ist für die Richtung der resultierenden Kraft aus der symmetrischen
ge der Kugelschale in Bezug auf die Centrale der Kugel und des äufseren
nktes unmittelbar ersichtlich. — Beweise für die Gröfse der Kraft vergl. LA 48. LA 48.

2. Eine gleichmäfsig und sehr dünn mit Masse belegte ugelfläche wirkt auf einen inneren Punkt gar nicht (genauer:
e von ihren einzelnen Teilen auf den Punkt ausgeübten Anziehungen
lten einander das Gleichgewicht).

Fig. 61.

Beweis (Fig. 61): Denken wir uns den inneren Punkt J
s gemeinschaftlichen Scheitel von lauter Doppelkegeln,
lche die umschliefsende Kugel in Paare von Flächen-,
zw. Massenteilen zerlegen. Die Wirkungen je zweier ver-
lten sich dann nach dem Massengesetze direkt wie
Flächen, also (nach welchem Satze über die Schnitte
Pyramiden?) auch direkt wie die Quadrate der
stände, nach dem Abstandsgesetz verkehrt wie
Quadrate der Abstände von dem angezogenen Punkt; die Anzie-
ngen sind also gleich und ihre (kinetische) Wirkung ist Null.

Umgekehrt: Nur dann wirkt eine gleichmäſsig belegte Kugelfläche auf einen inneren Punkt (kinetisch) nicht, wenn das Abstandsgesetz das der verkehrten zweiten Potenz und das Massengesetz das des einfachen Produktes ist.

Denn nach dem Satze über Pyramiden verhalten sich ja die Flächen jedenfalls direkt wie die zweiten Potenzen jener Abstände; und in dem Begriffe der „gleichmäſsigen" Belegung ist vorausgesetzt, daſs die Massen den Flächen proportional sind. (Einen vollständigeren Beweis vgl. LA 48.) LA 48.

Die Sätze 1. und 2. lassen sich erweitern *α*) auch für **Kugelschalen** von endlicher Dicke und für **Vollkugeln**, falls nur diese aus lauter homogenen Schalen zusammengesetzt sind; *β*) statt für Anziehungen auch für **Abstoſsungen** (wie nach Coulombs Gesetz für gleichnamig elektrische Körper, § 135).

Erst durch die Erweiterung *α*) ist es gerechtfertigt, daſs schon bisher über die Abstände und Richtungen der Kräfte von den **Mittelpunkten** der Sonne, der Planeten und Monde gezählt wurden. — Bei Rücksicht auf die ellipsoidische Gestalt dieser Körper werden aber die Anziehungsprobleme im allgemeinen viel schwieriger. Auch die Erde werde im folgenden (IV.—VI.) wieder nur als Kugel gedacht.

IV. Die irdische Schwere als besonderer Fall der allgemeinen Schwere. — Auch die schon dem Altertum geläufige Vorstellung, den Erdmittelpunkt als „Sitz" der Schwere zu denken, gewinnt ihre Verdeutlichung und Rechtfertigung erst durch Newtons Gesetz über die Anziehung der Kugeln auf äuſsere Punkte. Die Kraft, mit der ein Körper gegen die Erdoberfläche hingezogen wird, haben wir uns nämlich nunmehr zu denken als die **Resultierende** der Kräfte, mit denen ihn die einzelnen Massenteilchen der Erde anziehen. — Beträgt die Summe aller dieser Massenteile Mg und die Masse eines Körpers nahe der Erdoberfläche mg, so daſs sein Gewicht $p = mg$ Dyn ist, so ist in die allgemeine Formel des Gravitationsgesetzes für f speziell p, für r speziell der Erdhalbmesser R einzusetzen, und es ist dann $mg = \frac{\varkappa M m}{R^2}$, also indem der Faktor m ausfällt

LA 66.
$$\varkappa M = g R^2 \quad . \, . \, . \quad (9) \quad . \, . \, . \, . \, . \quad \text{(LA 66)}$$

Da hier g und R viel leichter meſsbare Gröſsen sind als $\varkappa$ und M, so empfiehlt es sich für die Wirkungen speziell der Erdschwere oft, die allgemeine Formel des Gravitationsgesetzes in der Form zu verwenden $f = g R^2 \cdot \frac{m}{r^2}$, wo $r \gtreqless R$.

So ergibt sich jetzt auch die Beschleunigung und das Gewicht einer gegebenen Masse in beliebig groſsen Höhen über der Oberfläche (LA 50). Theoretisch wird erst für $r = \infty$ die Schwere Null, doch beträgt sie z. B. schon in einem Abstande $1000\,R$ vom Erdmittelpunkte nur ein Millionstel ihres Wertes an der Oberfläche. (Störungen des Neptun durch die Erde sind noch merklich.) LA 50.

Nach dem Gesetz über die Anziehung von Kugelschalen auf **innere** Punkte nimmt die Schwere gegen den Erdmittelpunkt hin **gleichmäſsig ab** (d. h. sie ist direkt proportional dem Abstande vom Mittelpunkte) und ist im Erdmittelpunkte selbst **Null** (LA 49). LA 49.

Ähnliche Spezialisierungen ergeben sich auch für alle übrigen kugelförmigen Massen des Planetensystemes. Da deren Massenverhältnisse und Radien bekannt sind, so ergibt sich aus der Übertragung der Gleichung $\varkappa M = g R^2$ . . (9) auch der jeweilige Wert der Beschleunigung an ihrer Oberfläche. Z. B. an der Oberfläche des Mondes $g' = \frac{1}{6} g$, für die Sonne $G = 28\,g$.

V. Das **Flutphänomen** besteht darin, dafs an Küsten (Inseln) ı offenen Meere einem relativ höchsten Wasserstande **(Flut)** nach was mehr als sechs Stunden ein niedrigster Wasserstand **(Ebbe)**, iesem nach gleicher Zeit wieder Flut folgt u. s. w. — Dafs diese so ıffallende Erscheinung mit dem Mondlauf kausal zusammenhängen üsse, wurde von altersher vermutet, da der Zeitunterschied zwischen einer Flut und der zweitnächsten gleich ist einem Mond-Tage 4 Stunden 50 Minuten, § 184). Die naheliegende Erklärung, dafs er Mond durch seine Massenanziehung eine Ansammlung der Gewässer weilig über derjenigen Stelle der Erdoberfläche hervorbringe, für elche er in oberer Kulmination steht, liefs es aber nicht nur unerärt, sondern paradox erscheinen, warum nicht erst nach je einem ınzen, sondern schon nach einem halben Mond-Tage die Flut iederkehrt, d. h. warum nicht nur auf der dem Monde zugewandten, ndern auch auf der ihm abgewandten Seite der Erdoberfläche ein utberg sich bildet. NEWTON gab aber die einheitliche Erklärung auf rund seines Gravitationsgesetzes ohne jede neue Hypothese, indem er e Gröfsen der Beschleunigung in Rechnung zog, welche der ond M der ihm zugewandten Wassermenge A (Fig. 52), dem Erdmittelınkt C und der ihm abgewandten Wassermenge B erteilt. Es „fällt" imlich gleichsam A mit der gröfsten, C und der ganze feste Erdırper mit einer kleineren, B mit der kleinsten Beschleunigung gen den Mond hin, und daher sucht sich sowohl A von C, wie kaum niger auch B von C zu entfernen.

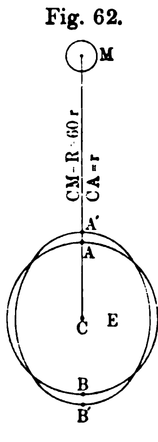
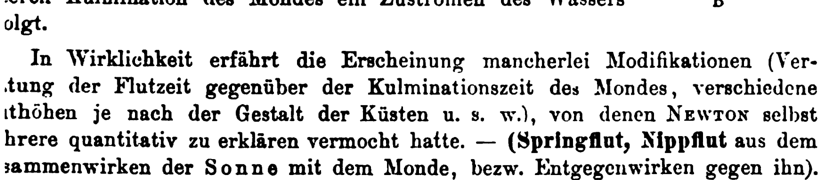


Fig. 62.

Erhält dabei eine Masse in C gegen den Mond hin die Beıleunigung $\frac{\gamma}{R^2}$, so sind die Beschleunigungen der Wasserteile A und B in Bezug auf die Erde

in A $\quad \frac{\gamma}{R^2} - \frac{\gamma}{(R-r)^2} \doteq - \frac{2Rr\gamma}{R^4} = - \frac{2r}{R^3}\cdot\gamma,$

in B $\quad \frac{\gamma}{R^2} - \frac{\gamma}{(R+r)^2} \doteq + \frac{2Rr\gamma}{R^4} = + \frac{2r}{R^3}\cdot\gamma;$



beiden Stellen wird also das Wasser mit annähernd um eichviel geringerer Kraft gegen den Erdmittelpunkt hinzogen als in den um 90° abliegenden Stellen der Erdoberfläche. wird somit von diesen gegen jene ein Überdruck auf das ısser ausgeübt, infolge dessen an die Stellen der oberen und ıeren Kulmination des Mondes ein Zuströmen des Wassers olgt.

In Wirklichkeit erfährt die Erscheinung mancherlei Modifikationen (Vertung der Flutzeit gegenüber der Kulminationszeit des Mondes, verschiedene ıthöhen je nach der Gestalt der Küsten u. s. w.), von denen NEWTON selbst hrere quantitativ zu erklären vermocht hatte. — (**Springflut, Nippflut** aus dem sammenwirken der Sonne mit dem Monde, bezw. Entgegenwirken gegen ihn).

VI. Bestimmung der Gravitationskonstante x, der Masse der Er[illegible] und der übrigen Massen des Planetensystems in absolutem Mafse. — [illegible] lange nicht der absolute Wert von x ermittelt war, mochte gegen die Anna[illegible] einer allgemeinen Gravitation eingewendet werden, dafs z. B. zwei Grammkörp[illegible] chen in 1 cm Abstand keinerlei Anziehung zu einander verraten. Aus die[illegible] Umstande war aber nicht zu schliefsen, dafs die Kraft wirklich Null, sond[illegible] nur, dafs sie für gewöhnliche Beobachtungsmittel unmerklich klein sei geg[illegible] über der Reibung u. dergl., welche eine solche Annäherung verhindert. — A[illegible] wenn z. B. die beiden Gramme als Pendel aufgehängt wären (vergl. den Ve[illegible] zum annähernden Nachweis des COULOMBschen Gesetzes, § 135), so würde du[illegible] jede Anziehung eine Verschiebung aus der Lotlage und hierdurch eine [illegible] Anziehung schon übermächtig entgegenwirkende Schwerkraftskomponent[illegible] geweckt. — Gleichwohl gelang es CAVENDISH (1798), diese Anziehungen mitt[illegible] der von MITCHELL (1768) erfundenen, von COULOMB (1784) zur Messung elektris[illegible] und magnetischer Anziehungen und Abstofsungen verwendeten „Drehwage" di[illegible] nachzuweisen und zu messen (Fig. 63 im Grundri[illegible]). An einem feinen Draht war ein leichter Ho[illegible] aufgehängt, an dessen Enden symmetrisch Kug[illegible] von der Masse $\mu = 730$ g hingen; ihnen stan[illegible] centrisch-symmetrisch in r cm Abstand zwei Kug[illegible] von je $m = 158000$ g gegenüber, welche jene [illegible] zogen und so den Wagebalken in wagrechter Ebe[illegible] um einen mefsbaren Winkel ablenkten. Aus der elastischen Rückwirkung des [illegible] gedrehten Drahtes konnte die Kraft f zwischen je einem m und μ bestimmt werden, so dafs in der wieder vorläufig als gültig angenommenen Gleichung $f = x \frac{m\mu}{r^2}$ alle Gröfsen bis auf x bekannt waren. Auch das Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ wurde durch die für verschiedene r gefundenen Werte von f bestätigt.

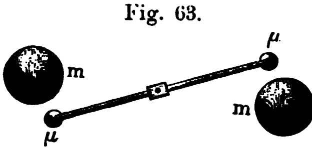


Fig. 63.

Diese Drehwage wurde als „Weltenwage" bezeichnet, weil, nachdem x einmal bekannt war, zunächst auch die Masse M der Erde gemäfs der Gl. (9) $xM = gR^2$ bestimmt war. — Ist ferner von einem Planeten, der Erde, die Masse M bekannt und durch die in Gl. (8) dargestellte astronomische Methode auch das Verhältnis je zweier Körper des Planetensystems, so läfst sich auch für jeden Körper dieses Systems die Masse in absolutem Mafse, d. h. in Gramm oder in Tonnen ($1\,t = 1000\,kg = 10^6\,g$) angeben. — Sind ferner die scheinbaren Durchmesser und auf Grund der bekannten Abstände auch die wirklichen Halbmesser und Volumina der Weltkörper bekannt, so folgt aus $d = \frac{m}{v}$ (§ 16, S. 63) auch die mittlere Dichte aller dieser Körper. So ergeben sich die im § 187 zusammengestellten Zahlenangaben über Massen und Dichten der Weltkörper.

Das Prinzip der Methode von CAVENDISH, die Anziehung zweier ihrer Masse und Massenverteilung nach bekannten irdischen Körper bei gegebenem Abstande zu messen (welche Messungen zu den überhaupt wichtigsten, aber zugleich schwierigsten und daher gegenseitiger Kontrolle bedürfenden gehören), wurde auch durch mannigfaltige andere Methoden durchgeführt, welche meist als „Methoden zur Bestimmung der Dichte der Erde" bezeichnet werden. So hatten MASKELYNE und HUTTON (1772—1780, also schon vor CAVENDISH) die Ablenkung eines Bleilotes südlich und nördlich von einem west-östlich streichenden Gebirge beobachtet, von dem der geologische Aufbau und somit die Masse m bekannt war. Hier stellt die Masse des Bleilotes die obige Gröfse μ und die aus der Gröfse der Ablenkung zu berechnende Schwerkraftskomponente die Kraft f dar.

der nach dem Gegenwirkungsprinzip ebenfalls k Dyn beträgt, mit der Beschleunigung $b = \frac{k}{m}$ cm sec^{-2} längs einer Strecke von s cm bewegt (und ihr dabei die Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2bs}$ erteilt), hat jene Kraft eine Arbeit von ks Erg geleistet. —

In den Beispielen 1, 2, 3 war I. der zu überwindende **Widerstand konstant** an allen Punkten des vom Angriffspunkte der arbeitenden Kraft zurückgelegten Weges, und es war II. der Sinn der Verschiebung längs dieses Weges **rein entgegengesetzt** der Richtung des Widerstandes. Zunächst unter diesen beiden einfachsten Voraussetzungen erfolgt die **Messung** der mechanischen Arbeit auf Grund folgender Einheiten und Maſsformeln:

Die Einheit der mechanischen Arbeit (AE) ist geleistet, wenn ein Widerstand von der Gröſse der Krafteinheit längs der Wegeinheit überwunden wurde. Im C-S-G-System ist 1 AE das Erg, d. i. die Arbeit einer Kraft, die einen Widerstand von 1 Dyn längs 1 cm überwindet. — Werden k Dyn längs s cm überwunden, so ist die geleistete mechanische Arbeit $A = ks$ Erg . . . (Maſsformel 1)

Im terrestrischen Maſssystem gilt als 1 AE das **Meterkilogramm** (mkg), wobei „Kilogramm" in der Bedeutung der Krafteinheit, nicht der Masseneinheit verstanden wird (§ 16). — Da 1 Kraftkilogramm gleich ist 981000 Dyn und 1 m = 100 cm, so ist 1 mkg = 981000 . 100 Erg = 9,81 . 10^7 Erg $\neq$ 10^8 Erg. — Als gröſsere absolute Einheit wird in der Technik **1 Joule** = 10^7 Erg benutzt.
4, 55. Also 1 mkg = 9,81 Joule; 1 Joule $\neq$ $^1/_{10}$ mkg (LA 53, 54, 55).

Wird die Arbeit, wie im obigen Beispiel 1, speziell entgegen der **Schwere**, d. h. als **Heben eines Gewichtes** geleistet, so nimmt die Maſsformel $A = k.s$ die speziellere Gestalt $A = p.h$ an.

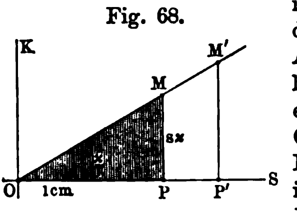
Wird die Arbeit, wie im obigen Beispiel 3, speziell entgegen dem **Beharrungswiderstande** (also nicht entgegen einer eigentlichen **Kraft**) geleistet, so kann doch auch dieser Widerstand wie der einer Kraft k, nämlich als **gleich** der die Masse beschleunigenden Kraft, in Rechnung gezogen werden, und es ergibt sich dann:

$$k = mb \text{ (§ 16) und } s = \frac{v^2}{2b} \text{ (§ 6), also } A = k.s = mb \cdot \frac{v^2}{2b} = \frac{mv^2}{2} \text{ Erg.}$$

Diese Gröſse $\frac{mv^2}{2}$ ist **maſszahlengleich** derjenigen, die wir im folgenden § als „**lebendige Kraft** einer Masse m von der Geschwindigkeit v" bezeichnen werden. — Darin, daſs aus dem Produkte $mb \cdot \frac{v^2}{2b}$ **der Faktor b ausgefallen** war, liegt ein Hauptgrund dafür, überhaupt eine Maſsgröſse „Kraft mal Weg" einzuführen. Denn denken wir an der gegebenen Masse m ein andermal eine **gröſsere Kraft** $K = mB$ **angreifend**, die ihr die **gröſsere** Beschleunigung B erteilt, so braucht diese sie nur längs des **kleineren Weges** $\sigma = \frac{v^2}{2B}$ zu bewegen, um ihr (entgegen dem nunmehr ebenfalls gröſseren Beharrungswiderstande $= K$) die verlangte Endgeschwindigkeit v zu erteilen. Ist es z. B. speziell die **irdische Schwerkraft**, welche einer Masse m die Endgeschwindigkeit v erteilt, so wird $mg \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{mv^2}{2}$; auf der **Sonnenoberfläche** wäre $mG \cdot \frac{v^2}{2G} = \frac{mv^2}{2}$, wo $G = 28g$ u. s. w. — Ein anderer Hauptgrund für die Fruchtbarkeit des Begriffes „**Arbeit = Kraft mal Weg**" liegt in seiner Anwendung auf die **Maschinen**, § 30;

1. **Arbeit gegen elastische Kräfte** (allgemeiner: Kräfte nach dem Ge $f = C \cdot s$). Ein Massenpunkt befindet sich in einem elastischen Kraftfeld dafs er im Punkte O im Gleichgewichte ist. Um ihn im Abstande von im Gleichgewicht zu halten, seien $\varkappa$ Dyn erforder dann ist nach dem Elastizitätsgesetze (§ 51) für Abstand von s cm eine Kraft von $s \cdot \varkappa$ Dyn erfo lich. — Diesem Kraftgesetze für elastische K entspricht hier das Ansteigen der Kraft nach Geraden OM (Fig. 68), wobei $MP = \varkappa \cdot OP$ Das Arbeitsdiagramm für die Verschiebung $OP =$ ist also das Dreieck $OPM = \frac{1}{2}\varkappa s \cdot s = \frac{1}{2}$ Daher ist

Fig. 68.



die Arbeit gegen **elastische Kräfte** $A = \frac{1}{2}\varkappa s^2$ . .

Etwas allgemeiner ist die auf dem Wege PP' geleistete Arbeit darge durch das Trapez $PP'M'M$; sie hat die Gröfse $A_s^{s'} = \frac{1}{2}\varkappa(s'^2 - s^2)$.

L 56—62. Die arithmetische Ableitung von Gl. (2) und Anwendungen in LA 56—62

2. **Arbeit gegen Gravitationskräfte** (allgemeiner: Kr nach dem Gesetze $f = \frac{C}{r^2}$) zweier Massen von M g und m g, de gegenseitiger Abstand von r cm auf R cm vergröfsert wird; sie betr

$$A_r^R = \varkappa M m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \text{ Erg} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Für die Ableitung dieser vielfach nützlichen Gleichung (vergl. § 24, § 136 der einfachste Fall der, dafs M ruhig in O (Fig. 68) bleibt und m längs einer

Fig. 69. [Figure: line from M at O through m at P, P_1, P_2, …, P_{n-1}, m at P_n; labels r, $r_2 - r_1$, R]

O ausgehenden Geraden aus dem Abstande $OP = r$ in den Abstand OP_n verschoben wird. Die Strecke PP_n werde in sehr kleine Strecken PP_1, P_1P_2 zerlegt. Die Anziehung von M auf m hat gemäfs Newtons Gesetz (§ 21) im Punkte P die Gröfse $f = \varkappa\frac{Mm}{rr}$, im Punkte P_1 die Gröfse $f_1 = \varkappa$

ah. 9, 21. Einen Mittelwert (math. Anh. Nr. 9 und 21) dieser Kraftgröfsen stellt $\varkappa\frac{M}{r_1}$ den wir als längs der ganzen Strecke PP_1 konstant geltend annehmen. De die Elementararbeit $A_r^{r_1} = \varkappa\frac{Mm}{rr_1}(r_1 - r) = \varkappa Mm\left(\frac{r_1}{rr_1} - \frac{r}{rr_1}\right)$

$$\left.\begin{aligned}
\text{oder}\quad A_r^{r_1} &= \varkappa Mm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right);\\
\text{ebenso}\quad A_{r_1}^{r_2} &= \varkappa Mm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A_{r_{n-1}}^R &= \varkappa Mm\left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{R}\right)
\end{aligned}\right\}$$

Die Summe dieser Elementarar d. i. die **Gesamtarbeit von** r **bis**

$$A_r^R = \varkappa Mm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Für $R = \infty$ wird $\frac{1}{R} = 0$ und $A_r = \varkappa \cdot \frac{Mm}{r}$ Erg · · · (4); in W

LA 60. Eine graphische Darstellung der Gl. (4) mittels Arbeitsdiagrammes in

hier statt der Verschiebungskomponenten, welche zusammen gleich MN sind, die veränderlichen Kraftkomponenten einführen, so wäre die Summierung aller einzelnen Teilarbeiten bei weitem nicht so einfach.)

Der hier betrachtete Fall der Arbeitsleistung an einer schiefen Ebene entgegen der Schwerkraft läfst sich folgendermafsen verallgemeinern:

Eine Masse, auf welche innerhalb eines homogenen Kraftfeldes die Feldkräfte mit k Dyn in der Richtung MX wirken (Fig. 73, a. v. S.), werde unter dem Winkel α gegen die der MX entgegengesetzte Richtung um s cm verschoben. Es ist dann die gegen die Feldkräfte

geleistete Arbeit $A = ks \cos \alpha$ Erg . . . (Mafsformel 1 II)

Diskussion der Gleichung (1 II) in Bezug auf α. Negative Arbeit. — Da nach dem bisher erörterten Begriffe der mechanischen Arbeit eine Kraft nur dann Arbeit leistet, wenn die Kraft selbst oder wenigstens eine Komponente von ihr einem Widerstande entgegen wirkt, so hat die Aufgabe II und ihre Lösung zunächst nur einen Sinn, wenn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Doch sind auch die beiden Grenzfälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^\circ$ in Übereinstimmung mit den bisherigen Arbeitsmafsen: es ist nämlich für $\alpha = 0$, d. h. wenn die Verschiebung dem Widerstande rein entgegengesetzt ist, wegen $\cos \alpha = 1$ die Arbeit $A = ks$. Ferner ist für $\alpha = 90^\circ$, wegen $\cos \alpha = 0$, $A = 0$, d. h. eine Verschiebung **normal** gegen die Richtung der widerstehenden Kraft erfordert **keine** Arbeit gegen diese Kraft. — Da hingegen für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ in Gl. (1 II) der $\cos$ und daher auch die Verschiebung $s \cdot \cos \alpha$, sowie die Gröfse A negative Werte annehmen, so führt die Gleichung auf die Frage, ob und wie sich negative Mafszahlen einer Arbeit physikalisch deuten lassen. — Eine solche Deutung liegt nahe, wenn z. B. ein Wagen einen Hügel abwärts fährt. Indem wir nämlich bisher als positive Arbeit z. B. die beim Heben einer Last vertikal oder schief aufwärts betrachteten, so wird als negative Arbeit die beim Senken jener Last sich auffassen lassen. Also in einem noch konkreteren Beispiel: Leisten Pferde auf wagrechter Strafse entgegen dem Widerstande der Reibung eine gewisse Arbeit R, so kommt zu dieser beim Berganfahren noch eine positive Arbeit S entgegen der Schwerkraft hinzu: $A = R + S = R + (+S)$; beim Abwärtsfahren dagegen werden die Pferde durch die Arbeit, welche nunmehr die Schwerkraft ihrerseits entgegen der Reibung verrichtet, unterstützt und haben also ihrerseits eine um S verminderte Arbeit zu leisten: $A' = R - S = R + (-S)$. Würde hier der absolute Wert von S gröfser als der Wert von R, so hätten die Pferde trotz der Reibung überhaupt keine Arbeit mehr zu leisten; sie müfsten vielmehr jetzt den Wagen aufwärts drücken, während sie früher ihn aufwärts zu ziehen hatten. Allgemein:

Die Arbeit, welche eine Kraft K bei einer Verschiebung (entgegen einem Widerstande W) leistet, wird als **positive**, bezw. **negative** Arbeit der Kraft K gerechnet, je nachdem der Sinn der Verschiebung dem Sinne der arbeitenden Kraft **gleich** oder **entgegengesetzt** (somit dem Sinne des Widerstandes entgegengesetzt oder gleich) ist.

Durch diese Erweiterung des Arbeitsmafses auch für Verschiebungen im Sinne der widerstehenden Kraft erweitert sich der an Fig. 71 veranschaulichte Satz, dafs die Arbeit entgegen gegebenen Feldkräften nur von der Niveaudifferenz, nicht von der Form der Bahn abhänge, auch für solche Bahnen wie in Fig. 72

. B. Heben und Senken eines schweren Körpers auf beliebig gekrümmten, teils asteigenden, teils abfallenden (konvexen oder konkaven) Bahnen. Spezielleres Beispiel: Arbeit der Schwerkraft bei Bewegung eines Pendelpunktes während des Entfernens von, bezw. des Rückganges zu der Mittellage (— vgl. Fig. 4, S. 9 und Fig. 75, S. 103).

Überdies legt uns die Unterscheidung von positiver und negativer Arbeit die Vorstellung nahe, dafs nicht nur bei jedem Arbeitsvorgange eine arbeitende Kraft und eine widerstehende Kraft vorhanden sei, sondern dafs wir noch allgemeiner jede der beiden Kräfte sowohl als die **arbeitende** wie als die **widerstehende**, oder auch als **Arbeit leistende** und **Arbeit verbrauchende** ansehen können. (Vergleich mit den Handelsbüchern zweier Geschäftsfreunde, für deren einen dasselbe „Soll" ist, was für den anderen „Haben" bedeutet.)

Das Wort Arbeit hat schon im gewöhnlichen, aufserphysikalischen und ebenso im physikalischen Sprachgebrauch zwei Bedeutungen: 1. Arbeit im ursprünglichen Sinne, das Arbeiten (das Verrichten, Durchführen, Vollziehen der Arbeit); 2. Arbeit im übertragenen Sinne, das Gearbeitete (das Ergebnis, das Produkt der Arbeit). Während z. B. Pferde eine Last auf wagrechter Bahn entgegen der Reibung oder über eine schiefe Ebene entgegen der Reibung und einer Schwerkraftskomponente bewegen, arbeiten sie; haben sie das Ziel erreicht, so besteht ihre Gesamtarbeit darin, dafs die Last ihren Ort geändert hat, die Radachsen sich abgeschliffen und erwärmt haben u. dergl. mehr. — In physikalischen Rechnungen wird meistens nur auf die Arbeit im zweiten Sinne, auf das Endergebnis des Arbeitens, geachtet. Nur in diesem Sinne dürfen wir ja z. B. sagen, dafs, wenn eine Masse um s m gehoben und dann um ebenso viel gesenkt wurde, die verrichtete Arbeit gleich Null sei. Hätten wir aber ein andermal das während des ganzen Vorganges sich vollziehende Arbeiten seinem absoluten Werte nach messen wollen, so ergäbe sich eine Arbeit der Muskelkraft beim Heben entgegen der Schwerkraft im Betrage von ks mfg und eine Arbeit der Schwerkraft beim Sinken entgegen der Muskelkraft wieder im Betrage von ks mfg, also zusammen von $2ks$ mfg. (Vergl. die beiden Fragestellungen: Ein Luftballon hat sich zuerst um s_1 m gehoben, dann um s_2 m gesenkt; wieviel Meter hat er sich vom Ausgangspunkt entfernt? und: Wieviel Meter hat er zurückgelegt?) Dagegen erhalten wir mit Rücksicht darauf, welche der beiden Kräfte beim Heben und Sinken jeweilig gearbeitet hat, sowie auf die Vorzeichen jener Arbeiten, folgende Ansätze:

Arbeit der Muskelkraft entgegen der Schwerkraft: $+ks + (-ks) = 0$;
Arbeit der Schwerkraft entgegen der Muskelkraft: $-ks + (+ks) = 0$.

Überblicken wir schliefslich die bisher behandelten Beispiele von Arbeitsvorgängen (Arbeiten im ersten Sinne) daraufhin, was alles die „Arbeit" (im zweiten Sinne) sein kann, so zeigen sich diese Ergebnisse von sehr mannigfacher Art: Im ersten der drei eingangs dieses Paragraphen vorgeführten Beispiele für das Messen einer mechanischen Arbeit nach der Definitionsgleichung $A = k \cdot s$ befinden sich die gehobenen 9 kg in einem höheren Niveau in Bezug auf die Erdoberfläche; im zweiten Beispiele haben sich Teile des Wagens und der Fahrbahn infolge der Reibung abgeschliffen (verbogen . . .) und erwärmt; im dritten Beispiele hat die bewegte Masse einen Geschwindigkeitszuwachs erfahren. Durch die gegen elastische Kräfte geleistete Arbeit $A = \frac{1}{2} x s^2$ ist der elastische Körper (z. B. die Spirale einer Federkanone, die Feder einer Taschenuhr . . .) in einen Spannungszustand versetzt worden. Durch das Vergröfsern

des gegenseitigen Abstandes zweier Massen mittels der gegen Gravitationsk[illegible] geleisteten Arbeit $A_r^R = \varkappa M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$ ist auch in diesem Systeme eine [illegible] Niveaudifferenz (wie beim Heben der Last von der Erde weg) gesch[illegible] worden, vermöge deren die Massen nachmals wieder aufeinander losstürzen [illegible] hierbei selbst Arbeit verrichten können. — **Allgemein** wird sich im folge[illegible] Paragraphen herausstellen, dafs das Ergebnis geleisteter **Arbeiten** [illegible] Herbeiführung von Zuständen ist, vermöge deren die Körper, an de[illegible] die Arbeit **geleistet** wurde, selbst wieder Arbeits**fähigkeit** [illegible] **„Energie“** erhalten. —

Weder mit diesem Begriffe der Energie, noch mit dem der **Arbeit** [illegible] Arbeitens oder des Gearbeiteten) ist zu verwechseln der folgende Begriff [illegible] **mechanischen Leistung** ebenfalls im Sinne von Leistungsfähigkeit, w[illegible] bei einem Kinde klein, bei einem Erwachsenen gröfser, bei einem Pferde, [illegible] Lokomotive . . . noch gröfser ist. Gemeint ist hier zunächst, dafs der stati[illegible] Druck oder Zug (also die Kraft im Sinne der Gleichung $k = m b$), welchen [illegible] Kind höchstens auszuüben vermag, kleiner ist als der beim Erwachsenen u. s. [illegible] und dafs daher in derselben Zeit vom Kinde weniger ausgerichtet, geleis[illegible] wird. Gleichwohl kann das schwache Kind die gleiche Gesamtarbeit verrich[illegible] (z. B. einen Haufen Ziegel in ein höheres Stockwerk schaffen), aber erst bi[illegible] längerer Zeit als ein starker Mann (vorausgesetzt, dafs hierdurch nicht sch[illegible] vorher die ganze Arbeitsfähigkeit = Energie des Kindes aufgebraucht ist). Al[illegible]

Die mechanische Leistungsfähigkeit einer Arbeitsquelle, in d[illegible] Technik kurz als **Leistung** oder **Effekt** (Arbeitsstärke, Zeitarbeit) be[illegible]zeichnet, wird gemessen durch die Arbeit per Zeiteinheit. I[illegible] C-S-G-System ist **Einheit der Leistung 1 Sekundenerg** = 1 Erg sec⁻¹ [illegible] Technische Einheit ist **1 Watt = 1 Joule per sec** = 10^7 Erg sec⁻¹

Im terrestrischen System ist Einheit der Leistung 1 mfg per sec und als höhere Einheit **1 Pferdestärke** (1 PS) = **75 Meterkilogramm per Sekunde**

$= 75 \,.\, 9{,}81 \,.\, 10^7$ Erg per sec $= 73\,575 \,.\, 10^5$ Erg per sec $\neq 73\,600 \cdot \frac{10^5}{10^7}$ Joule per sec

= **736 Watt.** (Daher 1 Watt $\neq$ $^1/_{10}$ mfg per sec). — Die englische Pferdestärke (*Horsepower*, HP) beträgt 746 Watt.

Z. B. Lokomobilen für Dreschmaschinen haben 5 bis 10 PS, Lokomotiven für Personenzüge haben etwa 500 PS, für Schnellzüge auf Gebirgsbahnen etwa 1000 PS.

Da Leistung $= \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$, so ist Arbeit = Leistung × Zeit. — Man drückt daher öfters, namentlich in der Elektrotechnik, geleistete Arbeiten (und Energieen) in Wattstunden aus, wobei **1 Wattstunde** = (1 Joule per sec) × (3600 sec)

A 53. = **3600 Joule** = $3{,}6 \,.\, 10^{10}$ Erg ($\neq$ 360 mfg). — LA 53.

§ 23. Lebendige Kraft. — Aktuelle und potentielle Energie. Verwandlung und Erhaltung mechanischer Energieen.

Beispiel 1: Noch bevor ein Arbeiter durch seine Muskelkraft eine Last wirklich hebt, schreiben wir ihm schon die Fähigkeit zu, irgendwann später jene Arbeit zu leisten. (Ähnlich bei einem kräftigen Pferde, einer geheizten

hat, die entgegen dem Beharrungswiderstande wirklich geleistet werden muſs, um eine Masse von m g von der Anfangsgeschwindigkeit $c_0 = 0$ auf Endgeschwindigkeit v cm sec^{-1} zu bringen, bildet jetzt die Gröſse $\frac{mc^2}{2}$ Maſs der Arbeit, welche die Masse m dadurch zu leisten fähig ist, daſs unter Überwindung irgend eines Widerstandes umgekehrt von der Anfangsgeschwindigkeit c auf die Endgeschwindigkeit $v_0 = 0$ gebracht wird.

Wie für ersteren Vorgang eines Gewinnes von Geschwindigkeit das nächstliegende Beispiel der freie Fall war, ist ein solches Beispiel für das Verlieren von Geschwindigkeit die Bewegung im vertikalen Wurf nach aufwärts. — Indem sich dabei eine mit je einer bestimmten aufwärts gerichteten Anfangsgeschwindigkeit versehene Masse nur bis zu einer ganz bestimmten von jener Geschwindigkeit abhängigen Steighöhe zu erheben vermag, können wir uns vorstellen, daſs diese Masse entgegen der Wirkung der Schwerkraft sich selbst emporträgt, wie sonst ein Arbeiter sie emporträgt. Wir können so die 1. Beispiele des vorigen § das folgende nachbilden: Eine Masse von 9 kg (oder was immer für einer anderen Gröſse, da g für alle Massen gleich ist) muſs eine Anfangsgeschwindigkeit von 10 m sec^{-1} haben, damit sie eine Steighöhe $s = \frac{10^2}{2.10} = 5$ m erreiche (§ 11, Gl. 8). Hat sich dann die Masse von 9 kg um diese 5 m erhoben, so hat sie ebenso 45 mkg mechanische Arbeit an sich selber verrichtet, wie früher der Arbeiter an ihr diese Arbeit verrichtet hatte. — Man berechne ebenso die Anfangsgeschwindigkeiten, welche eine Masse von 5 kg haben muſs, damit sie sich entgegen der Erdschwere 9 m oder damit sich 1 kg um 45 m erhebe!

Obige Gl. (1) für die seitens der anfänglich mit Geschwindigkeit versehenen Masse wirklich geleistete Arbeit enthält also folgende Definition und Maſsformel für die Arbeitsfähigkeit einer sich bewegenden Masse:

Eine Masse von m g mit c cm sec^{-1} Geschwindigkeit besitzt eine **lebendige Kraft** (kinetische Energie) $L = \frac{mc^2}{2}$ **Erg.** (Maſsformel I).

Wird hier $c = 0$, so ist auch $L = 0$, d. h. eine in Ruhe befindliche Masse besitzt keine lebendige Kraft. (Leibniz nennt im Gegensatz zur „lebendigen Kraft", welche er noch nicht durch $\frac{mc^2}{2}$, sondern durch mc^2 gemessen hatte, den statischen Druck eines im Gleichgewicht befindlichen Körpers „tote Kraft". Der letztere Name ist auſser Gebrauch gekommen, nicht aber der erstere). Sowohl diese Ruhe für $c = 0$, wie irgend eine Geschwindigkeit $c > 0$, ist als relativ zu denken in Bezug auf denjenigen Körper, an welchem die Masse m Arbeit leistet, sobald sie durch ihn Geschwindigkeit verliert. So ist z. B. auch das gröſste Geschoſs bei gröſster Geschwindigkeit ein harmloses Ding, insoweit sich ihm nichts in den Weg stellt; ebenso ein Eilzug auf der freien Strecke. Umgekehrt ist den Reisenden des Zuges ein auf ihrem Geleise ruhig stehender anderer Zug ebenso gefährlich wie die Geschwindigkeit ihres eigenen Zuges, nicht aber ein vor ihm mit gleicher Geschwindigkeit vorausfahrender.

Daſs ferner die Gröſse c in der zweiten (also einer geraden) Potenz vorkommt, ist schon ein arithmetischer Ausdruck dafür, daſs wir bei der Messung der lebendigen Kraft von der Richtung der Bewegung absehen dürfen (ebenso wie bei jeder Arbeit im Sinne des Arbeitsergebnisses, § 22, S. 9 mit anderen Worten: Lebendige Kräfte sind (wie Arbeiten und Potentiale, §

S. 109) Skalengröfsen, nicht Vektorgröfsen. So schreiben wir einem Meteoriten, welcher mit einer gewissen Geschwindigkeit in das Sonnensystem eindringt, eine bestimmte lebendige Kraft zu, gleichviel von woher er gekommen ist und wohin er geht. —

Auch der Begriff der lebendigen Kraft verdankt wie der der Arbeit (§ 22, S. 88) seine Zweckmäfsigkeit demjenigen Umstande, welcher sich arithmetisch in dem Sich-Heben der Faktoren b im Produkte $mb \cdot \frac{c^2}{2b}$ ausdrückt. Hat z. B. eine Kanonenkugel die Masse $m = 100$ kg und die Geschwindigkeit $c = 500 \text{ m sec}^{-1}$, so hat sie eine lebendige Kraft $\frac{1}{2} . 100 . 500^2 = 1{,}25 . 10^7$ (m, sec, kg) . $1{,}25 . 10^7$ (m, sec, kg) $= 1{,}25 . 10^{12}$ Erg. Die Faktoren dieses Produktes verteilen sich nachmals wieder auf die verschiedenste Weise, je nachdem wir uns die Kugel vertikal a) über der Erde, b) über dem Mond, c) über der Sonne abgefeuert, d) über eine Reibungsfläche hingleitend, e) in eine Holzwand, f) in eine Panzerplatte eindringend denken und wobei in a) $b = g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$, in b) $b = \frac{1}{6} g$, in c) $b = 28 g$, in d) etwa $b = \frac{1}{100} g$, in e) $b = 100 g$, in f) etwa $b = 100000 g$ beträgt; in dem Mafse aber, als hier die die Anfangsgeschwindigkeit langsamer oder schneller aufzehrenden Widerstände gröfser oder kleiner sind, werden entsprechend die von der Kugel im ganzen zurückgelegten Wege kleiner oder gröfser. Ferner: Es treffe einmal eine Mörserkugel von $M = 500$ kg mit der Geschwindigkeit $c = 30 \text{ m sec}^{-1}$, ein andermal eine Kugel von $m = 20 \text{ kg} = \frac{1}{25} 500$ kg mit der Geschwindigkeit $C = 150 \text{ m sec}^{-1} = 5 . 30 \text{ m sec}^{-1}$ auf dieselbe Festungsmauer. Die Zerstörungsarbeiten beider Geschosse werden sich ihrer Art nach mannigfach unterscheiden, z. B. wird die kleinere, schnellere Kugel in einem engeren Schufskanal tiefer eindringen als die gröfsere. Der Gröfse nach aber werden die von beiden Kugeln verrichteten Arbeiten einander gleich sein, nämlich $\frac{Mc^2}{2} = \frac{mC^2}{2} = \frac{500 . 30^2}{2} = \frac{20 . 150^2}{2}$. Also nicht der Verlauf der Arbeitsleistung im einzelnen und ihrer Gesamtdauer nach, wohl aber der **Gesamtbetrag** der Arbeit, welche ein Körper seiner Masse und Geschwindigkeit nach zu leisten überhaupt fähig ist, **hängt von dem Produkte aus m und c^2 ab** (und ist mafszahlengleich dem halben Produkte). — Da in Gl. (1) nur die fertigen Produkte aus k und s einerseits, aus m und c^2 andererseits zu einander in Beziehung gesetzt sind, so wird durch die energetische Grundgleichung (1) $ks = \frac{1}{2} mc^2$ eine Bewegung minder vollständig beschrieben als durch die (im engeren Sinne) dynamische Grundgleichung $k = mb$ und die phoronomische Gleichung $s = \frac{c^2}{2b}$ zusammengenommen. —

Vermindert eine Masse ihre Geschwindigkeit von c auf $c_1 < c$, so hat sie jetzt nur mehr die lebendige Kraft $\frac{mc_1^2}{2} < \frac{mc^2}{2}$ und erfuhr also die

Änderung der lebendigen Kraft $L - L_1 = \frac{mc^2}{2} - \frac{mc_1^2}{2}$ (1a).

In den Beispielen 1a) bis 1f) waren die widerstehenden Kräfte k zwar verschieden grofs, aber jeweilig konstant angenommen worden. Sind diese Kräfte variabel, d. h. an verschiedenen Stellen des von der Masse m durchlaufenen Weges von verschiedener Gröfse, $k_1, k_2 \ldots k_n$, so dafs die Verzögerungen

[illegible] und die Endgeschwindigkeit v geben, so [illegible] Kraft der Reihe nach die Änderungen:

$$[illegible] = \frac{m\,[illegible]}{2} - \frac{m\,[illegible]}{2}$$

$$[illegible] = \frac{m\,[illegible]}{2} - \frac{m\,[illegible]}{2}$$

$$[illegible] = \frac{m\,[illegible]}{2} - \frac{m\,v^2}{2}$$

Durch Addition aller Gleichungen wieder als Gesamtänderung der lebendig[illegible]

$$L - L_n = \frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$$

[illegible] Masse m [illegible] Anfangsgeschwindigkeit c in ei[illegible] [illegible] veränderlich verzögerten Bewegung g[illegible] [illegible] veränderliche Widerstände ge[illegible] [illegible]

$$A = \frac{mc^2}{2} = L \dots$$

[illegible] durch eine Masse m bei Abga[illegible] [illegible] Arbeit ist also nur von $m \times c^2$, [illegible] diese Arbeit verrichtet wird, und [illegible] Kraft größer oder kleiner, [illegible] auch nicht von deren Zeitdauer)

[illegible] auf die anfängliche Zunahme und [illegible] Abgabe von lebendiger Kraft nach Gl. (1 b) läßt sich nun auch e[illegible] [illegible] Fall von Arbeitsleistung beim Heben eines Gewichte[illegible] [illegible] § [illegible] Beispiel [illegible] in seinen Einzelheiten vers[illegible]

Drückt auf eine Masse m vom Gewichte $p = mg$ [illegible] der vertikal aufwärts gerichteten Kraft $k = mg$, so beh[illegible] stand der Ruhe oder der Bewegung (§ 15, I), da p u[illegible] Gleichgewicht halten. War anfänglich m in Ruhe, [illegible] Zeitlang $k_1 > p$ sein, damit eine Geschwindigkeit $v > 0$ (Anlauf). Solange dann $k_2 = p$ ist, bewegt sich [illegible] Geschwindigkeit v gleichförmig weiter (Stationärer [illegible] dann $k_3 < p$, so tritt (im Endlauf) Verzögerung und [illegible] ein. — Die im ganzen verrichtete Arbeit ist trotz des W[illegible] Größe der Kraft k einfach $A = ph$ Erg, indem die i[illegible] nommene lebendige Kraft im Endlauf wiede[illegible] gebraucht wird (LA 55).

Daß die Gesamtarbeit hierbei durch das Produkt aus dem [illegible] Wege h und der abwärts gerichteten konstanten Kraft p aufwärts gerichteten veränderlichen Kräfte $k_1\,k_2\,k_3$) gemessen wird daran, daß schon im einfachsten Falle des Arbeitsmaßes $A =$ [illegible] die Arbeit leistende, sondern die Arbeit verbrauchende Kraft Widerstand entgegen die Arbeit zu leisten ist) gemeint sein m[illegible]

Verknüpfen wir nunmehr die beiden Arbeitsvorgänge z. [illegible] eines vertikal aufwärts geworfenen Körpers einerseits, bei sein[illegible] seits, so stellt das Gesetz (§ 11, II, III), daß der Körper bei de[illegible] Ausgangsniveau eine der Anfangsgeschwindigkeit [illegible] Werte nach gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengese[illegible]

eit wieder erlangt hat, die phoronomische Grundtatsache dar, welche n dynamischer, und zwar in speziell energetischer Form dahin ausdrücken, die kinetische Energie des Körpers bei der Rückkehr in das Ausgsniveau wieder die gleiche geworden ist. Und zwar gilt dieser Satz der Wiedererlangung der kinetischen Energie nicht nur beim vertikalen, ern auch beim schiefen Wurf [§ 11, III, 4), was wieder ein Beispiel lie Unabhängigkeit der lebendigen Kraft oder kinetischen Energie von Richtung der Geschwindigkeit ist. —

Aber nicht nur bei der Rückkehr in das Ausgangsniveau hat der Körper die rüngliche Arbeitsfähigkeit wieder erlangt, sondern wir können uns vorstellen, diese seine Arbeitsfähigkeit oder Energie sich überhaupt während ganzen Bewegung unverändert erhalten hat, indem wir den Begriff Energie so weit fassen, dafs unter ihn aufser dem bisher erörterten der rgie der Bewegung auch noch fällt der Begriff der

II. Energie der Lage. — Wieder liefert das einfachste Beispiel für diesen riff der vertikale Wurf. Denken wir uns nämlich den Körper, sobald er die höhe erreicht hat und also die Geschwindigkeit Null besitzt, daselbst von r Hand festgehalten oder ihm ein Brettchen untergeschoben, so können wir Körper beliebig lange in dieser Lage erhalten, ohne dafs seine Arbeitsfähigkeit mehrt oder vermindert wird. Es braucht nämlich nur, nachdem so die ganze rfbewegung für beliebig lange Zeit unterbrochen war, dieses eingeschaltete dernis wieder beseitigt zu werden, so erlangt auch jetzt wieder der Körper im Falle jene Endgeschwindigkeit c und damit seine ursprüngliche kinetische rgie $\frac{mc^2}{2}$. Im Vorausblick auf dieses künftige Herabfallen und Wiederinnen von Energie der Bewegung schreiben wir also dem Körper in dem sten Punkte seiner Wurfbahn Energie der Lage in Bezug auf das Ausgsniveau zu. Ebenso hat eine Masse Energie der Lage auch noch an der doberfläche selbst, falls von hier z. B. ein Schacht abwärts führt, in welchen hinabstürzen kann. Allgemein:

Energie der Lage kommt einem Körper an einer Stelle P_2 eines raftfeldes in Bezug auf eine andere Stelle P_1 zu, insofern ihm die ldkräfte bei seiner Bewegung von P_2 nach P_1 einen Zuwachs an Gehwindigkeit und hiermit an Energie der Bewegung zu erteilen fähig sind.

Die Mafszahl der Energie der Lage einer Masse m an einer elle P_2 in Bezug auf eine andere P_1 wird gleich gesetzt der Mafszahl s Zuwachses $\frac{mc_2^2}{2} - \frac{mc_1^2}{2}$, welchen m bei der Bewegung von P_2 ch P_1 ausschliefslich infolge der Feldkräfte gewinnt. —

Sind die Feldkräfte zwischen P_2 und P_1 konstant, so ist $\frac{c^2}{} = ks$, wo s die Länge der Strecke P_2P_1 und k die Stärke der der Richtung dieser Strecke wirkenden Feldkräfte bedeutet. Es nn also die Energie der Lage auch durch die Arbeit ks gessen werden, welche erforderlich gewesen war, die Masse m entgen dem Widerstande der Feldkräfte von P_2 nach P_1 zu verschieben.

Dieser einfachste Fall ist z. B. verwirklicht für einen Körper, der sich h cm über der Erdoberfläche befindet und daselbst mit der Kraft seines Gewichtes $p = mg$ Dyn vertikal abwärts gezogen wird. Es kommt ihm also hier in Bezug auf die Erdoberfläche die Energie der Lage $p \cdot h$ Erg zu. So haben z. B. 1000 g Wasser in einem 5 m oberhalb des Mühlrades gelegenen Mühlteich in Bezug auf das Rad $5 \cdot 10^{14}$ Erg Energie der Lage. —

Als Anwendung dieser beiden Messungsmethoden der Energie durch $\frac{mv^2}{2}$ einerseits und durch $p \cdot h$ anderseits, sowie zugleich als Beweis des obigen Satzes, dafs die Gesamtenergie eines aufwärts geworfenen und dann wieder herabfallenden Körpers während aller Phasen seiner Bewegung konstant bleibt, diene folgende Zusammenstellung:

Ist eine Masse m mit der Anfangsgeschwindigkeit c von dem Punkte P_0 aus aufwärts geworfen, durcheilt sie im Zeitpunkte t (d. h. t sec nach Beginn der Aufwärtsbewegung) den Punkt P_1 in der Höhenlage $s = -ct + \frac{gt^2}{2}$ mit der Geschwindigkeit $v = -c + gt$, und hat sie nach der Steigzeit im Punkte P_2 die Steighöhe $H = \frac{c^2}{2g}$ mit der Geschwindigkeit 0 erreicht, so ist die

	Energie der Bewegung		Energie der Lage		Summe
in P_2	0	$+$	$-p \cdot (-H)$	$=$	$C,$
in P_1	$\frac{m}{2}(-c + gt)^2$	$+$	$-p(-ct + \frac{g}{2}t^2)$	$=$	$C,$
in P_0	$\frac{mc^2}{2}$	$+$	0	$=$	$C;$

Beweis durch Ausführung und Reduktion der zweiten Zeile (wobei $p = mg$).

Wird nun umgekehrt jenes Gesetz, dafs die Summe der Energie der Bewegung und der Energie der Lage eines geworfenen Körpers während der Auf- und Abwärtsbewegung immer die gleiche ist, als gegeben angenommen, so läfst sich auf Grund dieses Gesetzes der „Erhaltung der Energie" (zunächst speziell für den geworfenen Körper) die Aufgabe vom vertikalen Wurf so behandeln: Es seien gegeben m und c; wie grofs ist die Wurfhöhe? Antwort: Wegen

LA 61. $0 + p \cdot H = \frac{mc^2}{2} + 0$ und $p = mg$ ergibt sich $H = \frac{c^2}{2g}$. — LA 61.

Die vorstehende Behandlung des vertikalen Wurfes wie die in § 11 hat ein Galileisches Kraftfeld (§ 20), d. h. konstante Gröfse der Schwere an allen vom aufsteigenden Körper durchlaufenen Stellen zur Voraussetzung. Dafs das Gesetz von der konstanten Summe der potentiellen und kinetischen Energie auch für Bewegungen von Körpern im Newtonschen Gravitationsfelde längs beliebiger

LA 63. Bahnen gilt, vgl. § 24, S. 111 und LA 63.

Der Satz von der Erhaltung der Energie für geworfene Körper gestattet nun noch eine viel gröfsere Ausdehnung, wenn wir uns den geworfenen Körper elastisch, z. B. als Billardkugel, und auf eine elastische wagrechte Platte im Ausgangsniveau zurückfallend denken. Beim Stofs gegen diese Platte wird sich nämlich die Kugel abplatten, bis sie alle Geschwindigkeit verloren und so ihre Energie der Bewegung in Energie der Lage verwandelt hat; indem dann die Einbiegung sich wieder ausgleicht, wird die Kugel neuerdings emporgeworfen und so die Energie der Lage in Energie der Bewegung rückverwandelt. So kann sich der Vorgang unendlich oft wiederholen; auch könnte die Kugel in den höheren Lage beliebig oft für beliebig lange Zeit aufgehalten werden. Es ist dies ein Beispiel de

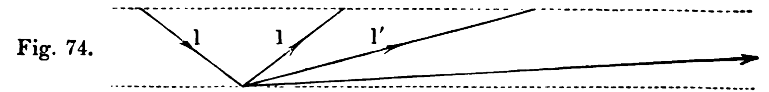
darstellt. Doch faſst man nicht selten auch Wärmeerscheinungen, elektrische Entladungen und dergleichen unter dem Namen „kinetische“ oder Bewegungsenergie zusammen, was aber schon die Hypothese einschlieſst, daſs alle diese Erscheinungen sich „auf Bewegungserscheinungen zurückführen“ lassen; § 57, § 81).

Die hiermit an einigen Beispielen erläuterten allgemeinsten Begriffe der gegenwärtigen Physik verdanken ihre auſserordentliche Fruchtbarkeit den beiden mit ihnen zusammenhängenden Gedanken 1. der **Verwandlung der Energie** (genauer: der Energieformen) und 2. der **Erhaltung der Energie** (genauer: des Energiebetrages). Wiewohl diese Gedanken erst seit der Mitte des XIX. Jahrhunderts in Zusammenhang mit Robert Mayers Entdeckung der „Äquivalenz von Wärme und Arbeit“ (§ 82) in ihrer ganzen Tragweite begriffen worden sind, lernen wir gerade aus dem Gesichtspunkte der modernen „Energetik“ die Keime dieser Auffassung schon in folgenden Betrachtungen Galileis innerhalb der Erscheinungen der Mechanik würdigen:

1. Galileis Gesetz über die Endgeschwindigkeiten an schiefen Ebenen. — Nach § 6 ist die Endgeschwindigkeit v, mit welcher eine Masse am unteren Ende einer schiefen Ebene anlangt, unabhängig von der Neigung der Ebene, nämlich dieselbe wie die Endgeschwindigkeit, welche beim freien Falle längs der Höhe der schiefen Ebene erlangt wird. Am obersten Punkte der schiefen Ebene kommt somit der Masse eine Energie der Lage zu, welche sich, wenn der Körper längs der Höhe h oder längs verschieden langer Strecken $l, l' \ldots$ in das um h cm tiefere Niveau bewegt, in lebendige Kraft von immer demselben Betrage $\frac{m v^2}{2}$ umsetzt.

Galilei hatte auch erkannt, daſs, wenn Körper mit derselben Anfangsgeschwindigkeit c über verschieden geneigte schiefe Ebenen emporlaufen, sie auf allen bis zu gleicher Erhebung über das Ausgangsniveau kommen (Fig. 74); also in der Sprache der modernen Energetik: die lebendige Kraft $\frac{m c^2}{2}$ reicht aus, um die Masse m in ein nur vom Anfangswerte der Geschwindigkeit c abhängiges höheres Niveau gelangen zu lassen, unabhängig von der Neigung der schiefen Ebene. Dabei braucht der Körper auf einer steilen Ebene kurze, auf einer weniger steilen längere Zeit, bis jenes höhere Niveau erreicht und die ganze Geschwindigkeit erschöpft ist. — Denken wir uns die Neigung immer geringer,

Fig. 74.



bis die schiefe Ebene in eine wagrechte übergeht, so würde sich die Bewegung ohne Verzögerung bis ins Unendliche fortsetzen; dieser Grenzfall der Bewegung an der schiefen Ebene entspricht dann dem

2. Trägheitsgesetz. Dieses ergibt sich auch rechnerisch aus der Erhaltung der Energie; denn wenn vorausgesetzt ist, eine Masse m habe die lebendige Kraft von $\frac{m c^2}{2}$ Erg und es wirke auf sie keinerlei Kraft, so daſs sie keine Gelegenheit hat, einen Zuwachs oder Verlust an Energie zu erfahren, so muſs, wenn m unverändert ist, auch die Geschwindigkeit c unverändert bleiben. — Zu dieser Ableitung des Trägheits-

Hemmungspendel (Fig. 75). Ein annähernd ein einfaches Pendel darsei vor einem vertikalen Brett so bedafs es aus der Grenzlage gegen die e fallend gegen einen Nagel stöfst, der ellänge plötzlich verkürzt. Dieses kurze steigt dann bis annähernd zur selben on welcher das längere Pendel gefallen rch verschiedene Stellungen des Nagels ch verschieden gekrümmte Kreisbögen (Da bei dem Stofs des Fadens an den n Teil der kinetischen Energie verloren geht, so entspricht es dem Sinne uches noch besser, wenn man das Pendel aus der Lage B fallen und nach n läfst.) Durch eben diesen Versuch rechtfertigt Galilei auch seine Anezüglich des Satzes über die Endgeschwindigkeit an schiefen Ebenen. — Es ersichtlich, dafs aus diesen energetischen Betrachtungen Galileis sich der die Sätze über die Zerlegung der Kräfte und zwar die Aussonderung tanten Komponente an der schiefen Ebene, sowie der veränderlichen an sbahn des Pendels ableiten liefsen. — Wie jede Pendelbewegung den z der **kinetischen** und der **potentiellen Energie** ganz ungezwungen , indem in den Grenzlagen die potentielle Energie ein Maximum, die e dagegen Null ist — und umgekehrt in der Mittellage die kinetische ein Maximum, die potentielle Null — so bietet speziell das Hemmungsach noch ein typisches Beispiel dafür, dafs der besondere Vorgang, in dem Energieform in die andere umsetzt, noch von Nebenumständen (hier ng des Nagels) abhängt, und dafs somit die Kenntnis der Energiebeträge ch nicht ausreichen würde zu der Voraussage, was aus einem gegebenen potentieller, bezw. aktueller Energie künftig werden wird.

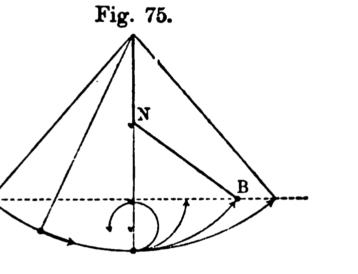


Fig. 75.

gleichen Gründen steht überhaupt die energetische Ableitung mechaVorgänge (aus den Begriffen Arbeit und Energie) darin im Nachteil gegen ngeren Sinne dynamische (aus den Begriffen Kraft und Masse), dafs die egesetze immer nur einen Anfangs- und einen Endzustand ystems, nicht aber auch alle Zwischenzustände in Rechnung bringen.

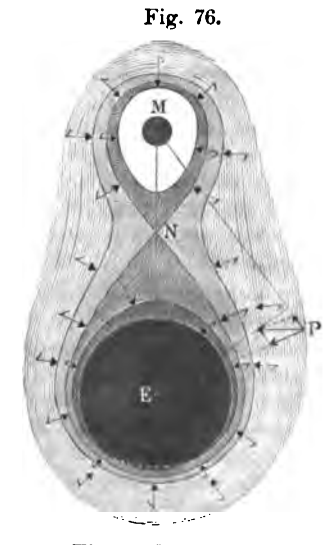
vom Perihel gegen das Aphel hin bewegt, verliert er kinetische und gewinnt potentielle Energie; im **Aphel** hat der Planet die **kleinste kinetische**, die **gröfste potentielle Energie**; indem der Planet dann aus dem Aphel gleichsam gegen die Sonne hin fällt, ähnlich einem horizontal geworfenen Körper, wächst wieder seine kinetische Energie u. s. f. (Vgl. Fig. 53, S. 73 und LA 63.)

LA 63.

§ 24. Gravitationspotential.

a) In § 20 wurde das „**Kraftfeld**" der Erde und im § 21 auch das der übrigen **kugelförmigen Weltkörper** beschrieben durch die **Richtung** und **Gröfse** der **mechanischen Kraft**, mit welcher jene Körper auf eine Masse von 1 g wirken, wenn diese an verschiedene Stellen jener Kraftfelder, d. h. in verschiedene Richtungen und Abstände von je einem der Körper gebracht wird. — Das Flutphänomen (desgleichen jede „**Störungserscheinung**" an einem unter dem Einflusse **zweier** oder mehrerer anderer Weltkörper stehenden Körper, S. 80) stellt ein Beispiel dar, dafs sich **Kraftfelder** „**superponieren**". Wie sich nun durch **Pfeile** (**Kraftvektoren**) überhaupt Kraftfelder darstellen lassen (vergl. Fig. 57, 58, S. 77), so mufs sich auch ein zusammengesetztes Kraftfeld durch solche Pfeile nach dem **Kräfteparallelogramm** darstellen lassen. — Speziell die **Richtung** der Kräfte wird noch anschaulicher, wenn wir statt der Pfeile uns **Bleilote** denken: sie stehen im homogenen Kraftfelde, z. B. einem kleinen Raum nächst der Erde, normal auf dem Meeresspiegel oder auf einem künstlichen Quecksilberniveau, und sind, soweit wir jenes Niveau als eben annehmen dürfen, einander parallel. Wird dagegen die Erde als Kugel angenommen, so weisen alle Lote gegen ihren Mittelpunkt. — Denken wir uns nun weiter den ganzen Raum auch in der Nähe des zusammengesetzten Systemes Erde-Mond (Fig. 76) ähnlich mit dem Bleilote untersucht, so wird dieses nahe der Erde annähernd gegen den Erdmittelpunkt, nahe dem Monde annähernd gegen den Mondmittelpunkt weisen; für alle anderen Stellen ergeben sich gleichsam als **Reihen von Bleiloten** bestimmte krumme Linien, die „**Kraftlinien** des zusammengesetzten Feldes Erde-Mond" (vergl. solche für Magnetpole Fig. 480, S. 444). Ihre **Richtung** und zugleich die **Gröfse** der auf das Lot wirkenden Gesamtkraft des Feldes an irgend einer Stelle P wäre durch **Rechnung** so zu ermitteln:

Fig. 76.



Sind die Massen der Erde Mg, des Mondes mg, des Lotes μg, so sind die Kräfte

zwischen Erde und Lot $F = \varkappa \frac{M\mu}{R^2}$,

zwischen Mond und Lot $f = \varkappa \frac{m\mu}{r^2}$,

und das Lot wird die Richtung der **Resultierenden** von F und f einnehmen. An der „**neutralen**" Stelle N, für die $F = f$ und $R : r = \sqrt{M} : \sqrt{m}$, würde das Lot überhaupt keine feste Stellung mehr einnehmen.

Eine andere Art der Veranschaulichung des einfachen Kraftfeldes eines kugelförmigen Weltkörpers, sowie der superponierten Kraftfelder zweier Weltkörper erhält man in den „**Niveauflächen**"[1]), wenn man sich beide Kugeln etwa von

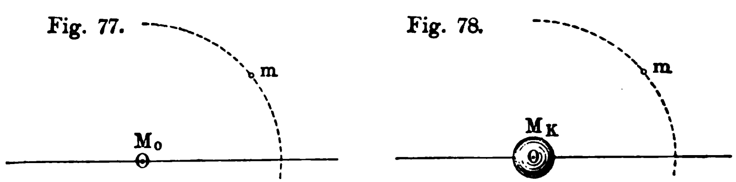
[1]) OSTWALD schlägt kurz und gut das deutsche Wort „**Wagfläche**" vor.

immer gröfseren Wassermengen umgeben denkt (wobei von den Anziehungswirkungen, die von den Massen dieses Wassers selbst ausgehen, abzusehen ist). Um eine Kugel würden sich Wasserschichten in konzentrischen Kugelschalen lagern, wie unmittelbar aus der nach allen Richtungen gleichen Kraftwirkung der Kugel zu erwarten ist. Sind ebenso die beiden kugelförmigen Weltkörper von Wassermengen umgeben, so würden diese auf jedem der beiden Körper Flutberge bilden; und zwar würden sich, falls Erde und Mond in ihrer gegenseitigen Lage festgehalten wären (so dafs nicht, wie in §. 21, S. 85, dargestellt wurde, die drei Punkte A, B, C mit verschiedenen Beschleunigungen gegen den Mond hin fallen), nur auf den einander zugekehrten Seiten der Körper beständige Flutberge bilden, auf der abgekehrten aber beständige Ebbe. Denken wir uns dann auf jedem der Körper immer mehr Wasser aufgehäuft, so würden endlich die Flutberge mit ihren Gipfeln an der neutralen Stelle N einander berühren, bei noch gröfserer Wassermenge würden beide Körper von einem gemeinsamen Meere umgeben sein u. s. f.

Zwischen der Veranschaulichung durch die Kraftlinien und der durch die Niveauflächen besteht die Beziehung (vergl. § 22), dafs die Elemente der **Kraftlinien** auf den Elementen der **Niveauflächen** an jeder Stelle des Feldes **normal** stehen, so wie im einfachsten Falle des homogenen Kraftfeldes das lotrechte Bleilot normal steht auf der wagrechten Wasser- oder Quecksilberoberfläche. Da wir nun nach dem Kräfteparallelogramm die jeweilige Richtung der Kraftlinien auf Grund des Kraftgesetzes $k = \varkappa \frac{m M}{r^2}$ berechnen und konstruieren können, so ergeben sich aus den Kraftlinien auch die Niveauflächen.

b) Viel bequemer nun, als durch die Konstruktion und Berechnung dieser Kraftlinien und Niveauflächen nach der Richtung und Gröfse der Kräfte, gestaltet sich die Beschreibung einfacher wie zusammengesetzter Kraftfelder mit Hülfe der **mechanischen Arbeiten**, welche bei der Verschiebung einer Masse von je 1 g zwischen beliebigen Stellen des Kraftfeldes zu leisten sind. — Das einfachste Beispiel einer solchen Beschreibung einerseits durch Kraft, anderseits durch Arbeit bietet wieder das Kraftfeld der Erde. Fingieren wir zuerst wieder mit GALILEI die Schwere als konstant nach oben, so lauten die beiderlei Beschreibungen: a) Auf die Masse von 1 kg (Massenkilogramm) wirkt am Meeresspiegel die Schwere mit 1 𝔨𝔤 (Kraftkilogramm) und auch in 2, 3 . . . 1000 . . . 100 000 m noch immer mit einer gleichen Kraft von 1 𝔨𝔤; b) um das 1 kg aus dem Niveau des Meeresspiegels in ein um 1 m höheres Niveau zu heben, bedarf es einer Arbeit von 1 m𝔨𝔤 (Meterkilogramm), von hier in ein um 1 m höheres Niveau wieder 1 m𝔨𝔤 u. s. f. — Nehmen wir dagegen mit NEWTON Rücksicht auf die Abnahme der Schwere gegen oben, so sind a) die Kräfte in 1000 . . . 100 000 m Höhe schon beträchtlich kleiner als am Meeresspiegel; ebendeshalb müssen aber b) die den gleichen Arbeiten (z. B. von je 1 m𝔨𝔤) entsprechenden Niveauflächen nach oben hin immer weiter auseinander rücken. — Damit stehen wir vor der Aufgabe: die Gestalt und das Gesetz der Aufeinanderfolge derjenigen Niveauflächen, welche **gleichen Arbeitsunterschieden** entsprechen, aus den Gesetzen für die Richtung und Gröfse der Kraft abzuleiten. — Von den hierfür geltenden Gesetzen ergeben sich die für kugelförmige Niveauflächen schon aus den Richtungen der Kräfte, unabhängig von dem speziellen Kraftgesetze $f = \varkappa \frac{m M}{r^2}$ und dem aus ihm (im § 22, S. 90) abgeleiteten Arbeitsgesetze $A_r^R = \varkappa m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$:

Ist gegeben ein einzelner Massenpunkt M_O (Fig. 77), bezw. eine homogene Kugelschale oder Kugel von der Gesamtmasse M_K



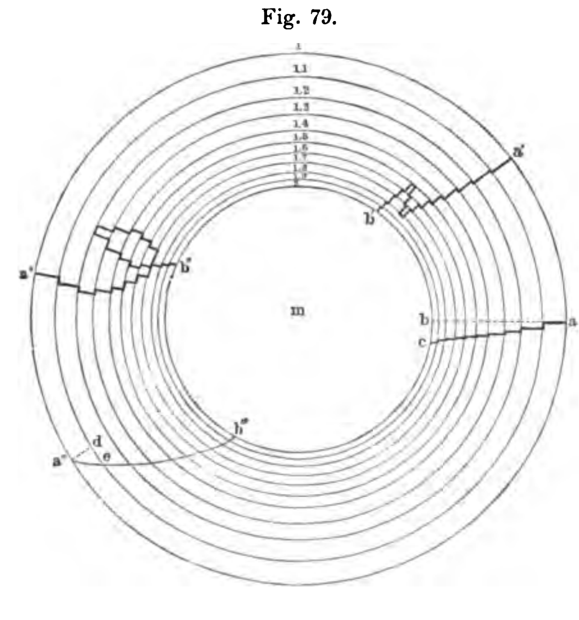
(Fig. 78), und wirken diese Massen auf einen Massenpunkt *m* ihrer Umgebung mit Kräften, welche nicht abhängig sind von der Richtung, nach welcher hin *m* in Bezug auf M_O oder M_K liegt, so ist unmittelbar einleuchtend, dafs auch je eine die punktuelle oder kugelige Masse umgebende **Kugelfläche**, welche *O* zum Mittelpunkte hat, eine Fläche gleicher Arbeit (Äquipotential-) oder **Niveaufläche** sein mufs. Die Verschiebung einer Masse längs einer solchen **Fläche** erfordert keine Arbeit gegen die Feldkräfte (LA 48).

LA 48.

So ist z. B. die Verschiebung eines Schiffes auf der kugelförmig gedachten Meeresfläche mit keiner Arbeit gegen die Schwerkraft verbunden, wie sie es beim Heben und Senken des Schiffes wäre (sondern nur mit Arbeitsleistung gegenüber der Reibung im Wasser u. dergl.)

Ferner läfst sich ebenfalls ohne Rechnung der in § 22, S. 91 für ebene Niveauflächen nach der Staffelmethode bewiesene Satz über die Unabhängigkeit der Arbeit von der Richtung der Verschiebung auch auf solche kugelförmige Niveauflächen übertragen. Nämlich:

Fig. 79.



Für je zwei konzentrische Niveauflächen (Fig. 79), die von einander einen gegebenen Abstand (in radialer Richtung) haben, kostet es **gleiche Arbeiten**, eine Masse von irgend einem Punkte der einen zu irgend einem Punkte der anderen Fläche zu verschieben, **gleichviel auf welchem Wege**, ob auf dem kürzesten (radialen) oder irgend einem längeren (parabolischen, elliptischen, spiralförmigen u. s. f.). –

Für die Berechnung der Gröfse der Arbeiten und Arbeitsunterschiede in den Kraftfeldern von Massenpunkt und Kugel ist grundlegend folgende

Aufgabe 1: Welcher Arbeit V bedarf es, um eine Masse von $m = 1$ g (Fig. 69, S. 90), welche seitens einer Masse von Mg mit der Kraft $f = \varkappa \frac{Mm}{r^2}$ Dyn angezogen wird, aus dem Abstande $MP = r$ cm bis ins Unendliche zu entfernen?

Antw.: Die Gl. 7 (§ 22) $A_r^\infty = \varkappa \frac{mM}{r}$ gibt speziell für $m = 1$g die

$$\text{Arbeit } V = \varkappa \frac{M}{r} \text{ Erg per Gramm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese Aufgabe wurde im § 22 zunächst für den besonderen Fall gelöst, dafs die Verschiebung des m gegen M längs einer Geraden erfolgt. Da aber die gleiche Arbeitsgröfse auch noch erforderlich ist, wenn die Verschiebung längs einer irgendwie gekrümmten Bahn erfolgt, so gilt die dort gefundene Mafsgröfse $A_r^\infty = \varkappa \frac{Mm}{r}$ Erg für jede beliebige Verschiebung, zufolge deren die Masse m aus einer Stelle in r cm Abstand von M bis ins Unendliche fortrückt, d. h. also ganz aus dem Kraftfelde von M hinausgeschafft wird. Da nun, wenn M und r endliche Gröfsen sind, auch A_r^∞ endlich ist (nicht unendlich grofs, wie man wegen der unendlich vielen Arbeitssummanden etwa erwarten könnte), so läfst sich jede in r cm Abstand von M gelegene Stelle P des Kraftfeldes von M auf zweierlei Arten charakterisieren: entweder durch die Arbeit, welche erforderlich ist, um m von M bis P zu schaffen, oder durch die Arbeit, welche erfordert wird, um m von P ins Unendliche zu bringen; und zwar ist aus den sogleich ersichtlichen Gründen die letztere Art die rechnerisch vorzuziehende. Da überdies die Wirkungsfähigkeit von M für sich übersichtlicher hervortritt, wenn wir uns immer dieselbe Masse, also am einfachsten $m = 1$ g, von M angezogen denken, so liefert die oben ermittelte Arbeitsgröfse V zugleich die verlangte einfachste Beschreibung des Kraftfeldes von M mittels der gegen die Feldkräfte zu leistenden Arbeit und hieraus auch der je zwei Punkten P_1 und P_2 dieses Feldes entsprechenden potentiellen Energie. Deshalb wurde für die oben berechnete Arbeitsgröfse V auch folgende Bezeichnung eingeführt:

Im Kraftfelde eines einzelnen Massenpunktes, bezw. einer homogenen Kugelschale oder Kugel von der Masse Mg ist in r cm Abstand vom Massenpunkt, bezw. Kugelmittelpunkt das

$$\textbf{Gravitationspotential: } V = \varkappa \frac{M}{r} \text{ Erg per Gramm} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dafs in diesem Ausdrucke für V die Gröfse r in der ersten (nicht wie bei der Kraft f in der zweiten) Potenz vorkommt, ist der erste Hauptgrund der Vereinfachung aller Rechnungen und Konstruktionen mit Potentialen an Stelle der mit Kräften. So läfst sich leicht der geometrische Ort derjenigen Punkte im Kraftfelde einer gegebenen Masse konstruieren, welchen bestimmte gegebene Potentiale, z. B. 6, 5, 4 ... PE (Potentialeinheiten) zukommen. Hat z. B. ein einzelner Punkt (Fig. 77) eine so grofse Masse (LA 67), dafs in 1 cm Abstand von ihm das Potential 6 PE beträgt, wobei also $\varkappa M = 6$ ist, so betragen die

LA 67.

Potentiale 6, 5, 4, 3, 2, 1 ... Erg per Gramm
in 1, 1,2, 1,5, 2, 3, 6 ... cm Abstand von M.

Es entsprechen also wirklich, wie oben ohne Rechnung vorausgesehen,
gleichen Potentialunterschieden 6 — 5 = 1, 5 — 4 = 1, 4 — 3 = 1...
immer gröfsere Abstände 1,2 — 1 = 0,2, 1,5 — 1,2 = 0,3, 2 — 1,5 = 0,5...

Ähnlich sinkt in Fig. 79 das Potential von 2 auf 1 um je 0,1 in im gröfseren Abständen. — Vgl. Tafel I, II für die einfachen Kraftfelder.

Allgemein ist für zwei Stellen des Feldes in r und r' cm Abstand von M

Potentialdifferenz: $V' - V = \varkappa M\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = - \varkappa \frac{M}{r'r}(r' - r)$ . . . (

In Tafel I a — d sind die Kreise die Durchschnitte der kugelförmigen Niv flächen mit der Ebene des Papiers. Denken wir uns nun über jedem Pu dieser Papierfläche normal zu ihr die Gröfse des daselbst geltenden Potentials Ordinate aufgetragen, so erhebt sich über ihr ein kegelartiger Berg (vgl. die bei LA 65. Figuren in LA 65), dessen Mantel eine nach oben konkave Fläche ist, und de Spitze sich ins Unendliche erstreckt. Denken wir uns umgekehrt zu diesem Be die kartographische Darstellung, so sind auf ihr die „Schichtenlini des Berges wieder jene Kreise. Bekanntlich bildet die Dichtigkeit der Schicht linien ein übersichtliches Mafs für das „Gefälle“ des Berges. Ähnlich m auch der Quotient $\frac{V' - V}{r' - r} = - \varkappa \frac{M}{rr'}$ das **Potentialgefälle** an einer Stelle Kraftfeldes zwischen den Abständen r und r' von M (vgl. § 2, Anm. über „Gefäll Setzen wir hierin wieder $r' = r$, so ist das Potentialgefälle $\frac{V' - V}{r' - r} = (-) \varkappa$ ein Mafs der in allen Punkten vom Abstande r auf je 1 g wirkenden Kr entsprechend dem Ausdrucke, von welchem in § 22, S. 90 ausgegangen wurde.

Ist die Masse M nicht ein Punkt, sondern eine homogene Kugelschale oder Ku (Fig. 78), so erhält jener Berg ein Plateau; was den Satz versinnlicht, dafs das Gr tations-**Potential im Innern einer unendlich dünnen homogenen Kugelsch konstant ist** und zwar gleich dem Oberflächenpotential der Sch Dieser (namentlich in der Elektrizitätslehre, § 137, wichtige) Satz besagt in Sprache des Arbeitsbegriffes ebensoviel wie NEWTONS Satz, dafs die Gravitatio **kraft** im Innern einer solchen Schale **Null** ist (§ 21, III). Zur Veransc lichung: Hatte es einen Bergsteiger eine bestimmte Arbeit gekostet, um aus Ebene den (immer steiler werdenden) Berg hinan der Schwerkraft entgegen bis an den Rand des Plateaus zu erheben, so kostet es ihn keine neue Ar entgegen der Schwerkraft mehr, beliebig weit vom Rande aus in das Plateau hin zuschreiten. Desgleichen: Kostet es die Arbeit V Erg, um ein Gramm von Oberfläche der Kugelschale bis ins Unendliche fortzubewegen, so kostet es keine gröfsere Arbeit, das Gramm von irgend einem Punkte des Innern der Sc (durch diese hindurch) ins Unendliche zu bringen.

Bisher wurde die Gleichung (1) in Bezug auf die Abhängigkeit zwischen V dem Abstande r diskutiert und durch die immer weiter voneinander abstehe Kreise graphisch dargestellt. Noch einfacher ist die Abhängigkeit zwischen V un Masse M. Denken wir uns z. B. in Tafel I a, b an Stelle der Menge b eine 2, 3.. so grofse Menge, so stellen dieselben Kreise, welche früher den Potentialen 1, 2 entsprochen haben, diejenigen Stellen des intensiveren Kraftfeldes dar, an wel die Potentiale 2, 4 . . . 12, bezw. 3, 6 . . . 18 PE betragen. Würde also Masse M allmählich von M auf $2M$, $3M$ . . . vergröfsert, so müfsten auch Niveauflächen für je einen gegebenen Potentialwert allmählich bis zum dopp

...fachen . . . Radius anschwellen. Wir können uns also umgekehrt auch der Vorstellung bedienen, daſs ein An- oder Abschwellen von Niveaulinien, bezw. -flächen auf ein Gröſser-, bezw. Kleinerwerden der Masse deutet, welcher das Potential zugehört (Anwendung dieser Vorstellung bei Vergröſserung der Sonnenmasse durch Hineinstürzen von Meteoriten, bei allmählicher elektrischer Ladung und Entladung einer Sammelkugel).

Ebenso wesentlich, wie die durch Gleichung (1) allgemein dargestellte Abhängigkeit der Gröſse V von M und r, ist ihre Unabhängigkeit von der Gestalt und Richtung des Weges, längs dessen wir uns die Masse 1 g von der Stelle P aus ins Unendliche geschafft denken. Darin, daſs an jeder Stelle eines Kraftfeldes das **Potential eine richtungslose Gröſse ist** (eine „Skalengröſse", nicht wie die Kraft eine durch Pfeile darstellbare „Vektorgröſse" § 7 und math. Anhang, Nr. 8), liegt der zweite Hauptgrund der Vereinfachung, wenn man Rechnungen und Konstruktionen mit Potentialen statt mit den Kräften ausführt. Anh. 8.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes nämlich ist der Satz, daſs **Potentiale sich einfach algebraisch addieren** (nicht wie z. B. Kräfte mit Rücksicht auf ihre Richtungsverschiedenheit erst nach dem Parallelogrammsatz sich zusammensetzen). — Auf Grund dieses Satzes gelingt nun leicht die Lösung der

Aufgabe 2: Das zusammengesetzte Kraftfeld zweier gleicher Massenpunkte oder homogener Kugelschalen (Kugeln) zu konstruieren (Tafel I*a*, *b*).

Es seien um jede der beiden gleichen Massenpunkte die Niveauflächen für die Potentiale 6, 5 . . . 1 PE konstruiert. Dann herrschen z. B. die Potentiale $6 = 5+1 = 4+2 = 3+3 = 2+4 = 1+5$ in allen Punkten, wo sich die Kreise (Kugeln) für die Potentiale 5 und 1, bezw. 4 und 2 u. s. w. schneiden; ebenso in anderen Punkten die Potentiale $5 = 4+1 = 3+2 = 2+3 = 1+4$. Um somit die Niveauflächen, bezw. Niveaulinien des zusammengesetzten Feldes zu gewinnen, haben wir nur durch die krummlinigen Vierecke die krummlinigen Diagonalen zu ziehen, welche alle Durchschnittspunkte 6, 6 . . ., bezw. 5, 5 . . . verbinden.

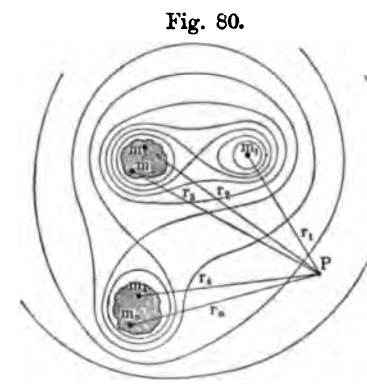
Aufgabe 3: Das zusammengesetzte Kraftfeld zweier verschiedener Massen zu konstruieren. — Wird z. B. die eine Masse die Hälfte der anderen, so schrumpfen die Niveauflächen der letzteren auf die halben Radien ein, wodurch sich bei übrigens ähnlicher Konstruktion wie in Aufgabe 2 die Niveaulinien Tafel I*c*, *d* ergeben. —

Hiermit ist nun die eingangs nach dem Kräfteparallelogramm behandelte Aufgabe, für zwei beliebige punktuelle oder kugelförmige Massen, also auch z. B. für Erde und Mond, die Niveaulinien zu konstruieren, gelöst (ohne Zurückgehen auf die Richtung und Gröſse der Kräfte). Haben wir dann z. B. das zusammengesetzte Kraftfeld Erde-Mond durch das System der Niveauflächen vollständig beschrieben, so ergeben sich überdies (ebenfalls ohne Rechnung nach dem Kräfteparallelogramm) zu den Niveaulinien wieder die **Kraftlinien** als die sie in jedem Punkte normal durchschneidenden Kurven. Es müssen sich so z. B. dieselben Reihen von Bleiloten, d. i. dieselben Kraftlinien, ergeben, aus welchen oben in Fig. 75 erst auf die Niveaulinien geschlossen worden war. —

Die bisher nur für je einen oder zwei Punkte, bezw. kugelförmige Massen entwickelten Begriffe und Sätze lassen sich nun schlieſslich auch sofort

erweitern für beliebig viele Massenpunkte und daher auch für belie gestaltete zusammenhängende Körper aus gravitierender Masse, w sich nur die wirkliche Durchführung der Rechnungen und Konstruktionen je n der Gestalt und Massenverteilung der Massen mehr oder minder verwickelt gestal kann. — Zusammenfassend lauten die einfachsten dieser Begriffe und Sätze:

Fig. 80.



1. In einem zusammengesetz Gravitationskraftfelde beliebig viel Massenpunkte von m_1, m_2 . . . m_n ist in dem Punkte P, der von je Punkten die Abstände r_1, r_2 . . . r_n hat (Fig. 80), das

Potential $V = \Sigma \frac{m}{r}$ **Erg per Gramm** . . (

2. Der geometrische Ort alle Punkte gleichen Potentials heifst Äqui potential- oder **Niveaufläche.** Zu Verschiebung einer Masse längs ein Niveaufläche ist keine Arbeit geg die Feldkräfte, zur Verschiebung normal zu ihr die gröfste Arbeit im Vergleich zur Verschiebung um gleiche Wege in jeder ander Richtung erforderlich.

3. Die Linien, welche die Niveauflächen normal durchschneiden, heifsen **Kraftlinien** (Tafel I und II a, b, c, d). — Math. Anh. Nr. 28.

Anh. 28.

4. Je näher an einer Stelle des Kraftfeldes die nach gleiche Potentialdifferenzen fortschreitenden Niveauflächen aneinander liegen, desto gröfser ist daselbst die Kraft. Zwischen zwei um die sehr kleinen Strecken $\sigma = s' - s$ voneinander abstehenden Punkten mit den Potentialen V und V' ist das **Potentialgefälle** $- \frac{V' - V}{s' - s} = f$ . . . (3) ein Mafs der daselbst auf je 1 g wirkenden Kraft; man nennt diese Kraftgröfse kurz die **Feldstärke.**

Nach FARADAY werden die Kraftlinien in solcher Zahl gezogen, dafs an Stellen des Feldes, wo die Feldkräfte auf je 1 g mit 1, 2, 3 . . . f Dyn wirken, durch je 1 cm² der Niveaufläche 1, 2, 3 . . . f Kraftlinien hindurchgehen. (Wie hiernach die von einem Kraftcentrum ausgehenden Kraftlinien räumlich anzuordnen sind, vgl. LA 68.) Unter dieser Annahme gilt dann:

LA 68.

Die **Feldstärke** an irgend einer Stelle des Kraftfeldes (direkt gemessen durch die Anzahl der Dyn, welche daselbst auf 1 g wirken) wird dargestellt durch die Anzahl der daselbst durch 1 cm² der Niveauflächen hindurchgehenden Kraftlinien. **Je dichter die Kraftlinien, desto gröfser die Feldstärke.**

Bei Durchführung der Konstruktion der Fig. 76, S. 104 gehen durch die neutrale Stelle des Feldes gar keine Kraftlinien.

[illegible] Massenpunkte und daher auch [illegible]
[illegible] Körper [illegible] gravitierende [illegible]
[illegible] der Rechnungen und Konstruktionen [illegible]
[illegible] der Massen [illegible]
[illegible] dieser Begriffe [illegible]

1. In einem zusammen[illegible] Gravitationskraftfelde [illegible] Massenpunkte von m_1, m_2 [illegible] ist in dem Punkte P [illegible] Punkten die Abstände r_1, r_2 [illegible] (Fig. 50), das

Potential $V = \Sigma \frac{m}{r}$ Erg per Gr[illegible]

2. Der geometrische [illegible] Punkte gleichen Potentials [illegible] oder **Niveaufläche**. [illegible] einer Masse [illegible] ist keine Arbeit [illegible] die größte [illegible] Wege in jedem [illegible]

[illegible] durchsch[illegible]
Math. A[illegible]
[illegible] die nach [illegible]
[illegible] aneinander [illegible]
[illegible] zwei [illegible]
[illegible] Punkte [illegible]
[illegible]



I. Niveaulinien einfacher Kraftfelder.

Gleiche gleichnamige Mengen | Ungleiche gleichnamige Mengen

im Abstand 3 cm

Ia | Tafel Ic

+6 +3

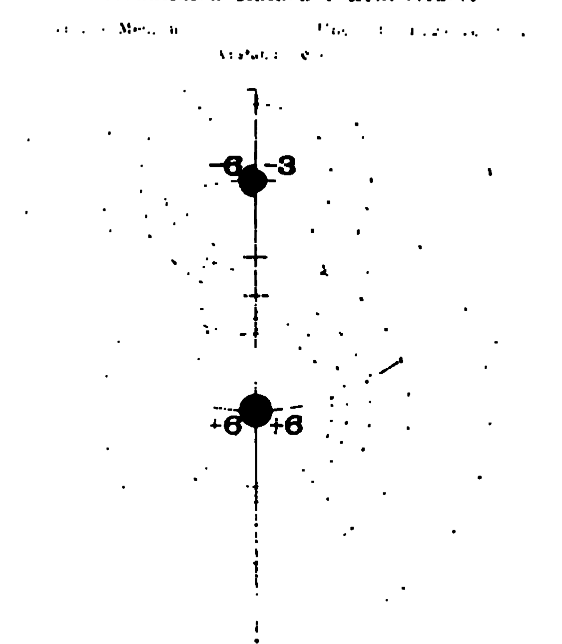
+6 +6

Ib | Tafel Ic

Gleiche gleichnamige Mengen | Ungleiche gleichnamige Mengen

im Abstand 2 cm

Niveaulinien einfacher Kraftfelder.



·6 ·6

[illegible] Masse von 1 g, bezw. m g von einer Stelle des Kraftfeldes [illegible]tationspotential V zu einer von dem niedrigeren Potential [illegible], wird eine Arbeit von $A_1 = V - V'$, bezw. $A = m(V - V')$ Erg [illegible] Feldkräfte verbraucht. Umgekehrt leisten die Feldkräfte [illegible] Arbeit, wenn die Masse, den Feldkräften folgend, „von [illegible] Stelle niedrigeren zu der höheren Potentials (d. i. in [illegible] entfernteren zu näheren Punkten) sich bewegt. — Wird [illegible] den Feldkräften geleistete Arbeit ausschliefslich dazu [illegible] die Geschwindigkeit und hiermit die lebendige [illegible] Masse zu vergröfsern, so gilt die Beziehung

$$m(V - V') = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv'^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

[illegible]leichung spricht wieder eine Verwandlung potentieller [illegible]messen durch die erste Seite der Gleichung, dabei auch [illegible] „Potential“) in einen Zuwachs von aktueller Energie [illegible] durch die zweite Seite der Gleichung aus.

[illegible] die Bewegungen der Planeten [illegible] LA 63 [illegible]

[illegible] Gleichungen [illegible] für die Bewegungen in [illegible] Kraftfeldern. [illegible] der Kräfte und Potentiale [illegible] es außer den [illegible] der Gravitation [illegible] Tabel. II a, b, c, d). [illegible] entwickelnde [illegible]

[illegible]

5. Um eine Masse von 1 g, bezw. m g von einer Stelle des Kraftfeldes mit dem Gravitationspotential V zu einer von dem niedrigeren Potential V' zu bewegen, wird eine Arbeit von $A_1 = V - V'$, bezw. $A = m(V - V')$ Erg gegen die Feldkräfte verbraucht. Umgekehrt leisten die Feldkräfte die gleiche Arbeit, wenn die Masse, den Feldkräften folgend, „von selbst" von der Stelle niedrigeren zu der höheren Potentials (d. i. in der Regel von entfernteren zu näheren Punkten) sich bewegt. — Wird die hier von den Feldkräften geleistete Arbeit ausschliefslich dazu verwendet, um die Geschwindigkeit und hiermit die lebendige Kraft der Masse zu vergröfsern, so gilt die Beziehung

$$m(V - V') = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv'^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Diese Gleichung spricht wieder eine Verwandlung potentieller Energie (gemessen durch die erste Seite der Gleichung, daher auch der Name „Potential") in einen Zuwachs von aktueller Energie (gemessen durch die zweite Seite der Gleichung) aus.

Eine Anwendung der Gl. (4) auf die Bewegungen der Planeten im Newtonschen Kraftfeld der Sonne vgl. LA 63. LA 63.

Bemerkung: Solche Gleichungen gelten auch für die Bewegungen in elektrischen und magnetischen Kraftfeldern. Nur kommt dann noch die Rücksicht auf die Vorzeichen der Kräfte und Potentiale hinzu, indem es aufser den Anziehungen wie bei der Gravitation auch noch elektrische und magnetische Abstofsungen gibt (Tafel II a, b, c, d). Aus den in § 135 zu entwickelnden Gründen pflegt man abstofsende Kräfte als positive, anziehende als negative zu rechnen. Hiernach wären dann auch schon die Gravitationskräfte von Gleichung (1) des § 21 an als negative einzuführen gewesen. Desgleichen wäre z. B. die Tatsache, dafs frei fallende, geworfene ... Körper sich der anziehenden Erde nähern, in der Sprache der Potentiallehre so auszudrücken, dafs sie sich „von selbst" aus Orten niedrigeren zu Orten höheren Potentials bewegen (wogegen wir von elektrischen Ladungen sagen werden, dafs sie von Orten höheren zu Orten niederen Potentiales „abfliefsen"). Da aber innerhalb der Gravitationsmechanik abstofsende Kräfte nicht vorkommen, wurde die Gravitationskraft weder als positive noch als negative, sondern als absolute Gröfse in Rechnung gezogen, und wir rechnen auch alle Gravitationspotentiale absolut. —

Wie auch die allgemeine Fig. 80 sogleich wieder erinnert an die kartographische Darstellung eines gebirgigen Terrains, so lassen sich auch alle vorstehenden allgemeinen Sätze erläutern durch die wirklichen Konfigurationen und Bewegungen an jedem unebenen Terrain. Bekanntlich erkennt der geübte Kartenleser aus der Dichte der Schichtenlinien sofort die steilen Böschungen; auch erwartet er die Stromlinien des Wassers mehr oder minder annähernd normal zu den Schichtenlinien, indem das Wasser auf dem kürzesten Wege von höheren zu niedrigeren Stellen zu gelangen sucht. Genau ist dies allerdings nur der Fall, wenn das Wasser während des Fliefsens durch Reibung an dem Boden jeden Augenblick seinen Zuwachs an lebendiger Kraft wieder verliert; denn falls es „in Schufs" geraten ist, kann es auch mehr oder weniger vom kürzesten Wege zu den

tieferen Stellen abweichen. (Auch für kleinere Hindernisse, wie Steine, die das Wasser umfliefst, gilt diese Einschränkung; denn das Wasser kann eben keinen Stein vom Ruhezustande aus, wohl aber, wenn es schon Geschwindigkeit hat, überklimmen.) Weiterhin finden aber solche Systeme von Linien, wie sie oben die Niveauflächen im Schnitte mit der Papierfläche darstellen, auch Anwendung für die Darstellung von Isobaren (§ 190), Isothermen (§ 192) u. s. f. Überall entspricht hier der ungleichen Luftdruck-, bezw. Temperaturverteilung ein „Strömen" der Luft, bezw. der Wärme. — Über besondere physikalische Deutungen, welche Faraday und Maxwell dem ursprünglich rein graphischen Hülfsmittel der Kraftlinien gegeben haben, vergl. §§ 144 und 157.

II. Mechanik starrer Systeme.

---

§ 25. Starre Systeme und feste Körper.

Wer sich einer Stange aus Eisen, Holz . . . als eines Hebebaumes bedient, verlangt von der Stange, dafs sie durch die ins Spiel kommenden Kräfte des schweren Steines und der drückenden Hand nicht allzu sehr verbogen oder gar abgebrochen werde. Eine absolut starre Stange gibt es nicht; eine hinreichend dicke und kurze Eisenstange nähert sich aber dem Begriffe völliger Starrheit mehr, eine Blei-, Holzstange schon weniger. Es wäre jedoch schwierig, ja unmöglich, für jeden Hebebaum aus diesen verschiedenen Stoffen mit Rücksicht auf alle vorübergehenden oder bleibenden Verbiegungen, Dehnungen etc. und die bei gewissen Kraftverhältnissen eintretenden Trennungen seiner Teile je ein besonderes „Hebelgesetz" aufzustellen. Die Mechanik geht deshalb von dem folgenden Begriffe „starrer Systeme" aus und fügt die Berücksichtigung der Elastizität, Festigkeit . . . der wirklichen festen Körper erst nachträglich hinzu (§ 50):

Ein **starres System** ist ein Inbegriff (System) von Massenpunkten, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert, was immer für Bewegungen das System als Ganzes ausführt und was immer für Kräfte an seinen einzelnen Punkten angreifen. Insbesondere heifsen zwei Massenpunkte dann starr miteinander verbunden, wenn zwei gleich grofse entgegengesetzte Kräfte ihren Abstand weder vergröfsern noch verkleinern können (Fig. 89, 90, S. 115).

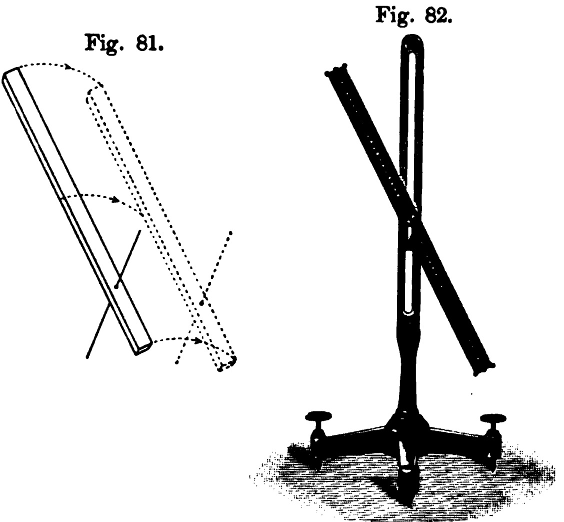
Man fafst häufig die Mechanik des Punktes, die Mechanik der starren Systeme und der wirklichen festen Körper unter dem Namen Geomechanik zusammen. — Man könnte auch die Mechanik starrer Systeme, sowie es in der Mechanik des Punktes geschah, in einen rein phoronomischen und einen dynamischen Teil gliedern. Im folgenden sollen aber beiderlei Begriffe und Sätze in engerem Zusammenhange behandelt werden.

Insoweit es sich nur um phoronomische Beschreibungen handelt, sind die für starre Systeme geltenden Begriffe zum Teil auch auf tropfbar flüssige und gasförmige Körper anwendbar, z. B. auf die stationäre Rotation flüssiger Weltkörper.

Schon in phoronomischer Hinsicht können die Bewegungen starrer Systeme endlich verwickelter sein als die eines einzelnen Punktes; z. B. die verschiedenen kloiden (gemeine, gestreckte, geschlungene, Anh. Nr. 24) der Punkte eines rollen- Anh. 24. n Eisenbahnrades; Bewegungen einer Schraube (Anh. 25) u. dergl. — Es ist Anh. 25. rchführbar und zweckmäfsig, alle wie immer beschaffenen Bewegungen starrer steme zu zerlegen in rein fortschreitende und rein drehende und hiernach ch die Kraftwirkungen an starren Systemen zu sondern.

§ 26. Rein fortschreitende und rein drehende Bewegung. Kraftwirkungen an starren Systemen.

Beispiel 1: Ein rechtwinklig parallelepipedischer Stab (Fig. 81, 82, ein Buch...) ird so bewegt, dafs die einzelnen Punkte des Stabes zwar beliebige gerade der krumme Bahnen mit beliebigen gleichbleibenden oder veränderlichen Geschwindigkeiten beschreiben, die Kanten des Stabes ber den Kanten des Zimmers immer parallel leiben. — Beispiel 2: Der tab wird in irgend zweien einer Punkte festgehalten nd um die durch diese unkte bestimmte Gerade it gleichbleibender oder eränderlicher Geschwindigkeit („Winkelgeschwindigkeit", § 12, § 31) gedreht. — Ähnliche Bewegungen an beliebig anders gestalteten Körpern! — Wir beschreiben und benennen diese Bewegungen folgendermafsen:


Fig. 81. Fig. 82.

1. Ein starres System bewegt sich **rein fortschreitend** (hat eine **reine Translation**), wenn alle seine Punkte **kongruente Bahnen** beschreiben. — Aus dieser Bedingung folgt (wie?), dafs jede in dem Systeme gedachte Gerade während der ganzen Bewegung die gleiche Richtung im Raume behält („zu sich selbst parallel" bleibt). — Fig. 81.

2. Ein starres System bewegt sich **rein drehend** (hat eine **reine Rotation**), wenn alle seine Punkte **Kreise** beschreiben, deren Ebenen zu einander parallel sind und deren Mittelpunkte auf einer zu diesen Ebenen senkrechten Geraden liegen. Letztere Gerade heifst die **Rotationsachse**; jede zu ihr senkrechte Ebene heifst **Rotationsebene** des Systems. — Fig. 82.

Jede andere Bewegung des starren Systems läfst sich in diese beiden Hauptarten von Bewegungen zerlegen.

Beispiele 3: Tägliche Rotation und jährliche Translation der Erde (§ 177). — Fortrollen eines Wagenrades (Zykloiden, math. Anh. Nr. 24). — Schra bewegung § 30; Anh. Nr. 25; LA 87.

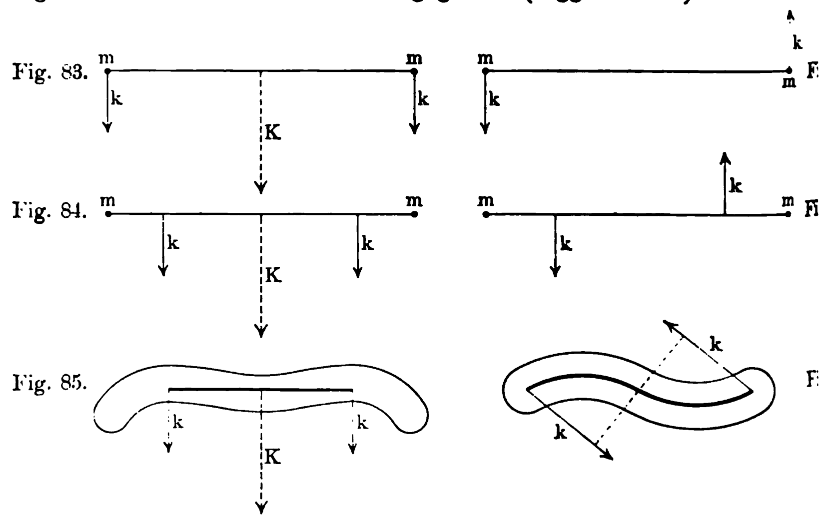
Anh. 24. Anh. 25. LA 87.

Die Rotationsachse kann selbst von Augenblick zu Augenblick ihre sowohl 1. im Raume wie 2. im Körper selbst ändern (z. B. Kreiselbewe §§ 31, 34); Kegelbewegung der Erdachse im Fixsternraume: „Präcession", Wandern der Erdachse innerhalb des Geoides, § 178). —

Fragen wir nun, was für Bewegungen an einem starren Systeme d gegebene **Kräfte** hervorgerufen werden, so lassen sich folgende einfachste Ge zunächst für Gebilde von symmetrischer Gestalt und Massenverteilung aufst (— vgl. über axialsymmetrische und centralsymmetrische Gebilde n Anhang Nr. 22; inwieweit mechanische Sätze aus bloßen Symmetriebetrachtu unmittelbar einleuchten, log. Anh. 37):

Anh. 22. Anh. 37.

Zwei Punkte von gleichen Massen m und m seien durch ei masselos gedachten Stab miteinander starr verbunden und von z gleichen Kräften k und k angegriffen (Figg. 83—88).



1. Sind die Kräfte gleichsinnig parallel (Fig. 83), so l nur eine **rein fortschreitende** Bewegung eintreten.

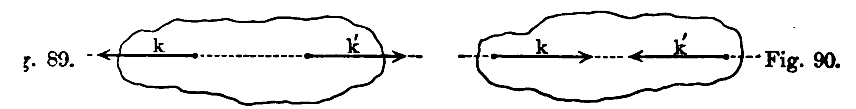
Dieser Satz gilt überhaupt bei axialsymmetrischer Lage der Massen Kräfte (Figg. 83—85). Auch eine längs der Symmetrieachse wirkende Kr (Figg. 83—85) kann so nur eine rein fortschreitende Bewegung hervorbring

2. Sind die zwei gleichen Kräfte antiparallel (ein **Kräftep** Drehpaar, Drehzwilling, Fig. 86), so kann nur eine **rein dreh** Bewegung eintreten. Diese Wirkung eines Kräftepaares kann d eine einzelne Kraft überhaupt nicht hervorgebracht werden.

Der Satz gilt überhaupt bei centralsymmetrischer Lage der Masse Kräfte (Figg. 86—88).

Hieran schliefsen sich die folgenden allgemeineren Sätze über die irkung zweier Kräfte an einem beliebigen starren System:

I. Zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte k und k' (Figg. 89 d 90), deren Angriffspunkte zwar nicht zusammenfallen, wohl



ɡ. 89. Fig. 90.

er miteinander starr verbunden sind, halten einander dann und nur nn das **Gleichgewicht**, wenn die Kraftrichtungen in der durch die Aniffspunkte bestimmten Geraden, der **„Angriffslinie"** der Kräfte, liegen.

Dabei erzeugen die Kräfte nach Fig. 89 eine **Zugspannung**, nach Fig. 90 ıe **Druckspannung** (vergl. § 17) in dem zwischen den Angriffspunkten der äfte liegenden Teile des starren Systems.

Bemerkung: Dieser Satz I, dafs und wie eine Kraft aufser ihrem eigenen ıgriffspunkte auch einen anderen Punkt dank seiner angenommenen starren ɜrbindung mit jenem beeinflussen kann, bildet dasjenige Prinzip der echanik starrer Systeme, das noch zu den drei allgemeinen Prinzipien der echanik (§ 15, I, II, III) hinzukommen mufs, um aus ihnen alle spezielleren tze über Kräfte an starren Systemen abzuleiten. (Vgl. § 36, § 43.)

II. Kräfteverlegung an starren Systemen. Jede an einem arren System angreifende Kraft ist **längs** ihrer Angriffslinie ohne nderung ihrer Wirkung verlegbar.

Beweis: Was die eine gegebene Kraft k (Fig. 91) leistet, leisten auch die rei Kräfte k, k', k'', da k' und k'' zusammen die Resultierende Null haben. Von esen aber heben sich k und k'' nach dem Satze I. auf, also leistet k' dasselbe wie k.

III. Anders als längs ihrer Angriffslinie ist eine Kraft ohne nderung ihrer Wirkung nicht verlegbar. Wird eine Kraft, die an ich dem Systeme eine Translation erɛilt, **seitlich** von ihrer Angriffsinie verlegt, so kommt zu der durch ie erstere Kraft bewirkten Translation och eine Rotation des Systems hinzu.

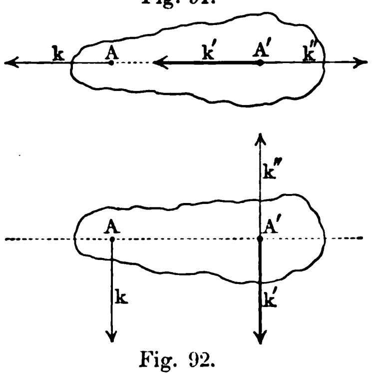


Fig. 91.

Fig. 92.

Beweis: War nämlich z. B. zuerst die ine Kraft k (Fig. 92) gegeben, so hat sie eselbe Wirkung, wie wenn die drei Kräfte k', k'' vorhanden wären. Diese aber lassen ch auffassen als die seitlich verlegte Kraft k' ıd das Kräftepaar kk''. — Z. B. Drücken ir gegen eine Tischlade in der Mitte, so eitet sie rein fortschreitend in gewünschter 'eise vorwärts. Lassen wir dagegen die eiche Kraft asymmetrisch zur Tischlade wirken, so nimmt diese auch eine ehende Bewegung an und „klemmt sich". — Umgekehrt kann auch, solange ır k allein wirkte, eine fortschreitende und drehende Bewegung stattgefunden

haben und erst durch die Verlegung des Angriffspunktes von A nach A' (falls nämlich dieser Punkt A' der Schwerpunkt des Systems ist, § 28) durch das Kräftepaar kk' die Aufhebung jener Drehung bewirkt werden, so dafs nur reine Translation übrig bleibt.

Bisher war **das starre** System, **an welchem** eine oder mehrere Kräfte **angriffen**, als **frei beweglich gedacht.** Häufig ist aber in einem starren System a) eine einzelne Gerade, b) ein einzelner Punkt von vornherein als unbeweglich **angenommen.** Dann kann das System überhaupt keine **fortschreitende Bewegung,** sondern nur mehr Drehungen um jene feste **Achse oder jenen Punkt** machen. Wirkt an einem solchen starren Systeme nur **eine Kraft,** deren Angriffslinie durch jene Achse oder jenen Punkt **geht,** so wird sie durch die Festigkeit dieser Gebilde **aufgehoben.** Wir können uns dann jedesmal denken, dafs durch die Wirkung der **Kraft** in jener festen Achse oder in jenem festen Punkte gleich **grofse Gegenkräfte** geweckt werden. — Gleiches gilt, wenn **mehrere Kräfte** gegeben sind, deren Resultierende durch jene Gerade (**jenen Punkt**) aufgehoben wird. Man sagt dann: Die Kräfte sind **in Bezug auf jene Gerade** (jenen Punkt) im **Gleichgewichte.**

So können wir uns an einem als Hebebaum **verwendeten zweiseitigen Hebel** die nach abwärts wirkenden Kräfte der Belastung **und des Arbeiters als zu einer** ebenfalls nach abwärts wirkenden Resultierenden **vereinigt denken,** die **aber durch** die aufwärts wirkende Gegenkraft des unterstützenden **Holzscheites** (und seiner hinreichend festen Erdunterlage) aufgehoben wird; **Näheres hierüber** § 29. —

Den bisher betrachteten einfachsten Fällen von **Kraftwirkungen an starren** Systemen steht gegenüber die folgende

Allgemeinste Aufgabe über **Kraftwirkungen an starren** Systemen: An einem starren Systeme von **beliebiger Gestalt** und Massenverteilung greifen beliebig viele **Kräfte** von **beliebiger Stärke** und beliebigen Angriffslinien an. Es sollen die **kinetischen** und statischen Wirkungen dieser Kräfte **ermittelt werden.** — **Speziell:** Unter welchen Bedingungen halten sich die gegebenen **Kräfte an dem** Systeme das Gleichgewicht?

Die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe gliedert sich **zweckmäfsig** in folgende Reihe spezieller Aufgaben: Kräfte an starren Systemen

I. **mit gemeinsamem Angriffspunkt** | mit verschiedenen **Angriffspunkten**

Angriffslinien in gemeinsamer Ebene | **Angriffslinien windschief (in verschiedenen Ebenen)**

II. **nicht parallel** | parallel

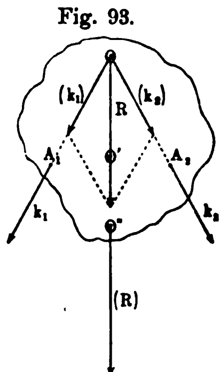
III. **gleichsinnig** | nicht gleichsinnig (**antiparallel**)

IV. **von verschiedener Stärke** | V. **von gleicher Stärke.**

§ 27. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften an starren Systemen.

I. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. Für die Zusammensetzung (und Zerlegung) solcher reicht die ein- oder mehrmalige Anwendung des im § 17 für je einen Massenpunkt entwickelten Satzes vom **Kräfteparallelogramm** aus. — Z. B. (k_1) und (k_2) in Fig. 93.

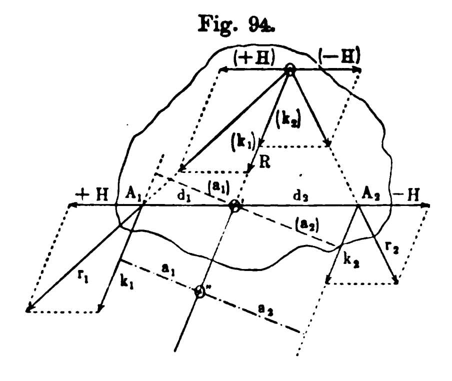
Fig. 93.



II. Zwei Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten in gemeinsamer Ebene nach verschiedenen Richtungen. Die Angriffspunkte A_1 und A_2 der Kräfte k_1 und k_2 (Fig. 93) werden in den Durchschnittspunkt O der Angriffslinien verlegt, und hierauf wird wieder an (k_1) und (k_2) die Parallelogrammkonstruktion durchgeführt. — Der Angriffspunkt O der Resultierenden R kann dann wieder nach O' oder O'' ... zurückverlegt werden.

III. Sind die beiden Kräfte parallel, so gibt es nicht mehr wie in II. einen Schnittpunkt der Angriffslinien. Es läfst sich aber III. auf II. dadurch zurückführen, dafs zu den gegebenen Kräften k_1 und k_2 die Hülfskräfte $+H$ und $-H$ (Fig. 94) hinzugefügt und die Resultierenden r_1 und r_2 gebildet werden. Diese werden nun nach O verlegt und hier wieder nach den Richtungen der früheren Komponenten zerlegt. $+H$ und $-H$ heben sich nun auf und (k_1) und (k_2) wirken längs derselben Geraden. Somit:

Fig. 94.



Die Resultierende zweier gleichsinnig paralleler Kräfte an einem starren System ist

α) der Richtung nach **parallel** den gegebenen Kräften,

β) der Gröfse nach gleich deren **Summe**, und

γ) die Angriffslinie der Resultierenden **teilt den Abstand der Angriffslinien der beiden Kräfte im verkehrten** („inneren") **Verhältnisse ihrer Gröfsen;** $a_1 : a_2 = k_2 : k_1$.

Beweis des Abstandsgesetzes γ): Da das Dreieck $A_1 O' O$ dem Kräftedreieck aus $(+H)$ und (k_1) ähnlich ist, so ist $d_1 : O'O = H : k_1$, also $k_1 d_1 = H \,.\, O'O$. Da ferner ebenso: $k_2 d_2 = H \,.\, O'O$, so ist $k_1 d_1 = k_2 d_2$ oder $d_1 : d_2 = k_2 : k_1$. — Da es für die Resultierende $(k_1) + (k_2)$ nicht auf den Angriffspunkt O oder O',

sondern nur auf die Lage der Angriffslinie OO' zwischen den Angriffslinien der Kräfte k_1 und k_2 ankommt, so legen wir zunächst durch O' die gemeinschaftliche Normale auf die parallelen Angriffslinien von k_1 und k_2. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke mit dem gemeinschaftlichen Scheitel O' ist $d_1 : d_2 = (a_1) : (a_2)$ und somit auch $(a_1) : (a_2) = k_2 : k_1$. Denken wir uns schliefslich die den Abstand der Angriffslinien voneinander angebende Normale durch irgend einen anderen Punkt O' gelegt, so gilt $a_1 : a_2 = k_2 : k_1$ für jeden Punkt der Angriffslinie der Resultierenden in Bezug auf die Angriffslinie der Komponenten.

Auf Grund der Gesetze III α, β, γ läfst sich eine gegebene Kraft K zerlegen in parallele Kräfte k_1, k_2, wobei $k_1 + k_2 = K$ sein und die Abstände der Angriffslinien von der Angriffslinie der K den Gröfsen von k_1 und k_2 verkehrt proportional sein müssen. Ist z. B. K und k_1 gegeben, so mufs $k_2 = K - k_1$ sein. Wie grofs ist der Abstand von k_2 und K, wenn der von k_1 und K gleich a_1 cm ist?

IV. Die Resultierende zweier ungleicher antiparalleler Kräfte an einem starren System ist

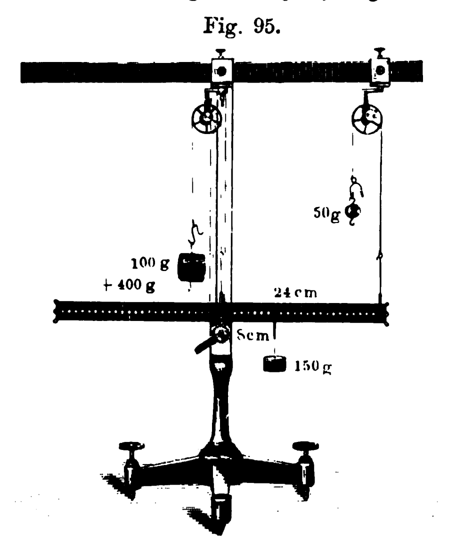
α) der Richtung nach **parallel der gröfseren Kraft,**

β) der Gröfse nach gleich der **Differenz** der Kräfte und

γ) die Angriffslinie liegt jenseits der Angriffslinie der gröfseren Kraft so, dafs ihre **Abstände von den Angriffslinien der beiden Kräfte im verkehrten („äufseren") Verhältnisse** ihrer Gröfsen stehen; also wieder $a_1 : a_2 = k_2 : k_1$.

Versuch: Fig. 95 stellt dar, dafs der Stab von 400 g Masse durch eine in seinem Schwerpunkt (§ 28) angebrachte Schnur, die über die mittlere Rolle geführt ist und am anderen Ende ebenfalls 400 g trägt, zu einem freien Systeme gemacht ist. — Die antiparallelen Komponenten sind dann die Gewichte der 150 g und 50 g, die Resultierende ist die (im Schwerpunkt) abwärts wirkende Kraft der Gewichte von 150 — 50 = 100 g; dieser Resultierenden, und somit auch den zwei Komponenten, wird durch 100 g (die mit den 400 g zu 500 g vereinigt sind) das Gleichgewicht gehalten. Und da überdies 8 cm : 24 cm = 50 g : 150 g, so ist Gesetz IV bestätigt.

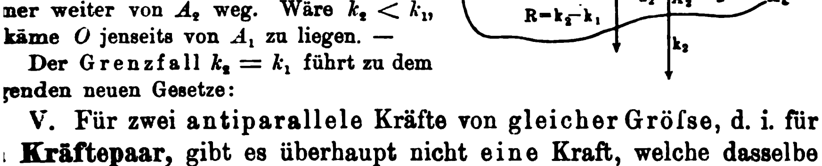
Fig. 95.



Durch diesen Versuch ist aber auch Gesetz III bestätigt. Denn wir können uns die beiden aufwärts wirkenden Kräfte von 100 g und 50 g als die gegebenen Komponenten denken, die dann eine in 8 cm Abstand vom Schwerpunkt aufwärts wirkende Resultierende gleich und entgegengesetzt dem Gewichte von (100 + 50) g geben; ihr wird durch die wirklich abwärts wirkenden 150 g das Gleichgewicht gehalten. — Ähnlich läfst sich auch allgemein III auf IV, und daher umgekehrt auch IV auf III zurückführen.

Durch die ursprünglich gegebenen Gröfsen k_1, k_2 und ihren Abstand a gedrückt ist $a_1 = \frac{k_2}{k_2 - k_1} \cdot a$ und $a_2 = \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot a$; jede dieser zwei Gleiungen bestimmt für sich die Lage des Punktes O in Bezug auf A_1 und A_2 g. 96). — Diskussion (in Bezug auf $\gtreqless k_2$): War zuerst k_2 viel gröfser als so lag O nahe an A_2, nähert sich die öfse von k_2 jener von k_1, so rückt O mer weiter von A_2 weg. Wäre $k_2 < k_1$, käme O jenseits von A_1 zu liegen. —

Fig. 96.



Der Grenzfall $k_2 = k_1$ führt zu dem genden neuen Gesetze:

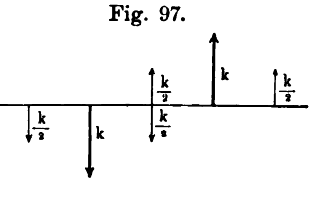
V. Für zwei antiparallele Kräfte von gleicher Gröfse, d. i. für Kräftepaar, gibt es überhaupt nicht eine Kraft, welche dasselbe wirkt wie die gegebenen zwei Kräfte (nämlich reine Rotation, wie schon § 26 für den besonderen Fall eines centralsymmetrischen Systems Figg. 86—88 unmittelbar anschaulich gemacht wurde).

Allgemein läfst sich dieses Ergebnis aus den Gleichungen für a_1 und a_2 herausn, indem, wenn $k_1 = k_2$ ist, die Gröfse der Resultierenden Null wird, und nso die Angriffslinie dieser Nullkraft ins Unendliche rückt (und zwar ebenso nach $+ \infty$ wie nach $- \infty$). Denn eine „Resultierende von der Gröfse Null der Angriffslinie in ∞" ist eben keine „Resultierende" mehr.

VI. Die Zusammensetzung von Kräften mit windschiefen Angriffslinien fordert die seitliche Verschiebung mindestens der einen von beiden Kräften d hiermit die Einführung von Kräftepaaren. — Es findet aber diese Aufgabe re Erledigung zugleich mit der unten folgenden allgemeinen Aufgabe.

Äquivalenz von Kräftepaaren. a) An einem starren Systeme greifen wei gleiche antiparallele Kräfte von je k Dyn an, deren Angriffslinien einen bstand von a cm haben; er heifst der **Arm des Kräftepaares**. Ersetzen wir jede der beiden Kräfte k durch zwei gleichsinnig parallele Kräfte $\frac{k}{2}$ nach Fig. 97, so heben sich die mittleren Kräfte auf, und bleibt ein Paar von halber Gröfse und doppeltem rme übrig. — Allgemeiner läfst sich zeigen, dafs m ursprünglichen Paare auch eines mit den

Fig. 97.

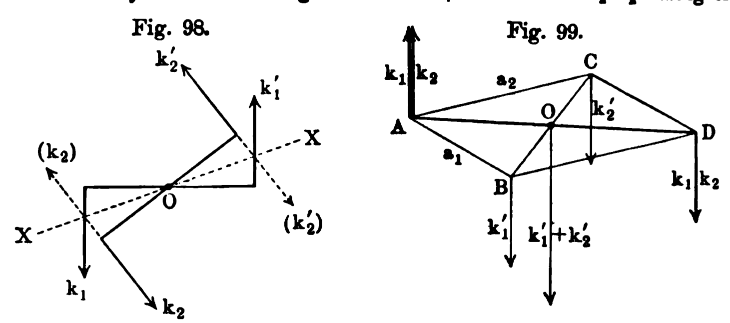


räften $\frac{k}{n} = k'$ und dem Arme $na = a'$ äquivalent ist. Da $k'a' = ka$ ist, so urde für das Produkt der Mafszahlen aus Kraft und Armlänge ein besonderer me: „**Moment des Kräftepaares**" eingeführt. Einheit des Momentes nes Kräftepaares ist das Moment des Paares von 1 Dyn mit dem Arm m. Über die allgemeine Bedeutung und Verwendbarkeit des Begriffes „Moment ner Kraft" vergl. § 29.

Die durch die beiden Angriffslinien der Kräfte bestimmte Ebene heifst **bene des Kräftepaares.**

b) Das Paar (k_1, a_1) läfst sich ohne Änderung der Wirkung um den Mittelunkt O seines Armes drehen (Fig. 98 a. f. S.). Denn denken wir uns zu den eiden Kräften k_1, k_1' die vier weiteren Kräfte k_2, k_2', (k_2), (k_2'), hinzugefügt, so

heben sich einerseits je ein k_2 und (k_2) auf, anderseits heben sich je ein k_1 und (
wegen ihrer axialsymmetrischen Lage zu XX auf, so daſs nur k_2 k'_2 übrig bleib



Zusammensetzung von Kräftepaaren. c) In Fig. 99 stelle ABI ein Parallelogramm dar, dessen Diagonale AD in der Zeichenebene und des Ebene normal zu dieser liegt (also B vor, C hinter ihr). Normal zur Ebene (Parallelogramms wirken im Punkte A zwei gleiche Kräfte k_1, k_2 aufwärts, in und C ebensolche Kräfte k'_1 und k'_2 abwärts. Dann bilden k_1 und k'_1 das ei k_2 und k'_2 das andere Kräftepaar, die ersetzt werden können durch das Paar $k_1 +$ und $k'_1 + k'_2$ mit dem Arme AO; dieses aber wieder (nach obigem Satze a) du das Paar mit dem Arme AD und je einer Kraft k in A und D. — Es ist me würdig, daſs also an den Armen von Kräftepaaren aus lauter gleichen Kräften ei Konstruktion ähnlich dem Kräfteparallelogramm zum Zwecke (Auffindung des resultierenden Paares vorgenommen werden kann.

Durch diese und ähnliche Sätze über die Äquivalenz und Zusammensetzu LA 69. von Kräftepaaren (LA 69) läſst sich zeigen:

VII. Beliebig viele Kräftepaare von beliebigen Momenten und Ebenen einem starren Systeme lassen sich immer durch ein **einziges Kräftepaar** v bestimmtem Moment und bestimmter Ebene ersetzen. —

Mittels der bisher entwickelten Sätze I bis V und des Satzes VII über Krä paare läſst sich die Lösung der zu Ende des § 26 aufgestellten allgemein Aufgabe (einschlieſslich der besonderen Aufgabe VI von zwei windschie Kräften) nach folgenden zwei Methoden geben:

Erste Methode: Von den gegebenen Kräften setzen wir, falls un ihnen eine oder mehrere Gruppen paralleler Kräfte vorkommen, di nach den Sätzen III und IV zu je einer Resultierenden zusamm Von den hiernach verbleibenden nicht parallelen Kräften setzt n diejenigen, deren Angriffslinien durch je einen Punkt gehen, n Satz I und II zusammen. Jede der nun verbleibenden windschief Kräfte P_1, P_2, ... P_n ersetzt man nach § 26, Satz III durch je e parallele, in dem einstweilen beliebig zu wählenden Punkt A angi fende Kraft P'_1, P'_2, ... P'_n und durch die zugehörigen Kräftepa D_1, D_2, ... D_n. Dann geben jene Kräfte **eine (in A angreifen Resultierende R und ein resultierendes Kräftepaar D_R.**

Zweite Methode: Wir wählen drei beliebige aufeinander senkrechte Richtun und zerlegen alle gegebenen Kräfte (insoweit sie nicht schon in eine jener R

fallen) gemäfs Gesetz I in je drei zu jenen Richtungen parallele Kom-
en. Jede dieser drei Gruppen paralleler Kräfte setzen wir dann nach den
III und IV zusammen, wodurch sich wieder drei Resultierende ergeben,
vorerst im allgemeinen noch nicht durch denselben Punkt hindurchgehen
ı. Durch Parallelverschiebung erhalten wir dann die durch je einen Punkt A
e Resultierende und drei Kräftepaare, welche wir wieder schliefslich durch
Resultierende und durch ein Kräftepaar ersetzen können. (LA 69). LA 69.
'a der Punkt A, durch welchen wir alle Angriffslinien der verlegten Kräfte
chgehen lassen, bisher willkürlich gewählt war, so ist von vornherein nicht
elbar einzusehen, ob die verschiedenen Resultierenden und ihre Kräftepaare
al dieselbe Gesamtbewegung des Systems bewirken werden.
nter allen diesen Lösungen ist diejenige die wichtigste, bei welcher wir als
Massenmittelpunkt des Systems wählen, weil nur bei dieser die
erende eine rein fortschreitende Bewegung hervorbringt (vergl. folg. §).

Schwerpunkt. Gleichgewicht an schweren Körpern. Massenmittelpunkt.

uf die Bedeutung des Schwerpunktes (welches Wort auch in die aufser-
›chaftliche Sprache übergegangen ist) machen uns aufmerksam die Er-
ɜen über das Balancieren von Brettchen, Stäben, des menschlichen Leibes,
›s gilt, über einen schmalen Steg zu schreiten, sich stark vorzubeugen und
ıicht umzufallen, das Vor-, Rückwärts- und Seitwärtsbiegen, wenn man
e Lasten auf dem Rücken, vorn oder mit dem einen Arm zu tragen
dergl. m. — Bei Körpern, welche einen (geometrischen) „Mittelpunkt"
erwarten wir in diesem auch den Schwerpunkt; doch trifft dies im all-
en nur bei Körpern mit gleichmäfsiger Massenverteilung zu (z. B.
bei einem „falschen" Würfel; eine Kugel oder Walze, welche an einer Seite
i ausgegossen ist, rollt — scheinbar gegen
ägheitsgesetz — ruckweise über die wag-
Tischfläche u. dergl.).

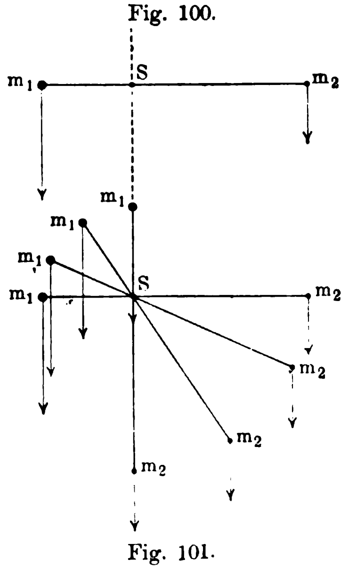


Fig. 100.
Fig. 101.

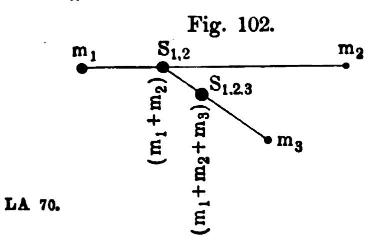
m die vorwissenschaftliche Vorstellung
Schwerpunkt" zu einem bestimmt
·ten Begriffe auszubilden, gehen wir aus
r folgenden einfachsten

ɪfgabe: Zwei Punkte von den (gleichen
verschiedenen) Massen m_1 und m_2
lurch einen masselos gedachten Stab
ander verbunden. Wo liegt der „Angriffspunkt der Resultierenden" der
e Massen wirkenden Schwerkräfte?

ntwort: Da die Schwerkräfte proportional
ssen sind, nämlich $p_1 = m_1 g$, $p_2 = m_2 g$,
nach § 27, III die Angriffslinie der
:ierenden den Abstand der Angriffs-
der beiden Kräfte und also auch den
nd der Massen m_1 und m_2 in deren
ɪrtem Verhältnisse; und zwar dies

sowohl, wenn die Massen m_1 und m_2 in Bezug auf die Erde so liegen, daſs Verbindungslinie wagrecht ist (Fig. 100 a. v. S.), wie auch, wenn die Massen ir eine andere Lage gegen die Erde haben (Fig. 101 a. v. S.). Ebendeshalb c in der obigen Aufgabe, wiewohl nach dem Satze über die Verlegbarkei Kräfte an starren Systemen die Resultierende zunächst nur eine bestimmt griffslinie, nicht einen bestimmten Angriffspunkt hat, doch nach diesem **„Mittelpunkt der parallelen Kräfte"**) gefragt werden. — Durch Ausdeh dieser Betrachtung auf drei oder mehr sch Massenpunkte, wobei zur Resultierenden z Schwerkräfte eine dritte, zur Resultierenden c drei eine vierte u. s. f. hinzugenommen wird (Fi — Beweis, daſs die Reihenfolge der Vereini je zweier Kräfte gleichgiltig sei und daſs **Körper einen und nur einen Schwerp** habe, LA 70), gelangen wir zu folgender Defi des Schwerpunktes:

Fig. 102.



LA 70.

Schwerpunkt eines aus schweren Massenpunkten bestehe starren Systems ist der **Angriffspunkt der Resultierenden** **Schwerkräfte** (genauer: **der „Mittelpunkt"** dieser Kräfte). —

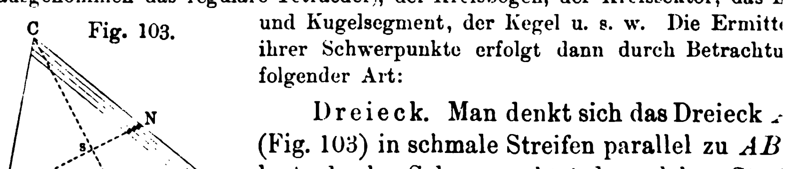
Ermittelung des Schwerpunktes geometrisch gegebe homogener Körper. — Für zwei gleiche Massenpunkte der Schwerpunkt im Halbierungspunkte ihrer Verbindungsstre — An einer gleichmäſsig mit Masse belegten Geraden (z. B. ei geraden, sehr dünnen, aus gleichartigem Stoffe bestehenden Drahte) sich je einem Massenpunkte m ein anderer m' so zuordnen, daſs Schwerpunkte aller dieser Paare in denselben Punkt, den geome schen Mittelpunkt des Drahtes, fallen.

Ein solcher Mittelpunkt ist ferner bei centralsymmetrischen Flächen Körpern (vergl. Fig. 86—88, S. 114) das Symmetriecentrum, desgleichen bei eb begrenzten Flächen mit mindestens zwei Symmetrieachsen oder bei Kö mit mindestens drei Symmetrieebenen der Durchschnittspunkt dieser Ac bezw. Ebenen. Welche dieser besonderen Bedingungen treffen zu bei kreisförm elliptischen, parallelogrammatischen Platten, bei geraden, schiefen Cylindern Kugeln u. s. f.? (Vgl. math. Anh. Nr. 22.)

Anh. 22.

Einen Mittelpunkt im bisherigen Sinne besitzen dagegen nicht z. B Dreieck (ausgenommen das gleichseitige), die dreiseitige (mehrseitige) Pyra (ausgenommen das reguläre Tetraeder), der Kreisbogen, der Kreissektor, das K und Kugelsegment, der Kegel u. s. w. Die Ermitt ihrer Schwerpunkte erfolgt dann durch Betrachtu folgender Art:

Fig. 103.



Dreieck. Man denkt sich das Dreieck (Fig. 103) in schmale Streifen parallel zu AB legt; da der Schwerpunkt jedes solchen Strei in seinem Halbierungspunkte liegt, so ist ein metrischer Ort der Schwerpunkte aller dieser Streifen die „Schw linie" CM. Ebenso ist AN der geometrische Ort der Schwerpu

' zu BC parallelen Streifen. Also ist deren Durchschnitt s der ıwerpunkt der homogenen, dreieckigen Platte. Von ihm beweist die ometrie, dafs er im ersten Drittel einer Schwerlinie von : ihr zugehörigen Dreiecksseite an gerechnet liegt (LA 71). LA 71.

Pyramide. Man denkt sich die dreiseitige Pyramide $ABCD$ (Fig. 104) dreieckige Platten parallel zur Grundfläche ABC legt. Da der Schwerpunkt jeder solchen Platte ch dem vorigen Satze bestimmt ist, so ist der metrische Ort der Schwerpunkte dieser Platten- ar die Verbindungslinie Ds_1 der Ecke D mit Schwerpunkte s_1 der gegenüberliegenden Fläche. nso As_2. Der Schnitt S dieser zwei Schwerlinien der Schwerpunkt der homogenen, dreiseitigen Pyra- e. Von ihm beweist die Geometrie, dafs er im ten Viertel einer Schwerlinie von der ihr zu- örigen Pyramidenfläche an gerechnet liegt (LA 71). — LA 71. Über die Zurückführung der Bestimmung der werpunkte von Vielecken und mehrseitigen Pyra- den auf die vorigen beiden Aufgaben, LA 72. — Allgemeine Schwerpunkts- LA 72. meln math. Anh. Nr. 9; einige Anwendungen LA 72. Anh. 9.

Fig. 104.

LA 72.

Gleichgewichtszustände schwerer, fester Körper. — tabilität. — Da die Resultierende der an allen Teilchen eines ten Körpers angreifenden Schwerkräfte dem ganzen System eine wegung vertikal abwärts zu erteilen strebt, so läfst sich der Schwer- aft gegenüber der Körper nur ins Gleichgewicht bringen entweder rch Aufhängen an befestigten Körpern oder Unterstützen rch solche, wobei in diesen Befestigungsmitteln ein nach oben ge- ichteter Gegenzug oder -druck geweckt wird, der die durch den Schwerpunkt gehende Resultierende aufhebt. Überdies dürfen iese und die Gegenkraft auch kein Kräftepaar liefern.

Soweit letztere Bedingung nicht erfüllt ist, pendelt der schwere Körper § 33) oder er fällt um.

Ein homogener gerader Kreiskegel, welcher auf der Grundfläche, der Mantel- äche oder der (etwas abgestumpften) Spitze steht, gibt ein Beispiel dafür, dafs nerhalb des Begriffs „Gleichgewicht eines schweren Körpers" noch dreierlei leichgewichtszustände zu unterscheiden sind, das sogenannte **stabile, indifferente** und **labile** Gleichgewicht des Körpers [genauer: an dem Körper halten sich die Schwere und die ihr entgegenwirkende Kraft (Kohäsion der Auf- hänge- und Unterstützungsvorrichtungen) stabiles, indifferentes, labiles Gleich- gewicht; oder schon wieder etwas minder genau: der Körper befindet sich der Schwere und den Gegenkräften gegenüber in dem einen oder anderen Gleich- gewicht]. — Ein homogenes dreiachsiges Ellipsoid bietet ein Beispiel, dafs streng genommen von je einer Art Gleichgewicht immer nur in Bezug auf je eine be- stimmte Verschiebung aus dieser Gleichgewichtslage die Rede sein kann. Denn denken wir uns auf einer wagrechten Ebene das Ellipsoid mit dem Endpunkt seiner längsten Achse so aufgestellt, dafs diese vertikal steht, so fällt das Ellipsoid bei jeder geringsten wie immer gerichteten Verschiebung um: das Gleichgewicht

ist hier durchaus labil; ebenso für den Endpunkt der kürzesten Achse aus stabil. Steht aber das Ellipsoid auf dem Endpunkt der mittleren gerichteten Achse und wird ihm eine Verschiebung so erteilt, dafs sich die Achse in einer vertikalen Ebene bewegt, so sinkt es, sich selbst überlassen, in die frühere Lage zurück; es ist also dort für diese besondere Versc stabil; wurde dagegen die kürzeste Achse ebenso bewegt, so fällt es um; für diese andere Verschiebung labil. — Allgemein definieren wir also:

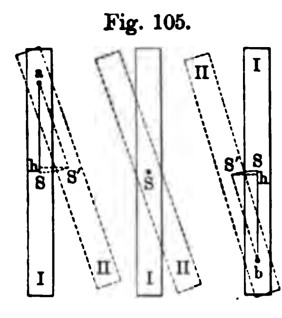


Fig. 105.

Ein schwerer Körper ist in einer I im **stabilen, indifferenten, labilen** (gewicht für eine bestimmte Verschiebı eine Lage II, je nachdem er, der Wirku Schwere überlassen, aus II in I zurü in II bleibt oder eine neue Lage III au (Fig. 105).

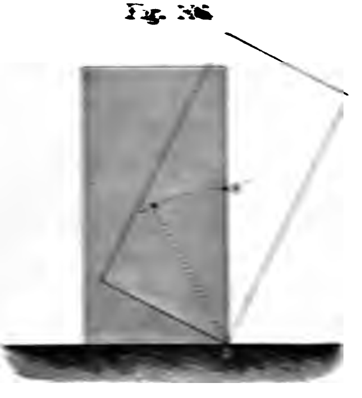
In diesen Definitionen ist noch nichts ü Ursache des derartig verschiedenen Verhalt sagt. Beachten wir aber die Lageänderung Schwerpunktes, welche mit der Verschiebung von der Gleichgewichtsl die Lage II (die im allgemeinen überhaupt keine Lage des Gleichgewicl wird) verbunden sind, so ist sowohl bei aufgehängten wie bei unterstützt pern ersichtlich, dafs die Verschiebung aus der stabilen Lage mit einer H aus der labilen mit einer Senkung, aus der indifferenten weder mit H noch Senkung des Schwerpunktes verbunden war. Der Körper wird s unter dem Einflufs der Schwerkraft aus der Lage II immer so bewegen, d **Schwerpunkt möglichst tief zu liegen kommt.** Er kann also zwar zur Lage zurücksinken, aber nicht zur labilen zurücksteigen; von der indif aus ist kein Grund zur Bewegung nach I oder III vorhanden. — Hiermi nächst nur eine vereinfachte Beschreibung des Verhaltens der Körper ge Verschiebungen gegeben. Da aber der Schwerpunkt auch schon als Angri der Resultierenden sämtlicher Schwerkräfte definiert ist, so stellen diese wegungen einleitenden Kräfte auch die Ursachen des Überganges aus der in I oder III dar; nämlich: die an den einzelnen Teilchen eines Körı greifenden Kräfte erteilen ihm so lange fortschreitende und drehe wegungen, bis sich der Angriffspunkt der Resultierenden dieser Einzelkräfte als möglich der Erde genähert hat.

Statt durch die Kräfte kann man die an dem schweren Körper zu erwa Verschiebungen auch durch die Arbeiten beschreiben und erklären, ind Schwerpunkt immer so lange zu sinken sucht, bis die an dem ganzen Kö greifenden Schwerkräfte oder aber deren Resultierende die **gröfstmögliche geleistet haben,** welche mit der Aufhängung oder Unterstützung des (für eine bestimmte Art von Verschiebungen) eben noch verträglich ist.

Dafs speziell auch von stabilen Lagen nur im Hinblick auf je e stimmte Verschiebung die Rede sein kann, geht auch daraus herv es für jeden stabil ruhenden Körper, z. B. einen auf der breitesten Fläche den Ziegelstein, doch eine hinreichend grofse Verschiebung gibt, von der Körper nicht mehr unmittelbar in jene Lage zurückkehrt; man kann ja de um die mittlere oder kürzeste Kante so weit drehen, dafs er auf die mittl schmalste Seite zu stehen kommt. Es gibt daher für jede stabile Lage be

Mafse der Stabilität. Ein auf wagrechter Ebene stehendes [ho]mogenes rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 106), ein mehr oder [m]inder hoch beladener Wagen mit mehr [od]er minder großer Spurweite . . . ist [fü]r nicht zu große Verschiebungen stabil. [E]s darf dabei diejenige größte Dre[h]ung um eine Kante, bei welcher der [Sc]hwerpunkt des Körpers vertikal [üb]er diese Kante zu liegen kommt, [ni]cht überschritten werden, ohne daß der [Kö]rper umfällt. Der kleinste Winkel sas' ([U]mwerfungswinkel, Kippwinkel), einer [so]lchen Drehung, bei der das Umfallen [sta]ttfindet, bildet das **geometrische** [M]afs der Stabilität des Körpers.

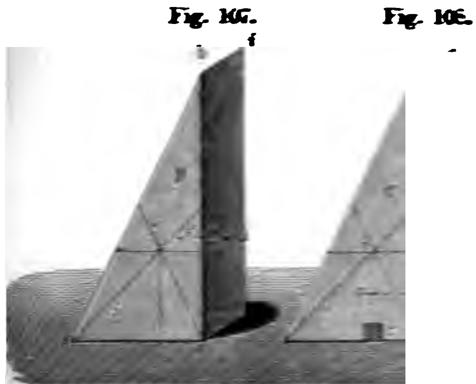
Fig. 106.

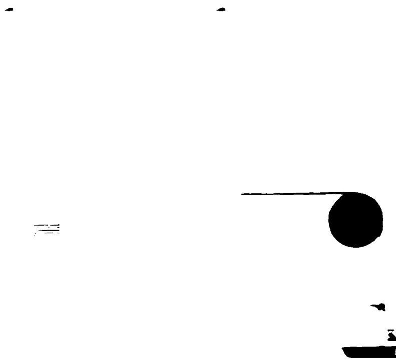


Sind z. B. die Kanten des Parallelepipeds B und H, so gilt für den Umwerfungs[wi]nkel $sas' = \epsilon$ die Beziehung: $tg\,\epsilon = \frac{B}{H}$; warum? Wäre das Parallelepiped [ni]cht homogen, so wäre dieser Winkel desto kleiner, bezw. größer, je höher, [bz]w. tiefer sein Schwerpunkt liegt. Daher werden z. B. Wagen so beladen, daß [di]e dichten Massen möglichst tief zu liegen kommen.

Ein anderes, **dynamisches** Mafs für die Stabilität eines Körpers ist die [G]röße der Kraft, die in irgend einem gegebenen Punkte des Körpers nach einer [ge]gebenen Richtung wirken muß, um das Umwerfen des Körpers zu bewirken

Fig. 107. Fig. 108. Fig. 109.





(Figg. 107, 108, 109 und LA 73); endlich ein drittes, **energetisches** Mafs ist die Größe der **Arbeit**, welche gegen die Schwerkraft zu leisten ist, um die oben angegebene Drehung zu bewirken (LA 74). — Zur Energie „aufgetürmter" Massen. LA 75. LA 73. LA 74. LA 75.

Wiewohl der Name **Schwerpunkt** zunächst im Hinblick auf die eingangs angeführten alltäglichen Erfahrungen an **schweren** Körpern entstanden ist und dann oben ebenfalls nur auf Grund der Sätze über die Resultierende von Schwerkräften definiert wurde, so bleibt jener Punkt doch auch dann von Bedeutung,

wenn sich der Körper an einem Orte befindet, wo er der Wirkung der Schw kraft entzogen ist, und wenn wir nur die Art der Verteilung der Mas des Körpers rings um jenen Punkt in Betracht ziehen. So bezeichneten w angesichts des Vorversuches 3, S. 47, denjenigen Punkt als „Massenmittelpunk der beiden Wägelchen, welcher deren jeweiligen Abstand im Verhältnisse 3: teilt; desgleichen ist der Punkt, welcher den Abstand zwischen Sonne und Jupi im Verhältnis 1 : 1048 teilt (§ 21), der Massenmittelpunkt des Systems Sonn Jupiter. Allgemein definieren wir:

Unter dem **Massenmittelpunkt** zweier (starr verbunden oder gegeneinander beweglicher) Massenpunkte von m_1 Gramm un m_2 Gramm verstehen wir denjenigen Punkt $S_{1,2}$, der die Verbindung strecke der Punkte im verkehrten Verhältnisse der Masse teilt. — Zu drei Massen m_1, m_2, m_3 erhalten wir den Massenmitte punkt, indem wir uns in $S_{1,2}$ eine Masse $m_1 + m_2$ denken und fü diese zusammen mit m_3 den Massenmittelpunkt $S_{1,2,3}$ wieder nach de Definition für den Massenmittelpunkt zweier Massen suchen (Fig. 10 S. 122). — Ähnlich für 4, 5 ... n Punkte.

Beweis, dafs für die Lage von $S_{1,2,3}$ die Reihenfolge der Zusammenfassu gleichgültig ist, d. h. $S_{(1,2)\,3} = S_{(1,3)\,2} = S_{(2,3)\,1} = S_{1,2,3}$, und dafs jedes Masse system einen und nur einen Massenmittelpunkt hat (analog obigem Satz üb den einen Schwerpunkt), vergl. LA 70. — Wiewohl der Begriff „Massenmitte punkt“ allgemeiner ist als „Schwerpunkt“, so wird letztere Bezeichnung blofs d Kürze wegen oft auch dort benutzt, wo es sich nicht speziell um Schwerkräf handelt; z. B. beim „Schwerpunkt des ganzen Planetensystems“, bestehend a Sonne, Planeten, Trabanten u. s. w. — Speziell für starre Systeme liegt d physikalische Wichtigkeit des eben definierten Punktes vor allem in folgendem Satz

LA 70.

Eine Kraft erteilt einem starren Systeme dann und nur dan eine rein fortschreitende Bewegung, wenn die Angriffslini der Kraft durch den Massenmittelpunkt des Systems geh

Beweis: Nehmen wir zuerst an, dafs an den einzelnen Massenpunkt parallele Kräfte k_1, k_2 ... k_n angreifen, welche den Massen m_1, m_2 ... m_n pr portional sind. Dann erhalten alle Punkte die gleiche Beschleunigun $b = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \ldots = \frac{k_n}{m_n}$, und infolge dieser gleichen Beschleunigu legen auch alle in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück. Wenn wir soda zuerst k_1 und k_2 zusammensetzen zur Resultierenden $(k_1 + k_2)$, so greift die in dem oben definierten Massenmittelpunkte von m_1 und m_2 an; und ähnlich, we wir dann zu dieser Resultierenden wieder die dritte Kraft hinzunehmen u. s. — Ist also umgekehrt von Anfang an nur eine im Massenmittelpunkte sämtlich Massen angreifende Kraft K gegeben, so läfst sie sich ebenso wieder zerlege in lauter Kräfte, welche ihrer Gröfse und der Lage ihrer Angriffslinie nach a die einzelnen Massen so verteilt werden, dafs jede eine gleiche Beschleunigu und dafs somit das ganze System eine rein fortschreitende Bewegung bekomm

Hiernach ergibt sich für die zu Ende des § 26 aufgestellte allgemein Aufgabe, welche zu Ende des § 27 wegen der Willkürlichkeit des Punktes gegen welchen hin die Kräfte verlegt worden sind, noch nicht bestimmt gelö worden ist, die folgende einfache endgültige Lösung:

reifen an einem starren System von beliebiger
t und Massenverteilung beliebig viele Kräfte
liebigen Stärken und Angriffslinien an, und ver-
vir sämtliche Kräfte durch Parallelverschiebung
so, dafs alle Angriffslinien durch den Massen-
lpunkt gehen, so bewirkt die Resultierende
ɔ verlegten Kräfte eine reine **Translation**
stems; dagegen das aus der Zusammensetzung
Kräftepaare, die bei jener Parallelverschiebung
reten waren, sich ergebende Kräftepaar be-
lie reine **Rotation** des Systems um den Massen-
ɔunkt.

ieraus folgt u. a., dafs, wenn beliebige Kräfte einem
ystem **keine Translation** erteilen sollen, die Resul-
de der in den Massenmittelpunkt verlegten
gleich Null sein mufs. — Ein analoger Satz gilt
dafs das freie System **keine Rotation** erhalten soll.

nd die auf die Massenteilchen eines Körpers
den Kräfte speziell Schwerkräfte, so ist
edingung, dafs sie alle den Massen pro-
ıal sind, von selbst erfüllt, indem alle Teile
o der ganze Körper die nämliche Beschleuni-
$b = g$ bekommen und daher im freien Falle
auch bei Wurfbewegungen) nur fort-
itende, nicht drehende Bewegung annehmen.

› wird z. B. ein am einen Ende „leichter", am anderen
schwerer" Körper (z. B. ein Federhalter aus leichtem
it schwerer Kapsel), welcher aus schiefer Lage los-
ı wird, bei Abwesenheit aller Hindernisse sich wäh-
es Falles nicht mit dem schweren Ende abwärts
wie mancher erwarten mag. Ebenso bewegt sich ein
es Geschofs rein translatorisch nach Fig. 110, nicht
ig. 111, welche Bewegung schon eine Drehung ein-
:. — Alles dieses gilt aber nur für den luftleeren
in der Luft richten sich z. B. Federbälle mit dem
n Ende nach unten; wozu werden Pfeile befiedert?
itzgeschossen wird die Abweichung der Achse des
sses von der Tangente der Flugbahn durch den Luft-
and (und überdies nach den verwickelten Gesetzen
iselbewegung, § 34) sogar noch vergröfsert.

a nach dem Gegenwirkungsprinzip je zwei in Wechsel-
g stehende Massen einander Beschleunigungen erteilen,
diesen Massen verkehrt proportional sind, so wird,
ie Massen und daher auch ihr Massenmittelpunkt im
ıkte des Beginns der Wirkung in Ruhe gewesen waren,
ssenmittelpunkt auch in Ruhe bleiben, falls sich

Fig. 110.

Fig. 111.

die Massen während ihrer Wechselwirkung mit Beschleunigung von ihm weg oder zu ihm hin bewegen; so bei Vorversuch 3, S. 47. Hat ferner das System der beiden Massen eine Bewegung gemäfs der Trägheit gehabt, so setzt auch während der Wechselwirkung der Massenmittelpunkt diese **gleichförmige Bewegung** fort. Dies gilt auch für beliebig mehr als zwei Massen. Und Ähnliches gilt auch noch, wenn während der Wechselwirkung der Teile des Systems auf das System als Ganzes noch äufsere Kräfte wirken. Wenn z. B. das Geschofs in Fig. 110 während des Fluges explodiert, so dafs seine Splitter die mannigfaltigsten neuen Wurflinien beschreiben, so setzt nichtsdestoweniger der **Massenmittelpunkt des ganzen Systems** diejenige **Wurfparabel** fort, in welcher er sich vor der Explosion bewegt hatte. Ebenso können wir von dem Massenmittelpunkte unseres Sonnensystems behaupten, dafs, falls die Kräfte, mit welchen die Gesamtheit der übrigen Weltkörper auf die Gesamtheit der Körper unseres Sonnensystems wirkt, eine Resultierende gleich Null haben sollten, der Massenmittelpunkt des Sonnensystems sich nur geradlinig gleichförmig durch den Weltraum fortbewegen könne; falls dagegen die Resultierende jener Kräfte nicht Null ist, wird der Massenmittelpunkt unseres Sonnensystemes sich um den Massenmittelpunkt sämtlicher Weltkörper nach den Keplerschen Gesetzen bewegen müssen. — Ebenso in alltäglichen Erfahrungen: Wir können uns nicht „aus freier Hand" samt dem Stuhle in die Höhe heben; wohl aber, wenn vom Stuhle aus ein Seil über eine Rolle läuft und wir entsprechend ziehen. Warum? — Das Gemeinschaftliche aller dieser Erscheinungen ist allgemein ausgesprochen im sogen. **Prinzip der Erhaltung des Massenmittelpunktes**; dieses ist aber nicht ein „Prinzip" in dem eigentlichen Sinne wie die drei *leges motus* (§ 15, I, II, III), denn es läfst sich, wie die obigen einfachsten Beispiele gezeigt haben, aus der *lex* III (dem Gegenwirkungsprinzip) zusammen mit der Grundgleichung der Dynamik $f = mw$ (§ 16) streng **ableiten**.

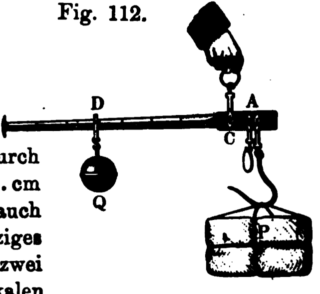
§ 29. Kraftmoment (Drehmoment, statisches Moment). — Hebel. Hebelwagen.

1. Ein Turner, der massive Hanteln mit wagrecht ausgestrecktem Arme stemmt, ermüdet bekanntlich viel eher, als wenn er dieselbe Last mit annähernd vertikal auf- oder abwärts gestrecktem Arme hält. — 2. Wer einen massiven Torflügel öffnen oder schliefsen will, läfst seine Kraft nicht nahe, sondern möglichst weit von der Verbindungslinie der Angeln auf die zu bewegende Masse wirken. — 3. Wer mittels eines Hebebaumes eine Last zu heben versucht, bringt, auch ohne dafs er das aus der Physik gelernt zu haben braucht, den Unterstützungspunkt möglichst nahe dem Angriffspunkte der Last an und läfst seine Kraft an einem möglichst langen „Hebelarme" wirken. — 4. Ähnlich fafst, wer eine Stange Holz übers Knie brechen will, diese möglichst weit an den Enden an und läfst den Druck des Knies gegen die Mitte wirken.

In allen diesen Beispielen ist dafür, „wieviel eine Kraft ausgibt", nicht nur ihre eigene Gröfse, sondern auch eine bestimmte **Strecke** mafsgebend; nämlich in Beispiel 3 und 4 die Länge des „**Hebelarmes**", in Beispiel 2 der **senkrechte Abstand der Angriffslinie der Kraft von der Drehungsachse**, die durch die Türangeln dargestellt ist, in 1 der senkrechte Abstand der durch die Hanteln gehenden Angriffslinie der Schwerkraft von dem Armgelenk des Turners. Diese und viele ähnliche Erfahrungen gaben Veranlassung, den Begriff „**Moment** (*momentum* = *movimentum*) einer Kraft" einzuführen, und durch diese die

hende Wirkung", bezw. das „Drehbestreben" einer Kraft zu messen, les um so gröfser wird, je gröfser die Kraft und je gröfser jene Strecke, der ftarm", ist. — Nach welchem arithmeti- ı Mafse beide Gröfsen in Betracht kommen, schon praktisch angewendet in Einrichtung Gebrauch der römischen Schnellwage 112): Dem abwärts gerichteten Zuge der elasteten oder irgendwie belasteten) Wag- le läfst sich ebenso das Gleichgewicht halten durch in 12 cm, wie durch 2, 3, 4, 6 ... kg in 6, 4, 3, 2 ... cm and von der Achse des Wagbalkens. (Beim Gebrauch Schnellwage wird deshalb meistens nur ein einziges ufgewicht" angewendet; wohl aber sind oft zwei ıachsen und ihnen entsprechend besondere Skalen

Fig. 112.



gröfsere und kleinere Lasten angebracht. Auch gestalten sich durch Rücksicht die Lage des Schwerpunktes des Wagbalkens die Verhältnisse in der Regel s verwickelter, doch sind immer die den gleichen Gewichtszunahmen prechenden Skalenteile äquidistant.) — Nicht nur durch die vorausgehenden ihrungen, sondern auch durch alle folgenden Sätze wird sich die Zweckmäfsig- ; folgender Definitionen bestätigen:

Den Abstand der Angriffslinie einer Kraft von einer raden (einem Punkte, einer Ebene) nennt man den **Arm der aft** in Bezug auf diese Gerade (Punkt, Ebene).

Die **Einheit des Kraftmomentes** (ME) ist das Moment einer aft von 1 Dyn mit dem Arme von 1 cm (Dyn, cm $= cm^2 sec^{-2} g$).

Eine Kraft von k Dyn und einem Arme von a cm hat ein **Kraftmoment (Drehmoment, statisches Moment)** $\mathfrak{K} = ka$ ME.

In Bezug auf dieselbe Gerade (Punkt, Ebene) haben mehrere äfte das zusammengesetzte (resultierende) Moment

$$\mathfrak{K} = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n = \Sigma ka.$$

Spezieller als die Bezeichnung „Kraftmoment" ist **Drehmoment;** sie rührt on her, dafs, wenn die Gerade oder der Punkt, in Bezug auf welche das ment einer Kraft genommen ist, als fix gedacht ist, die Kraft nur mehr eine ehung um diese Gerade (Punkt) hervorrufen kann. — Die Bezeichnung **tisches Moment** rührt davon her, dafs, wenn (mindestens) zwei Kräfte chzeitig an dem starren Systeme mit fixer Achse (Punkt) angreifen, so dafs ihm Drehungen im entgegengesetzten Sinne nicht mehr wirklich ilen, sondern nur zu erteilen „streben", ihre Momente in Bezug auf die e Achse (Punkt) einander gleich sind; es hängt also nicht nur die drehende regung, sondern auch das Gleichgewicht (der statische Zustand einer mnung innerhalb des Systems infolge jener entgegengesetzten drehenden Kräfte) ı solchen Produkten aus Kraft und Kraftarm ab. — Dieses Entgegenwirken ier Drehmomente legt folgende Definitionen nahe:

Bezeichnen wir die Momente von Kräften, welche dem Systeme e **Drehung** im bestimmten Sinne (z. B. dem des Uhrzeigers) zu eilen streben, als positiv, so sind diejenigen Momente, welchen entgegengesetzte Drehung entspricht, als negativ zu rechnen.

Ein Rückblick auf die Sätze über die Wirkungen der Kräfte an Systemen, insbesondere deren Zusammensetzung und Gleichgewicht, läfst erk dafs sich durch Benutzung des Begriffes Kraftmoment viele der Sätze sehr und einheitlich aussprechen lassen; eben hierdurch erweist sich die wissen liche Zweckmäfsigkeit dieses Begriffes „Produkt aus Kraft und Kraftarm somit dieser Begriff als ein „natürlich" gebildeter, Anhang Nr. 37):

Anh. 37.

Fig. 113.

1. Schon der Begriff **Moment eines Kräftepaares** bildet einen besonderen Fall des Begriffes „zusammenge (resultierendes) Moment zweier Kräfte". Denken wi nämlich senkrecht zur Ebene des Paares (k, a) zunäcl Punkte O (Fig. 113) eine Drehungsachse, so ist in Bezug die Summe der Momente $ka_1 + ka_2 = k(a_1 + a_2)$ Ebenso für eine Achse senkrecht zur Ebene des Paares oder O'' (oder auch in jedem beliebigen anderen Punk Ähnlich der Beweis, dafs zwei Kräftepaare von gleichem Momente und dei Ebene (vergl. S. 119) in Bezug auf jede solche Gerade gleichwertig sind.

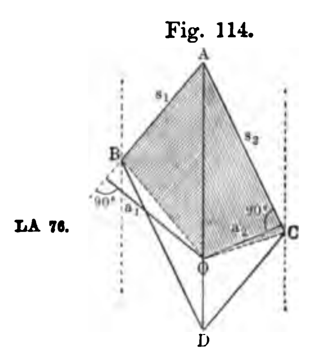


Fig. 114.

2. Der Satz vom Kräfteparallelogramn sich (nach VARIGNON) so aussprechen, dafs **in auf jeden Punkt der Diagonale des Kräftepar grammes die Momente der Komponenten ein gleich sind.** — Beweis mit Hilfe des planimetri Satzes, dafs in jedem Parallelogramm (Fig. 114) $s_1 a_1$ (denn $\triangle ABO = ACO$ als über der gemeinschaf Grundlinie AO errichtet, da die Spitzen B, C von d gonale AD gleichen Abstand haben). — Allgemeiner

LA 76.

In dieser Form nehmen ferner die Sätze de für die Fälle I und II dieselbe Form an wie die Sä und IV; denn es werden auch

3. für gleichsinnig parallele Kräfte i **zug auf jeden Punkt der Angriffslinie der Resul den die Momente der Komponenten einander gleich.** — Beweis: In § 2 sich für die Abstände der Angriffslinien der Resultierenden von den A linien der parallelen Kräfte in III die Beziehung $k_1 : k_2 = a_2 : a_1$ ergeben. dieser Proportion schreiben wir einfacher $k_1 a_1 = k_2 a_2$. — Ebenso ist auch f dortigen Satz IV, nämlich

4. für ungleichsinnig parallele Kräfte $k_1 a_1 = k_2 a_2$.

5. Denken wir uns in den Fällen 2, 3, 4 jedesmal durch irgend einen der Angriffslinie der Resultierenden senkrecht zur Ebene der beiden gleicl parallelen oder ungleichen antiparallelen Kräfte eine **fixe Achse** durch das System gesteckt, so ergibt sich als einheitliche Gleichgewichtsbedi für alle drei Fälle, dafs **in Bezug auf diese Achse die Momente einander sein** müssen; $k_1 a_1 = k_2 a_2$ oder $k_1 a_1 - k_2 a_2 = 0$. — Führen wir dab Moment $(- k_2 a_2)$ als eine dem Moment $(+ k_1 a_1)$ entgegengesetzte Gröfse können wir ohne Änderung der Bedeutung schreiben: $k_1 a_1 + k_2 a_2 = 0$, d. **algebraische Summe der Momente in Bezug auf die Achse mufs fi Gleichgewicht Null sein.**

Durch Anwendung der bisherigen Sätze über die Momente je zweier nehmen endlich auch die Sätze über die Resultierende von mehr als **Kräften** und speziell für deren Gleichgewicht folgende einheitliche Fo

Wirken an einem starren Systeme, das um eine fixe A

·ehbar ist, beliebig viele Kräfte k_1, k_2 ... k_n mit den Armen , a_2 ... a_n in Bezug auf jene Achse, so bewirken sie im allgemeinen ne Drehung um jene Achse, wie wenn nur eine Kraft K mit dem ·me a wirkte, wo $Ka = \mathfrak{K} = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n$.

Ist speziell $Ka = 0$, so halten sich die Kräfte $k_1, k_2 \ldots k_n$ in zug auf jene Achse das **Gleichgewicht**. — (Allgemeiner Beweis LA 77). LA 77.

Für alle diese mehr oder minder allgemeinen Sätze über Kraftmomente ldet den typischen Anwendungsfall der

Hebel. Diese Bezeichnung wurde ursprünglich speziell angendet auf „Hebebäume", d. i. möglichst feste Stangen, welche um nen Stützpunkt (Stein, Holzscheit ...) drehbar sind. An dem nen Ende der Stange greift als „Last" das Gewicht eines schweren örpers an, an dem anderen Ende als „Kraft" die gleichfalls nach wärts wirkende Muskelkraft eines Arbeiters oder dergl. — **Zweiitiger, einseitiger Hebel; gleicharmiger, ungleicharmiger Hebel; rallele, nicht parallele Kräfte** am Hebel (**Winkelhebel**); Beireibung und Definitionen nach Figg. 115—118 (— über die Fiktion

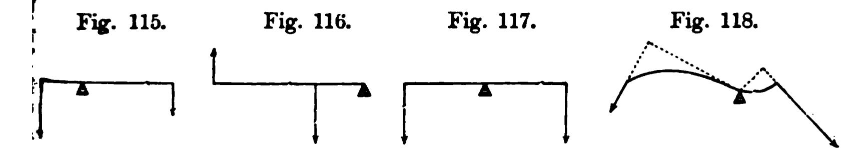


Fig. 115. Fig. 116. Fig. 117. Fig. 118.

athematischer Hebel" LA 81). — Beträgt die Kraft P Dyn, die LA 81. ast Q Dyn und sind Kraftarm, bezw. Lastarm p cm und q cm, so ist ir zwei Kräfte: $P:Q = q:p$ oder $Pp = Qq$ (in Worten?). — Beispiele von Hebeln, an denen mehr als zwei Kräfte wirken, bieten die unleich belastete gleicharmige Wage (Fig. 119), die Dezimalwage (Fig. 126).

Geschichtliches. Die Untersuchung des Gleichgewichtes für den Hebel bildet ie älteste uns bekannte Leistung der theoretischen Mechanik. ARCHIMEDES 87—212 v. Chr.) stellt an der Spitze seiner Schrift *„De aequiponderantibus"* ie Sätze auf: „a) Gleichschwere Gröſsen, in gleicher Entfernung wirkend, sind im leichgewichte. b) Gleichschwere Gröſsen, in ungleicher Entfernung wirkend, nd nicht im Gleichgewicht, sondern die in gröſserer Entfernung wirkende sinkt." us diesen beiden Sätzen leitet er den weiteren durch eine geometrische Betrachtung b: „c) Kommensurable Gröſsen sind im Gleichgewichte, wenn sie ihrer Entfernung mgekehrt proportioniert sind." — Unverkennbar sind unter den „gleichen Gröſsen" ewichte, unter den „gleichen Entfernungen" Abstände vom Unterstützungspunkte ines Hebels gemeint. Hiernach ist der dritte angeführte Satz das Hebelgesetz ir zwei gleichsinnig parallele Kräfte, also für den zweiseitigen, geraden lebel. Den ersten Satz scheint ARCHIMEDES für eine Art Prinzip der Statik, . h. für unmittelbar einleuchtend gehalten zu haben (log. Anhang, Nr. 37), aus Anh. 37. elchem sich dann das allgemeinere Hebelgesetz theoretisch ableiten lasse. Doch ar längst vor dieser theoretischen Behandlung das Gesetz selbst schon direkt mpirisch aus gelegentlichen Beobachtungen und wohl auch aus Versuchen (z. B.

dem ARISTOTELES) bekannt, für welche die uralten praktischen Anwendungen des Hebebaumes vorbildlich sein konnten.

Später hat man den Begriff des Hebels verallgemeinert und zwar zunächst auch für zwei antiparallele Kräfte (**einseitiger Hebel**, häufig unpassend „einarmiger" Hebel genannt), endlich für **beliebig viele Kräfte, die irgend ein starres System um eine Achse zu drehen streben.** Dann ist also die Lösung der obigen allgemeinen Aufgabe über Drehmomente an starren Systemen auch **die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für den Hebel;** nämlich: $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n = 0$ oder $\Sigma ka = 0$ oder $\mathfrak{K} = 0$. —

Wo übrigens der Hebel und ähnliche Vorrichtungen (Wellrad, Rollen ...) praktisch verwendet werden, ist es selten ihr **Gleichgewicht**, sondern meistens die mittels ihrer zu verrichtende **Arbeit**, für welche wir uns interessieren. Wir werden daher diese Vorrichtungen als „**Maschinen**" zusammen mit anderen im folgenden Paragraphen unter diesem Gesichtspunkte behandeln. — Wirklich von den **Gleichgewichtsbedingungen** machen wir Gebrauch an den

Hebelwagen. Die wichtigsten Formen solcher sind die **gleicharmige Wage** (Krämerwage, chemische Wage), die **Schnellwage**, die **Neigungswage** („Zeigerwage"), die **Tafelwage**, die **Brückenwage.**

Versuche mit der **gleicharmigen** Wage: Wir legen auf die Schalen der Wage je eine von zwei Massen, die gemäfs ihrer Bezeichnung, z. B. als je 20 g, einander **gleich** sein sollen. Wenn wir uns aber auf diese Gleichheit nicht von vornherein verlassen wollen (da sie ja selbst wieder mittels einer Wage gefunden wurde, über deren Richtigkeit und Empfindlichkeit wir im allgemeinen nichts wissen — wie auch allgemein im § 16, S. 53 die Begriffe von 1 Gramm und von *m* Gramm erst unter Berufung auf „**eine gute Wage**" definiert wurden), so **vertauschen** wir zunächst die Massen. Nimmt die Wage genau dieselbe Stellung an wie früher, so werden wir die Massen **für wirklich gleich** erklären können, soweit die „**Empfindlichkeit**" der Wage dies erkennen läfst. — Mittels zweier solcher Massen können wir nun auch die „**Richtigkeit**" jeder anderen Wage prüfen, indem wir die Massen vertauschen. (BORDA's Doppelwägung, LA 78.) Der Wagbalken mufs aber seine Stellung auch beibehalten, wenn wir zunächst die Massen, dann auch die Wagschalen wegnehmen; warum? (Ausdehnung durch die Wärme. — Magnetfreier Stoff des Wagbalkens.) [LA 78.]

Bisher war nur überhaupt die immer **gleiche** Stellung des Wagbalkens verlangt. Wir wünschen aber (warum?), dafs der Balken einer unbelasteten oder gleichbelasteten Wage **wagrecht**, die Zunge lotrecht steht. Die Erscheinung nun, dafs ein solcher unbelasteter oder gleichbelasteter Wagbalken sich „von selbst" **wagrecht** stellt (daher ja auch das Wort „wagrecht" überhaupt), kommt aber nicht etwa dem symmetrischen Hebel als solchem „von Natur" zu; vielmehr befindet sich **ein im Schwerpunkt unterstützter Hebel bei jeder beliebigen Stellung im Gleichgewicht**, nämlich im **indifferenten** (Fig. 82, S. 113). — Eine solche Hebelstange stellt zugleich auch das Modell eines „**mathematischen Hebels**" dar, bei dem vom Eigengewicht abgesehen wird; LA 81. [LA 81.]

Jeder Wagbalken ist dagegen ein „**physischer Hebel**", bei welchem eine **wagrechte Drehachse lotrecht oberhalb des Schwerpunktes des ganzen Wagbalkens** bei dessen wagrechter Stellung angebracht ist. Für jede **ungleiche** Belastung einer solchen Wage hängt die Einstellung des Wagbalkens auch von dessen **Gewicht** ab, wie dies erhellt aus der folgenden einfachsten

Aufgabe: Ein Wagbalken vom absoluten Gewicht Q g sei in b cm

stand oberhalb seines Schwerpunktes an einer Schneide stabil aufhängt. In je a cm Abstand von dieser Schneide und in gleicher Höhe mit ihr sind die beiden Wagschalen aufgehängt. Das Gewicht einer Schale samt Belastung (zuerst beiderseits gleich) betrage P g. Um welchen Ausschlagswinkel α wird der Wagbalken durch ein Übergewicht von p g abgelenkt?

Aus Fig. 119 ergibt sich folgende Gleichung zwischen den statischen Momenten der Kräfte P, p, Q in Bezug auf die die Drehungsachse darstellende Schneide der Wage:

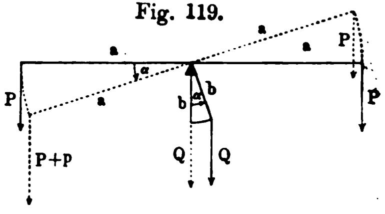


Fig. 119.

$(P+p).a\cos\alpha = P.a\cos\alpha + Q.b\sin\alpha,$

woraus $tg\,\alpha = \frac{pa}{Qb}$ . . . . . (1)

oder für kleine $\alpha \ldots \alpha \doteqdot \frac{a}{Qb} \cdot p$ . . . (2)

Diese Gleichungen enthalten, wenn von der Reibung der Achse an der Unterlage abgesehen wird, auch die Bedingungen für die Empfindlichkeit der gleicharmigen Wage [— für ein gewisses sehr kleines $p_0 > 0$ gibt allerdings die Wage gar keinen Ausschlag, somit $\alpha = 0$, was den Gl. (1) und (2) nicht mehr entspricht, indem bei ihrer Aufstellung von der Reibung abgesehen wurde. — Die begrenzte „Empfindlichkeit" einer Wage, eines Thermometers (und jedes anderen physikalischen Meſsinstrumentes) ist so genannt nach Analogie zur begrenzten „Empfindlichkeit" unserer Empfindungsorgane; psychol. Anhang Nr. 40]. Anh. 40.

Die **Empfindlichkeit** einer Wage ist dadurch definiert, daſs sie um so gröſser sei, ein je gröſserer Ausschlagswinkel α einem gegebenen kleinen Übergewicht p entspricht. Die Bedingungen hierfür sind nach Gl. (2) oder (1) die folgenden: Bei gegebenem p ist die Empfindlichkeit um so gröſser, je länger die Wagarme a sind, je kleiner das Gewicht des Wagbalkens Q und je kleiner sein Abstand b von der Schneide ist.

Wäre $b = 0$, so würde $\alpha = 90^0$ für jedes beliebige $p > 0$; wäre auch $p = 0$, so würde $tg\,\alpha = \frac{0}{0}$, also unbestimmt. Physikalische Deutung dieser Grenzfälle!

Geht die Verbindungslinie der Aufhängepunkte einer Wage nicht wie in Fig. 119 durch die Schneide, so gestaltet sich die Beziehung zwischen α und den Längen und Gewichtsgröſsen der Wage verwickelter; insbesondere ist dann nicht mehr α von der jeweiligen gleichen Belastung P unabhängig (LA 79). LA 79.

Die Empfindlichkeit feiner „chemischer Wagen" (math. Anh. Nr. 5) geht bis etwa 100000000, d. h. bei einer beiderseitigen Belastung von z. B. je 1 kg wird noch ein Übergewicht von 0,01 mg angezeigt. Anh. 5.

§ 30. Arbeit an starren Systemen: Maschinen.

Geschichtliches. Blicken wir von den kunstvollen Erzeugnissen des gegenwärtigen Maschinenbaues, z. B. Lokomotiven, Spinnmaschinen (möglichst mannigfaltige weitere Beispiele!), zurück auf die Anfänge des Gebrauches mechanischer Vorrichtungen, wie sie auf altägyptischen und assyrischen Denkmälern abgebildet

sind und in Gräbern aus vorhistorischer Zeit gefunden werden, so zeigt si im Anfange das praktische Bedürfnis der theoretischen Einsicht in die der Wirkungsweise aller dieser Vorrichtungen weit vorauseilt. Später wäre ohne solche Einsicht die Konstruktion möglichst ökonomisch wirkender M nicht mehr möglich gewesen; aber auch jetzt noch empfängt die Theorie wieder neue Anregungen gerade durch die Praxis (das glänzendste Beispie wärtig das Verhältnis von Elektrotechnik und Elektrizitätstheorie).

Wie im vorigen Paragraphen an Archimedes' Theorie des Hebels wurde, setzten die ältesten rein theoretischen Untersuchungen mech Erscheinungen mit dem Gleichgewicht an Maschinen ein. Auch der F zug und andere „mechanische Potenzen" (Maschinen) waren Archimedes p und theoretisch bekannt; nach seinem Vorbild wird noch heute manch Darstellung der ganzen Mechanik mit der „Statik" der Maschinen be Umgekehrt bieten aber die Maschinen auch eine zusammenhängende Anw fast aller Gesetze der theoretischen Mechanik, namentlich der modernen Energ

Alle Gesetze der Bewegung und des Gleichgewichtes an beliebig zusa gesetzten wie an den sogen. **einfachen Maschinen** (als welche die Mechanik aufzuzählen pflegte: den **Hebel**, das **Wellrad**, die **Rollen**, fer **schiefe Ebene**, den **Keil** und die **Schraube**) lassen sich aus den bist wickelten Gesetzen, namentlich über die Zusammensetzung von Kräf starren Systemen ableiten. Naturgemäfser aber ist ihre A aus dem Gesetze der Erhaltung der Arbeit; denn der Zweck der Maschinen ist das **Verrichten von mechan Arbeit** unter zweckmäfsigeren Bedingungen („Erspar Kraft", bequemere Kraftrichtungen und Angriffspunl bei dem unvermittelten Wirken der zur Verfügung stehenden In welchem Sinne eine solche Ableitung möglich ist, zeige zunä

Fig. 120.

Arbeitsleistung mittels des **Flaschenzuges** (sei schreibung nach Fig. 120). *Versuche*: 1. Wir äquili zuerst das Gewicht der beweglichen „Flasche" durc am freien Seilende angebrachte Tara. Einer an dieser l hängenden Last von Q fg hält eine am freien En Seiles angebrachte Kraft von $P = {}^1/_n Q$ fg das G gewicht, wo n die Anzahl aller Rollen und dahe aller tragenden Schnurteile ist. — 2. Wird zu Übergewicht p gefügt, so setzt dieses zunächst di richtung noch nicht in Bewegung, da an den Roll Seilen eine nicht unbeträchtliche Reibung herrscht. aber p hinreichend grofs genommen, so sinkt das frei ende in beschleunigter Bewegung und Q stei (kleinerer) Beschleunigung; umgekehrt, wenn bei Q e reichendes Übergewicht q angebracht wird. Wird da Übergewicht abgenommen (genauer: mit Rücksicht a Reibung ein passendes Übergewicht belassen), so ge bewegliche Flasche und mit ihr die Last Q in stationären (§ 15, § 23, S. 98). — Bei diesen Bewegungen ist es nun sch

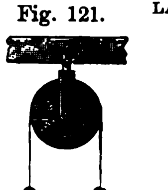
ometrischen Gründen (vor der physikalischen Betrachtung) ersicht-
h, **dafs zwischen dem Lastwege von** s m und dem Kraftwege von
n **die Beziehung besteht:** $S = ns$; denn damit Q um s m gehoben
rde, **mufs jedes der** n **tragenden** Schnurstücke um s m verkürzt,
o **das freie** Ende des Seiles um ns m herabgezogen werden.

Hätten wir die Q kg um s m aus freier Hand (oder den Haken
r **beweglichen Flasche** selbst anfassend) gehoben, so hätten wir eine
chanische Arbeit von $Q.s$ mfg geleistet. Während wir jene Q kg
n s m mittels des Flaschenzuges heben, indem wir an dem freien
de des Seiles ziehen, empfinden wir nur einen Gegenzug von
$= {}^1/_n\, Q$ fg; und indem wir diesen Widerstand längs $S = ns$ m
berwinden, haben wir hier eine mechanische Arbeit von
$P.S = {}^1/_n\, Q . ns = Q.s$ mfg geleistet. Es kostet also **gleichviel
echanische Arbeit, eine gegebene Last eine gegebene Strecke
durch ohne Maschine, oder sie mit Hülfe eines Flaschen-
ges der Schwere entgegen zu heben** (oder auch anderen Kräften
tgegen zu verschieben).

Der Flaschenzug bildet also ein erstes Beispiel dafür, dafs und wieso die
nntnis der Gleichgewichtsbedingung einer Maschine zugleich darüber Auf-
chlufs gibt, von welchen Bestimmungsstücken die Arbeitsleistung dieser
aschine abhängt (LA 80). — Deshalb kann umgekehrt auch aus
der Bedingung, **dafs an jeder Maschine die Arbeit der Kraft
gleich ist der Arbeit der Last** (Gesetz der Erhaltung der
Arbeit an Maschinen, nach alter Bezeichnung: „die goldene
Regel der Mechanik") die Gleichgewichtsbedingung für die
Maschine hergeleitet werden. — Diese Gleichwertigkeit von Gleich-
gewichtsbedingung und Arbeitsbedingung werde noch an folgenden
Beispielen im einzelnen erwiesen:

LA 80.

Fig. 121.



Rollen. Von den $2n$ Rollen, aus denen der Flaschen-
zug zusammengesetzt ist, heifsen die der oberen Flasche
fixe Rollen, die der unteren **bewegliche Rollen.** Auch
e eine derselben kann noch als („einfache") Maschine
dienen. — Ist der Halbmesser einer Rolle r cm und sind
zunächst die Schnüre parallel, so lautet die Gleich-
gewichtsbedingung (Beweis durch Zurückführung auf
en gleicharmigen, bezw. einseitigen Hebel, LA 82)
ür die

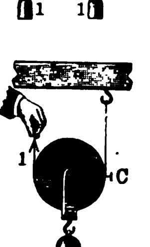


Fig. 122.

LA 82.

xe (feste) Rolle (Fig. 121): $P = Q$ (Kraftarm = Lastarm = r),
ewegliche Rolle (Fig. 122): $P = {}^1/_2\, Q$ (Kraftarm = $2r$, Lastarm = r).

Dabei gilt die Bedingung $P = Q$ für die fixe Rolle auch dann noch, wenn
e Schnurteile nicht parallel sind (gleicharmiger Winkelhebel); für die be-
egliche Rolle wird allgemeiner $P = \frac{Q}{2\cos\gamma_2}$, wenn jeder der Schnurteile mit

LA 83. der Lotrechten einen Winkel γ_2 einschliefst (LA 83). Berechnung des Verhältnisses von s und S für jeden dieser Fälle.

Anwendungen der fixen Rollen bei Aufzügen, Türen mit Selbstverschlufs durch Gewichte...; vergl. auch die Apparate Figg. 36, 37, 41, 95, 109 u. s. w. Bewegliche Rollen an den Pendeluhren, Hängelampen u. s. f.

Aus den Bedingungen für die beweglichen Rollen lassen sich dann wieder die für den **Potenzflaschenzug** (im Gegensatz zu welchem der oben behandelte LA 84. der „gemeine" Flaschenzug heifst) ableiten (LA 84).

LA 84. Der **Differentialflaschenzug** (LA 84) ist wegen der ungleichen Radien seiner Rollen teilweise schon dem Wellrade verwandt.

Das Wellrad (Fig. 123) besteht in seiner einfachsten Form aus einer kreisrunden Scheibe (**„Rad"**) und einem Cylinder (**„Welle"**, **Wellbaum**), die so aneinander befestigt sind, dafs ihre Achsen in derselben Geraden liegen. Um den Umfang des Rades und um den der Welle ist je ein Seil so gelegt, dafs, wenn man zuerst an dem einen und dann an anderen zieht, die Maschine in entgegengesetztem Sinne in drehende Bewegung gerät. — Eine solche tritt dann und nur dann nicht ein, wenn in Bezug auf die Drehachse die **Momente von Kraft und Last einander gleich** sind; daher: **An dem Wellrade herrscht Gleichgewicht, wenn die am Rade angreifende Kraft zu der an der Welle angreifenden Last sich verhält wie der Radius der Welle zu dem des Rades** ($P:Q = r:R$ oder $PR = Qr$).



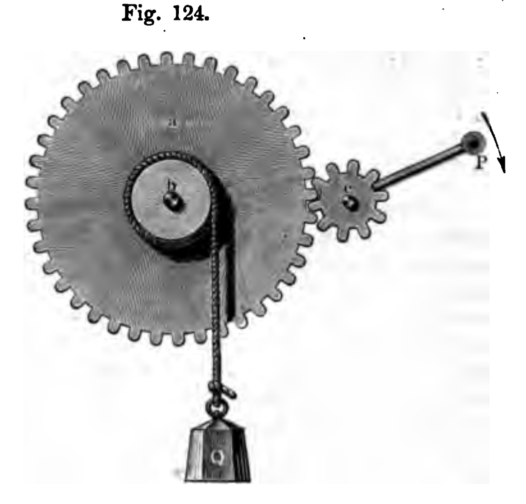
Fig. 123.

Wie die fixe Rolle auf den gleicharmigen, so führt das Wellrad auf den ungleicharmigen Hebel zurück. Während aber bei der Rolle die Angriffslinien von Kraft und Last in einer Ebene liegen, ist dies im allgemeinen nicht der Fall beim Wellrade. Gleichwohl kommt in der Gleichgewichtsbedingung nichts davon vor, ob das Seil b ganz an die Scheibe herangeschoben ist oder nicht. In Fig. 123 gäben Kraft und Last noch ein Kräftepaar, welches die Achse an der Scheibe zu heben, am anderen Ende der Welle herabzudrücken sucht, welche Bewegungen aber durch die Achsenlager aufgehoben werden (— wie denn auch der Momentensatz § 29, S. 131 nur die Festigkeit der Achse voraussetzt und übrigens beliebige Verschiebungen der Kräfte bei gleichem Kraftarm in Bezug auf jene Achse gestattet).

Eine der wichtigsten praktischen Formen des Wellrades ist die **Kurbel**, welche namentlich dazu dient, fortschreitende Bewegungen (und zwar meist solche, bei denen die einzelnen Punkte der Kolbenstange, Pleuelstange ... Sinusschwingungen ausführen) in drehende (zunächst in kreisende der Kurbelwarze) umzusetzen und umgekehrt. Dabei wird das Drehmoment der Kraft am gröfsten, wenn sie normal zum Kurbelarm wirkt, am kleinsten, nämlich Null, in den beiden **„toten Punkten"**. Wird die Kurbel nicht durch eine starre Stange von fester Führung, sondern z. B. durch die Hand eines Arbeiters in Bewegung gesetzt, so läfst dieser instinktiv seine Kraft an allen Punkten annähernd normal gegen den Kurbelarm wirken.

Anwendungen des Wellrades: Die Winden (bei Aufzügen, Ziehbrunnen ..); Räder an Wasser- und Windmühlen; Pferdegöpel; Zahnräder (Fig. 124), Transmissionsräder, Haspel, Spinnrad; hbank, Schleifstein, Kurbeln Drehorgeln, Kaffeemühlen; lüssel. Weitere Beispiele! Was ist bei jeder dieser Andungen „Kraft", was „Last"?

Fig. 124.



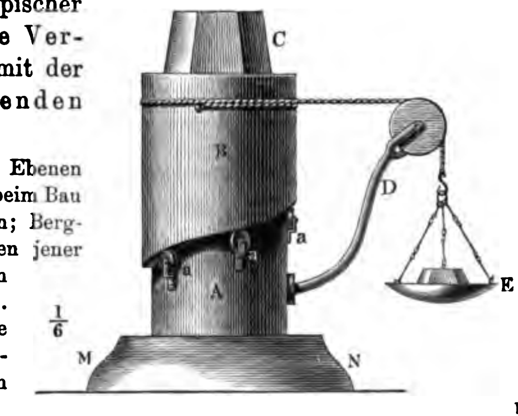
Bei allen Lagen der aftrichtungen, ob parallel, ivergent oder windschief, it aus der geometrischen stalt der Hebel, Rollen d Wellräder hervor, dafs : die Verschiebungen gilt: $s = R : r$, woraus auch lort wieder für die Arbeitsistung $PS = Qs$ folgt. —

Die schiefe Ebene (§§ 2, 17, 22) läfst sich als **Maschine** auffen, wenn man das vertikal abwärts wirkende Gewicht des auf ihr enden Körpers als die Last, die parallel zur Länge (auch parallel Basis oder sonstwie) gerichtete Kraft als die jener Last das ichgewicht haltende Kraft auffafst. — Gleichgewichtsbedingungen:

$$P = Q \sin \varepsilon, \quad P = Q \operatorname{tg} \varepsilon, \quad P = Q \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \beta} \quad (\S\ 17).$$

Dafs auch hier $PS = Qs$ gilt, wurde in § 22 (S. 91) als typischer Fall dafür erörtert, dafs die Verschiebung einen Winkel mit der Richtung der widerstehenden Kraft einschliefst.

Fig. 125.



Anwendung schiefer Ebenen („Schrotleitern") beim Aufladen, beim Bau z. B. der ägyptischen Pyramiden; Bergstrafsen (worin besteht der Nutzen jener künstlichen Umwege, die man „Serpentinen" nennt?), Stiegen ... Zeige, dafs hier immer Kraft, nie Weg erspart wird. — STEVINS Ableitung des Gleichgewichtes an schiefen Ebenen LA 85.

LA 85.

Wie **Rolle** und **Wellrad** auf den **Hebel**, so lassen sich theoretisch auf die **schiefe Ebene** zurückführen **Keil** und **Schraube** (LA 86, 87). Aber auch unmittelbar lehren schon die gewöhnlichsten Anwendungen des **Keils** (beim Holzspalten,

LA 86, 87

Messer, Nadel ...), dafs die Kraft um so kleiner ist, je gröfser der Kraftwe und dies wieder, je schmaler der „Rücken“ im Verhältnis zur Länge der „Se ist. — Ähnlich ist bei den Anwendungen der **Schraube** (ihre geometris Anh. 25. Eigenschaften math. Anh. Nr. 25; *Versuch* über die Gleichgewichtsbedin $P : Q = h : u$ nach Fig. 125 a. v. S.), z. B. Heben grofser Lasten (von Dachstül Vorwärtsschieben grofser Massen (durch die Schiffsschraube, bei der das W die Schraubenmutter bildet), Pressen von Papier u. s. f., zur Bewältigung gegebenen Last eine um so kleinere Kraft erforderlich, je kleiner die E des Schraubenganges im Vergleich zum Spindelumfang ist. —

Denken wir uns nun den an so vielen einfachen wie zusammengese Maschinen bewährten Satz von der Erhaltung der Arbeit an Maschi auch für alle übrigen verallgemeinert, so könnte eine solche Maschine sog einen undurchsichtigen Kasten so eingeschlossen sein, dafs nur zwei Enden he ragen, von denen uns ein Versuch zeigt, dafs einer Verschiebung von s cm einen eine solche von S cm des anderen entspricht: dann können wir auf G jenes Satzes schliefsen, auch für sie werde $P : Q = s : S$ sein. — Dabei kö die Verschiebungen s und S im selben Verhältnis beliebig verkleinert nommen werden (als „unendlich klein“, ja sogar als blofs möglich, als „virtu d. h. mit dem Bau der Maschine verträglich; in diesem Sinne bezeichnet man Satz von der Erhaltung der Arbeit an Maschinen auch als „Prinzip **virtuellen Verschiebungen**“). Dabei sind für die Gleichgewichtsbedingung Komponenten der Verschiebungen zu nehmen, die den widerstehe Kräften gerade entgegengesetzt sind.

Wie dieser Gedankengang zur Konstruktion bestimmter Maschinen fü kann, zeigt die folgende Betrachtung über Einrichtung und Gebrauch der

Fig. 126.

Brückenw (Modell I). Die forderungen, w zu ihrer Konstrul geführt haben, folgende: 1. Es Gleichgewicht schen der zu wä den Last (Q kg) den aufzulegende wichtsstücken (P kg) bestehen, unabhängig von der Stelle „Brücke“, auf welche die Last zu liegen kommt; 2. es soll $P =$ ¹ (Dezimalwage, Fig. 126) oder $P = \frac{1}{100} Q$ (Centesimalwage) sein.

Aus Bedingung 1. folgt überdies (wie?), dafs 3. die Brücke nur V schiebungen parallel zu sich selbst erleiden darf. Dies wird da erreicht, dafs die Brücke einerseits mit der unter ihr liegenden Schneide wieder auf der einen einseitigen Hebel darstellenden „Gabel“ ruht, ande durch zwei Zugstangen mit dem Wagbalken („Schwanenhals“) verbunden i Senkt sich die mit Q kg belastete Brücke um σ cm, so ist wegen $a : na =$ (etwa $n = 3$ oder 5) die Bedingung 3 und daher auch 1 erfüllt.

Um nun auch die Bedingung 2 zu erfüllen, ist der Kraftarm von $P =$ (bezw. $100\,a$), daher ein Heben oder Senken von P um eine beliebige St

t von einem Senken oder Heben von Q um $^1/_{10}$ (bezw. $^1/_{100}$) dieser

—

ı wir zu keiner Zeit wissen können, dafs die bis dahin experimentell und
sch untersuchten einfachen und zusammengesetzten Maschinen schon alle
pt denkbaren seien, so stellt die auf noch so reichliche Erfahrungen
e volle Verallgemeinerung des Satzes von der Erhaltung der Arbeit
e Maschinen doch nur eine höchst wahrscheinliche Hypothese dar (log.
r. 37). Mit ihr steht und fällt auch der Satz von der **Unmöglichkeit** Anh. 37.
ıechanischen Perpetuum mobile. Unter diesem Namen stellte man sich
ıschine vor, die 1. einmal in Bewegung gesetzt, sich selbst ewig in
ng erhielte (z. B. eine Uhr, die sich, einmal aufgezogen, immer wieder
ufzöge), dabei 2. die Bewegungshindernisse überwände und 3. über-
:h anderweitig nutzbare Arbeit verrichtete. — Der 1. Anforderung
ıtsprächen nun allerdings viele mechanische Vorgänge; so die Bewegung
ofs der Trägheit unterliegenden Körpers, die Bewegung eines Pendels und die
ng vieler Maschinen (z. B. Hebel, Rolle mit in sich geschlossener Schnur),
sie unbelastet oder ihrer Gleichgewichtsbedingung gemäfs
ət sind. 2. Während wir aber bei Aufstellung dieser Gleichgewichtsbedin-
von den Bewegungshindernissen ganz absahen, gelangt in Wirklichkeit
urch sie jede Maschine mit der Zeit zum Stillstande, wenn diese Verluste
ırch Energiezufuhr von aufsen ersetzt werden; und vollends kann nach dem
e der Erhaltung der Arbeit durch was immer für Maschinen oder
ıensetzungen aus solchen nie ein Überschufs an Arbeit verrichtet werden,
lie Forderung 3 erwartet. — Darf man z. B. eine Schiffmühle, die durch
rtwährend fliefsenden Strom getrieben wird, ein Perpetuum mobile in dem
stgestellten Sinne nennen? — Wer das Gesetz der Erhaltung der Arbeit
wird nicht mehr die Erfindung eines Perpetuum mobile versuchen; und
hrt liegt darin, dafs die einstmals sehr beliebten Versuche einer solchen
ng ausnahmslos fehlschlugen, eine Bestätigung für die Allgemeingültigkeit
aturgesetzes. — Indem die Pariser Akademie (1770) den Beschlufs fafste,
Prüfung von vermeintlichen Erfindungen irgend welches Perpetuum mobile
ıpt nicht mehr einzugehen, erklärte sie implicite den Satz von der Erhal-
er Arbeit für einen durch das bisherige Fehlschlagen aller solcher
ngen so wahrscheinlich gewordenen, dafs die Möglichkeit von Ausnahmen
nehr wissenschaftlich in Betracht kam. Indem hierin auch Maschinen,
ı anderer Naturkräfte als der rein mechanischen, z. B. der Wärme, der
ischen und elektrischen Kräfte bedienen, inbegriffen waren, war auch schon
z der Erhaltung der Arbeit von dem mechanischen Gebiete auf sämt-
ıbrigen physikalischen Erscheinnngskreise ausgedehnt. —
der Tat gelten die folgenden Begriffsbestimmungen auch für alle, durch
mer für Naturkräfte betriebene Maschinen:

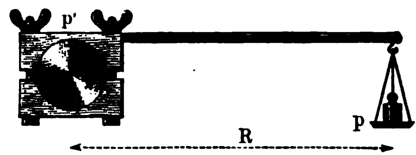
riebmaschinen. Arbeitsmaschinen. Nutzeffekt. Statt
uskelkraft oder ziehender Gewichte wird im grofsen bekannt-
ie Energie der Bewegung strömenden Wassers (Wasserräder,
ıen), strömender Luft (Windmühlen, Windmotoren), die Energie
ı Wasserdampfes (Lokomobilen, Lokomotiven ...), explo-
der Gase (Gas-, Benzinmotoren ...), die Energie elektrischer
e (Elektromotoren) verwendet. Maschinen, welche diese Energie

in passende Bewegungsenergie (fast immer zunächst in die der drehenden Bewegung einer „Hauptwelle") umsetzen, heifsen **Triebmaschinen** (Motoren); ihre Energie wird sodann (durch „Transmissionen") übertragen auf die **Arbeitsmaschinen** (Kreissägen, Hobel-, Bohrmaschinen, Pump-, Walz-, Pochwerke, Spinn-, Strick-, Nähmaschinen, Buchdruckpressen u. s. w.) und von diesen auf die zu bearbeitenden Körper (Holz, Metall, Papier u. s. f.).

Nur ein verhältnismäfsig kleiner Teil der den Triebmaschinen zugeführten Energie (z. B. der Steinkohlen) wird für die von den Arbeitsmaschinen verlangte Arbeit (z. B. Heben einer Förderschale) verwendet. Sie bilden dann die in Watt (§ 22 Ende) zu messende **Nutzleistung** (den **Nutzeffekt**) der ganzen maschinellen Einrichtung.

Zur Messung der an einer Maschine verfügbar werdenden Arbeit dient das **Bremsdynamometer** (Fig. 127): An die Hauptwelle werden nämlich Holzbacken gepreſst, von denen ein Hebel mit Lastgewicht (zu vergleichen einer Schnellwage) wegragt. Wäre der Hebel unbelastet, so würden infolge „Mitnehmens durch Reibung" (§ 16) die Hölzer und der Hebel von der Welle mit in Rotation versetzt; bei einer bestimmten Einstellung des Lastgewichtes dagegen nimmt der Hebel weder eine Drehung im Sinne der Welle (Hebung) noch eine im entgegengesetzten Sinne (Senkung) an. Aus dem Gewichte, dessen Widerstande entgegen sich die Welle dreht, und der Länge des Hebelarmes ergibt sich dann bei bekannter Tourenzahl die zur Herstellung des Gleichgewichtes zu leistende Arbeit per sec.

Fig. 127.



Wie hier die durch das Bremsdynamometer ganz aufgebrauchte Arbeit, setzt sich auch die infolge der Steifigkeit der Transmissionen, der Reibung der Maschinenteile aneinander, namentlich aller Radachsen in ihren Lagern, zum geringeren Teile infolge des Luftwiderstandes verlorene Arbeit in andere Formen von Energie und schliefslich in Wärme um (§§ 23, 82 . .).

Die Tatsache, dafs z. B. auch die vollkommenste Dampfmaschine nur etwa 18 Proz. der in Form des Heizmaterials ihr zugeführten Energie an die Arbeitsmaschine abzugeben vermag, drückt man kurz so aus: der **Wirkungsgrad** der Maschine ist 18 Proz. Diese ganze von der Triebmaschine abgegebene Arbeit empfängt die Arbeitsmaschine; wird dann von dieser Arbeitsmaschine (am Fahrstuhl, an der Spinnmaschine ...) z. B. 90 Proc. Nutzarbeit gewonnen, so ist der Wirkungsgrad der ganzen Maschinenanlage $N = \frac{18}{100} \cdot \frac{90}{100} = 16{,}2$ Proz.

Näheres zur Phoronomie und Dynamik der Drehbewegungen.

§ 31. Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung. — Trägheit und Beharrung bei Rotationen starrer Systeme.

Im § 12, S. 35 wurde dem zu einem gleichförmig kreisenden Punkte gezogenen Leitstrahl a eine bestimmte **Winkelgeschwindigkeit** α zugeschrieben, die zur Bahngeschwindigkeit c des kreisenden Punktes in der Beziehung steht

= αa. — Dieser Begriff der Winkelgeschwindigkeit wird nun von einem einzelnen **itstrahl** auch übertragen auf die **Rotation ganzer Körper**. Besitzt nämlich **and** eine zur Rotationsachse (§ 26) normale, im Körper feste Gerade eine be**mmte** konstante oder veränderliche Winkelgeschwindigkeit, so wird diese auch **r Rotation** des ganzen Körpers zugeschrieben (LA 88). Hat dann ein r cm von **r Achse** abstehender Punkt die Bahngeschwindigkeit c (konstant), bezw. $v\,\mathrm{cm\,sec^{-1}}$ **eränderlich**), so ist seine

LA 88.

Winkelgeschwindigkeit $\alpha = \frac{c}{r}$ (konstant), bezw. $\psi = \frac{v}{r}$ (veränderlich).

Da die „Dimension" eines Winkels im absoluten Maſse Null ist (entsprechend $= \frac{l}{r}$, Anh. 2), so ist die einer Winkelgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{cm\,sec^{-1}}}{\mathrm{cm}} = \mathrm{sec^{-1}}$. —

Anh 2.

Wie die Änderung der Bahngeschwindigkeit **Bahnbeschleunigung**, so heiſst **e** Änderung der Winkelgeschwindigkeit **Winkelbeschleunigung.** Eine An**schauung** von dieser Gröſse gewinnen wir z. B. an jeder **Rolle** und an jedem **ellrad**, bei denen Kraft und Last einander nicht das **Gleichgewicht** **ten**; die **Gröſsenbeziehung** zwischen Bahn- und Winkelbeschleunigung wird **besondere** veranschaulicht durch folgenden

Versuch: Während an der Atwoodschen Fallmaschine (Fig. 41, S. 54) jeder **kt** der sinkenden, bezw. steigenden Massen und der sie verbindenden Schnur **e konstante Bahnbeschleunigung** $b\,\mathrm{cm\,sec^{-2}}$ zeigt, kommt dem Rädchen **r Fallmaschine** als Ganzem und z. B. auch jeder seiner Speichen eine gewisse **nstante Winkelbeschleunigung** β zu. Ist z. B. $b = 10\,\mathrm{cm\,sec^{-2}}$, so daſs **nen** 1, 2, 3 ... sec längs der Fallmaschine 5, 20, 45 ... cm zurückgelegt **rden**, so legt der Radkranz, an welchem die Schnur anliegt, die gleichen Strecken **rück**. Ist der Halbmesser des Rädchens $r = 5$ cm, so legt ein Punkt der Speiche, **r** $\varrho = 1$ cm von der Achse absteht, Wege von $\frac{5}{5}, \frac{20}{5}, \frac{45}{5} \ldots$ cm zurück, und **e Bahnbeschleunigung** dieses Punktes, somit auch die **Winkelbeschleunigung** **es Leitstrahles** dieses Punktes, wie die des ganzen Rädchens, ist $\beta = \frac{10}{5}\,\frac{\mathrm{cm\,sec^{-2}}}{\mathrm{cm}} = 2\,\mathrm{sec^{-2}}$. Allgemein definieren wir:

Die Einheit der Winkelbeschleunigung besitzt ein sich drehen**der Körper**, dessen Winkelgeschwindigkeit sich binnen je 1 sec um **1 WGE** ändert. — Besitzt ein Punkt im Abstande r cm von der **Drehachse** die konstante Bahnbeschleunigung b, bezw. die veränder**liche** Bahnbeschleunigung ω, so hat der ganze Körper die

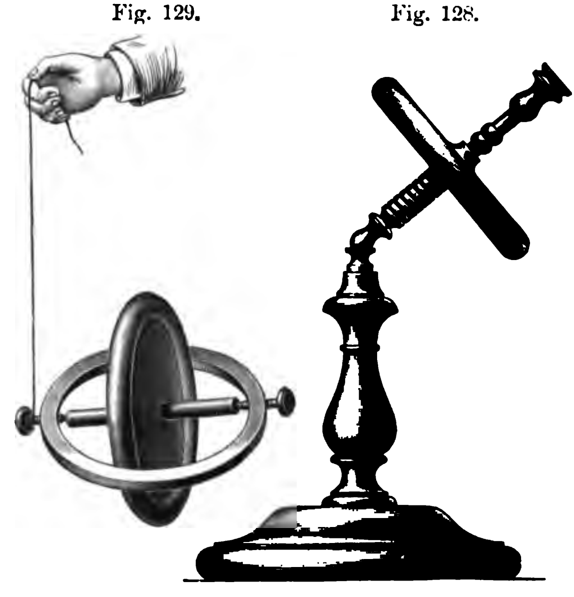
Winkelbeschleunigung $\beta = \frac{b}{r}$ (konstant), bezw. $\omega = \frac{w}{r}$ (veränderlich).

Die vorstehenden Bestimmungen beschränken sich auf die **phoronomische Beschreibung** der Drehbewegungen. — Die erste **dynamische** Frage ist dann: **Was für Drehungen** führt ein starres System aus, wenn **keine Kräfte (Drehmomente)** auf dasselbe wirken? War in einem bestimmten Zeitpunkt das System **in Hinsicht auf Drehungen** in **Ruhe**, d. h. ohne Winkelgeschwindigkeit gewesen, **so werden** wir ebenso nichts anderes erwarten, als daſs es in Ruhe bleibt, wie das **Trägheitsgesetz** für den Fall der Ruhe überhaupt von jeher für selbstverständlich **gehalten** worden war. **Aber** wie **Trägheit** und **Beharrung** auch für beliebig

grofse Bahngeschwindigkeiten von Punkten und bei Translation von Körpe gelten, so auch für beliebig grofse Winkelgeschwindigkeiten. So dre sich bei obigen Versuchen mit Atwoods Fallmaschine, wenn der sinkende Träg nach erlangter kleinerer oder gröfserer Geschwindigkeit aufgehalten wird, di Rädchen mit der erlangten Winkelgeschwindigkeit weiter. Desgleichen: Werden wi fragen dürfen, „infolge welcher Kräfte sich die Erde dreht", genauer: ihre glei förmige tägliche Drehung beibehält? — Wie ferner für einzelne Punkte und fü Translation ganzer Systeme (z. B. eines Eisenbahnzuges) die Begriffe des Anlauf stationären Laufs und Endlaufs gelten, so auch für Drehbewegungen; da typische Bild hierfür sind die Bewegungen des **Schwungrades.** Dieses bekom beim Angehen, z. B. der Dampfmaschine, an der es angebracht ist, eine positi Winkelbeschleunigung, während des stationären Ganges der Maschine besitzt e eine konstante Winkelgeschwindigkeit, und beim Auslaufen der Maschine nim diese ab bis 0 (Winkelverzögerung). Der Zweck des Schwungrades ist hierbei de einer Art Speicher für die kinetische Energie der Maschine, mit der es in Ver bindung steht. Falls nämlich die Dampfmaschine, die die Arbeitsmaschinen, z. B eine Kreissäge, in Gang erhält, vorübergehend eine zu starke Dampfzufuhr erhäl so bringt die zunächst an das Schwungrad übertragene Energie in diesem un daher auch in der Säge nur eine kleine Steigerung der Winkelgeschwindigke hervor; und ebenso geht die Maschine nicht viel langsamer, wenn z. B. die Säg vorübergehend härtere Teile eines Balkens zu durchschneiden hat. Für diese **Beharrungswiderstand gegen Winkelbeschleunigungen** ist aber dabei nicht nu die Masse des Schwungrades, sondern sein **Massenmoment (Trägheitsmome** mafsgebend, das nicht nur von der Masse, sondern auch von der Massenverteilun in Bezug auf die Rotationsachse abhängt; Näheres hierüber folg. §.

Trägheit und Beharrung der einzelnen Massenpunkte eines starren System können aber bei Rotationen auch zu viel verwickelteren Erscheinungen führe als bei Translationsbewegungen; dies namentlich auch, wenn die Rotation achse selbst in dem Zei punkte, von dem an da System sich selbst übe lassen wurde (d. h. keine Kräften und Kraftmome ten unterlag), schon ein Winkelgeschwindigkeit gehabt hatte. Solche Er scheinungen zeigen scho die folgenden

Fig. 129. Fig. 128.



Vorversuche mit de Kreisel. 1. Wurde ein Kreisel durch kräftiges A ziehen der Schnur eine h reichend rasche Rotation bewegung erteilt, so bleib er, mit vertikaler ode wenig geneigter Achse au die Spitze gestellt, anni hernd „ruhig", wie stabil stehen, trotzdem er ohn die Drehung nur labile

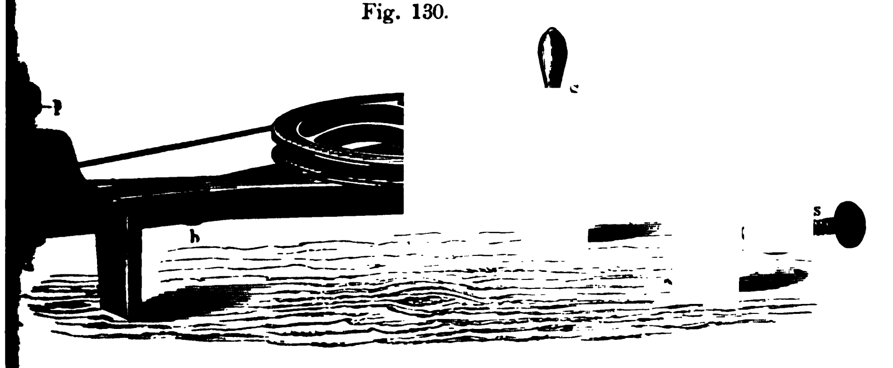
r **gar** kein Gleichgewicht hätte und daher nach dem Loslassen, der Schwerkraft **end**, umfallen würde. Die Achse des Kreisels bleibt aber weder bei kleiner **h bei** grofser Neigung ganz in Ruhe, sondern sie führt Bewegungen längs des **ntels** eines Kegels aus, falls seine Spitze in einer Pfanne zu laufen gezwungen (Fig. 128), oder aber näherungsweise eines Doppelkegels, falls die Spitze auf an- **ernd** ebener Fläche läuft. Diese Kegelbewegung der Achse wird im allgemeinen **so** rascher, je geringer die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels wird. (Alle **se** Erscheinungen lassen sich schon an den Brummkreiseln der Kinder beob- **hten.)** — 2. Noch auffallender ist die Erscheinung, dafs, wenn ein hinreichend **ch** rotierender, massiver Kreisel nach Fig. 129 in eine Schnur gelegt wird, er **ls der** Schwere nicht herabfällt, sondern dafs die Kreiselachse selbst annähernd **e Drehung** in wagrechter Ebene um die Schnur als lotrechte Achse macht. — **angeführten** und zahlreiche andere überraschende Erscheinungen an Kreiseln **ären** sich aus der **Erhaltung der Rotationsebene** (Näheres § 34).

Den in § 26 aufgestellten einfachsten Analogieen zwischen Translationen **w.** Bewegungen einzelner Punkte) und Rotationen reihen sich folgende an:

haltung der Bahngeschwindigkeit; **Widerstand** gegen Bahnbeschleuni- **gung:** als Mafs der **Masse.**	Erhaltung der Winkelgeschwindigkeit; Widerstand gegen Winkelbeschleunigung: **„Massenmoment.“**
altung der Richtung; Widerstand **gegen** Änderungen der Bahnrichtung: **Fliehkräfte.**	**„Erhaltung der Rotationsebene“** als Widerstand gegen Veränderungen der Rotationsebene.

Hiernach wirkt z. B. ein auf geraden Schienen fahrender Eisenbahnzug bei **m Zusammenstofs** einfach durch seine Masse, d. i. die Summe der Massen **r Massenpunkte**, aus welchen wir ihn zusammengesetzt denken können. Ein **ungrad** wirkt auf ein Hindernis, das die Rotation zu hemmen sucht, durch **Massenmoment.** — Ein auf Schienen von beliebiger (nicht blofs von kreis- **iger)** Krümmung fahrender Zug weist Fliehkräfte auf, die ihn bei allzu **rfer** Krümmung und zu grofser Bahngeschwindigkeit seitlich aus den Schienen **fen** (LA 41). — Eine besondere Klasse von Fliehkrafterscheinungen ist aber **tiell** den Rotationen von Punktsystemen eigentümlich. Namentlich zu **r** Vorführung dient die **Centrifugalmaschine**, Fig. 130. LA 41.

Fig. 130.



Versuche. **1. Längs eines** wagrechten Leitstabes sind zwei durch einen Faden **bundene Kugeln verschiebbar** (Fig. 131 a. f. S.). Wird dieses System um **eine zum Leitstab senkrechte** Achse gedreht, so müssen die Kugeln Abstände

von der Achse haben, welche sich verkehrt verhalten wie deren Massen, weder die gröfsere noch die kleinere Kugel sich von der Achse entfern

Fig. 131.

Fig. 132.

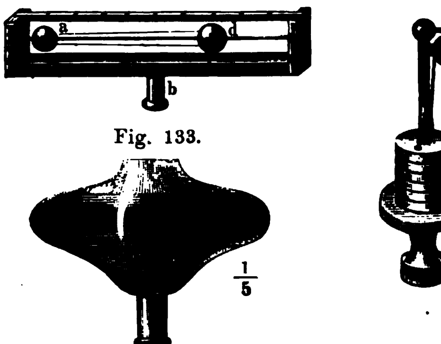


Fig. 133.

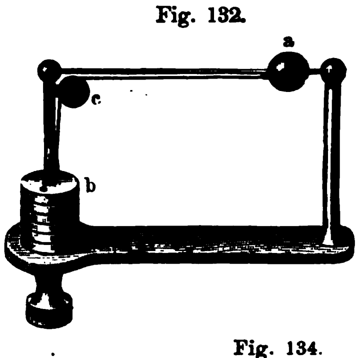
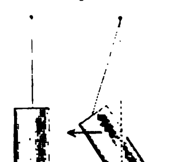


Fig. 134.

dabei die andere mitziehe. 2. **Bestätigung der Gleichung** $f = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$ **im § 19 mittels einer solchen Kugel, welche längs der Drehungsachse ein Gewicht** hebt (Fig. 132) oder eine Feder spannt. — 3. **In einem** Gefäfs (Fig. 133) **mit Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen** Gewichts drängt sich bei rascher Drehung um eine Achse die dichteste Flüssigkeit (Quecksilber) gegen den Äquator; ähnlich 4. **Berganfliefsen** von Flüssigkeiten; 5. parabolische Krümmung des Flüssigkeitsspiegels in einem um seine vertikale Achse gedrehten Trinkglas (LA 42). 6. Abplattung von elastischen Metallreifen (Fig. 134, als ein übrigens nicht analogen mechanischen Bedingungen entsprechendes Vorbild für die „Abplattung" der Erde, § 178); 7. Abplattung einer Tonkugel (Gebrauch der Töpferscheibe) u. s. f. — Eine besondere Klasse Fliehkrafts-Erscheinungen bei **Rotation ganzer Körper** wieder sind die

LA 42.

Fig. 135.



Freie Achsen. ***Versuch.*** Wird der läng Cylinder, Fig. 135, um seine geometrische Achse rasc dreht, so erweist sich diese Achse als **nicht stabi** dem bei kleinen seitlichen Bewegungen der ganze Cyl eine neue Lage annimmt. — Es gibt also 1. Rota achsen, in Bezug auf welche der rotierende Körper haupt nicht im Gleichgewichte ist, indem die die Rotation geweckten Fliehkräfte Kräftepaare b die ihn um neue Achsen sich zu drehen zwingen. 2. Diejenigen A in Bezug auf welche dagegen ein solches Gleichgewicht stattfindet, d genannten **freien Achsen,** scheiden sich wieder in solche, für w das Gleichgewicht stabil, indifferent und labil ist.

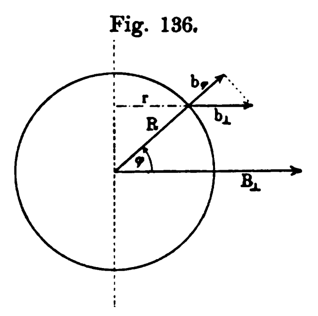
Näheres zur Erklärung dieses verschiedenen Verhaltens im folgenden

Abnahme der Schwere gegen den Äquator.

Geschichtliches. RICHER bemerkte (1671), als er eine in Paris richtig gehende ıdeluhr nach Cayenne mitnahm, dafs sie hier täglich um $1^1/_2$ min zurückblieb. sie durch Verkürzung des Pendels für Cayenne reguliert war, ging sie in Paris der um $1^1/_2$ min voraus. Diese Tatsache wurde von NEWTON dahin gedeutet, s die Beschleunigung im freien Falle, an der schiefen Ebene und bei Pendelwegungen am Äquator kleiner sei als in höheren Breiten. — Allgemein:

Die Beschleunigung g_φ an irgend einem Orte der Erde (Fig. 136) llt schon eine Resultierende dar aus der von der Massenanziehung der de herrührenden eigentlichen Schwereschleunigung G_φ und der entgegenwirkenn Komponente b_φ der Zentrifugalschleunigung, welche jeder mit der Erde rbundene Körper infolge seiner Teilnahme der Erdrotation erhält. Wird die Erde s kugelförmig vorausgesetzt und ist ihr lbmesser R cm, so ist in der geographihen Breite φ^0 der Erde der Rotationsdius $r = R \cos\varphi$, daher die zur Erdachse mal auswärts gerichtete Zentrifugalbeschleunigung $b_\perp = B_\perp \cos.\varphi$ n dieser Zentrifugalbeschleunigung $b_\perp$ entfällt in die Richtung der rtikalen selbst wieder eine Komponente $b_\varphi = b_\perp \cos\varphi$, so dafs $= B_\perp \cos^2\varphi$. Was sich also für φ^0 geographische Breite aus Pendelobachtungen als Beschleunigung frei fallender Körper ergibt, ist $= G_\varphi - B_\perp \cos^2\varphi$.

Fig. 136.



Hier ergibt sich rechnerisch $B_\perp = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$, wo T die Anzahl der Sekunden s Sterntages, R die Anzahl Centimeter des Äquatorhalbmessers ist. Da $B_\perp = \frac{1}{289} G$, so würde, wenn sich die Erde 17mal so schnell um ihre Achse hte, am Äquator die Schwereanziehung durch die Fliehkraft gerade aufgehoben.

Dafs tatsächlich die Erde nicht eine Kugel, sondern annähernd ein Sphäroid , dessen kurze Achse die Rotationsachse ist, macht es wahrscheinlich, dafs diese bplattung" der Erde eben durch die Rotation der einst bildsamen Erdmasse stande gekommen ist. Mit Rücksicht auf diese Abplattung verändern sich dann ch die verhältnismäfsigen Werte der aus der Kugelgestalt theoretisch berechneten ssen $B_\perp$ und g_φ. — Vgl. § 178.

§ 32. Massenmoment (Trägheitsmoment).

Beispiele: 1. Ein massiver Torflügel ist schwer in seinen Angeln zu drehen, ch wenn diese gut geschmiert sind; einmal in Bewegung, trifft er dann die nd, die ihn aufzuhalten sucht, mit Wucht. — 2. Eine Hantel z. B. von 10 kg t bei wagrechter Griffstange durch die Muskeln des vertikal herabhängenden

Armes nur unter beträchtlichem Beharrungswiderstand in bestimmte \ beschleunigung um die Achse XX (Fig. 137) zu versetzen; wäre dieser Wid ebenso grofs, wenn die Hantel um die die Mittel ihrer Kugeln verbindende Achse YY gedreht sollte? Oder ebenso grofs, wenn die 10 kg Eise in die Gestalt Fig. 138 statt Fig. 137 gebracht 3. Erfüllt ein Schwungrad (S. 142) seinen besser, wenn möglichst viel von seiner Masse in kranz oder näher der Achse ist? — Während kunstlose Erfahrungen keinen Zweifel zu lassen p dafs das Kraftmoment sowohl mit der Kraft w dem Kraftarm wächst, § 29, pflegt dageg instinktive Urteil nicht ebenso sicher zu sein hi lich des Einflusses des „Massenarmes", d. h. nicht doch leichter ist, eine gegebene Masse z. B. von der Gestalt Fig. 1 nach Fig. 138 in Drehung zu setzen; und namentlich ist nicht ohne Rec einzusehen, dafs das Massenmoment ebenfalls mit der ersten Potenz der M aber mit der zweiten Potenz des Massenarmes wächst. Dies werde rechnerisch, dann experimentell gezeigt:

Fig. 137.

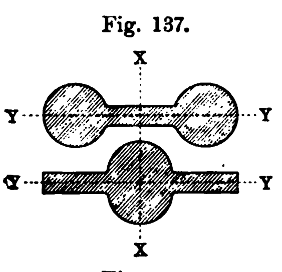


Fig. 138.

A) Rechnerisch. — **Einfachste Aufgabe: Mit einer Achse (Fig. 139) sei durch den zu ihr normalen masselosen „Massenarm r cm ein Massenpunkt von m g starr verbunden. Normal gege Arm und gegen die Achse wirke an dem Kraftarme von a cn Kraft von k Dyn. Welche Winkelbeschleunigung β wird m erh — Antw.: Wir denken uns statt k eine in m selbst angreifende Kr welche in Bezug auf die Achse XX' dasselbe Drehmoment hat Ist die lineare Beschleunigung, welche m erhält, b cm sec^{-2}, so is**

Fig. 139.

$$\beta = \frac{b}{r} \quad \cdot \cdot \; (1), \S\, 31$$
$$b = \frac{k'}{m} \quad \cdot \cdot \; (2), \S\, 16$$
$$k' = \frac{a}{r} \cdot k \quad \cdot \; (3), \S\, 29$$

also durch Elimination (Multiplikation):

$$\beta = \frac{ka}{mr^2} \cdot \cdot \cdot (4);$$

in Worten?

Wie in der Gleichung $k = mb$ für Bahnbeschleunigungen die K das der Beschleunigung Förderliche, die Masse m das der Beschleu Hinderliche ist, so ist auch in der Gleichung (4) für die Winkelbesch gung das **Kraftmoment** $ka = \mathfrak{K}$ das der Winkelbeschleunigung Förder das **Massenmoment** $mr^2 = \mathfrak{M}$ das der Winkelbeschleunigung Hinder also besteht volle Analogie zwischen den Gl. $b = \frac{k}{m}$ und $\beta = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}}$ . . . .

Eben solche Analogieen, wie für Kräfte und Massen, bezw. deren Momer stehen auch für die Arbeiten und Energien bei der Rotation, vgl. LA 1 . 105—107.

Nach Gleichung (4) hat z. B. eine Masse $m = 4$ g mit dem Arme $r =$ ein ebenso grofses Massenmoment wie eine Masse von $\mu = 100$ g mit dem $\varrho = 1$ cm, nämlich beide $\mathfrak{M} = 4 . 5^2 = 100 . 1^2 = 100$ (cm^2 g). Ebenso jede Masse m vom Arme r ersetzt werden durch eine Masse $\mu =$ mit dem Arme 1 cm. — So löst sich auch sogleich folgende

Allgemeinere Aufgabe: Mit der Achse XX seien die Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ roh die Massenarme $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ starr verbunden. Wie verhalten sie sich gen irgend welche (eine oder mehrere) Kräfte bei Winkelbeschleunigung? tw.: Diese Winkelbeschleunigung ist ebenso grofs, wie wenn Massen $\mu_1 = (m_1 r_1^2)$, $\mu_2 = (m_2 r_2^2)$, $\mu_3 = (m_3 r_3^2)$, ... $\mu_n = (m_n r_n^2)$ sämtlich in einem Punkte von 1 cm bstand von der Drehungsachse vereinigt und diese μ durch dieselben Kräfte in schleunigung zu versetzen wären. Es ist also das Trägheitsmoment des ganzen stems in Bezug auf jene Achse:

$$\mathfrak{M} = [m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots + m_n r_n^2] \cdot 1^2 = \Sigma m r^2 \text{ (cm}^2\text{g)} \quad \cdots \quad (5)$$

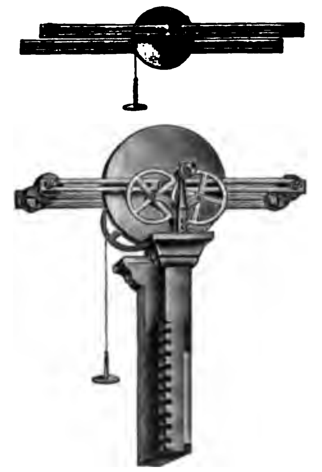
Wie also nach § 29 die Kraftmomente, so sind auch die **Massenmomente** einfach addierbar **(superponierbar)**. Hierbei ist es nicht einmal erforderlich, dafs die Massen längs einer und derselben auf XX Senkrechten angereiht sind; vielmehr kommt es bei irgend einem Massensysteme (sei es, dafs es aus einzelnen Punkten besteht oder dafs seine Masse als stetig durch den Raum des Körpers von gegebener Gestalt verteilt gegeben ist) nur auf die Massen und die Abstände senkrecht zur Drehungsachse, nicht auf ihre Verteilung nach der Richtung der Achse an. So hat z. B. auch ein dünner **Ring** von M g Gesamtmasse und r cm Halbmesser in Bezug auf seine geometrische Achse einfach das Trägheitsmoment Mr^2 (cm²g). — Die Berechnung von Trägheitsmomenten stetig erfüllter Körper von geometrisch bestimmter Gestalt und gegebener Massenverteilung erfordert die Summierung von Reihen mit unendlich vielen und unendlich kleinen Gliedern. Nach LA 90 ist das Trägheitsmoment einer kreisförmigen homogenen **Scheibe** in Bezug auf ihre geometrische Achse $\mathfrak{M} = \frac{Mr^2}{2} \cdots (6)$; $\mathfrak{M} = \frac{Mr^2}{12} \cdots (7)$ eines geraden schmalen homogenen **Stabes** in Bezug auf eine zu ihm senkrechte Symmetrieachse. — LA 89—107.

LA 90.

LA 89—107.

B. Experimentell lassen sich die vorstehenden Gröfsenbeziehungen bestätigen durch einen **Drehungs- und Trägheitsmomentenapparat** (Fig. 140): An zwei Scheiben stellen die verschiedenen Halbmesser $r = 5$ cm und $R = 10$ cm die Kraftarme a vor, an welchen als Kräfte k Gewichte von Massen angreifen, die an den um die Scheibenumfänge geschlungenen Fäden hängen. Mit den Scheiben sind geschlitzte Aluminiumstäbe zu starren Systemen verbunden, so dafs die Trägheitsmomente dieses „kleinen und grofsen Gestelles" nach Gleichung (6) und (7) berechnet werden können. An die Stäbe werden dann Massen m in verschiedenen Abständen r von der Drehungsachse angeschraubt, wo die r die Massenarme darstellen. Dabei wird auf die im vorigen § erörterte Art die jeweilige Winkelbeschleunigung β aus der linearen Beschleunigung b erschlossen, welche der sich abwickelnde Faden und die vor dem Mafsstabe der Fallmaschine sinkenden Gewichte annehmen (LA 92). —

Fig. 140.



LA 92.

Bisher waren Kräfte, Massen und Arme als konstant angenommen. Das physische Pendel bietet ein Beispiel veränderlichen Drehmomentes; ein Körper, der während der Rotation sich ausdehnt (z. B. durch Erwärmung), ein Beispiel veränderlichen Trägheitsmomentes. In diesen Fällen wird auch

die Winkelbeschleunigung einen veränderlichen Wert haben; für je ein
punkt gilt aber auch noch die allgemeinste Gleichung für die

$$\textbf{Winkelbeschleunigung: } \omega = \frac{\Sigma ka}{\Sigma mr^2} = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}} \quad . \; . \; .$$

Massenmomente desselben Körpers für verschi
Achsen. Rotiert ein langer schmaler Zylinder um seine geome
Achse, so ist sein Trägheitsmoment kleiner, als wenn er um (
dieser Achse normale durch seinen Schwerpunkt gehende
rotierte; denn schon ohne Rechnung ist ersichtlich, daſs jetz
Masse durchschnittlich weiter von der Rotationsachse absteht als
— Vergleichen wir hiermit den Versuch § 31 über die f
Achsen, so ergibt sich, daſs das Gleichgewicht der Fliehk
nur für die Rotation um solche Schwerpunktsachsen ein st
Anh. 88. ist, für die das Trägheitsmoment das gröſste ist. — Log. A

Bei einer Kugel (aber auch bei einem Würfel) ist jenes Gleichgewi
indifferentes, indem hier das Trägheitsmoment in Bezug auf alle du
Schwerpunkt gehenden Achsen gleich groſs ist. —

Bisher wurden die verschiedenen Rotationsachsen immer als durc
selben Punkt (namentlich durch den Schwerpunkt) gehend und gegene
geneigt vorausgesetzt. — Für eine parallele Verschiebung der Ac
der Satz: Ist für einen Körper von Mg Gesamtmasse in Bezug auf eine
punktsachse das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}s$ (cm² g), so ist es für eine im Abstan
LA 89. parallele Achse O $\mathfrak{M}o = \mathfrak{M}s + Md^2$ (LA 89).

§ 33. Das physische Pendel. Drehschwingungen

Geschichtliches: Schon Descartes, Mersenne u. a. hatten in den Bew
des „physischen Pendels" ein wichtiges Problem der Mechanik erkann
erst Huygens vermochte (1673) die all
rechnerische Lösung dieses Problems z
Er wendete bei dieser Veranlassung zun
mal diejenigen Prinzipien an, welche w
als Prinzip der lebendigen Kräf
Prinzip der Erhaltung des Schwerp
kennen. Auch der Begriff des Träg
moments wurde von Huygens bei ebe
Veranlassung zuerst (wenn auch nicht
diesem Namen, den erst Euler gab) einge
Hier werde der heute sehr leicht gew
rechnerischen Behandlung des Proble
rein experimentelle vorangeschickt.

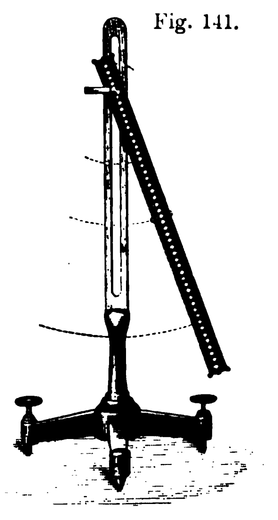


Fig. 141.

A) Experimentell. *Versuch*: \
dem Stabe (Fig. 141, vgl. Fig. 82) eine w
Achse in irgend einem Abstande d >
Schwerpunkte angebracht, so führt der St
dem Einflusse der Schwerkraft Schwin
aus. — Dabei läſst sich zu diesem körpe

chen) Pendel ein punktuelles (mathematisches) Pendel denken, das mit gleiche Schwingungsdauer hat und dessen Länge dann die **„reduzierte** des physischen Pendels heifst. — Ist speziell der Stab im obersten Punkte ngt, so ist vorauszusehen, dafs die reduzierte Pendellänge kleiner sein wird Stablänge: denn man kann sich den starren Stab als aus vielen punktuellen chen") Pendeln bestehend (also das physische Pendel als aus einfachen „zungesetzt") denken, als deren Längen alle zwischen Null und der Stablänge n sind. Nur diejenigen Punkte, deren Abstand von der Achse gleich ist der rten Länge, würden (gemäfs der Definition der reduzierten Länge) auch als elle Pendel ebenso schnell schwingen, wie der ganze Stab wirklich schwingt; da lie der Achse näheren Punkte suchen schneller, die entfernteren langsamer zu gen, so dafs alle kürzeren Pendel den längeren schnellere, die längeren den n langsamere Schwingungen aufzuzwingen suchen. (In der Berechnung dieses itigen „Zwanges" lag die einstige Schwierigkeit des Problems, zunächst vom hen Pendel, dann aber der meisten Bewegungen starrer Systeme überhaupt.) h ist keineswegs die reduzierte Länge eines physischen Pendels kleiner als die Stablänge (oder allgemeiner: als die gröfste Längenion eines pendelnden Körpers). Wird z. B. der genannte Stab nur 1 cm hwerpunkt aufgehängt, so hat er schon eine sehr grofse Schwingungsdauer, se sowie die dem endlichen Körper entsprechende reduzierte Länge würde lich grofs für die Aufhängung im Schwerpunkte. Ähnlich haben lken bei sehr kleinem Abstande des Schwerpunktes von der gsachse sehr grofse Schwingungsdauer. Desgleichen läfst sich an **Metronom** (Fig. 1, S. 6) durch Anbringung des Laufgewichtes 'eilstrich 60 ein physisches Sekundenpendel herstellen, das rzer ist als das 993 mm lange mathematische Sekundenpendel.

Fig. 142.

a

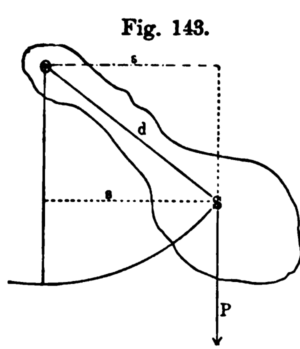
b

eversionspendel. *Versuch:* An dem Stabe (Fig. 142) sind einander zugekehrte Schneiden und überdies ein oder re Laufgewichte verschiebbar. Sind Schneiden und Ge- durch Ausprobieren so gestellt, dafs der Stab, zuerst ie eine Schneide a, dann um die andere Schneide b igend, gleiche Schwingungsdauer hat, so zeigt sich, dafs nähernd punktuelles Pendel von der Länge des Schneidenndes ebenfalls diese Schwingungsdauer hat. Es ist also **Schneidenabstand die reduzierte Länge des Reversionsls** (Bohnenberger 1811). — Da punktuelle Pendel ls wirklich herstellbar sind und also auch ihre Pendel- nicht mefsbar ist, so bildet das Reversionspendel das e rein experimentelle Mittel, um von der theoretischen ıung zwischen Pendellänge und Schwerebeschleuni- (§§ 2, 12, 17) wirklich Gebrauch zu machen (Kater 1818), lie Werte von g zu bestimmen. —

) Rechnerisch: Ein beliebig geformter Körper habe Masse von Mg, ein Gewicht von $P = Mg$ Dyn und in auf eine in d cm Abstand von seinem Schwerpunkt S angebrachte ntale Achse O das Massenmoment $\mathfrak{M}_O$ (cm² g). Wenn der

Körper nicht in stabilem Gleichgewichte hängt, sondern seine Schwerlinie s cm Abstand von O hat, so erteilt ihm die Schwere nach § 32, Gl. (6) die mit s veränderliche Winkelbeschleunigung

Fig. 143.



$$\omega = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}_O} = -\frac{Ps}{\mathfrak{M}_O}.$$

Um von der Winkelbeschleunigung wieder zu einer linearen Beschleunigung zurückzukommen, multiplizieren wir beiderseits mit d; dann ist für den Schwerpunkt

$$\omega d = w = -\frac{Pd}{\mathfrak{M}_O}\cdot s,$$

also [nach § 12, Gl. (9)] $\alpha^2 = \frac{Pd}{\mathfrak{M}_O}$ und die

Schwingungsdauer des physischen Pendels: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}_O}{Pd}}$ ... (1)

Hieraus durch Vergleichung mit dem T beim einfachen Pendel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ [§ 12, Gleichung (11)]: $\frac{l}{g} = \frac{\mathfrak{M}_O}{Pd} = \frac{\mathfrak{M}_O}{Mgd}$, also die

97—101. **reduzierte Pendellänge:** $l = \frac{\mathfrak{M}_O}{Md}$ ... (2)

Man beachte, dafs hier $\mathfrak{M}_O$ das Massenmoment speziell in Bezug auf die jeweilige Pendelachse (nicht etwa $\mathfrak{M}_S$ in Bezug auf die parallele Schwerpunktsachse, LA 89) ist. — Beweis für den Satz vom **Reversionspendel** (LA 102). — Begriff des **Schwingungsmittelpunktes** (LA 103).

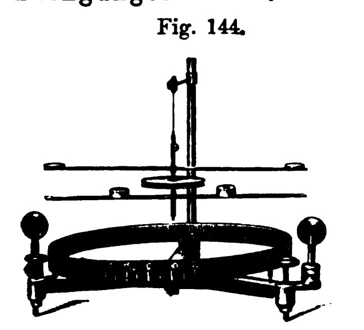
LA 89. 102, 103.

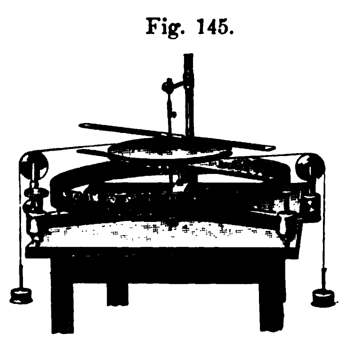
Physisches Pendel mit schiefer Achse. Um das Vorkommen von g im Nenner der Formel für die Schwingungsdauer des physischen und also mittelbar auch des mathematischen Pendels experimentell nachzuweisen, stellen wir das Laufgewicht eines Metronoms z. B. auf 60, so dass es ein Sekundenpendel darstellt, und neigen dann die Unterlage aus der Horizontalen um immer gröfsere Winkel ε; es wird dann die Schwingungsdauer immer gröfser und gröfser; sie ist 4 sec (statt 2 sec), wenn $\cos^2\varepsilon = \frac{1}{4}$ (LA 96). Wird die Unterstützung vertikal genommen, die Rotationsebene des Pendels also horizontal, so wird $T = \infty$, d. h. der rotierende Stab hat aufgehört ein Pendel zu sein und zu schwingen, sondern er würde nun, durch sonst nichts gehindert, seine jeweilige Winkelgeschwindigkeit konstant beibehalten (MACHS Neigungspendel). — Die Erscheinung gibt ein Beispiel für die „Zerlegung einer Rotation" in zwei (oder mehrere) als gleichzeitig erfolgend gedachte Rotationen (analog der Zerlegung der Verschiebung eines Punktes nach dem Verschiebungsparallelogramm, § 10). — Die bisher betrachteten Schwingungen physischer Pendel sind nur ein besonderer Fall von

LA 96.

Drehschwingungen. *Versuch:* Die Achse eines der bei den Versuchen über Trägheitsmomente benutzten Scheibengestelle wird lotrecht an einem Draht und dieser an einem höheren Punkte in einen Querarm eingeklemmt (Fig. 144). Infolge seiner Torsionselastizität (§ 51) weist der Draht der Scheibe eine bestimmte Gleichgewichtsstellung an;

a aus dieser die Scheibe dann um 1°, 2°, 3° . . . α° zu verdrehen, darf es bestimmter Kraftmomente (Fig. 145). Losgelassen vollführt e Scheibe in wagrechter Ebene **Drehschwingungen**, welche, weil er speziell die Torsionselastizität die Kraftmomente liefert, **Torsionsschwingungen** heifsen.


Fig. 144.


Fig. 145.

Auf solche Schwingungen gründen sich viele der genauesten, namentlich elektrischen und magnetischen Mefsapparate, auch CAVENDISHS Drehwage (§ 21, S. 86). e Schwingungsdauer wird um so gröfser, je gröfser das Trägheitsmoment und kleiner das Torsionsmoment des Drahtes (oder Fadens) ist. Messungen beider öfsen bei Drähten verschiedener Länge, Dicke und stofflicher Beschaffenheit, lastung des Gestelles durch verschiedene Massen in verschiedenen Abständen von r Drehungsachse. Über die Gl. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\theta}}$ $\left(\text{analog } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\varkappa}},\ \S\ 18\right)$ LA 104. LA 101.

Diese Drehschwingungen befolgen das Gesetz der **Sinusschwingungen** ır diesmal nicht für lineare Verschiebungen, sondern für Winkelausweichungen) **nau**, während das physische Pendel es nur in derselben **Annäherung** befolgt s das punktuelle (LA 25, 26). LA 25, 26.

§ 34. Erhaltung der Rotationsebene.

Vorversuch: Wirble ich während des Gehens einen Spazierstock mit rechtinkelig abbiegendem Griff rasch herum, so dafs der Griff in meiner Hand wagcht und die Rotationsebene des Stockes vertikal ist, so empfinde ich bei plötzcher Änderung meiner Gehrichtung, wobei sich die Rotationsebene des Stockes a ebenso viel ändern mufs, an dem Griffe einen Beharrungswiderstand des tockes gegen diese Veränderung der Lage der Rotationsebene.

FOUCAULT bemerkte, dafs ein elastischer Stahlstab, der nach der Längsichtung der Achse einer Drehbank eingespannt war und um diese Mittellage hwang, seine Schwingungsebene nicht änderte, auch wenn er in rasche Rotation ersetzt war. Dies brachte ihn auf den seither kurz sogenannten

Foucaultschen Pendelversuch (1851): Ein Pendel mit chwerem Pendelkörper und langem Drahte, der so aufgehängt ist, afs er sich um die Aufhängestelle nach allen Richtungen frei drehen ann, **behält nicht seine Schwingungsebene in Bezug auf die Meridianebene des Beobachtungsortes** von φ^0 geographischer Breite

bei, sondern weicht während einer Sternstunde um 15° . *si* Sinne WNOSW ab. Der Versuch bildet einen Beweis für die D der Erde um ihre Achse im Sinne WSONW binnen 24 Sterns

Zur Erklärung: Wäre das Pendel über einem Erdpole aufgehä hätte es z. B. in der Richtung des Nullmeridians zu schwingen begonnen, s sich unter dem Pendel die Erde binnen 24 Stunden einmal herumdreh Pendel aber hierbei seine Schwingungsrichtung im Fixsternraume nicht (Nachahmung dieses bisher nur gedachten Versuches — denn die Erdpole bis jetzt nicht erreicht — durch ein Pendel in einem um eine vertikal drehbaren Rahmen.) Es ändert sich also in Bezug auf die als ruhend g Erde die Schwingungsebene des Pendels binnen 24^h um 360°, binnen 15° (= 15° . *sin* 90°, wo 90° die geographische Breite des Nordpols ist). — Pendel über dem Äquator aufgehängt und schwingt es α) in der Richtu (in der Aquatorebene), β) in der Richtung NS (in der Meridianebene), sc Falle α) sofort ersichtlich, dafs die Rotation der Erde keine Veranlass Änderung der Schwingungsebene des Pendels bietet. Im Falle β) hat z Meridianebene binnen 3^h, 6^h, 9^h . . . eine um 45, 90, 135° . . . abweichen im Fixsternraume angenommen, d. h. eine zur ursprünglichen Meridi parallele Ebene bildet mit der neuen Meridianebene die angegebenen I winkel, und da das Pendel während seiner Schwingung infolge der Schwe immer seine lotrechte Mittellage und lotrechte Schwingungsebene beil mufs, so kann die Rotationsebene des Pendels hier ihre Lage im Fixste nicht mehr vollständig beibehalten; aber wenigstens sind die Bahnstück Kreisbogen nächst der Lotlage einander parallel geblieben, so dafs sie imm die Richtung des Meridians haben. Das Pendel über dem Äquator zeigt al im Falle β) noch keine Drehung seiner Schwingungsebene gegen deren ur liche Lage in Bezug auf die Erde. Die Fälle α) und β) [und ebenso γ) b Zwischenlagen zwischen SN und OW] entsprechen also, da für den Aquator und $sin\ \varphi = 0$, ebenfalls der obigen allgemeinen Formel. — Über die all Formel für das Schwingen in der geographischen Breite φ vgl. LA 108.

Die dem Foucaultschen Pendel verwandten Erscheinungen der wes lichen Abweichung von nord-südlichen Strömungen der Luft und des (der Geschosse u. dgl. m.) sollen im Zusammenhange mit den meteorol Erscheinungen näher besprochen werden; vgl. § 191 und LA 109.

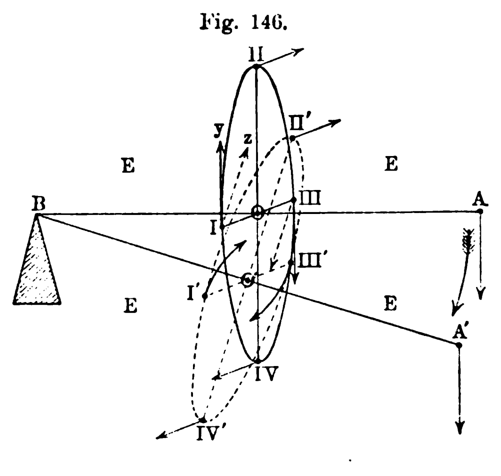
Damit alle diese Erscheinungen, wie Foucaults Pendel, als Beweis für die I der Erde gelten können, mufs das Gesetz der Erhaltung der Rotationseb Erhaltung der Wurfebene u. s. w. (§ 7), als schon feststehend angenommen der Tat ist es ja wieder nur eine Folge des allgemeinen Trägheitsgesetzes u durch sämtliche für dieses Gesetz sprechenden sonstigen Erfahrungen mit ver

Als Erscheinungen der Erhaltung der Rotationsebene erklären sich fe auffälligen Unterschiede im Verhalten eines rasch rotierenden und eines r **Kreisels,** von denen einige schon im § 31 beschrieben wurden. Ihre Erk

Erhaltung der Rotationsebene hinzu. — Fassen wir einen „Schmidt-
kreisel" (Fig. 128, S. 142), dessen Achse Fassungen hat, die an der Drehung
eilnehmen, an dem einen Ende, und suchen wir die Achse um dieses Ende
r Ebene E zu drehen, die auf der Rotationsebene R des Kreisels normal
so bleibt die Kreiselachse nicht wirklich in der Ebene E, sondern weicht
n der Hand empfangenen Anregung teilweise aus (der Kreisel sucht sich der
zu „entwinden"), indem die Achse eine Kegelfläche beschreibt, deren
l die haltenden Finger sind und welche die E nur zur Tangentialebene hat.
lers auffällig wird dieses Entwinden, wenn der Kreisel in eine undurch-
e Hohlkugel eingeschlossen ist: suchen wir dann diese Kugel nach ver-
nen Richtungen im Raume zu orientieren, so setzt sie den Bewegungen
Widerstand entgegen, ähnlich als ob sich ein lebendes Tier gegen die Lage-
ngen sträubte, die unsere Hand ihm erteilen will.) — Dieses mehrfach
rtete Verhalten eines rasch rotierenden Körpers läfst sich gleichwohl
führen auf das Verhalten eines Massenpunktes, der in geradliniger Bahn
ner Hand vorüberzufliegen im Begriffe war: sucht ihn nämlich meine Hand
gegen jene Bahn abzulenken, so wird er zwar diesem zentripetalen Zuge
aber nicht indem er sich geradeaus gegen die Hand bewegt, sondern indem
einem Parabel- (Kreis- oder ähnlichen Kurven-) Bogen aus der ursprüng-
Geraden gegen die Hand hin abweicht; der Zentripetalkraft der Hand stellt
n das Beharrungsbestreben entgegen, welches die Hand als Zentrifugalkraft
krummliniger Bewegung gezwungenen Massenpunktes empfindet. — Auf
lche Zentrifugalkräfte läfst sich aber auch die Erhaltung der
ionsebene — und auf das Einschlagen krummliniger Bahnen zwischen
reiligen Bewegungsrichtung und seitlich ablenkenden Kräften lassen sich alle
rmigen Bewegungen der Achse des rotierenden Kreisels zurückführen; so
endem einfachsten Falle:

Es sei in einem bestimmten Zeitpunkte die Kreiselachse z. B.
cht und bei B unterstützt (Fig. 146); eine bei A vertikal abwärts
nde Kraft suche diese
in vertikaler Ebene E
Zeichenebene) aus der
BA nach BA' zu
hen. Könnten die
npunkte des Kreisels
Richtungsänderung
hse plötzlich folgen,
rde ein Teilchen bei I,
es sich soeben noch
der Tangente Iy be-
hatte, die Richtung Iz
men. Da aber das
len längs Iy eine Ge-
indigkeit gehabt hat,
rd es sich in Wirklichkeit längs einer krummlinigen Bahn be-
, in Bezug auf welche Iy nur Tangente ist. Einen ebensolchen

Fig. 146.

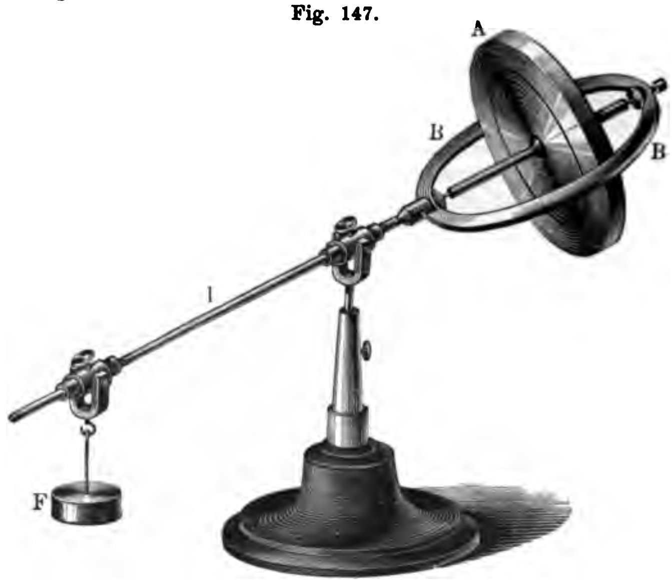


Weg wird ein Teilchen in *III* beschreiben; und daher kann aucl Punkt A der Achse nicht in der Ebene E bleiben, sondern versc sich längs eines Kegelmantels, der von jener Ebene E längs O tangiert wird.

Sollen die Kegelbewegungen der Kreiselachse eine endliche Geschwind haben, so darf auch die Geschwindigkeit D der Bewegung von A nach A' mehr unendlich klein sein, wie zu Anfang des Wirkens der in A angreifend schleunigenden Kraft (die bei dem ersten Vorversuche der Druck der Hand, Versuche nach Fig. 146 die Schwerkraft war). Die rechnerische Theorie lehrt die die Kegelbewegung unterhaltende Kraft, die den Kreisel normal zur jewe Ebene E verschiebt, proportional zu D ist; ferner, daſs der Punkt A auc noch so groſser Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels nie in rein wagrechter vorwärts geht, sondern daſs er eine kleine Cykloide mit aufwärts gericl Spitzen beschreibt. (In der Tat bemerkt man eine Art Hüpfen der Achse, v kleinen Sc gungen bei in der Scl hängenden K sehr schnell dämpft werd

Ist die des Kreisel Fig. 146 üt hinaus verlä und hier der K durch ein Geg wicht F (Fig in Bezug a äquilibriert nimmt er kei Bewegungen wohl aber im einen od deren Sinn nachdem da wicht F etw B hin, bezw. von B weg geschoben und so das Gleichgewicht gestört wir kleiner diese Störung ist, um so langsamer erfolgt dann die Kegelbewegun ganzen Systems um die Spitze B (*Versuche*; Bohnenbergers Maschinchen). - eine solche Kreiselbewegung erklärt sich nun auch die

Fig. 147.



Präzessionsbewegung der Erde binnen 26000 Jahren, welc § 180 beschrieben ist. Eine solche Bewegung würde nicht stattfi wenn die Erde eine reine Kugel wäre. Da über diese in Wirl keit gleichsam noch ein vom Äquator gegen die Pole hin immer di werdender Wulst (Fig. 148) gelagert ist, und da die Erdachse mi Ebene der Ekliptik einen Winkel bildet, so sucht die in der E der Ekliptik stehende Sonne infolge ihrer Massenanziehung auf Wulst diesen in die Ebene der Ekliptik zu drehen (die Erdachse nc

r Ebene der Ekliptik zu stellen), weil die Kräfte auf dem der Sonne zugewandten Teile des Wulstes ein wenig gröſser sind als die auf dem abgewandten.

Zu den so aus der Sonnenanziehung sich ergebenden 18″ des jährlichen Gesamtbetrages der Präzession kommen noch weitere 34″ infolge der verhältnis-

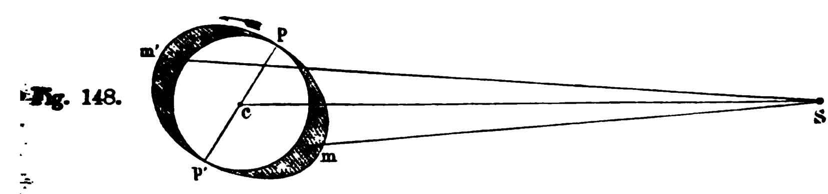


Fig. 148.

mäſsig gröſseren Differenzen der Anziehungen des Mondes auf die Teile des Äquatorwulstes. — Überdies lagern sich über jene Präzessionsbewegungen noch die ebenfalls vom Monde herrührenden **Nutationsbewegungen** der Erdachse.

---

35. Überleitung von der Geomechanik zur Hydro- und Aeromechanik. — Charakteristische Eigenschaften der vollkommenen Flüssigkeiten und Gase.

Die bisher (§§ 25 bis 34) durchgeführte mechanische Fiktion „starrer Systeme“ ist in verhältnismäſsig bester Annäherung auf Körper aus Eisen, Holz, . . ., d. i. aus **festen** Stoffen anwendbar. Blei, feuchter Ton, Butter (bei niedrigerer, bei höherer Temperatur), Marineleim, Sirup . . . bilden als weiche, dickflüssige . . . Stoffe allmähliche Übergänge zu den dünnflüssigen Stoffen, wie Wasser, Alkohol . . .: diese nennt man vorzugsweise **Flüssigkeiten.** Die flüssigen Stoffe (weniger merklich auch feste, wie Kampfer, Jod . . .) gehen unter bestimmten Bedingungen des Druckes und der Temperatur in Dämpfe oder Gase über. — Umgekehrt bilden sich in dunstreicher Luft Nebel und Wolken, welche aus Wassertröpfchen bestehen, diese wieder erstarren zu Schnee. — So hat man unter den unzähligen wirklich vorkommenden **„Aggregatformen“** die drei der **festen, tropfbar-flüssigen** und **gasförmigen** Stoffe als Hauptformen hervorgehoben. (Vgl. die Worte von Andrews, § 77, S. 279.)

Im Gegensatze zur annähernden Starrheit **fester** Körper, d. h. zur gegenseitigen Unverschiebbarkeit der Teilchen z. B. einer Hebelstange aus Holz, Eisen, . . . fällt uns als eine den tropfbaren und gasförmigen Körpern gemeinsame Eigenschaft auf, daſs ihre Teilchen gegeneinander schon durch sehr geringe Kräfte verschiebbar sind (niemand fällt es ein, sich einen Hebel aus Wasser oder Luft formen zu wollen). — Eine erste Folge dieses Verhaltens ist, daſs die Flüssigkeiten und Gase keine selbständige Gestalt haben, sondern die Gestalt des sie teilweise oder ganz umschlieſsenden Gefäſses annehmen. An den **Flüssigkeiten** ist es meistens schon die Schwerkraft, welche die Teilchen so lange gegeneinander verschiebt und in die unteren Teile des Gefäſses zieht, bis sich oben eine wagrechte Begrenzung gebildet hat. (An einer zähen Flüssigkeit, wie Honig, vollzieht sich diese Umlagerung so langsam, daſs die gegenseitigen Bewegungen der Teilchen leicht mit dem Blicke zu verfolgen sind. Bei Marineleim zeigt sich, wenn auf eine wagrechte ebene Fläche dieses Stoffes

ein weiterer Brocken gelegt wird, noch nach Tagen eine merkliche E
insofern kann dieser Stoff als an der Grenze der festen und flüssigen
betrachtet werden.) — Bei den **Gasen** ist es ebenfalls zum Teil die Sch
in viel höherem Maſse aber ihre eigene „Spannkraft“, vermöge de
so lange gegenseitige Verschiebungen vollziehen, bis das ganze Gefäſs, welc
deshalb allseitig geschlossen sein muſs, gleichmäſsig (erst in seh
Gefäſsen, Röhren ... unten merklich dichter als oben) mit dem Gase e
Im Hinblick auf diesen Gegensatz zwischen der annähernden Starrheit feste
und der ebenso den flüssigen wie den gasförmigen Körpern gänzlich ma
Starrheit faſst man auch die beiden letzteren Aggregatzustände unter den
samen Namen der Flüssigkeiten im weiteren Sinne zusammen.

Dagegen unterscheiden sich Flüssigkeiten und Gase durch di
hängigkeit, bezw. Abhängigkeit des Volumens einer gegebenen
z. B. Wasser oder Luft, von dem allseitig auf sie ausgeübten Druck
Wir können nicht in einer mit Wasser gefüllten Flasche durch Zusamme
des Wassers für weiteres Raum schaffen; wohl aber läſst sich die Luft i
matischen Feuerzeuge“ anfangs leicht zusammendrücken; je kleiner das V
derselben Gasmenge schon geworden ist, um so gröſserer Kräfte l
aber auch zu noch weiterer Volumsverkleinerung. —

Der wissenschaftlichen Fiktion starrer Systeme entsprechen folgend
Anh. 36. weiteren Fiktionen (log. Anhang Nr. 36):

Eine **vollkommene Flüssigkeit** ist eine solche, dere
gegenseitig vollkommen leicht verschiebbar sind, u
welcher eine bestimmte Menge (Masse) ein äuſseren und
Kräften gegenüber unveränderliches Volumen hat.

Ein **vollkommenes Gas** ist ein solches, dessen Teile
seitig vollkommen leicht verschiebbar sind, und von w
für eine bestimmte Menge (Masse) das Volumen verkehr
portional ist dem Drucke, der von auſsen auf das Gas wirk
dem als „Spannkraft“ des Gases entgegenwirkenden gleichen
druck (Boyle-Mariottes Gesetz, vgl. § 45).

Der Begriff „Masse“ ist auf Flüssigkeiten und Gase ebenso anwen
auf feste Körper. Z. B. Ein Wasserwagen setzt (ebenso gut wie z. B. ein
wagen) einer beschleunigenden Kraft um so gröſseren Beharrungsw
entgegen, je mehr Wasser er enthält. Bei Windmühlen äuſsert sich de
rungswiderstand der bewegten Luft ebenso als „Stoſskraft“ wie der des l
Wassers bei einem Wasserrade oder wie der einer festen Kegelkugel u. d

Die den Flüssigkeiten und Gasen (also den „Flüssigkeiten“ im w
Sinne) gegenüber den festen Körpern charakteristische Eigenschaft der „
verschiebbarkeit“ darf also nicht dahin miſsverstanden werden, als
die Verschiebung je eines Teiles der Flüssigkeit von m g Masse mit b
Beschleunigung nicht ebenso eine Kraft von $k = mb$ Dyn wie bei einem
punkt oder einem festen Körper. Nur zur gegenseitigen Verschiebun
Teile, sei es längs ihrer Berührungsfläche, sei es normal zu dieser F
Sinne des Auseinanderrückens der Teile, bedarf es nicht noch einer weiter

Auch Gewicht besitzen die Flüssigkeiten und Gase, wie uns für er
alltäglichen Erfahrungen geläufig ist (Verkauf von Flüssigkeiten

gt (GALILEI vertrieb durch Erwärmen einen Teil der Luft aus einer Flasche d wog diese vor und nach dem Erwärmen).

In den dem II. Abschnitte, der Mechanik starrer Systeme (Geomechanik), ordinierten Abschnitten III (Hydro-) und IV (Aeromechanik) werden die mechaschen Erscheinungen an Flüssigkeiten und Gasen nur mit demjenigen Maſse von näherung beschrieben und erklärt, welches die in den Definitionen vollmmener Flüssigkeiten und vollkommener Gase liegenden Fiktionen gestatten. e weiter gehenden Annäherungen an die wirklichen Körper bleiben dem Abschnitte (Mechanik der sogen. Molekularwirkungen) vorbehalten.

III. Hydromechanik.

§ 36. Die Prinzipien der Hydromechanik.

Geschichtliches. ARCHIMEDES hat (wie die Geostatik durch seine Theorie des els und die Sätze über die Schwerpunkte) die Hydrostatik wissenschaftlich ründet. Noch heute nennt man das die Tragfähigkeit der Flüssigkeiten reffende Gesetz das „Archimedische Prinzip“ (§ 40), welches aber nicht im tlichen Sinne ein „Prinzip“, sondern nur eine besondere Anwendung der auch ARCHIMEDES schon viel allgemeiner untersuchten Gleichgewichtsbedingungen Flüssigkeiten darstellt. — STEVIN (1548 bis 1620) fand auf eigenen Wegen die nen Gesetze der Hydrostatik und deren Ableitungen wieder. PASCAL (1623 1662) brachte die Entdeckungen von ARCHIMEDES und STEVIN in systematischktiven Zusammenhang. —

ARCHIMEDES' Gesetz über die Tragfähigkeit der Flüssigkeiten stellt s der auffallendsten Beispiele für die Verschiedenheiten zwischen dem mechachen Verhalten flüssiger und fester Körper dar. Ein festes Holzgerüst vermag ten bis zu einer gewissen Zahl von Tonnen zu tragen, ganz oder beinahe hängig von deren Gestalt und Dichte; Wasser trägt zwar das gröſste Panzerf, aber nicht das kleinste massive Eisenstückchen. Die Tragfähigkeit der sigkeiten hängt somit nicht vom absoluten, sondern vom mittleren ifischen Gewichte des zu tragenden Körpers ab. — Wir werden aber eine e Gesetzmäſsigkeit nicht als ein letztes Gesetz hinnehmen wollen, sondern en eine Erklärung hierfür in einfacheren und allgemeineren Gesetzen, deren ste dann die Prinzipien der Hydromechanik darstellen (vgl. § 15 und). — Ein zweites Beispiel für Eigentümlichkeiten im Verhalten der Flüssign bieten die (nur ihrer Gewöhnlichkeit wegen nicht als paradox auffallenden) Erscheinungen an kommunizierenden Gefäſsen: So alltäglich die Errung ist, daſs in Gefäſsen („Schenkeln“), deren untere Teile miteinander in bindung stehen („kommunizieren“, ähnlich wie in Fig. 150), nur dann Gleichwicht herrscht, wenn die gleiche Flüssigkeit in beiden Schenkeln eich hoch steht, und daſs hierfür die Weite und sonstige Gestalt der henkel ohne Einfluſs ist, so könnte dies doch überraschen, wenn wir denken, daſs das absolute Gewicht der Flüssigkeit in einem sehr weiten

Schenkel viel gröfser ist als im engen. Wäre z. B. statt des wagrechten dungsrohres ein gleicharmiger Hebel angebracht, so stände dieser unter un Belastungen nicht im Gleichgewichte. **Warum** drückt denn aber die Flüssigkeitsmenge des weiten Gefäfses nicht stärker gegen das engere hin? dafs dies nicht geschieht, erkennen wir wenigstens so viel (vorbehaltlich Fragen nach dem „Warum?"), dafs jedes vertikal, schief oder hori gedachte Flächenstückchen (Fig. 149) von beiden Seiten her gl Druck erfährt. — Zunächst als eine Verallgemeinerung dieser und äl einfacher Überlegungen haben wir aufzufassen

STEVINS Satz: **Ein auf eine tropfbare Flüssigkeit ausg Druck pflanzt sich nach allen Richtungen,** u. zw. auf gleiche F mit gleicher, **auf n-fache Flächen mit n-facher Stärke**

Die Kraft, welche speziell in dem Beispiele der kommunizie Gefäfse auf die Flüssigkeit wirkt, ist deren eigenes Gewicht. — auch für einen von aufsen her a Flüssigkeit ausgeübten Druck gilt S Satz, wie sich am auffallendsten **hydraulischen Presse** (nach dem S Fig. 150, ähnlich Recknagels Ap zeigt. Sind hier die Querschnitt Prefs- und des Druckkolbens B und so herrscht an der Presse Gleichge wenn für die drückende Kraft den Widerstand der zu pressenden gilt: $P: Q = b: B$. — Daher ist leicht zu zeigen, dafs für diese jede andere) hydraulische Maschi Gesetz der Erhaltung der A ebenso gilt wie für die geomecha Maschinen.

Fig. 149.

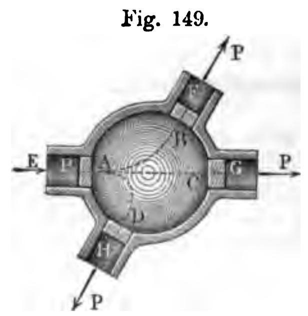


Fig. 150.



Ist nun STEVINS Satz ein „Prinzip", d. h. ein letztes, nicht weiter führbares Gesetz? — Man kann es, wenn man das Gesetz der Erhalt Arbeit schon als allgemein, also auch für Flüssigkeiten, gültig annimmt, als besonderen Fall auffassen. — Man kann aber STEVINS Satz auch noch verständlich machen aus den beiden charakteristischen Eigensch welche wir der Fiktion einer vollkommenen Flüssigkeit zu Grunde gelegt (§ 35). Denken wir uns nämlich die Konstanz des Volumens und die I verschiebbarkeit einer solchen Flüssigkeit z. B. nachgeahmt durch eine vollkommen harter und glatter Kugeln, die ein Gefäfs von starren glatten erfüllen, so wird jeder auf die Kugeln ausgeübte Druck (sei es von aufsen, infolge ihres eigenen Gewichtes) sich nach allen Richtungen fortpflanzen, wenn z. B. die Kugeln von oben gedrückt werden, sie auch nach der S sogar selbst wieder nach oben zu entschlüpfen versuchen (— infolge Kräftezerlegung?). — Doch ist gegenüber diesem Gleichnis festzuhalten diejenigen inneren Kräfte in einer wirklichen Flüssigkeit, welche deren V

STEVINS Satz bedingen, höchst wahrscheinlich von ganz anderer Natur
ind, als sie jenen fingierten harten Kugeln zukommen. Für jetzt wird
r in der Tat STEVINS Satz — gleichviel, ob und wie er selbst noch weiter
h zu machen ist — als ein Satz bewähren, aus dem sich die Erscheinungen
sigkeiten, sobald sie als vollkommene fingiert werden, mit mathematischer
ableiten lassen; weil ihn PASCAL an die Spitze seiner deduktiven Dar-
gestellt hat, wird der Satz häufig als „Pascals Prinzip" bezeichnet. —

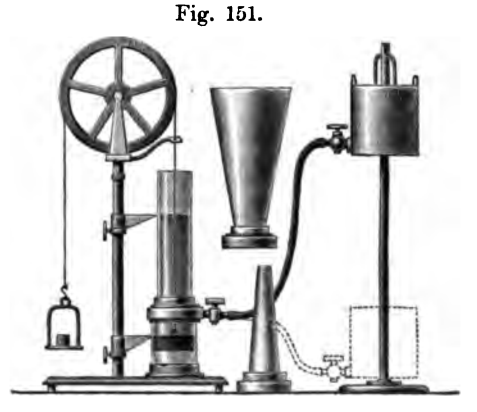
'rinzipien der Hydromechanik", aus denen sich alle mecha-
n Erscheinungen an vollkommenen Flüssigkeiten ableiten lassen,
1. Galilei-Newtons allgemeine Prinzipien der Mechanik des
s (§ 15); 2. Stevin-Pascals Satz über die Fortpflanzung des
s in Flüssigkeiten; 3. die dem Begriffe „vollkommener Flüssig-
' zu Grunde gelegte Eigenschaft der Unzusammendrückbarkeit
ıängigkeit des Volumens vom Drucke, $v =$ Konst).

werden in diesem Abschnitte hauptsächlich Erscheinungen untersucht, bei
die auf die Flüssigkeit wirkende Kraft ihre eigene Schwere ist, die
r namentlich als **Druck nach abwärts, seitwärts, aufwärts,** sowie in den
henden **Strömungen** äufsert. Über die Erscheinungen, welche nach dem
hen Satze sich überdies durch die Wirkung der Molekularkräfte
rität, Endosmose u. dgl.) ergeben, vgl. Abschnitt V, § 55).

§ 37. Druck nach abwärts. Bodendruck.

; ein lotrechtes zylindrisches Gefäfs von b cm² wagrechter Bodenfläche bis
e h cm mit einer Flüssigkeit vom spez. Gew. s gefüllt, so beträgt das
te Gewicht der Flüssigkeitssäule $p = bhs$ g (Kraftgramm). — Man wird
ıächst nichts anderes erwarten,
auch die Kraft p', mit welcher
ıssigkeit den Boden des Ge-
und mit der das gefüllte Ge-
ı Vergleich zum leeren auch
ıterlage (Tischplatte, Wag-
. .) drückt, jenem absoluten
t p einfach gleich sei; und
sprechend werden wir bei einem
en sich erweiternden Gefäfs bei
n b und h einen gröfseren,
ıem sich verengenden einen
ren **Druck** als p erwarten.
iese **Erwartung** wird in den
letzten Fällen nicht erfüllt,
er Boden in Bezug auf die

Fig. 151.



altenen Seitenwände beweglich ist (als Kolben nach Fig. 151 — oder auch
ppenverschlufs an dem einen Arme einer Schnellwage). Für einen solchen
ichen „Boden" ergeben nämlich zunächst *Versuche* das Gesetz:

ler **Bodendruck,** den eine Flüssigkeit auf eine wagrechte
ausübt, ist gleich dem absoluten Gewichte einer allseits lot-

recht begrenzten Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die gedrüc Fläche und deren Höhe (Druckhöhe) der Abstand dieser Fläche v Flüssigkeitsspiegel ist. — Es hängt also der Bodendruck $p = b$ LA 116. (LA 116) nur von der gedrückten Fläche b, der Druckhöhe h und d spezifischen Gewichte der Flüssigkeit s, nicht aber von der Gest der Seitenwände des die Flüssigkeit umgebenden Gefäßes ab.

Die letztere Unabhängigkeit ist so überraschend, daſs man sie als „hyd statisches Paradoxon“ bezeichnet hat. — Dabei scheint zunächst noch der I eines sich nach oben erweiternden Gefäſses leicht so zu erklären, daſs Druck deshalb nicht gröſser sei, als es der vertikal über dem Boden stehen zylindrischen Säule entspricht, weil der Druck der auſserhalb dieses Zylind liegenden Flüssigkeit durch die schiefen Gefäſswände gleichsam aufgefangen we Diese Erklärung läſst uns aber im Stich (und sie kann daher überhaupt k ganz zureichende sein) bei dem nach oben sich verengenden Gefäſs oder einem Gefäſs von der Form in Fig. 152, in welchem über einer beliebig gro Grundfläche $AB = b$ cm² eine beliebig dünne Schicht von diesem groſsen darüber in einer Röhre eine hohe Säule mit beliebig kleinem Querschnitt β steht. Auch diese am meisten paradoxen (und mit ihm auch die beiden ande Fälle erklären sich aber als Folge des Stevinschen Prinzips: Lastet nämlich a dem Flächenstück $MN = \beta$ cm² (Fig. 152) der Druck $p = \beta h s g$ und bet die Bodenfläche $AB = b = n \cdot \beta$ cm², so erfährt sie einen Druck $P = n \cdot \beta h s = n \beta \cdot h s = b h s g$, der also ebenso groſs ist, wie wenn sich über der Flüssigkeitszylinder $ABCD$ befände. — Doch gibt auch diese arithmetis Begründung noch keinen vollen Einblick in die physikalischen Ursachen, wa der Druck p auf die n-fache Fläche sich ver-n-facht. Wir gewinnen diesen I blick aus folgenden weiteren

Versuchen: Statt wie in Fig. 151 den Kolben beweglich und die Gef wände fix zu wählen, ist in den Apparaten Fig. 153 bis 155 der Kolben fix

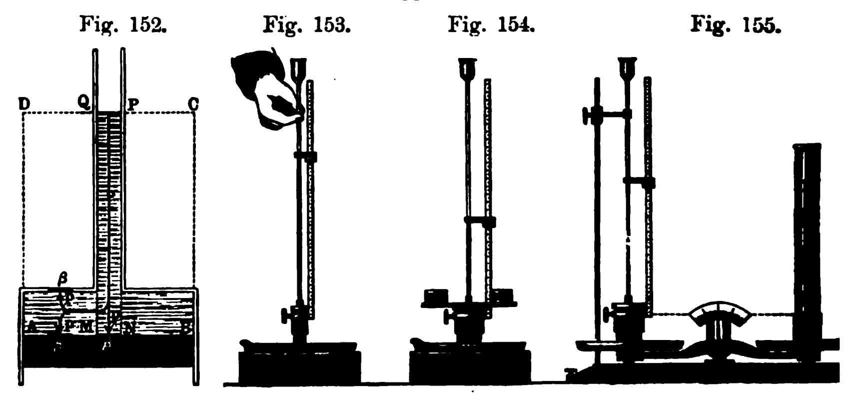


Fig. 152. Fig. 153. Fig. 154. Fig. 155.

lange er auf der Tischplatte steht), und über ihn läſst sich quecksilberdicht weitere Rohr vom Querschnitte b cm² mit der engen Fortsetzung nach oben β cm² Querschnitt schieben. Wird hier von oben Quecksilber eingegossen, so h es diese beweglichen Teile; und erst wenn diese mit der Hand her gedrückt werden, steigt das Quecksilber in der engen Röhre empor: hiermit w es aber auch begreiflich, daſs von dem nach abwärts gerichteten Drucke

und sich etwas auf den festen Kolben fortpflanzt. Wird der Kolben statt auf die Tischplatte auf eine Wagschale gestellt (Fig. 155), so ergibt sich dieser Druck (abgesehen von der Reibung der weiten Glasröhre an dem Kolben) als gleich dem einer vollen Quecksilbersäule von der Basis b und der Druckhöhe h. — Statt den Druck nach abwärts durch die Hand auszuüben, kann er durch Gewichte (Fig. 154), die auf den breiten Teil der Röhre gelegt werden, oder aber durch einen auf der Tischplatte stehenden Träger (Fig. 155, der aber dann selbst nicht zu leicht sein darf) ausgeübt werden. In diesem letzteren Falle sind dann mit dem Träger auch wieder die Röhrenwände fix und der auf der Wagschale stehende Kolben wieder beweglich — wie beim Kolben in Fig. 151.

Daſs endlich für zylindrische Gefäſse (oder für die Säule $MNPQ$) der Bodendruck wirklich einfach gleich dem absoluten Gewichte bhs ist, läſst sich aber nicht selbst erst wieder aus dem Stevinschen Prinzipe ableiten; sondern diese Gleichheit von Bodendruck und Gesamtgewicht muſs vielmehr ebenso als eine Erfahrungstatsache hingenommen werden, wie die, daſs eine Säule von festen Körpern (z. B. Damenbrettsteinen) auf die Unterlage mit dem Gesamtgewicht drückt, welches gleich ist der Summe der Gewichte aller einzelnen Körper.

Der bisher betrachtete Bodendruck ist nur ein besonderer Fall des auch durch das Innere einer Flüssigkeit sich fortpflanzenden Schweredruckes nach abwärts. Unter der Annahme von parallelen und mit der Höhenlage konstanten Schwerkräften (d. i. eines „Galileischen Kraftfeldes“, § 20, was also nicht zu groſse wagrechte und lotrechte Ausdehnungen voraussetzt) erfährt in h cm unter der wagrechten Oberfläche einer Flüssigkeit vom spez. Gew. s (g per cm³) jede wagrechte Fläche von b cm² einen vertikalen Druck $p = bhs$ g.

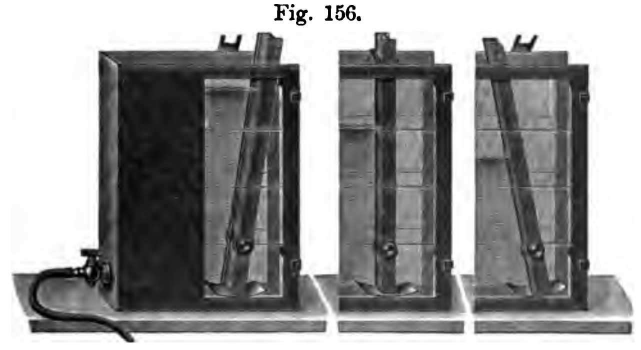
Von dem auf der Flüssigkeit in der Regel lastenden Luftdruck ist hier noch abgesehen (— warum stört er nicht z. B. obige Versuche?).

§ 38. Druck nach seitwärts und aufwärts.

Der infolge der Schwere zunächst nach abwärts gerichtete Druck pflanzt sich nach STEVINS Satz auch seitwärts und aufwärts so fort, daſs ein in der Tiefe h unter dem Flüssigkeitsspiegel liegendes Flächenstückchen β wieder den Druck βhs erfährt.

Speziell beim Druck nach seitwärts können wir nur dann sagen, daſs das Flächenstückchen β in einer bestimmten „Druckhöhe“ oder „Tiefe“ liege, wenn β selbst nach der Höhe unendlich schmal ist. Denn der Druck auf den unteren

Fig. 156.



Rand ist wegen der **stetigen** Zunahme des seitlichen **Druckes** immer scho größer als der auf den oberen Rand. — **Daher liegt auch der Angriffspu** Resultierenden aller Seitendrücke auf eine vertikale **rechteckige** Gefä nicht in deren Hälfte, sondern im **ersten Drittel der Höhe** *h* von (*Versuch:* Ist die Seitenwand um eine wagrechte Achse drehbar, so wird di dem oberen, bezw. unteren Teile nach auswärts gedrückt, je nachdem Wa zu mehr oder weniger als dem Dreifachen des Abstandes der Achse vom des Gefäßes eingefüllt ist, Fig. 156 a. v. S.) **Erklärung nach Analogie der S** punktsbestimmung des dreikantigen Prismas. LA 110.

LA 110.

Der Druck nach **aufwärts** zeigt sich am **auffälligsten** bei Grave *Versuch* (Fig. 157), bei dem eine beiderseits offene Röhre unten durch eine Platte (aus Glas, Glimmer oder aus Holz vom spez. Gew. schlossen ist. Der Druck rührt her von der die Röhre umg den Flüssigkeit, ist aber seiner Größe nach unabhängig vo Menge, d. h. von der Weite und den Seitenwänden des ä Gefäßes. Daß der hier auf eine Fläche *b* **von unten oben wirkende Druck gleich ist dem Bodendruc** läßt sich durch den Versuch zeigen, indem die Platte sobald die Röhre bis zum äußeren Niveau mit Flüssigke gleichem spezifischen Gewichte gefüllt ist. Wir erwarten die gar nicht anders, falls wir an dem Versuch die unwesentlic änderung anbringen, daß wir beim Eintauchen die Röhre die Platte nicht ganz verschließen, wobei sich die Flüssigkei so hoch stellt wie außen, und erst jetzt durch seitliche Verschiebung die ganz verschließen. — Ist aber hier erkannt, daß die Platte durch den des Wassers in der Röhre nicht herabgedrückt werden kann, weil es die F keit **außerhalb** der Röhre ist, die durch ihren nach abwärts, seitwärts u wärts sich fortpflanzenden Druck jenem Bodendruck das Gleichgewicht h wird es auch verständlich, daß dieses Gleichgewicht dann noch weiter t wenn wir die innere Flüssigkeit beseitigen und anstatt ihrer einen be **anderen flüssigen oder festen Körper** von gleichem **absoluten** G die Platte drücken lassen: worin schon der Grundgedanke der Erkläru Archimedischen Gesetzes liegt, § 40.

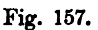




Fig. 157.

§ 39. Innendruck. Gestalt der Flüssigkeitsoberfläc Kommunizierende Gefäße.

Versuch. An ein beiderseits offenes Glasrohr ist eine mit gefärbtem W mit Quecksilber . . . gefüllte Blase gebunden. Je tiefer sie in Wasser tauc so höher steigt die Flüssigkeit der Blase im Rohre empor. Ebenso erfähr Teil der Flüssigkeit selbst einen **Innendruck** von allen Seiten her, dessen gleich ist derjenigen des in der jeweiligen Tiefe herrschenden Boden-, Seitendruckes. Da eine lotrechte Wassersäule von 1 cm^2 Querschnitt un Höhe ein Gewicht von 1 fg hat, so herrscht in 10, 20, . . . 2000 m Tiefe dem Meeresspiegel von seiten des Wassers ein Innendruck von 1, 2, . . . per 1 cm^2, d. i. nahe von 1, 2, . . . 200 at (§ 44), zu dem dann noch je 1 at druck kommt.

Unter Rücksicht auf alle Druckkräfte, die eine Flüssigkeitsmenge zu von seiten der Schwerkraft abwärts, seitwärts, aufwärts, dann auch von

derer Kräfte, z. B. der Fliehkraft, Kapillarität . . . erfährt, gilt schliefslich gende

Allgemeine hydrostatische Bedingung für die Gestalt ier Flüssigkeitsoberflächen: Die Teilchen an der Oberfläche er Flüssigkeitsmenge sind nur dann im Gleichgewichte, wenn **Resultierende aller auf sie wirkenden Kräfte auf jedem Oberchenelement normal steht.** — Speziell für die lotrechte (vertile) Schwerkraft mufs also die Flüssigkeitsoberfläche überall wagcht (horizontal) sein; für die als homogene ruhende Kugel gedachte de ist sie eine Kugelfläche. — Bleilot, Wasserwage (§ 20).

Über die Gestaltsveränderungen unter Einflufs von Zentrifugalkräften vergl. 42. — Über den ursprünglich nur auf Flüssigkeitsoberflächen angewendeten, LA 42. er aber sehr allgemein gebrauchten Ausdruck **Niveauchen** vergl. § 24. In einer sowohl an der Oberfläche wie Innern im Gleichgewichte stehenden Flüssigkeit bilden n die Richtungen der jeweiligen Resultierenden aller äfte die Kraftlinien zu diesen Niveauflächen. — Ist diese eichgewichtsbedingung nicht erfüllt, so treten an r Oberfläche und im Innern der Flüssigkeit Bewegungen ; über einige der einfachsten „hydrodynamischen" griffe und Gesetze vergl. § 42. Bei einer jener Bedingung ht entsprechenden Anordnung der Flüssigkeit wie in g. 158 tritt aber der Übergang nur zum kleineren Teil h dem Vorbilde des Gleitens über schiefe Ebenen , dagegen in der Hauptsache durch Ausgleich der Druckhöhen e in kommunizierenden Gefäfsen. Die entsprechenden Gleichwichtsbedingungen für diese lauten:

Fig. 158.

I. Befindet sich in beiden Schenkeln eines Kommuikationsgefäfses die gleiche Flüssigkeit, so ist diese nur ann im Gleichgewichte, wenn sie **in beiden Schenkeln gleich hoch** steht, d. h. wenn die beiden Flüssigkeitsoberächen in derselben wagrechten Ebene liegen.

II. Befinden sich in beiden Schenkeln eines Kommuikationsgefäfses verschiedene (sich nicht mischende) Flüssigkeiten, so sind diese nur dann im Gleichgewichte, wenn **die von der wagrechten Trennungsfläche beider Flüssigkeiten an gemessenen Höhen der Flüssigkeitsäulen sich umgekehrt verhalten wie deren spezifische Gewichte** (Fig. 159).



Fig. 159.

Hier ist das Gesetz I nur ein spezieller Fall von II; letzterer ist besonders wichtig für die Erklärung des Toricellischen Versuches, § 44. Warum mufs auch hier die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten (bei *B*) immer wagrecht sein? (LA 111.) LA 111.

§ 40. Archimedisches Gesetz. Schwimmen.

Geschichtliches. Über den Anlaſs, bei welchem ARCHIMEDES das n benannte Gesetz entdeckte und eine darauf sich gründende Methode zur mung von spezifischen Gewichten erfand, berichtet VITRUV: König Hiero einer vorgewogenen Menge Gold eine Krone anfertigen lassen, und da mutete, daſs minderwertiges Metall mit verwendet worden sei, den Ar um ein Mittel zum Nachweis der Unechtheit angegangen. „Dieser, dam beschäftigt, bemerkte beim Baden, daſs das Wasser in gleichem Maſse Wanne austrete, in welchem er seinen Körper mehr und mehr in dieselb lieſs. Sobald er nun auf den Grund [vergl. über das Unzureichende d richtes den folg. §] dieser Erscheinung gekommen war, verweilte er nich sondern sprang von Freude getrieben aus der Wanne", sein berühmt ge εὕρηκα (heureka, ich habe es gefunden) ausrufend. — Wir sprechen h Gesetz allgemein so aus:

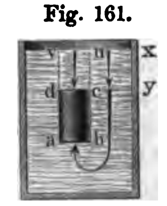
Ein in eine Flüssigkeit getauchter Körper erfährt (sc einen Gewichtsverlust, in Wirklichkeit) **einen Auftrie an Gröſse gleich, an Richtung entgegengesetzt ist dem Ge der verdrängten Flüssigkeitsmenge.** Dabei macht es keinen schied, ob der Körper, falls er einmal ganz in die Flüssigk getaucht ist, unmittelbar an oder beliebig tief unter der fläche liegt.

Zur Erklärung: Ist der „eingetauchte Körper" *abcd* 1. ein bis an d fläche reichender Teil der Flüssigkeit selbst (Fig. 160), so wir Gewichte nach § 38 das Gleichgewicht durch den Druck nach aufwärts, wel Grundfläche *ab* dadurch erfährt, daſs sich der rings um *abcd* liegenden Flüssig folge ihres Gewichtes nach abwär geübte Druck nach allen Seiten fortpfl erklärt sich also zunächst die allbekannte daſs **jede Flüssigkeit** trotz der Leichtvers keit ihrer Teilchen **gerade so viel Tragk um jeden beliebigen Teil ihrer selbst zu tragen.** — Da es nun aber Raum *abcd* umgebende Teil der Flüssigkeit ist, der als Träger wirkt, so für den Fall 1 gegebene Erklärung auch, wenn der Raum *abcd* 2. dur anderen Stoff als durch die Flüssigkeit selbst erfüllt ist, und zwar dur von ebenso groſsem oder durch einen von gröſserem oder kle spezifischen Gewichte. — 3. Denken wir uns auf den Körper *abcd* Flüssigkeit in Fig. 160 noch eine Flüssigkeitsschicht von beliebiger Höhe (Fig. 161) gegossen, so erfährt jetzt der nicht mehr an der Oberfläch liche Körper *abcd* einen um den Bodendruck von *cdvu* gröſseren Dru abwärts, aber auch der auf *ab* wirkende Druck nach aufwärts wir der Vermehrung des Gewichtes der umgebenden Teile (z. B. durch *cu* ebenso viel gröſser. — 4. Hat der eingetauchte Körper irgend eine als die bisher angenommene cylindrische Gestalt, so kann man ihn i unendlich schmale vertikale Prismen zerfällt denken, für deren jedes di gungen 1 bis 3 gelten.

Fig. 160.



Fig. 161.

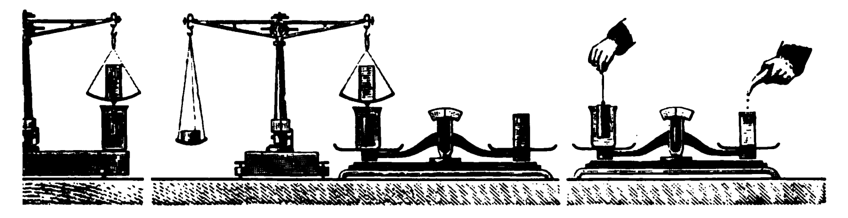


Gesetz wurde auf ähnlichem deduktiven Wege von ARCHIMEDES ge-
und von STEVIN wieder entdeckt; nachmals ersann man auch direkte
ngen durch Versuche. Diesem theoretischen
(sowie dem praktischen der Bestimmung spezifischer
, § 41) dient die **hydrostatische Wage**, d. i. eine
nige Wage, deren eine Schale an kürzeren Schnüren
u ihr gehört ein massiver Zylinder p, der genau den
n eines Zylinders c ausfüllt. — *Versuch* 1: Wird c
eine Wagschale gestellt (Fig. 162, oder unter sie
, p unter dieselbe Schale gehängt (an einem dünnen
die Wage äquilibriert und unter p ein Gefäfs mit
emporgehoben, so hebt sich p, als wenn es einen
htsverlust" erlitten hätte, richtiger: als wenn das
eine gewisse Tragfähigkeit aufwiese, die aber von
r Körper sowohl ihrer jeweiligen Gröfse wie ihrem
g nach verschieden ist. Wird das Gefäfs so hoch
, dafs, wenn man zunächst durch einen Druck der
e Wage wieder ins Gleichgewicht setzt, p ganz in
ser taucht (gleichviel ob nur bis unter die Oberfläche
fer), so läfst sich dieser Druck der Richtung und
uch dadurch herstellen, dafs das Gefäfs c mit Wasser
ll gefüllt ist (Fig. 163). — *Gegenversuch* 2: Da zu
ist, dafs das Wasser im Glas beim Einsinken des
eeinbaren Gewichtsverlust erleidenden Zylinders eine ebenso grofse schein-
wichtszunahme erfahre, wird an einer anderen Wage (am bequemsten
felwage) auf die eine Schale der Hohlzylinder, auf die andere das Wasser-
tellt, tariert (am einfachsten durch Eingiefsen der richtigen Wassermenge)
in dieses Wasser der massive Zylinder an einem Faden herabgesenkt,
weder die Hand oder ein Stativ trägt. Das Wasserglas sinkt, und Gleich-
tritt erst wieder ein, wenn der Hohlzylinder mit Wasser gefüllt ist
). — Als Verbindung der Versuche 1 und 2 *Versuch* 3 nach Fig. 165. —

Fig. 162.



163. Fig. 165. Fig. 164.



4: Ein Zylinder aus Holz von kleinerem spezifischen Gewichte als Wasser
ein Gefäfs mit ebenem Boden gestellt, so dafs zwischen diesem Boden und
s des Zylinders nirgends Luft oder Wasser eindringen kann. Wird dann
g Wasser eingegossen, so steigt der Zylinder nicht empor, wiewohl er
Wasser schwimmt. (Besser noch mit einen Kautschukpfropf, auf den Queck-
gossen wird.) Dies liefert den Nachweis, dafs es wirklich der von unten
wärts wirkende Druck des Wassers ist, welcher sonst den Auftrieb bewirkt.
ne gröfste Verallgemeinerung findet das Archimedische Gesetz, wenn nicht
eingetauchte Körper von beliebiger Gestalt und beliebiger Massenver-
st, sondern wenn auch die Flüssigkeit aus Schichten verschiedener Dichtig-

keit besteht. Wie in diesem Falle das vertikal abwärts wirkende Gewi Resultierende unendlich vieler an den einzelnen Teilen des Körpers angre Schwerkräfte vorzustellen und zu berechnen ist, so auch die vertikal wi Kraft des Auftriebes. Da die Angriffspunkte beider Kräfte im allgemeine zusammenfallen und auch die Kräfte nicht einander gleich sein werden, s der Körper im allgemeinen sowohl ein Bestreben zeigen, zu sinken o steigen, wie auch sich zu drehen. Von den hieran sich knüpfenden Au sind die wichtigsten die über das

Schwimmen. Aufgabe: Ein gerades Prisma von b cm² Quers und H cm Höhe bestehe aus homogenem Stoffe vom spezifische wichte s. Es tauche bei vertikaler Seitenkante bis zur Tiefe h c in eine homogene Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte S. W vertikale Resultierende geben Gewicht und Auftrieb? An $R = (bHs - bhS)g$. — Daraus folgt als spezielle Gleichgew bedingung: $Hs = hS$; in Worten! Ist das Prisma bis zur $h \lesseqqgtr \frac{s}{S} H$ eingetaucht (z. B. durch die haltende Hand), so nim losgelassen, eine Bewegung nach abwärts, keine Bewegung ode nach aufwärts an.

Dafs also im besonderen Falle $h = \frac{s}{S} \cdot H$ das Prisma sich weder auf abwärts bewegt, ist zwar eine notwendige, aber noch keine ausreichende gewichtsbedingung; denn bekanntlich bleibt z. B. eine hölzerne Stange, a zu jener Tiefe ins Wasser getaucht, nicht stehen, sondern legt sich u schwimmt erst der Länge nach auf der Wasseroberfläche. Es mufs nämlich nur die translatorisch wirkende Resultierende gleich Null sein, s auch das aus den in diesem Falle einander gleich grofsen Kräften des Ge und Auftriebes sich ergebende Kräftepaar ein Moment gleich Null An allen Aufgaben über das Schwimmen der Körper sind also zu unterscheid

LA 112. Tiefe des Einsinkens (z. B. von Kegeln, Kugeln ..., LA 112) und die **Stabilit Schwimmens.** Jene Tiefe bestimmt z. B. den Tiefgang eines Schiffes, die St seine Sicherheit gegen das Kentern. — Tiefgang und Umkippen der Eisbe

Die Stabilität ist im allgemeinen um so gröfser, je ti der Schwerpunkt liegt. [Die vollständigere Formulierung sich aus der Lage des Kräftep in Bezug auf den Körper, Fig. 166 und Fig. 167, welch dingungen sich dann allgemei Hilfe des Begriffes **Metazen** zusammenfassen lassen; LA Deshalb werden die untersten der Schiffe mit Lasten von grö spezifischen Gewichte beladen Aräometer mit Blei oder Q silber beschwert.

LA 113.

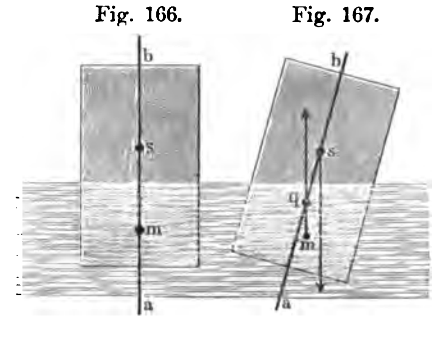


Fig. 166. Fig. 167.

Im besonderen gelten für homogene Flüssigkeiten und eintauchende Körper Gesetze: I. Derselbe Körper taucht in eine Flüssigkeit von **größerem** **[spez]ifischen Gewichte weniger tief ein.** II. Von zwei auf derselben Flüssig[ke]it schwimmenden, räumlich gleichen Körpern taucht der von **größerem spezi[fisc]hen Gewichte tiefer ein.** — Speziellere Erscheinungen: Der menschliche [Kör]per schwimmt auf Wasser (namentlich bei fettleibigen Personen, und wenn die [Lun]ge mit Luft gefüllt ist; über das künstliche Schwimmen siehe § 59). In der [Gef]ahr des Ertrinkens sollte man nicht Arme und Beine aus dem Wasser strecken, [son]dern selbst den Kopf so weit eintauchen, daſs nur der Mund noch über Wasser [ist.] Dringt in den Körper eines Ertrunkenen Wasser ein, so sinkt er auf den [Gru]nd; entwickeln sich später im Körper Fäulnisgase, so steigt er wieder an die [Ober]fläche. — Kartesianischer Taucher; Schwimmblase der Fische. — Kommt ein [Schi]ff aus dem Meerwasser in das weniger dichte Fluſswasser, so sinkt es tiefer [ein.] Menschen schwimmen im Meerwasser leichter als im Fluſswasser. Schiffe [aus] Eisen, Kupfer ... Mittels hohler Fässer kann man versunkene Schiffe zu [Tag]e fördern; Schwimmgürtel u. dergl. mehr.

[§] 41. Hydrostatische und andere Methoden zur Bestimmung spezifischer Gewichte.

Nach VITRUVS Darstellung von der Entdeckung des Archimedischen Gesetzes [(ve]rgl. den vorigen §) hätte ARCHIMEDES zur Lösung der Aufgabe von der Krone [de]s Hiero gleiche absolute Gewichte von Gold und anderen Metallen in ein ganz [mi]t Wasser gefülltes Gefäſs getaucht und nur die Mengen, d. h. hier die Volu[m]ina, des jeweilig zum Ausflieſsen gebrachten Wassers gemessen. Da nämlich [ein]e Krone aus Gold einen kleineren Raum einnimmt, also auch ein kleineres [Vol]umen Wasser verdrängt als eine aus irgend einem anderen der damals be[kann]ten Stoffe bei gleichem absoluten Gewichte, so wäre dies allerdings ein [pos]itives Mittel zur Lösung seiner Aufgabe und allgemeiner eine Methode zur [Be]stimmung spezifischer Gewichte. Eben hierzu aber wäre dann nicht Archimedes' [Ges]etz über Gewichtsverluste nötig gewesen. Daher vermutete schon GALILEI, [da]ſs sich Archimedes zur Bestimmung spezifischer Gewichte der hydrostatischen [W]age bedient habe. Auch wäre das bloſse Austreten des Wassers aus der Wanne [fü]r Archimedes wohl schwerlich überraschend gewesen, sondern es dürfte ihm auf [An]laſs der an sich ganz alltäglichen Wahrnehmung sich die Einsicht aufgedrängt [hab]en, „daſs ein ins Wasser einsinkender Körper ein entsprechendes Wasserquantum [geh]oben muſs, gerade so, als wenn der Körper auf einer, das Wasser auf der [and]eren Schale einer Wage läge". —

Da das spezifische Gewicht eines Körpers gemessen wird durch $S = \frac{P}{V}$ [(§] 16, Ende; über die Einheiten dieser und ähnlicher Maſsbestimmungen siehe unten), [s]o erfordern die Methoden zur Bestimmung spezifischer Gewichte, [n]ebst dem durch direkte Wägung zu findenden P auch noch V zu [er]mitteln. — Dieses Volumen kann entweder direkt, **volumetrisch** (bei regel[m]äſsigen Körpern durch Berechnung aus gemessenen Längsdimensionen, sonst [du]rch Eintauchen in kubizierte Gefäſse) — oder aber indirekt, nämlich durch [Be]stimmung **des scheinbaren Gewichtsverlustes** im Wasser ermittelt werden. Denn [da] 1 cm³ Wasser das Gewicht von 1 g hat, so ist die **Maſszahl p des scheinbaren [G]ewichtsverlustes gleich der Maſszahl V des Volumens.** Da nun im [All]gemeinen die Wage ein handsameres und empfindlicheres Werkzeug ist als die

Vorrichtungen für unmittelbare Volumenbestimmung, so ist die Bestimmung nach $S = \frac{P}{p}$ meistens zweckmäfsiger als die unmitt $S = \frac{P}{V}$. — Im einzelnen gestaltet sich die Durchführung des Gedanl

Bestimmung des spezifischen Gewichtes A) mittels d **statischen Wage.** 1. Bei festen Körpern. Ist das Ge Körpers P g, sein Gewichtsverlust in Wasser p g (also sein p cm³), so ist sein spezifisches Gewicht $s = \frac{P}{p}$.

Hier ist vorausgesetzt, dafs a) $s > 1$. Ist also z. B. das spezifisc des Goldes oder einer Metalllegierung zu bestimmen, so wird der Kö auf die Wagschale gelegt und sein Gewicht P bestimmt; dann unte schale gehängt und, während er in Wasser taucht, das Gleichgewicht legen von p g auf dieselbe Wagschale wieder hergestellt. — Ist b) $s <$ einem Holzstück, so würde es auf dem Wasser schwimmen; es kann mit so viel vorher gewogenem Bleidraht umwickelt werden, dafs es sinkt. — c) Würde sich der Körper im Wasser auflösen, so senkt man andere Flüssigkeit von bekanntem spezifischen Gewichte, in der er sicl löst (z. B. Steinsalz in Terpentinöl).

Für mineralogische Zwecke wird manchmal noch das **Gewicht** angewendet, welches sowohl beim Bestimmen von P wie von p die hy Wage ersetzt, indem der Körper einmal aufserhalb, einmal innerhalb (auf das Aräometer gelegt und dieses durch Zulegen von Tara, bezw. G Wasser bis zu einer bestimmten Marke zum Einsinken gebracht wird.

2. Tropfbare Flüssigkeiten. Von einem leicht zu re Körper (z. B. einem Glastropfen mit Öse) hat man ein fü den Gewichtsverlust in Wasser bestimmt; er sei z. B. q g Volumen q cm³). Erfährt nun dieser Körper in der zu unter Flüssigkeit einen Gewichtsverlust von p g, so ist ihr spez. Gew.

Fig. 168.

100

0

a

B) Bestimmung des spezifischen Gewichtes vo keiten mittels der **Skalenaräometer.** Diese sind l verschlossene Glasröhren (Fig. 168), welche im ob eine Skala (LA 114) enthalten, an der man beobachten tief das Instrument in verschiedenen Flüssigkeiten ein untere Teil enthält Quecksilber oder Schrote, damit d ment stabil schwimmt.

LA 114.

Die Aräometer werden häufig als Mittel zur Prüfung heit der Milch, des Gehaltes von Spiritus an Alkohol . . . l erfüllen aber diesen Zweck nicht zuverlässiger, als man eben auf die Art eines Stoffes aus seinem spezifischen Gewicht allei kann. — Die Skalen sind häufig schon mit Rücksicht auf (einer bestimmten Art von Flüssigkeit eingerichtet („Milch-, Wein und entweder so bezeichnet, dafs man an ihnen das spezif wicht der Flüssigkeit oder ihren Gehalt an einem bestim (Alkohol im Spiritus, Salz in den Solen . . .) in Prozen

und 0° C., in der Chemie meist **Wasserstoff** oder OSTWALDS „Nc gas“ vergl. § 46) bezeichnet. Dieses Verhältnis $\delta = \frac{D}{d}$ ist dann unbenannte Zahl und ist unabhängig von den Massen- und Volı einheiten, in denen in gleicher Weise D und d gemessen waren.

Ähnlich wird als relatives spezifisches Gewicht $\sigma = \frac{S}{s}$ beze und es ist $\delta = \sigma$. — Im C-S-G-System ist die Dichte D maſszahlengleich n relativen Dichte δ gegen Wasser; denn hier ist die Masseneinheit 1 g so n Volumeneinheit 1 cm^3 in Beziehung gesetzt, daſs für Wasser $d = 1$ (Anh. — In den älteren Maſssystemen galt diese einfache Beziehung nicht: so w spezifische Gewicht des Wassers $56^1/_2$, indem ein Kubikfuſs Wasser $56^1/_2$ Pfun

Anh. 5.

Bei allen Bestimmungen des spezifischen Gewichts ist Rüc zu nehmen auf die Temperatur, da sich bei ungeänderter Mass steigender Temperatur das Volumen in der Regel vergröſsert. Normaltemperatur wird dann meistens 0° C., beim Wasser häufig (genauer 4,1° C., entsprechend dem Dichtemaximum, § 73), bei tischen Bestimmungen die Zimmertemperatur (15° C.) zu Grunde g

Dichten einiger fester und flüssiger Stoffe bei 0° C.

Stoff	Dichte	Stoff	Dichte
Kork	0,12 bis 0,24	Gold	19,25 bi
Lindenholz	0,44 „ 0,82	Platin	20,86 „
Ebenholz	1,23		
Lithium	0,59	Schwefeläther	(
Natrium	0,97	Alkohol (absoluter)	(
Aluminium	2,67	Olivenöl	(
Schwerspat	4,43	Destilliertes Wasser	(
Eisen	7,21 bis 7,79	Meerwasser	
Kupfer	8,78 „ 8,88	Schwefelsäure (engl.)	
Silber	10,47	Quecksilber	1:
Blei	11,35	also annähernd	1:

§ 42. Einige Bewegungserscheinungen an Flüssigke

Im bisherigen wurden Bewegungen der Flüssigkeiten nur ne erwähnt, wo sie der Herstellung eines Gleichgewichtszustandes voran oder nachfolgten; z. B. die Bewegung des Wassers in der hydraulischen das Schwingen der Flüssigkeitssäulen in kommunizierenden Gefäſsen Schwanken des Flüssigkeitsspiegels bei den Versuchen über Bodendruck. einfachen und zusammengesetzten Archimedischen Versuch (Fig. 165, S. 16 dergleichen mehr. — Von den Bewegungen der Flüssigkeiten haben diejenigen ı Charakteristisches vor denen fester Körper voraus, bei welchen die eiı Flüssigkeitsteilchen in Bezug aufeinander ihre Lage nicht ändern, z. B. e rein fortschreitender Bewegung frei fallende Wassermasse, ein flüssiger Welt an welchem bei konstanter Rotationsgeschwindigkeit zwischen den Flieh der Rotation und der gegenseitigen Massenanziehung der Teilchen sich Gleichgewicht hergestellt hat, wie beim Erdsphäroid. Sobald dagegen iı

itsmenge, die sich als Ganzes bewegt oder in Ruhe ist, die einzelnen n in Bezug aufeinander Bewegungen annehmen, welche nur mehr an kteristischen Eigenschaften der Flüssigkeiten [— Unzusammendrückbarkeit ropfbaren, Verhalten nach Mariottes Gesetz bei Gasen, § 45 und Leichtbarkeit der Teilchen bei beiden] gebunden sind, treten so große Komplider Bewegungen ein, „daſs wir jedesmal von neuem überrascht sind, r ein Gefäſs mit Wasser bewegen; ist die Wassermasse nur irgendwie ich, so geben die tumultuarischen Bewegungen, welche wir unwillkürlich en, immer Anlaſs zu irgend einer Ungeschicklichkeit". Von diesen gen der Flüssigkeiten (der tropfbaren und auch der gasförmigen) handelt lere die Hydrokinetik (gewöhnlich im engeren Sinne Hydrodynamik im Gegensatze zur bisher behandelten Hydrostatik. Von der Ver- ʒ der hierbei auftretenden Erscheinungen gibt ein praktisches Beispiel im ede Fluſsregulierung, bei welcher es sehr schwierig ist, den Fluſslauf so zu leiten, daſs nicht Versandungen, Auswaschungen der Ufer u. dergl. Im folgenden sollen nur einige der einfachsten Erscheinungen beobıd beschrieben werden.

sflieſsen nach abwärts, seitwärts, aufwärts. Bei der :ten Einrichtung eines Springbrunnens flieſst aus dem egenen Behälter Wasser durch mehr oder minder steil abwärts e Röhren zu einem vertikal aufwärts gerichteten Ausfluſsrohr. dieses steigt das Wasser annähernd bis zur Höhe des gkeitsspiegels im Behälter.

se kinetische Tatsache erinnert zunächst an die statische, daſs, wenn ıfsrohr nach aufwärts bis über die Höhe des Wasserspiegels im Behälter ıt wäre, dann das Wasser im Rohre erst in dieser Höhe nach dem Gesetze munizierenden Gefäſse zum Gleichgewicht käme (allerdings vorher diese Gleichgewichtsstellung schwingend). — Statt die Geschwindigkeit, her das Wasser aus der Springbrunnenöffnung herausdringt, und mit der als vertikal aufwärts geworfener Körper bewegt, aus der Kraft des ischen Druckes zu erklären, können wir auch die Energie des bewegten der Erklärung zu Grunde legen, indem wir sagen: Das Wasser erreicht ›sinken durch jenen Höhenunterschied eine Geschwindigkeit, wie beim lle aus jener Höhe (LA 115, 116). Mit der so gewonnenen kinetischen vermag es sich also bis zu eben jener Höhe wieder zu erheben. Was an ıg der Fallhöhe fehlt, ist als Arbeit bei der Überwindung jener Reibung, widerstandes und des Stoſses der Wasserteilchen verbraucht worden.

LA 115, 116.

einer ganz ähnlichen energetischen Erklärung verir nun auch die Geschwindigkeit des Auss nach seitwärts und abwärts. Von letzterem n besonderen

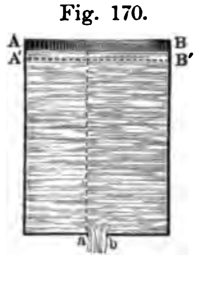


Fig. 170.

ɪʀɪᴄᴇʟʟɪs Satz: Die Geschwindigkeit, mit jedes Teilchen einer Flüssigkeit durch eine fnung im dünnwandigen Boden eines weiten (Fig. 170) vertikal abwärts austritt, ist der Geschwindigkeit, welche es beim Falle vom Flüssigkeitsspiegel bis zur

Öffnung erlangt hätte. — Auch dieses Gesetz zeigt sich in Wi[rk]lichkeit nicht rein; sondern die wirklich beobachtete (bezw. aus d[er] Ausflußmenge pro 1 cm² Ausflußöffnung und 1 sec Ausflußzeit o[der] aus der Sprungweite eines horizontalen Strahles und der Tiefe d[es] Falles (LA 15) zu berechnende] Ausflußgeschwindigkeit ist imm[er] kleiner als die dem Torricellischen Ausflußgesetze entsprech[ende] „theoretische" Geschwindigkeit.

LA 15

Fig. 171. Fig. 172.

Wir erklären diesen Abgang zunächst wieder durch Reibung und den Luftwiderstand, sodann aber auch daraus, d[aß] wie sich (an einer etwa mit Sägespänen vermischten Flüssigk[eit]) direkt beobachten läßt, die Flüssigkeit im Gefäß beim Strö[men] gegen die Ausflußöffnung hin sich nicht in parallelen wa[ge]rechten Schichten vorwärts bewegt, sondern krummlinige Flüssigkeitsfäden bildet. Dies hat u. a. zur Folge, daß der Flüssigkeitsstrahl kurz nach seinem Austritte einen engeren Querschnitt zeigt als an der Ausflußöffnung. — Der weiterhin fallende Strahl weist (namentlich bei „stroboskopischer" Beobachtung, psychol. Anh. Nr. 44) einen sehr komplizierten Bau auf; infolge der beschleunigten Bewegung (und der bei dünner werdendem Strahl immer merklicher hervortretenden Wirkung der Molekularkräfte, § 55) löst er sich in bestimmter Tiefe in Tropfen auf, welche selbst wieder eigentümliche Schwingungen zeigen (Fig. 171, 172).

Fig. 173.

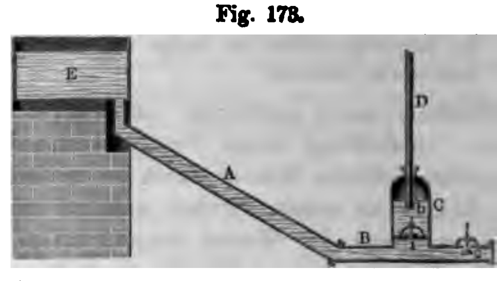
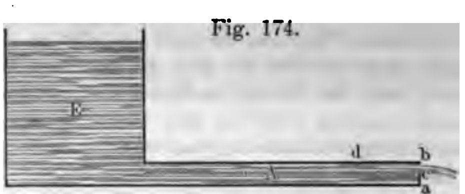


Fig. 174.

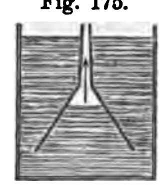


Anh. 44.

Wie vorsichtig man bei der Übertragung der allgemeinen mechanischen Gesetze auf die Bewegungserscheinungen an Flüssigkeiten sein muß, zeigt besonders auffällig Montgolfiers **hydraulischer Widder** (Fig. 173). Hier fließt aus einem Gefäß Wasser durch eine wagrechte Röhre, strömt zunächst eine Zeitlang durch das Sperrventil 2, hebt und schließt aber dann dieses Ventil und strömt nun durch das Druckventil 1 in den Windkessel, von wo es durch ein Steigrohr zu einer Höhe gelangt, die beträchtlich größer ist als die, von der es gekommen ist. —

se Erscheinung scheint also dem Gesetze von der Erhaltung der Energie zu ersprechen; doch löst sich das Paradoxe, wenn wir bedenken, daſs das beim rrventil ausgeflossene Wasser dafür eine viel geringere Höhe erreicht hat. hat also eine Übertragung der Energie dieses gleichsam zu wenig gestiegenen ssers auf das zu hoch gestiegene stattgefunden. — Solches findet schon in n vereinfachten Falle (Fig. 174) statt, wenn das in *A* „in Schuſs" gekommene sser durch teilweises Verschlieſsen der Öffnung *a c b* aufgehalten wird und nun ne Energie auf den anderen Teil des Wassers überträgt, der kurze Zeit hinrch mit gröſserer Geschwindigkeit herausschieſst, als der Druckhöhe entspricht. ne ähnliche Erscheinung zeigt sich auch bei dem folgenden ersuch (Fig. 175). Die enge Öffnung eines Trichters wird mit m Finger verschlossen, dieser mit der weiten Seite unter asser getaucht und das Trichterrohr plötzlich frei gelassen: es pritzt dann — freilich ebenfalls nur für ganz kurze Zeit — das asser in einem Strahle hoch über den Spiegel des umgebenden assers empor. Indem das äuſsere Wasser das unterhalb des richters befindliche beim Freilassen der Öffnung und Entweichen r Luft empordrückt, nimmt dieses infolge der nach oben immer kleineren uerschnittte des Trichters eine immer gröſsere Geschwindigkeit an. —

Fig. 175.



Für einen allgemeineren Überblick über die Bewegungen von Flüssigkeiten npfiehlt sich das Auseinanderhalten zweier Grundformen: der **Strömungen** und r **Wirbelbewegungen** (welche zunächst rein phoronomische Zweiteilung durchaus nalog ist der Unterscheidung von fortschreitenden und drehenden Bewegungen an starren Systemen). Beobachtet man z. B. einen auf oder in Wasser hwimmenden Strohhalm, so sieht man ihn teils rein fortschreiten, teils sich rehen (Translationen, Rotationen ausführen, § 26), und man kann hieraus auf ie entsprechenden Bewegungen des Wassers nächst dem Halm schliessen. — Zur äheren Charakteristik dieser beiderlei Bewegungen, die im Haushalte der Natur ie mannigfachsten Rollen spielen, diene hier nur folgendes:

I. Strömungen. Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch „strömt" das Wasser in einem Fluſs- oder Strombette, in Leitungsröhren u. s. f. — In einem Strombette mit teilweise sich verbreiternden Querschnitte und teils mehr, teils weniger starkem Gefälle werden die Bahnen der einzelnen Teilchen, die „Stromfäden" oder „Strömungslinien", an breiteren Stellen auseinander weichen und damit die „Querschnitte" (d. i. die Flächen, welche von allen Strömungslinien normal durchschnitten werden) gröſser. — So ist allgemein für jeden Teil der Flüssigkeit das **Produkt aus Querschnitt und Geschwindigkeit an jeder Stelle des Stromes dasselbe.**

Indem nämlich das Volumen der Flüssigkeitsmenge, die binnen je 1 sec durch einen solchen Querschnitt geht, auch beim Durchgange durch einen gröſseren (bezw. kleineren) gleich bleiben muſs, erklärt es sich, daſs die **Geschwindigkeit an Stromengen gröſser** und umgekehrt an Stellen, wo (z. B. wegen geringerer Neigung des Fluſsbettes) die Geschwindigkeit klein wird, der Stromquerschnitt groſs wird. — Jene Bedingung wäre z. B. nicht mehr erfüllt, wenn es in den unteren Teilen des Stromgebietes ausgiebig regnete, so daſs hier immer neue Wasser-

massen dem Strome zuwachsen, ohne dafs seine Geschwindigkeit gr
werden braucht. In der Tat bilden dann die neu hinzugekommenen
teilchen Stromfäden, die zum oberen Teil des Flusses nicht gehört hatte
Verwickelung ist ausgeschlossen bei

Stationären Strömungen. Wird in einem Flufsbett, in
Wasserleitungsröhre, durch welche an der einen Seite ebenso v
als an der anderen abfliefst, irgend eine bestimmte Stelle in
gefafst, so herrscht daselbst immer derselbe Bewegungszu
wiewohl es immer andere und andere Teilchen sind, die d
herankommen und weggehen.

In diesem Begriff der stationären Strömung ist (zum Unterschied v
Begriffe des stationären Zustandes, §§ 15, 17) übrigens nicht verlangt, d
Bewegung jedes Teilchens konstante Geschwindigkeit habe; solche
z. B. der Fall in denjenigen Teilen eines Mühlbaches, deren Bett nur
geneigt ist, dafs die jeweiligen Geschwindigkeitsverluste infolge Reibung
die Schwerebeschleunigung gerade kompensiert wird. Die Strömung i
stationär auch an den viel stärker geneigten Stellen eines Mühl- oder Wil
falls nur alle daselbst passierenden Flüssigkeitsteilchen zu allen Zeiten die g
Beschleunigung erhalten. Eine solche stationäre Strömung findet
Gefäfs und Mündung nach Fig. 170 statt, falls durch nicht zu kleinen und
grofsen Zuflufs dafür gesorgt ist, dafs das Niveau im Gefäfse auf derselbe
bleibt. Nicht stationär war dagegen das Empordringen des Wassers im
(Fig. 175), indem hier ein auch nur kurze Zeit gleichmäfsig anhaltendes
spritzen des Wassers dem Gesetz der Erhaltung der Energie widersprechen
Das Gesetz von der Konstanz des Produktes von Geschwindigke
Querschnitt gilt aber (abgesehen von der verzögernden Wirkung der S
auch für dieses nicht stationäre Emporströmen; und dieses Gesetz g
denn auch die augenscheinlichste Erklärung für das Wachsen der Geschwi
des im inneren, engeren Teile des Trichters emporgetriebenen Wassers.

Ein besonderer Fall der (stationären, wie nicht statio
Strömungen sind die **Zirkulationen,** bei welchen die Ström
linien geschlossene Linien sind. — Beispiele im grofse
Meeresströmungen, für Luftzirkulationen viele (in hinreichend g
Zusammenhange betrachtet sogar alle) Arten von Winden (§ 1

Eine solche Zirkulation würde z. B. eintreten, wenn das Wasser in e
sich zurückkehrenden Rinne durch Umrühren längs der ganzen Rin
dadurch in Bewegung käme, dafs auch nur an einer Stelle ein Schau
eintauchte und durch eine äufsere Kraft in Drehung erhalten würde: An

2. Stromwiderstände. *Ver-*
h (Fig. 176): Ist an einem grofsen
äfs ein langes wagrechtes Ausflufs-
r angebracht, von welchem aufwärts
tikale Manometerröhren abzweigen,
zeigt sich an diesen ein **Druckabfall**
n Niveau im Gefäfse bis zur Mündung
s Rohres. Dieser Abfall ist um so
scher, je mehr die Reibung der
ssigkeit im wagrechten Rohre ver-
röfsert wird (Verlängerung, Verenge-
ng, Einführen von „Widerständen“
rch Schrote, Drahtspiralen u. dergl.).

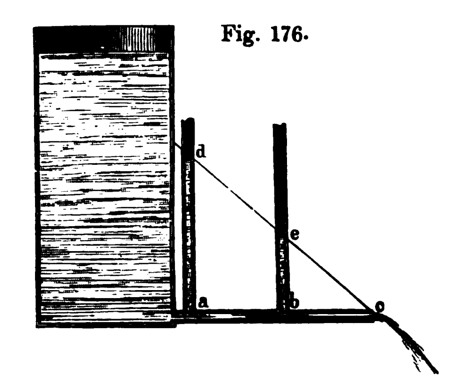


Fig. 176.

Im Gegensatze zu den bisher beschriebenen reinen **Strömungen**, bei denen
r Teil der Flüssigkeit rein fortschreitende Bewegungen ausführt, zeigen
h überdies noch drehende Bewegungen der Flüssigkeitsteile bei den

II. Wirbelbewegungen. *Versuch*: Aus einem weiten Gefäfs
g. 177) fliefst Wasser, das vorher in Ruhe gewesen war, durch eine
denöffnung in der oben anläfslich des Torri-
llischen Satzes beschriebenen Weise ab. War
er dem Wasser durch Umrühren mit der Hand
er Zuströmenlassen in tangentialer Richtung
ch nur eine mäfsige Rotation erteilt worden,
buchtet sich alsbald das Niveau über der Öff-
ng immer tiefer ein und es zieht sich bis zu
ser ein „Wirbel“. (Da in seinem Innern Luft ist, erscheint er
folge totaler Reflexion, § 104, silberglänzend.) Leichte Körperchen
Korkringe..), die auf dem Wasser schwimmen, werden mit grofser
eftigkeit in den Wirbel hinuntergezogen und gegen die Bodenöffnung
drückt.


Fig. 177.

Ähnliche Erscheinungen in Luft: Rauchringe, wenn der Tabakrauch bei
nder Mundöffnung rasch herausgeblasen wird, vollkommener nachzuahmen mit
lmiaknebeln; bei Mörserschüssen (behufs „Wetterschiefsens“, § 194) wurde das
sen der emporsteigenden Wirbel bis zu 28 sec gehört. — Solche **Wirbelringe**
llen Wirbel dar, deren Achsen in sich zurücklaufen. Der einfachste Fall eines
rbels (aber nicht Wirbelringes) ist z. B. das Wasser in einem Glase, das auf
r Schwungmaschine in Rotation versetzt worden ist (LA 42). In der Um-
bung eines Wirbels und speziell eines Wirbelringes kann die Flüssigkeit über-
es eine Zirkulationsbewegung annehmen. — Über die umfassende Rolle, welche
lche Wirbelbewegungen in der Natur spielen, vergl. § 191 (auch THOMSONS Hypo-
these der Wirbelatome, § 57). — LA 117.

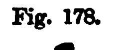
LA 42.

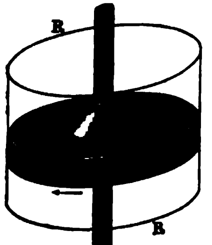
LA 117.

Praktische Anwendung fand die kinetische Energie strömen-
den Wassers von altersher in den (unter-, oberschlächtigen) **Wasser-
rädern.** Gröfser ist der Nutzeffekt in den **Turbinen** (Fig. 178 a f. S.),
bei denen das Wasser zwischen schiefgestellten, unbeweglichen Schaufeln

so auf die ebenfalls schiefgestellten Schaufeln eines in hori Ebene drehbaren Rades ausströmt, dafs eine möglichst grofs ponente nach wagrechter Richtung wirksam wird.

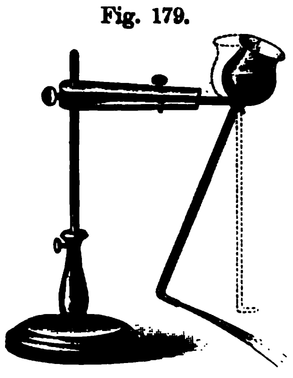
Fig. 178.





Vorbildlich für diese Einrichtung waren die nungen des „Rückstofses" am SEGNERSchen Wa Behufs Erklärung dieser Erscheinung vereinfachen nach Fig. 179; hier erfahren alle seitlichen Stellen d wand mit Ausnahme der Ausflufsöffnung Drucke nac die sich gegenseitig aufheben; nur der Druck auf d der Wand gegenüber der Ausflufsöffnung bleibt unkom und stellt die Röhre schief. — Beachten wir, dafs des Zurückweichens der Röhre hinter die stellung der Flüssigkeitsstrahl weit vor diese stellung tritt, so ergibt sich eine andere Erklärung Gesetze der Erhaltung des Schwerpunkte Ähnlich lassen sich überhaupt die Bewegung nungen an Flüssigkeiten meist aus mehr a der mechanischen Prinzipien verständlich

Fig. 179.



Eine Umkehrung des Vorgan Mühlrädern und Turbinen bilden d gänge an den Schaufelrädern (FULTO und Schrauben (RESSEL 1829) der schiffe, indem hier diesen festen S vom Schiffe her Rotationen erteilt eine relative Bewegung des ganzen gegenüber dem Wasser eingeleitet w

IV. Aeromechanik.

§ 43. Die Prinzipien der Aeromechanik.

Geschichtliches. Wiewohl auch jetzt noch im landläufigen Sprech selten die „Luft" als „Nichts" behandelt wird, so reichen doch in das vorg liche Denken gegenteilige Erfahrungen zurück, in denen sich die Körperl der Luft verrät: der Stofs des Windes, der um so gröfsere Widerstand je rascher man gegen sie läuft, Gebrauch der Segel, Einschliefsen von Tierblasen (Tierschläuche, Dudelsack), Luftblasen in Flüssigkeiten u. a. Heronsball, die Windbüchse von Ktesibios, Pumpbrunnen und Feuerspri aeromechanische Apparate aus dem Altertum. — Eine umfassende wiss liche Beschäftigung mit mechanischen Erscheinungen an der Luft beginnt

n nach GALILEIS Schüler TORRICELLI benannten Versuche (1643); bald darauf rde auf Veranlassung PASCALS (1648) die vorausgesehene Abnahme des Luftickes mit der Erhebung in höhere Schichten der Atmosphäre durch Anstellung Torricellischen Versuches auf einem Berge bestätigt und auch sonst durch cal eine systematische Aëromechanik angebahnt. — „Die urwüchsigsten und giebigsten Leistungen auf dem Gebiete der Aërostatik rühren von OTTO VON RICKE her.“ In seinem Buche (Magdeburgische Experimente, 1672) beschreibt mannigfache Versuche, die er um 1650 (also bald nach dem Torricellischen such und ohne von diesem zu wissen) angestellt hatte, und die namentlich in r allmählicher Vervollkommnung zur Konstruktion der Verdünnungsluftpe geführt haben. — Der Engländer ROBERT BOYLE hat Guerickes Untergen weitergeführt: er stellte auch zuerst (1661) das heute noch meist nach IOTTE (1672) benannte Gesetz fest.

Alle diese Entdeckungen waren an einer einzigen Gasart, der atmosphärin Luft, gemacht. Erst ein Jahrhundert später untersuchten BLACK (1755) die Luft“ (Kohlendioxyd, CO_2) und CAVENDISH (1766) die „brennbare Luft“ sserstoff, H); vergl. Chemie, § 207.

Wie schon Pascal den Torricellischen Versuch durch Vergleich mit dem alten verschiedener Flüssigkeiten in kommunizierenden Gefäfsen (§ 39) rt hatte, so wies die Erfindung des Luftballons (durch MONTGOLFIER 1783, ni, der erwärmte Luft, und CHARLES 1783, 28. August, der Wasserstoffgas dete) auf die Übertragbarkeit des Archimedischen Gesetzes von den igkeiten auf die Gase hin. Überhaupt bewährte sich im Verlaufe der Entlung der Aëromechanik Schritt für Schritt die Analogie zur Hydromechanik. —

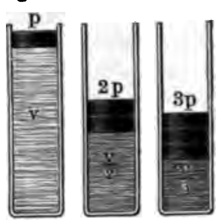
Es liegt daher nahe, für eine deduktive Darstellung der Aëromechanik r von STEVINS Satz auszugehen. Um dies aber wirklich als berechtigt zu en, haben wir uns zu erinnern, dafs Stevins Satz bei Flüssigkeiten im ren Sinne (den tropfbaren) selbst schon eine Folge der beiden charakteristischen schaften dieser Flüssigkeiten 1. der Leichtverschiebbarkeit der Teilchen d 2. ihrer Unzusammendrückbarkeit war. Die erste dieser Eigenschaften nun en zwar die Gase mit den tropfbaren Flüssigkeiten gemeinsam, an Stelle der eiten aber tritt BOYLE-MARIOTTES Gesetz. — Denken wir uns also wieder Gefäfs mit starren Wänden und einzelnen beweglichen Kolben von dem Gase füllt und auf einen der Kolben einen Druck von aufsen ausgeübt, so wird auf anderen Kolben ein Gegendruck ausgeübt werden müssen, so dafs im ganzen Gas zwar eine Zusammendrückung erfährt, wegen der Leichtverschiebbarkeit der chen aber doch erst dann im Gase Gleichgewicht eintritt, wenn an allen Stellen d also auch an den Kolben auf gleiche Flächen gleiche Drucke und daher auf al so grofse Flächen n mal so grofse Drucke ausgeübt werden. — Somit:

„Prinzipien der Aëromechanik“, aus denen sich alle mechachen Erscheinungen an vollkommenen Gasen ableiten lassen, sind: Galilei-Newtons allgemeine Prinzipien der Mechanik des Punktes 15), 2. Stevin-Pascals Satz über die Fortpflanzung des Druckes Flüssigkeiten, 3. Boyle-Mariottes Satz über die Abhängigkeit des mens der vollkommenen Gase vom Druck ($pv = Konst$ — vorg veranschaulicht durch Fig. 180, 181, 182 a. f. S.).

Die experimentelle Auffindung, bezw. Bestätigung dieser allgemeinen ipien und aller speziellen aëromechanischen Gesetze gestaltet sich aber in lichkeit wesentlich anders als bei den Flüssigkeiten, insofern wir bei allen

Beobachtungen und Versuchen, die wir an der Erdoberfläche mit Gasen vorı uns selbst schon auf dem Grunde des Luftmeeres befinden (wäre möglich, die Gesetze des Druckes tropfbarer Flüssigkeiten nach den in §§ angegebenen Methoden zu ermitteln, wenn wir uns mit unseren Appara dem Grunde eines Wassermeeres befänden?). — Hierzu kommt als zweite mentelle Rücksicht die, dafs wir schon die im Mariot Gesetze ausgesprochene erste grundlegende Eigensch Gase, ihr Verhalten gegen äufseren Druck, nicht ı in Figg. 180—182 fingierten reibungslosen Kolben, mit dem jeweilig herrschenden Luftdruck u ihm zu vergleichenden Quecksilberdrucken ı Säulen von Wasser, Glycerin . . . sind schon wege gröfseren Länge viel weniger bequem. Aus diesen G ist es üblich geworden, auch die systematische Dar der Aëromechanik mit der Messung des Luftdruck TORRICELLI zu beginnen. Doch bleibt zu beachten, dafs auch der von Gı eingeschlagene Weg unmittelbar zur zusammenhängenden Erkenntnis aller lichen Eigenschaften der Luft geführt hat. So mafs GUERICKE die Grö Luftdruckes auf die gegebene Fläche des Pumpenkolbens durch angehän wichte (wobei er ebenso wie bei dem berühmten Experiment mit den Magd Halbkugeln auch die Gleichheit des Druckes nach allen Richtungen erkann

Fig. 180, 181, 182.

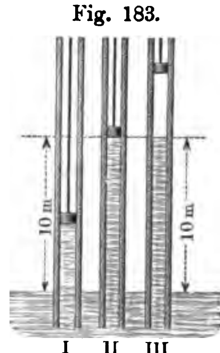


§ 44. Luftdruck. — Barometer.

Geschichtliches. Beim „Aufsaugen" einer Flüssigkeit mittels eine chens, sowie bei den Pumpbrunnen, scheint das Wasser emporgezogen zu Über die antike Erklärung dieser Erscheinung a *horror vacui* vergl. psych. Anhang, Nr. 45. Aus de achtung der Pumpenmacher, dafs das Wasser dem nicht folge, wenn er mehr als 10 mal über den a Wasserspiegel gehoben wird (Fig. 183 — bei wenig schliefsenden Kolben sogar schon in geringerer Höh GALILEI den Schlufs, dafs die „Kraft des Vakuum begrenzte sei; und er sah voraus, dafs Quecksilber, w spezifisches Gewicht 13,6 mal so grofs als das des ist, nur bis zu einer 13,6 mal so kleinen Höhe im P rohre emporsteigen würde. Wiewohl aber Galilei teilweises Austreiben von Luft aus festen Ballons (im satz zu Aristoteles' Versuch mit einer biegsamen Bl mittels Erwärmung und Wägung das Gewicht de direkt nachgewiesen hatte, erkannte noch nicht er selbst den Gewichtsdru umgebenden Luft als die Erklärung jenes scheinbaren Emporgezogenw sondern erst Galileis Schüler Torricelli, der 1643 (ein Jahr nach Galile jene Abänderung der Erscheinung an Wassersäulen für Quecksilber durchfü

Anh. 45.

Fig. 183.



Torricellis Versuch: 1. Eine etwa 80 cm lange Gla die auf einer Seite offen, auf der anderen zugeschmolzen (Fi oder durch einen Hahn (eine Schraube) geschlossen ist, wir Quecksilber gefüllt, so dafs keine (möglichst wenig) Luft in der zurückbleibt. Wird das offene Ende mit dem Finger verschloss

umgekehrt, jenes Ende in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäfs *nn*
ıt und dann wieder der Finger weggezogen, so
ıur so viel Quecksilber aus der Röhre, dafs in ihr
.ne Säule von einer nach Ort und Zeit verschiedenen
ım Meeresspiegel durchschnittlich 76 cm = 760 mm)
er Quecksilberoberfläche im Gefäfse zurückbleibt.
aum über dem Quecksilber in der Röhre heifst
:ellische Leere" (sie enthält aber immer noch
Luft, falls das Quecksilber nicht wie bei guten
ɔtern ausgekocht u. dergl. ist; und selbst dann ent-
eser luftleere Raum noch Quecksilberdämpfe). —
et man sodann den Hahn, so sinkt das Quecksilber
Röhre um so mehr, je mehr Luft eindringt, und
bis zum Stande des Quecksilbers im äufseren Ge-
– 3. Bequemer als mit Röhre und Gefäfs ist der
llische Versuch auszuführen mittels des Apparates
7, § 45, wo der Torricellische Versuch als Grenz-
:s Mariotteschen Gesetzes bei Verdünnung vor-
werden wird.

Fig. 184.

n n

: vollständige Erklärung dieser Erscheinungen gab Pascal
, dafs er sie mit den Erscheinungen in kommuni-
.en Gefäfsen mit verschiedenen Flüssigkeiten ver-
ɔa nämlich die Luft eine Flüssigkeit ist und Gewicht hat,
nan sich den Spiegel des Wassers (Fig. 183) als Trennungs-
ler beiden Flüssigkeiten Wasser und Luft denken;
:sem Spiegel lastet dann noch einerseits in der Röhre die Wassersäule,
:s aufserhalb der Röhre die Luft bis an die obere Grenze des Luft-
und nach jenem Gesetze dürfen wir schliefsen, dafs **das Gesamtgewicht
om Wasserspiegel bis an jene Grenze reichenden Luftsäule vom
nitte der Röhre ebenso grofs sein müsse wie das der Wassersäule.**
he der Luftsäule kann man nach jenem Gesetze II allein nicht berechnen,
uft nach obenhin immer weniger dicht wird, § 46.) Vorausgesetzt, dafs die
lische Leere" wirklich völlig leer ist, d. h. dafs weder die Spannkraft von
zurückgebliebener Luft, noch die (bei gewöhnlichen Temperaturen sehr
Spannkraft der Quecksilberdämpfe die Quecksilbersäule dem Luftdrucke
merklich herabdrücken, ergibt sich folgende

rechnung der Gröfse des Luftdruckes: Wird in einer
en Röhre von 1 cm² Querschnitt durch den Luftdruck eine
on **76 cm Höhe,** also 76 cm³ Volumen getragen, so ergibt sich
× 13,6 = 1033 g ihr absolutes Gewicht und also auch die
des Luftdruckes auf 1 cm² gleich 1,033 kg = 1 at. (LA 118.) LA 118.

hier gewählte Zahl 76 cm gibt die durchschnittliche Höhe des
terstandes am Meeresspiegel an. Stellt man den Torricellischen
zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten an, so
et man verschieden hohe Stände des Quecksilbers in der Röhre, aus denen

sich somit verschiedene Gröfsen des Luftdruckes ergeben, z
genauen und bequemen Beob
die **Barometer** dienen.

Fig. 185.



Fig. 186.

A) Quecksilberbar
sind sämtlich nur bleibe
sammenstellungen von
Röhre und Mafsstab bei
cellis Versuch. Die B
heiten ihrer Konstruktion
der Rücksicht, dafs die d
druck angebende Quec
säule, deren Höhe *b* c
Barometerhöhe od. **Bar**
stand heifst, von dem S
des Quecksilbers im
(d. i. von der Trennung
zwischen Quecksilbe
Luft) an gemessen werde

Bei **Fortins Gefäfsb**
(Fig. 185) ist dies erreicht, in
jeder Ablesung mittels einer
unter dem Lederbeutel, der d
des Gefäfses bildet, in diesem d
silber auf eine solche Höhe e
wird, dafs der Spiegel zusan
mit der Spitze eines Elfenbe
die dem Nullpunkt des Mafsst
spricht.

Im **Birnbarometer** fin
solche Einstellung nicht statt,
die Weite der Birne im Verg
der der Röhre bei dem Sinke
Steigen des Quecksilbers der
nur so wenig über, bezw. u
Nullpunkt des Mafsstabes tri
es für die meist aufserwiss
lichen Zwecke solcher Inst
(Vermutungen über das bevor
Wetter aus dem Steigen un
ohne genaue Rücksicht auf
soluten Stand) unschädlich ist
vollkommensten sind die

Heberbarometer (Fig. 18
sind der obere geschlossene
untere offene Teil der Barome
von gleichem Querschnitt, wodurch Unterschiede in der Kapillardepressio
höchstens noch dann eintreten, wenn im offenen Schenkel das Quecksilbe

ydiert ist. Die Skala hat ihren Nullpunkt meist gegen die Mitte zu, von wo s zur oberen und zur unteren Kuppe die Abstände abgelesen und addiert werden. anchmal wird entweder die Röhre oder die Skala durch eine Schraube vor jeder blesung so weit verschoben, daſs die untere Kuppe auf den Nullpunkt der Skala ngestellt wird. (Vermeidung „parallaktischer Fehler“, § 182.)

B) **Aneroidbarometer** geben die Änderungen des Luftdruckes an urch die sich ändernden Deformationen luftdicht geschlossener (und eist annähernd leer gepumpter), elastischer, dünnwandiger Blechfäſse (nach Bourdon röhrenförmiger, vergl. Fig. 196, S. 190, nach Vidi senförmiger). Durch Hebel- und Räderwerk (vergl. Fig. 279, S. 264) erden die bei Änderung der Deformation eintretenden Bewegungen bertragen auf Zeiger an Skalen, welche durch Vergleichung mit uecksilberbarometern angefertigt sind.

Im selbstregistrierenden Barometer von Richard (**Barometrographen**) sind ehrere solcher Dosen übereinander gebaut und die Bewegungen des Zeigers zeichnen f einen mittels Uhrwerkes binnen einer Woche einmal sich umdrehenden zylindrischen Streifen vorlinierten Papiers die Luftdruckkurve (vergl. §§ 190, 201, 202).

Alle Barometer haben einen einzigen unmittelbaren Zweck: n jeweiligen Luftdruck anzugeben. Mittelbare Anwendung finden nn die Verhältnisse des Luftdruckes in zahlreichen physikalischen d speziell meteorologischen Untersuchungen, so namentlich bei Anben über Siedetemperaturen (§ 77), beim Entwerfen der Wetterkarten § 190, 202) u. s. f. —

Art und Begründung einiger Barometer-Korrektionen LA 119. LA 119.

§ 45. Boyles (Mariottes) Gesetz.

Denken wir uns den durch die schematischen Figg. 180—182 dargestellten ersuch auf dem Grunde des Luftmeeres angestellt, so steht die im Cylinder eingeschlossene Luftmenge, auch wenn der luftdichte Kolben als gewichtslos gedacht t, doch schon unter dem Gewichtsdrucke der äuſseren Luft. Da ein fester olben, der luftdicht schlösse und doch annähernd reibungslos verschiebbar wäre, icht herzustellen ist, so werden die Versuche zur Feststellung oder Bestätigung d Überprüfung des Mariotteschen Gesetzes immer mittels Quecksilbersäulen gestellt. Als praktische Druckeinheit dient dann der am Orte und zur Zeit des ersuches herrschende Luftdruck, bezw. das ihm gleiche Gewicht einer Quecklbersäule von der Höhe des jeweiligen Barometerstandes. Daher sind auch e Versuche besonders anzustellen für Gasspannungen, welche a) gröſser, b) kleiner d als der jeweilige Luftdruck (kürzer: a) für Verdichtung, b) für Verinnung); und zwar geschah dies bei den zunächst zu beschreibenden älteren pparaten gesondert für a) und b):

a) Für Verdichtung: An einer U-förmigen Röhre ist der kürzere Schenkel as „**Volumrohr**“) durch den Hahn abschlieſsbar und vom Hahn abwärts nach ubikcentimetern eingeteilt. In den längeren Schenkel (das „**Druckrohr**“, Manoterrohr) wird (durch Eingieſsen vom längeren Schenkel aus oder mittels einer mpe vom Verbindungsrohre her) so viel Quecksilber gebracht, daſs, wenn es in iden Schenkeln gleich hoch steht, im Volumrohr z. B. 6 cm³ Luft enthalten sind.

Hierauf wird der Hahn geschlossen, wodurch $v_0 = 6$ cm³ Luft von der Dichte und Spannkraft der äufseren Luft abgegrenzt sind. Durch Nachfüllen (oder Höherpumpen) von Quecksilber in den längeren Schenkel wird nun im Volumrohr diese Luftmenge in ein Volumen $v_1 = 3$, $v_2 = 2 \ldots$ cm³ zusammengedrängt, wozu erforderlich ist, dafs im Druckrohre das Quecksilber um 1, 2 ... Barometerhöhen über der jeweiligen Trennungsfläche von Quecksilber und Luft im Volumrohr steht. War der äufsere Luftdruck p_0, so entsprechen einander somit

$$\left.\begin{array}{ll} \text{die Volumina:} & v_0, \quad v_1 = \frac{v_0}{2}, \quad v_2 = \frac{v_0}{3}, \quad \ldots \\ \text{die Drucke:} & p_0, \quad p_1 = 2p_0, \quad p_2 = 3p_0, \quad \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Allgemein gilt:} \\ pv = p_0 v_0 = Konst. \end{array}$$

b) Für Verdünnung: In der Torricellischen Röhre wird (bei geöffnetem Hahn) durch Eintauchen in ein tiefes Gefäfs mit Quecksilber eine gewisse Luftmenge von der Spannung p_0 im Volumen v_0 abgeschlossen. Die Röhre wird dann (bei geschlossenem Hahn) so weit herausgezogen, dafs dieselbe Luftmenge die Volumina $2v_0$, $3v_0$, ... annimmt. Dabei werden die Höhen der jeweilig (mit der Röhre gleichsam emporgezogenen, in Wirklichkeit aber:) durch den äufseren Luftdruck emporgedrückten Quecksilbersäulen abgelesen, welche immer kleiner als der Barometerstand sind, aber ihm um so näher kommen, je weniger dicht die abgeschlossene Luft geworden ist. Der irgend einem Volumen $v > v_0$ entsprechende Druck $p < p_0$ ergibt sich aus der Überlegung, dafs der äufsere Luftdruck p_0 dem Gewicht der Quecksilbersäule von der Höhe h vermehrt um die ebenfalls nach abwärts wirkende Spannkraft p der eingeschlossenen Luft das Gleichgewicht halten mufs. Durch solche Berechnung des je einem abgelesenen Volumen v entsprechenden Gasdruckes p findet man zueinander gehörig

$$\left.\begin{array}{ll} \text{die Volumina:} & v_0, \quad v_1 = 2v_0, \quad v_2 = 3v_0, \quad \ldots \\ \text{die Drucke:} & p_0, \quad p_1 = \frac{p_0}{2}, \quad p_2 = \frac{p_0}{3}, \quad \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{und allgemein wieder:} \\ pv = p_0 v_0 = Konst. \end{array}$$

Bei beiden Versuchsreihen sind natürlich nicht nur die ganzen Vielfachen und Bruchteile von Volumen und Druck durchzuprüfen, sondern wenn auf irgend ein beliebiges $v = nv_0$ eingestellt ist, so zeigt sich der zugehörige Druck

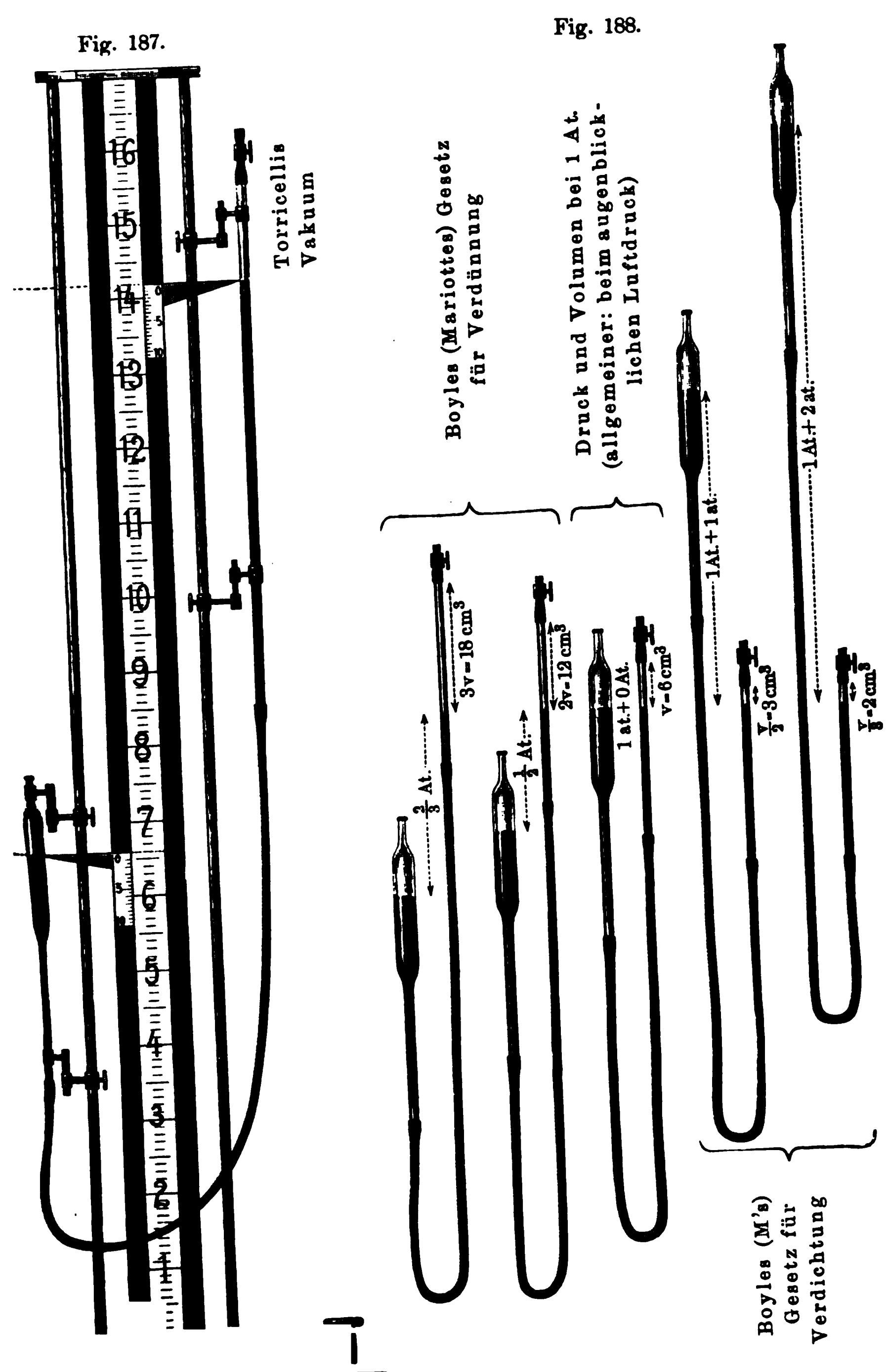
LA 120. $p = \frac{1}{n} p_0$, wodurch das Gesetz $pv = Konst$ (LA 120) wiederum bestätigt wird.

In neueren Apparaten zur Prüfung des Boyleschen Gesetzes (Fig. 187) sind Volumrohr und Druckrohr (Manometerrohr) unten durch einen Kautschukschlauch verbunden. Durch relatives Heben, bezw. Senken des Manometerrohres läfst sich dann die Luft im Volumrohre sowohl auf gröfsere wie auf kleinere Dichte im Vergleich zur äufseren Luft bringen.

Fig. 188 zeigt z. B. fünf zusammengehörige Paare vom Werte des Druckes p und des Volumens v (= 6 cm² bei 1 at).

Mittels dieses Apparates läfst sich vor allem auch Torricellis Versuch am bequemsten ausführen: Bei geöffnetem Hahn des Volumrohres wird das Druckrohr so hoch gestellt, dafs das Quecksilber in beiden Schenkeln gleich hoch und zwar bis etwas über dem Hahn steht. Beim Schliefsen des Hahnes und Senken des Manometerrohres um mehr als eine Barometerhöhe bildet sich dann unterhalb des Hahnes das Torricellische Vakuum, welches bei weiterem Senken immer gröfser wird, aber so, dafs die Niveaudifferenz in beiden Röhren immer eine

Fig. 187. Fig. 188.



Barometerhöhe bleibt (Fig. 187). — Es ist dies zugleich der Gre des Mariotteschen Gesetzes für Verdünnung.

Die aus den Versuchen sich ergebenden Abhängigkeiten lassen sic viererlei Art formulieren, indem man einerseits entweder vom Volumen od der Dichte, anderseits entweder von dem auf das Gas von aufsen ausg Druck p oder von dem im Gas hervorgerufenen gleichen Gegendruck, dem in Druck, der Spannung, Spannkraft, Expansivkraft des Gases spricht. diese Spannung einen besonderen Fall der druckelastischen Gegenwir (§ 51) darstellt, liegt es nahe, sich in 1 und 2 den äufseren Druck a Bewirkende, in 3 und 4 den inneren Druck = Spannkraft als das Bew zu denken, was dann zu folgenden vier Formulierungen führt:

Für je eine bestimmte Gasmenge sind einander

1. **äufserer Druck u. Volumen umgekehrt proportional:** $pv = K$
2. **äufserer Druck und Dichte direkt proportional:** $\frac{p}{d} = K$
3. **Volumen und Spannkraft umgekehrt proportional:** $ev = K$
4. **Dichte und Spannkraft direkt proportional:** $\frac{e}{d} = K$

LA 121. Graphische Darstellung der Gesetze 1 und 3 durch Hyperbeln L

Von den Gesetzen 1—4 gelten 1 und 3 für eine gegebene Gasmenge LA 120. 6 cm³ Luft bei 76 cm Druck und 0° C. (LA 120), dagegen 2 und 4 unab von einer bestimmten Menge, weil die Dichte (das spezifische Gewicht) des als in jedem Punkte eines gröfseren oder kleineren Volumens gleich voraus ist. Eben deshalb ist aber der mechanische Zustand einer Gasmenge Mariottes Gesetz nur so lange ausreichend beschrieben, als von dem Druck, d Gas infolge seines absoluten Gewichtes auf die tiefer gelegenen Teile ausübt abgesehen wird, wie es in dem ganzen vorliegenden Paragraphen geschehen Dagegen wird über die besonderen Wirkungen, welche neben der Span der Gase selbst durch die an jenen wie an allen flüssigen und festen K angreifende Schwerkraft hervorgebracht werden, erst im folgenden Parag gehandelt werden, wo dann auch die bisherige Annahme, dafs die Dichtigk Gase in verschieden hoch gelegenen Teilen einer Gassäule die gleiche sei, genauere Annäherungen ersetzt wird.

Als Regnault (1847) Versuche nach einer der erstbeschriebenen ähn aber empfindlicheren Methode und für Drücke bis zu 30 at mit verschiedener anstellte, fand er, dafs durch das Boylesche Gesetz die wirkliche Abhän zwischen Druck und Volumen einer Gasmenge nur in einer ersten Annäh wiedergegeben ist, wobei die Annäherung eine um so bessere ist, je ge die Gasdichten sind. Dagegen werden bei grofsen Drucken (namentlich bei s die das Gas seinem Kondensationszustande nahebringen, § 77) die Abweic von $pv = Konst$ immer gröfser; und zwar zeigten noch spätere Versuche a dafs bei Drucken bis zu 3000 at alle Gase sich immer weniger verdichten sich also dem Verhalten der Flüssigkeiten annähern.

Die bisher entwickelten Beziehungen sind rein aëromechanische, d. ziehen nur die mechanischen Gröfsen p, e und d und die geometrisch Betracht. Es stehen aber diese Gröfsen nicht nur untereinander, sonder mit der jeweiligen Temperatur in Abhängigkeit, welche durch das mecha

nermische MARIOTTE-GAY-LUSSACsche Gesetz ausgedrückt ist (§ 74). — Es wird aher im vorliegenden Abschnitte überall konstante Temperatur vorausgesetzt.

§ 46. Auftrieb in Gasen. Wägen im luftleeren Raume. Gewicht der Gase. Dichteverteilung in hohen Gassäulen.

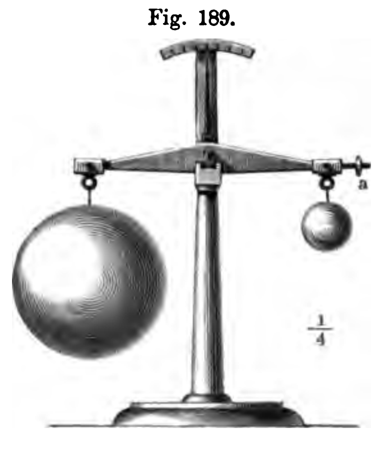
Die antike Unterscheidung schwerer und „leichter" Körper (§ 2) wurde überflüssig, als GALILEI für das Aufsteigen warmen Rauches, für das Schweben der Wolken u. dergl. m. die Erklärung gefunden hatte, dafs das Archimedische Gesetz nicht nur für tropfbare, sondern auch für gasförmige Stoffe gelte. Der auffälligste Beleg für diese Erklärung ist der

Luftballon. *Versuch*: Ein Seiden-(Gummi-, Kollodium-)Ballon übt, solange er mit noch gar nicht oder nur wenig erwärmter Luft, mit Wasserstoff oder Leuchtgas gefüllt ist, einen Druck nach abwärts, bei einer bestimmten stärkeren Erwärmung, bezw. Füllung gar keinen Druck oder Zug, bei noch gröfserer einen Zug nach aufwärts aus. — Allgemein gilt: Die Luft übt auf die in ihr befindlichen (festen, flüssigen, gasförmigen) Körper einen **Auftrieb** aus, dessen Gröfse gleich ist dem Gewichte der verdrängten Luft.

Was wir als das absolute Gewicht P der Körper an der Erdoberfläche zu bezeichnen pflegen, ist also streng genommen schon wieder nur die Resultierende aus ihrem wirklichen, von der Gravitation gegen die Erde (einschliefslich der Fliehkraftwirkung, § 31) herrührenden Gewichte P' und dem entgegengesetzt gerichteten Auftrieb p seitens der Luft (und der mit ihr gemischten übrigen Gase Kohlendioxyd, Ammoniak und namentlich Wasserdampf); also $P = P' - p$ und $P' = P + p$. — Dieser Schlufs wird bestätigt durch

Versuche mit dem Dasymeter (Fig. 189): An einer kleinen Wage halten ein Messingkörper von kleinem und ein Glasballon von viel gröfserem Volumen einander das Gleichgewicht, solange sie sich in Luft befinden. Es senkt sich aber der Ballon, sobald die ihn umgebende Luft verdünnt und ihm so der (wie ein Kissen aus Luft ihn tragende) Auftrieb zum Teil entzogen wird.

Fig. 189.



Bei sehr feinen Wägungen, namentlich von Körpern mit kleinem spezifischen Gewichte, mufs daher immer auf die Dichtigkeit der umgebenden Luft Rücksicht genommen und es müssen die Wägungen auf den leeren Raum reduziert werden.

Durch diese Rücksicht auf den Auftrieb werden nun auch erst alle Wägungen von Gasen möglich. So hatte schon ARISTOTELES die Frage, ob auch die Luft Gewicht habe, dadurch entscheiden zu können geglaubt, dafs er eine Tierblase wog, als sie mit Luft gefüllt, und dann, als sie von ihr entleert war. Er hatte

dabei übersehen, dafs infolge des Zusammendrückens beim Entleeren der
LA 122. um ebenso viel abgenommen hatte wie das Gewicht selbst (LA 122).
diesem Mangel freie Versuch GALILEIS, eine solche Wägung an einem
Ballon vorzunehmen (§ 44), ist vorbildlich für die gegenwärtige Meth
Wägung von Gasen: In einem Ballon von vorher bestimmtem Fassungsrau
5 Liter) wird mittels der Luftpumpe die Luft verdünnt, dafs diese nur m
an der Barometerprobe abzulesende Spannkraft und daraus zu erschl
Dichtigkeit hat. Dann wird der Ballon an einer Wage (nach REGNAUL
Anbringung eines zweiten ebenso grofsen Ballons, behufs Kompensat
Änderung des Luftdruckes während des Versuches) tariert und nun Luft
anderes Gas in den Ballon eingelassen. Die Gewichtszunahme ist dann das
Gewicht dieser Gasmenge unter dem jeweiligen Druck der äufseren Luf
der im Ballon verbliebenen Luft. Hieraus ergibt sich dann das spez
Gewicht des Gases. — Korrektionen wegen des Auftriebes der Luft
herrschenden Temperatur. — Nach solchen (namentlich durch REGNAULT mit
Beharrlichkeit gehandhabten Methoden) ergab sich vor allem:

Von trockener atmosphärischer Luft bei 76 cm Baromet und 0° C. fafst 1 Liter 1,293 g; also 1 m³ rund 1⅓ kg.

Auch eine Luftsäule von 1 cm² Querschnitt und 10 m Höhe wiegt also
Diese Zahl ist („zufällig") fast genau $^1/_{800}$ des Gesamtgewichtes der gan
LA 123. 76 cm Barometerstand über 1 cm² lastenden Luftsäule von 1,0336 kg (LA
„Atmosphärische Luft" ist hier das Gemenge aus Sauerstoff und Sti
(mit den geringfügigen Beimischungen von Argon und Helium u. s. w.,
Die der Luft meistens überdies beigemengten wechselnden Mengen von K
dioxyd, Ammoniak u. s. f. ändern jene Gewichtsangaben noch nicht w
ab; wohl aber ist ausdrücklich ganz trockene Luft vorauszusetzen (b
Versuchens die Luft mittels Durchstreichenlassen durch ein Chlorcalciumro
fältig zu trocknen), indem der Wasserdampf bei 76 cm das beträchtlich
spezifische Gewicht (relativ gegen Luft) von 0,63 $\doteqdot \frac{5}{8}$ besitzt (§ 77, II).

Wenn von den übrigen Gasen gesagt zu werden pflegt, sie seien teils „l
(dünner) als Luft", teils „schwerer (dichter)", so ist stillschweigend voraus
dafs sie unter demselben Druck wie Luft stehen und gleiche Temp
haben. Nur in diesem Sinne ist z. B. die Dichte, bezw. das spezifische
des Wasserstoffes 14½ mal so klein, das des Sauerstoffes 1,1, des Kohlend
3 mal so grofs als das der atmosphärischen Luft. — Da nun aber bestimm
mengen nicht wie flüssige und feste Stoffe ein bestimmtes natürliches V
und daher auch eine natürliche Dichte haben, so können wir uns auch a
auf die nämliche Dichte gebracht denken und haben dann das eigent
Verhalten z. B. des Wasserstoffes so zu charakterisieren: er zeigt bei

gleichem Druck und gleicher Temperatur sein **Normalgewicht** dann die unter Zugrundelegung der chemischen Molekularhypothese **ularglewicht** bezeichneten Gröfse mafszahlengleich gesetzt wird). einige Beispiele solcher Zahlenangaben (wobei die Luft, als „mechaemenge", nicht auf den chemischen Begriff des Normalgases zu be-:

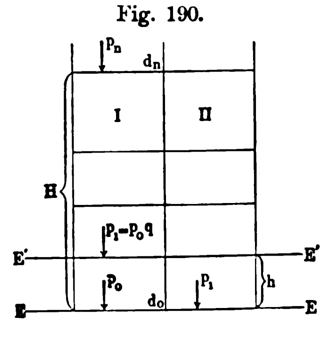
	Absolute Dichte [g cm^{-3} bei 76 cm, 0° C.]	Dichte in Bezug auf das Normalgas	auf Wasserstoff	auf Luft	auf Sauerstoff
. . . .	0,0000446	1	0,496	—	0,03125
f . . .	0,0000900	2,016 ≠ 2	1	0,069627	0,0630000
. . . .	0,001253	28,08 ≠ 28	13,93 ≠ 14	0,96981	0,8775
. . . .	0,001293	—	14,36 ≠ 14½	1	0,90484
. . . .	0,0014290	32,00	15,873 ≠ 16	1,10520	1
xyd . .	0,0039297	88,00	43,65 ≠ 44	3,03930	2,750000

dem im vorigen § zunächst unter Absehen von dem Gewichte der Luft m Mariotteschen Gesetze ergibt sich nunmehr auch die

hteverteilung in hohen Gassäulen. Aufgabe: Nach Gesetze nimmt die Dichte in einer Gassäule nach unten zu, n ab, wenn diese sich unter dem Drucke ihres eigenen es ins Gleichgewicht gesetzt hat (und wenn von der Ab-r Schwere gegen oben, wie von der Schwungkraft abgesehen, Galileisches Kraftfeld, § 21, vorausgesetzt wird)?

ben sei für eine bestimmte durch die Gassäule I gelegte wagrechte E (Fig. 190) das auf dieser Ebene lastende Gesamtgewicht p_0 und die Ebene herrschende Dichte d_0. Ge-nach dem Druck p in einer Höhe berhalb jener Ebene. — Da Druck längs der Säule sich stetig ver-müfsten wir, streng genommen, n unendlich dünne Schichten lenken. Doch erhalten wir auch ichbare Annäherungen, wenn wir H in eine endliche Anzahl (n) von der Höhe h zerteilt denken, $= nh$; je gröfser dann n gewählt so mehr nähert sich das Ergebnis chkeit (LA 124).

Fig. 190.



LA 124.

Lösung der Aufgabe führt dann folgende Überlegung: Denken wir ıfig neben die gegebene Säule I auf dieselbe Grundebene EE eine on gleichem Querschnitt gestellt, die im ganzen q mal so viel ($q < 1$) lt als I, so wird die Dichteverteilung in beiden Säulen mechanisch ein (wäre z. B. $q = \frac{1}{2}$, so wäre in gleichen Höhen über EE die Dichte

in II überall die Hälfte von der in I). Wenn dann in der um h m über EE (Ebene $E'E'$ der Druck $p_1 = p_0 q$ herrscht, so ist die Dichteverteilung : $E'E'$ die gleiche wie in II über EE. Daher um weitere h m höher d $p_2 = p_1 q = p_0 q^2$. Allgemeiner entsprechen den Abständen h, $2h$, $3h$, ... die Drucke $p_0 q$, $p_0 q^2$, $p_0 q^3$ ... $p_0 q^n = p$; in Worten:

Nehmen in einer Gassäule die Erhebungen in arithm(Reihe zu, so nehmen Dichte und Spannung in geomet Reihe ab. (Math. Anh. Nr. 10 und Nr. 17.)

Anh. 10 u. 17.

Die Anwendung der allgemeinen Aufgabe auf das Luftmeer der Erde

Barometrischen Höhenmessung. Es sei in einem best Niveau (an, über oder unter der Erdoberfläche) ein Barometers in einem anderen Niveau (an einer Stelle, welche keinen allzu wagrechten Abstand von der ersten Stelle hat) der Barometer beobachtet. Welchen Höhenunterschied H haben die beider Antwort: Es sei wieder $H = nh$. Da sich die Barometerständ(b an zwei Orten verhalten wie die daselbst herrschenden Dr

und p, so ist $b = b_0 q^n$. Diese Gleichung liefert $n = \frac{1}{log\, q}(log\, b$ -

oder (da $q < 1$ und $log\, q$ in sich negativ) $n = \frac{1}{-log\, q}(log\, b_0$ -

somit die schematische Formel für **barometrische Höhenm**

$$H = \frac{h}{-log\, q}(log\, b_0 - log\, b) \neq 18420\,\mathrm{m}\,(log\, b_0 - log\, b);$$ in '

Wie der Koeffizient 18420 m theoretisch und empirisch zu gewinnen i

LA 124. LA 124. — Auf 10 m Erhebung kommt anfänglich rund 1 mm Druckabn

Dafs und wie die obige schematische Formel für wirkliche baro Höhenmessungen erst durch mehrere Korrektionen geeignet wird, ver

§ 47. Aëromechanische Apparate.

Die kinetischen und statischen Erscheinungen an d (und anderen Gasen) infolge ihrer Spannkraft und ihrer S(haben zur Konstruktion der mannigfaltigsten **aëromecha** **Apparate** geführt. Die bewegten, bezw. im Gleichgewichte st Körper sind: a) Luft (und andere Gase) in den **Blasebälgen**

›eim Zusammendrücken das Ventil sich schliefst (wieder infolge der ıft) und die Luft durch die Düse austritt. Einfacher Blasebalg; zuagesetzter alg (behufs ; eines un- ›henen Luft- Fig. 191) bei ıfeuern, Or- . w. — Blase- ›bläse für Glas- eiten).

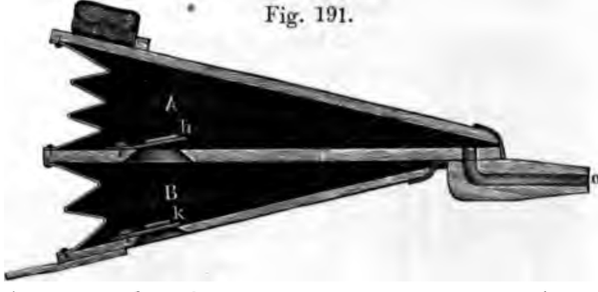
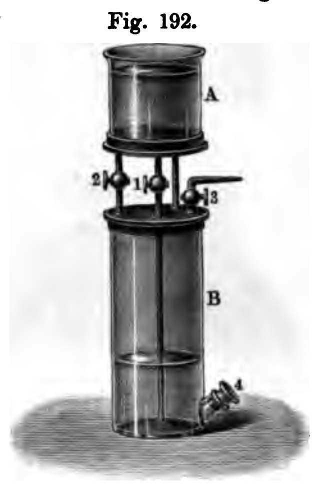


Fig. 191.

Gasometer lie Aufgabe, ›ht nur aufzufangen und aufzubewahren, sondern auch wieder nen von aufsen her ausgeübten Druck zum Ausströmen zu bringen. ›en die Gasometer der Anstalten für Leucht- h das eigene Gewicht der grofsen schmied- unten durch Wasser abgeschlossenen Glocken. ›ys Gasometer (Fig. 192) wird der Behälter B Gefäfs A aus durch den Hahn 1 zuerst ganz ›er gefüllt. Dann wird nach Abschlufs der , 2, 3 der Verschlufs 4 geöffnet (wobei nur asser ausfliefst; warum?) und der Schlauch ntwickelungsapparate hier eingeführt, wobei ı Spannung der eintretenden Gase das Wasser t wird; behufs Aufbewahrung des Gases wird wieder verschlossen. Zur Verwendung ge- ie Gase entweder durch Ausströmen bei 2 in › mit Wasser gefüllte Gefäfs oder durch 3, n Druck wieder das von A durch 1 herab- : Wasser ausübt. (Schildere im einzelnen die n von Hähnen mit doppelter Bohrung ırate selbst!)

Fig. 192.



›umatische Wanne (Fig. 193). **Heronsball. Spritzflasche. — Mariottes** (vergl. Fig. 17, S. 20) hat die Aufgabe, die Stärke des Flüssigkeitsstrahles Bodenöffnung von dem jeweiligen Stande der Flüssigkeit (und daher ›ellis Ausflufs- 42) unabhän- nachen. Dies urch erreicht, ·ch den übri- 'tdichten Ver- ine beiderseits ›hre $a\,b$ einge- durch welche, c Wasser aus- m Ersatz Luft- ndringen. Die e (durch Em- ı des Röhr-

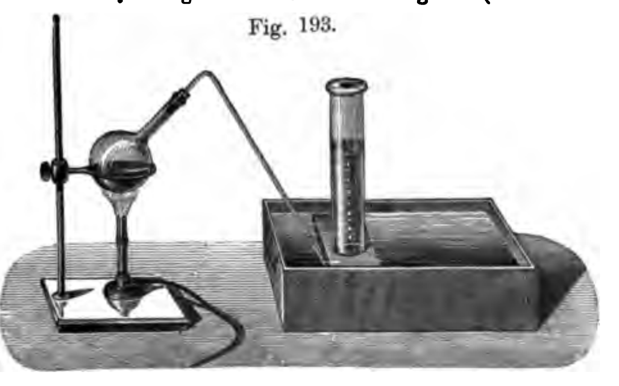


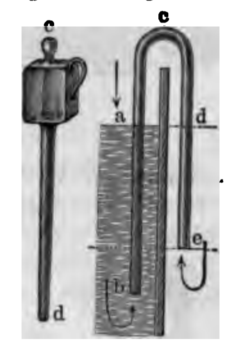
Fig. 193.

chens übrigens nach Bedarf zu vergrößernde) Ausflußgeschwindigkeit dann der Niveaudifferenz der Öffnungen *b* und *c*. — **Erklärung** durch zur pneumatischen Wanne LA 125.

LA 126.

Stechheber (Fig. 194), **Pipetten.** — **Der Winkelheber** (F ist eine beiderseits offene gekrümmte Röhre mit den (gleich od schieden langen) Schenkeln *cb* und *ce*. einmal gefüllt (durch Ansaugen oder auc gießen, Einlegen eines Kautschukschlau die Flüssigkeit ...), so fließt er so lange unter dem Niveau von *a* liegt. Voraus hierfür ist, daß der höchste Punkt *c* hö um die jeweilige Barometerhöhe (also für rund 10 m) über dem Spiegel *ad* liege.

Fig. 194. Fig. 195.



Mersenne meinte noch 1644 mittels eines Wasser über einen Berg führen zu können, beg bald darauf den Zusammenhang mit dem Toric Versuch, also auch die Abhängigkeit des Fließ Luftdruck. — Das Strömen des Wassers i Sinne *acd* erklärt sich so: D druck, der sich von *b* her und v auf *c* fortpflanzt, wird im eintau Schenkel um den hydrostatische der Wassersäule *ca*, im freien um den der längeren Säule *ce* dert; es bleibt also ein Überdr der eintauchenden Seite her. — schieht, wenn auch *e* in Wasser ta

Heronsbrunnen; Schilderu dem Modell. Warum läßt sich aus ihm wie aus dem Winkelh *Perpetuum mobile* herstellen?

Fig. 196.



Manometer dienen da Spannkraft der Luft oder Gase in abgeschlossenen teils durch hydrostatischen von Flüssigkeiten (Wasser, silber, Alkohol ...) in ei offenen kommunizierenden teils durch die Spannung geschlossenen Röhren zus gepreßten Luft gemäß dem schen Gesetz zu messen. Über mancherlei Formen von Meta metern (Fig. 196) nach dem der Aneroidbarometer im Ge

Hilfsapparate, die in mannigfachster Verwendung an hydro- und
ınischen Apparaten vorkommen, seien hier genannt die mannigfachen
on **Ventilen** (Kegel-, Klappenventile). Vergleichung
tungsweise mit den mehrfach gebohrten Hähnen.
:k- und **Hebepumpen**. — **Feuerspritzen** (älterer,
:onstruktion).

Fig. 197.

§ 48. Die Luftpumpen.

ei die Aufgabe gestellt, die Luft in einem Raume R
zipienten") a) zu verdichten, b) zu verdünnen.
ı solche Einrichtungen zu treffen sein, daſs ein anderer
der **Stiefel**, durch entsprechende Bewegungen eines
wiederholt a) mit Luft von auſsen gefüllt und
s S nach R gebracht werden, b) die Luft aus
und S verteilt und die aus S jedesmal nach
ntfernt werden kann. — Diese beiden Hauptgedanken
sehr mannigfaltiger Weise konstruktiv verwirklicht
Vorbildlich waren von GUERICKE an bis in die neueste
die **Wasserpumpen** mit ihren festen Kolben und
Erst seit 1857 kamen dazu als Verdünnungspumpen
ısilber- und **Wasserluftpumpen**; im folgenden werden
die „Kolbenluftpumpen" beschrieben, u. zw. Ventil-
m, durch welche die älteren „Hahnluftpumpen" fast
lrängt worden sind.

Verdichtungsluftpumpen (Fig. 197 — hier
ipient der Schaft einer Windbüchse). Der
wird im Stiefel so weit zurückgeschoben, daſs
ne seitliche Öffnung a Luft (oder durch Röhren
deres Gas) von auſsen den Stiefel füllt. Diese
im Vorwärtsschieben des Kolbens gegen den
ıten in diesen hineingepreſst. In der Ver-
sröhre zwischen Stiefel und Rezipienten ist ein
las sich gegen den Rezipienten hin öffnet
beim zweiten Zurückziehen des Kolbens die
ete Luft nicht mehr in den Stiefel zurück-
ı läſst („Rückschlagsventil").

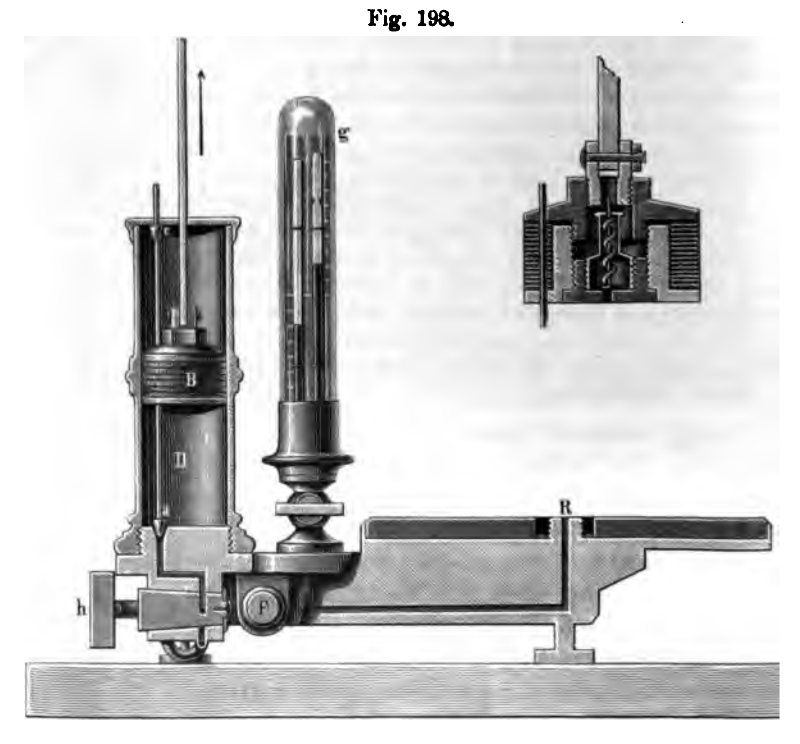
ı obigem Prinzip a) befindet sich vor dem 1., bezw.
n 1., 2., 3., . . . $n$ten Kolbenschube im Rezipienten
die Dichte d_0 der äuſseren Luft dem Volumen R,
$R + 2S$, . . . $R + nS$ entsprechende Menge Luft,
ber, weil sie auf denselben Raum R zusammen-
ist, die Dichten $D_0 = d_0$, $D_1 = \frac{R+S}{R} d_0$, . . .
$\frac{+ nS}{R} d_0 = \left(1 + n \frac{S}{R}\right) d_0$ besitzt. Es wachsen also
:en nach einer steigenden arithmetischen Reihe,

a a

deren konstante Differenz $\frac{S}{R}\,d_0$ ist. — Über die **Grenze der Verdichtung** folge des „schädlichen Raumes“, ferner über **Manometer behufs Mess** der Verdichtung s. u. gelegentlich der **analogen Bestimmungen für Verdünn**

b) **Verdünnungsluftpumpen.** Bei den gegenwärtig gebräuchlich zweistiefligen Ventilluftpumpen befinden sich im Boden Stiefel Kegelventile a (Fig. 198), in den durchbrochenen Kolben Klappenventile; beide öffnen sich vom Rezipienten gegen den Stie bezw. die äufsere Luft hin. — Ist der eine Kolben bis an den Bo

Fig. 198.



des Stiefels vorgeschoben und wird er nun gehoben, so tritt a durch a Luft nach dem Stiefel; hierbei ist das Ventil im Kolbe folge des äufseren Luftdruckes geschlossen. Beim Herabdrücken Kolbens schliefst sich a (indem seine Leitstange vom Kolben d Reibung um eine durch c bestimmte kleine Strecke mitgenommen w Sobald die Luft zwischen Kolben und Boden dichter wird als äufsere Luft, entweicht sie durch das Kolbenventil nach aufsen.

Durch abwechselnde Wirkung der zwei Kolben wird nicht nur Zeit er sondern auch die Arbeit des Hebens der auf je einen Kolben lastenden äu Luft ausgiebig vermindert, indem beim gleichzeitigen Herabziehen des an Kolbens die auf diesem lastende Luft selbst eine annähernd gleiche Arbeit verri

Nach dem Prinzipe b) hat sich nach dem ersten Heben des Kolbens die Luft, lche mit der Dichte d_0 nur R erfüllt hatte, auf $R + S$ verteilt und hat daselbst r mehr die Dichte $d_1 = \frac{R}{R+S} d_0$, wo der verkleinernde Faktor $\frac{R}{R+S} = q$ setzt werde. Auch nach dem Niederdrücken des Kolbens, also nach vollendetem sten Kolbenschub, ist $d_1 = q \, . \, d_0$. Ebenso verbreitet sich nun nach dem zweiten lbenschub diese Luft von der Dichte d_1 auf $R + S$ und es ist deshalb $d_2 = q d_1$ $q^2 . d_0$; ebenso $d_n = q^n . d_0$. Es nehmen also die Dichten nach einer fallen- n **geometrischen** Reihe ab, deren konstanter Quotient $\frac{R}{R+S}$ ist. — Hiernach rde eine Dichte Null erst nach unendlich vielen Kolbenschüben erreicht.

Es hat aber durch den unvermeidlichen **schädlichen Raum** ϱ zwischen dem glichst herabgedrückten Kolben und dem Boden des Stiefels die Verdünnung on dann ihre Grenze δ erreicht, wenn ein Stiefel S voll Luft von der Dichte δ, ϱ zusammengepreſst, die Dichte der äuſseren Luft d_0 angenommen hat, l dann beim nächsten Kolbenhub die Luft in R von der gleichen Dichte δ tz Hebens des Ventils a keine Veranlassung mehr hat in S überzutreten. Es also: $\delta = \frac{\varrho}{S} d_0$.

[Auch bei Verdichtungsluftpumpen macht sich der schädliche Raum analog end, indem hier das Übertreten von Luft aus S in R nicht mehr stattfindet, n die auf den schädlichen Raum zusammengedrängte Luft des Stiefels die hte $\varDelta$ der Luft des Rezipienten angenommen hat, wobei $\varDelta = \frac{S}{\varrho} d_0$.]

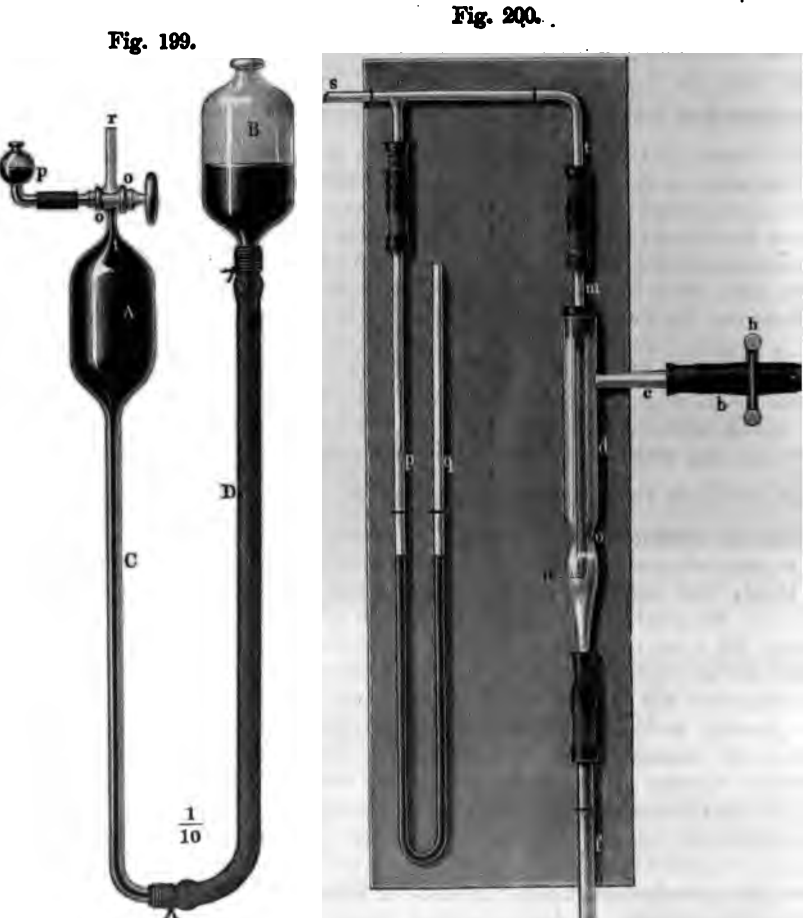
(Mittels des **Babinetschen Hahnes** — Erläuterung seiner Bohrungen an einem dell! —, der zwischen den beiden Stiefeln der Verdünnungsluftpumpe angebracht sein pflegt, läſst sich aus dem schädlichen Raum des einen Stiefels als einer t kleinerem Rezipienten die Luft von der Dichte d_0 mittels des anderen Stiefels ch weiter, bis 1 mm = $^1/_{760}$ at, verdünnen. — Dieser Nebenapparat der Kolben- tpumpen hat aber gegenwärtig an Wichtigkeit verloren, da hohe Verdünnungen tzt viel bequemer mit Quecksilberluftpumpen, s. u., hergestellt werden.)

Die jeweilig erreichte Verdünnung wird angezeigt durch die **Barometer- robe**, d. i. ein Manometer von der Form eines Heberbarometers mit verkürztem schlossenen Schenkel unter einem absperrbaren kleinen Rezipienten im Luft- mal. [Ähnlich: Manometer an Verdichtungsluftpumpen.]

Die zahlreichen mit der Luftpumpe anstellbaren Schulversuche demonstrieren) durch die verschiedenen Bewegungen der Luft beim Pumpen selbst die rch das Mariottesche Gesetz näher bestimmten Eigenschaften (Zusammendrück- rkeit, Ausdehnsamkeit). B) Ausdehnsamkeit der Gase (ohne wesentliche Mit- irkung des Luftdrucks): Anschwellen schlaffer Blasen, Austreiben der Luft aus Nüssen, ern, Holz, des Kohlendioxyds aus Bier (warum schwellen hier die Gasbläschen in n späteren Stadien des Versuches auffallender an als zu Anfang?). C) Der Luft- ruck zerreiſst durch einseitigen Druck eine Tierblase (Pergamentpapier); Glas- tte über einer beiderseits offenen dickwandigen Glasröhre. Unter einem hohen zipienten fällt das Barometer, fängt der Stechheber an und hört der Winkelheber f zu flieſsen u. s. w. D) Auſsermechanische Versuche nach §§ 77, 156. E) Prak- ische Anwendungen beim Imprägnieren von Holz, in Zuckerfabriken, um den depunkt zu erniedrigen. Bei der Rohrpost wird je ein groſses Reservoir mit ver- nter und eines mit verdichteter Luft abwechselnd mit den Mündungen der die ronen mit den Briefschaften aufnehmenden Rohrleitung in Verbindung gesetzt,

Die Quecksilberluftpumpen. Wie im Stiefel einer Verdünn luftpumpe durch Zurückziehen des Kolbens, so entsteht ein Va auch bei dem Torricellischen Versuch; und zwar auch, wenn Röhre oberhalb der Quecksilbersäule beliebig erweitert ist. Wird

Fig. 199. Fig. 200.



mit dieser Erweiterung ein Rezipient verbunden, so wird auch die Luft verdünnt. (Fig. 199.)

In der ältesten Quecksilberluftpumpe von Geifsler ist die er Torricellische Röhre *A* wiederholt durch Emporheben eines mit ihr durc Kautschukschlauch verbundenen Gefäfses *B* zu füllen, beim Senken wieder leeren und die Verbindung zwischen dem Raum *A* und dem Rezipienten Drehen des Hahnes *o o* herzustellen und zu unterbrechen. Die aus dem Rez nach *A* gezogene Luft kann durch eine zweite Hahnbohrung nach *p* ent Seither wurden zahlreiche Verbesserungen ersonnen, so dafs jetzt weit Verdünnungen als mit den besten Kolbenluftpumpen erreicht und rasch he

nd. Sie gehen bis unter 10^{-8} at, wie man durch eigens konstruierte Manometer, ler auch schätzungsweise aus den in solchen Räumen bei elektrischen Entladungen aftretenden Lichterscheinungen erschliefst. — Anwendungen für die Luftentleerung, usw. Füllung mit anderen Gasen bei den Geifslerschen, Crookesschen, Röntgenschen Röhren (§§ 156, 158), den elektrischen Glühlampen (§ 167) u. s. f.

Die **Wasserluftpumpen** (Fig. 200). In das Abzugsrohr *abcdf* einer Wasserleitung, durch welches das Wasser rasch abströmt, mündet ein Rohr *stmn*, das bei *s* zu einem Rezipienten führt. Das rasch durch *of* dahinschiefsende Wasser reifst dann aus *mn* so viel Luft mit sich, afs im Rezipienten Verdünnung (bis zur jeweiligen Spannung des Wasserdampfes, § 77) eintritt.

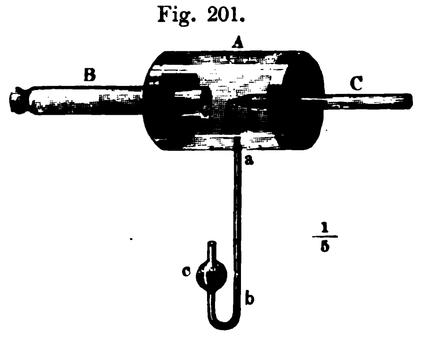
§ 49. Einige Bewegungserscheinungen an Gasen.

Im bisherigen waren Bewegungserscheinungen der Luft (und anderer ase) nur als Begleiterscheinungen der aërostatischen Versuche in Betracht zogen worden, so insbesondere das Strömen der Luft zwischen Rezipienten und tiefel der Verdichtungs- und Verdünnungsluftpumpe, das Einströmen in den allon beim Wägen der Gase u. dergl. Im allgemeinen sind die phoronomischen ypen der Bewegungen von tropfbaren Flüssigkeiten [Strömungen (speziell rkulationen) und Wirbel (speziell Wirbelringe), § 42] ohne weiteres übertragbar f die gasförmigen Körper; über ihre umfassende meteorologische Bedeutung. Dynamisch kommt als Hauptursache für die Störungen des Gleichgewichts nerhalb kleinerer oder gröfserer Gasmengen die Verschiedenheit der Spannung folge verschiedener Dichtigkeit hinzu, gemäfs dem Hauptgesetz:

Bestehen an zwei Stellen *A* und *B* einer Gasmenge verschieden rofse Spannungen, so tritt Bewegung ein, die den Spannungsnterschied ausgleicht, indem Gas von Stellen höheren zu solchen iederen Druckes abfliefst.

Ähnlichkeit mit dem Ausgleich von Niveaudifferenzen bei tropfbaren Flüssigkeiten (§ 39), von Temperaturdifferenzen (§ 78), Potentialdifferenzen (§ 140) u. dergl. s ist für diese Analogieen lehrreich, dafs bei der praktischen Benutzung eines Vakuums" (z. B. bei der Rohrpost) dieses in mehrfacher Hinsicht nicht minder ie ein positives Agens sich verhält s die verdichtete Luft (— wie denn ch noch Galilei von der „Kraft des Vakuums" sprach). Schon das Emporgen von Wasser in einer Röhre mittels s Mundes oder eines Kolbens legt die Vorstellung vom Emporziehen für jeden he, der noch nichts vom Luftdruck eifs.

Fig. 201.



Wie in der Wasserluftpumpe der Wasserstrom, so reifst der Luftstrom, elcher aus dem engeren Rohr *C* in das eitere *B* (Fig. 201) übertritt, Luft mit ch, so dafs in dem weiten Rohre „negativer Druck" eintritt, wie sich an m Steigen der Flüssigkeit im Manometerrohre zeigt. Flüssigkeitszerstäuber, —

Weitere paradoxe Erscheinungen: Hält man die Hand nahe über ein Papi und bläst kräftig zwischen den Fingern gegen das Papier, so sucht es nicl zufliegen, sondern kommt zur Hand hinauf (**ähnlich die Platte *cd* an dem A**)

Fig. 202.

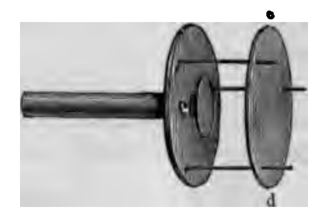


Fig. 202). — Bläst man gegen eine bauchige I so gehen die Stromfäden der Luft um die herum, so dafs sie eine hinter ihr stehende I flamme auszulösch envermögen. Diesem Umscl werden durch Stromfäden ist analog die S leichte Körper, wie Eischalen, dünnwandige kugeln ... auf Springbrunnen tanzen zu la Wieder geben solche Paradoxa einen Einl die Komplikationen hydrodynamischer un dynamischer Vorgänge.

V. Mechanik der sogenannten Molekularwirkungen.

---

§ 50. Abweichungen der Naturkörper von den Gre begriffen starrer Systeme, idealer Flüssigkeiten und (

Wie schon im § 25 und § 35 hervorgehoben wurde, **ist der Begr** starren Systeme zunächst nur eine wissenschaftliche Fiktion, nämli Grenzbegriff für die in der Natur wirklich vorkommenden **festen Körper** Stoffe, vergl. § 16, S. 60), dem sich die festen harten am meisten, die f weichen, biegsamen . . . weniger nähern. Je nach der Art der gegens Verschiebungen der Teilchen und der hieraus sich ergebenden Gestaltsv rungen, die an festen Körpern durch gegebene Kräfte hervorgerufen werde je nachdem diese Veränderungen nach dem Aufhören der Kräfte „von (genauer: infolge der zwischen den Teilchen des Stoffes wirkenden „Mol kräfte") wieder rückgängig gemacht werden oder nicht, unterscheidet m allem **elastische** und **nicht elastische** Stoffe. Wieder bildet hier der Beg vollkommen elastischen Stoffe den einen Grenzbegriff, dem sich z. B. Elfenbein (der Billardbälle) ... sehr gut, Kautschuk, Fischbein ... weniger r

Die Art der bleibenden Gestaltsveränderungen wenig elastischer (begriff: vollkommen unelastischer) Stoffe ist für die Art der Bearbeitu Stoffe von gröfster praktischer Bedeutung; und so unterscheidet die unersch reichhaltige „mechanische Technologie" nach den besonderen Arbeit schaften die Stoffe als **bildsam** (knetbar, hämmerbar, walzbar, prägba spinnbar, giefsbar, lötbar ...), **spröde** (spaltbar, schleifbar ...). Hierbei d sich der Praxis alsbald feinste Unterschiede auf (z. B. zwischen engl steirischem . . . Stahle), die die Theorie nur allmählich unter bestimmte (nische, chemische ...) Begriffe zu bringen weifs. Z. B.: Zu Scheidemünzen sich Bronze besser als Kupfer, da es zu geringe „Schabfestigkeit" hat (dal Prägung sich zu bald „abwetzt"). An Aluminium sind nicht leicht Sch gewinde anzudrehen; es ist schwierig zu polieren und kaum zu löten. Unter

der Haltbarkeit von Tuchsorten . . . — Nach jenen mechanischen Haupt-
terschieden der Stoffe und der beabsichtigten Gestaltsveränderung richten sich
e Werkzeuge, bezw. Werkzeugmaschinen: Hammer, Prägstock, Walzen, Spinn-
aschinen . . . ; den feineren Unterschieden passen sich die unzähligen Abarten
ser Vorrichtungen und ihrer Handhabungen an. —

Auch der Begriff der vollkommenen (idealen) Flüssigkeit ist nur ein
enzbegriff, dem sich am meisten die **dünnflüssigen** Stoffe (Schwefeläther,
kohol, Wasser, Quecksilber . . .), weniger die **dick-, zähflüssigen** Stoffe (Honig,
er . . .) nähern.

Ebenso ist der Begriff der vollkommenen (idealen) Gase, zu dem die
naue Gültigkeit des Mariotteschen Gesetzes gehören würde (§ 35), in den
klichen Gasen immer nur annähernd, und zwar mit um so geringerer Annähe-
ng erreicht, je näher diese dem Kondensationspunkt kommen. —

Überhaupt bilden die drei „Aggregatformen" **fest, flüssig, gasförmig**
drei Haupttypen, zwischen denen es mancherlei Übergänge gibt.

Die Methode zur wissenschaftlichen Beherrschung dieser nach den verschie-
isten Richtungen sich erstreckenden Abweichungen von jenen drei Haupttypen,
sie in den Abschnitten II, III, IV vorausgesetzt worden sind, ist die Einfüh-
ng neuer Fiktionen, deren einfachste wieder die des (durch die genaue Gültig-
t von Hookes Elastizitätsgesetz, folgender Paragraph, definierten) voll-
mmen elastischen Stoffes ist. Der nächste Schritt in der Berücksichtigung
r Abweichungen von vollkommener Elastizität geschieht durch die
griffe der **elastischen Nachwirkung** und der **Elastizitätsgrenze**, ein weiterer
rch die Unterscheidung verschiedener Arten von **Festigkeit**. — Für Flüssig-
iten sind die Abweichungen von der Fiktion der vollkommenen Flüssigkeit einer
eoretischen Untersuchung am leichtesten zugänglich in den Erscheinungen der
pillarität (im weitesten Sinne, § 55). — Für Gase kommen jene Abweichungen
r Sprache im Zusammenhang mit der **kritischen Temperatur** (§ 77) u. dergl.

Sämtliche hiermit vorläufig überblickten Abweichungen der wirklichen Natur-
rper von der Fiktion völliger Starrheit, d. h. die allgemeine Erfahrung, dafs
e gröfseren Teile bis hinab zu den eben noch wahrnehmbaren Teilchen der
turkörper gegenseitige Verschiebungen durch entsprechend wirkende
räfte bis zur völligen Trennung der Teilchen zulassen, drängt zur Frage:
stehen jenseits der Grenzen direkter Wahrnehmungen die Naturkörper aus in
sich völlig starren, gegenüber allen mechanischen Kräften unver-
änderlichen Teilchen; oder geht die Teilbarkeit der Naturkörper ins
Unendliche (und hiermit vielleicht auch die Elastizität, Biegsamkeit . . . der
ch so klein zu denkenden Teile der in sich stetig zusammenhängenden Körper)?
Die erstere nimmt die Molekularhypothese an (über sie § 57); nach ihr
legen die mechanischen Tatsachen der Elastizität, Festigkeit, Kapillarität u. s. w.
ter dem Namen „Molekularwirkungen" zusammengefafst zu werden. Es
llen aber zunächst diese Tatsachen unabhängig von jener Hypothese nur auf
rund der Erscheinungen selbst dargestellt werden.

§ 51. Elastizität.

Nimmt ein fester Körper unter Einwirkung mechanischer Kräfte
relche Richtung in Bezug aufeinander und auf den Körper müssen
ese Kräfte haben?) Dehnungen, Verkürzungen, Verbiegungen,

Verdrehungen . . . an, und stellt sich nach dem Aufhören jener Kräfte die ursprüngliche Gestalt des Körpers „von selbst" wieder her, so äufsert der Körper gegenüber jenen formändernden Kräften **Zug-, Druck-, Biegungs-, Torsionselastizität.**

Aufser diesen vier (zunächst aus praktischen Rücksichten hervorgehobenen) Arten von Gestaltsänderungen lassen sich noch andere denken und dementsprechend auch noch andere Arten von Elastizität, unter denen sich insbesondere die „**Schubelastizität**" (Scherungselastizität) als theoretisch wie praktisch bedeutsam herausgestellt hat. Zur Veranschaulichung dieses Begriffes denken wir uns einen Würfel aus Gallerte unten und oben mit Fassungen (Schachteln, die nicht ganz bis zur Hälfte des Würfels reichen) versehen: es lassen sich die beiden Hälften des Würfels in horizontaler Richtung gegeneinander verschieben und die Gallerte wird kraft ihrer schubelastischen Gegenwirkung diese Verschiebung wieder rückgängig zu machen suchen. Über die Bedeutung dieses Begriffes für die schärfere Definition des tropfbar flüssigen Zustandes vergl. § 54.

Da an den übrigen Arten von Elastizität bis zu gewissem Grade auch die Zugelastizität beteiligt ist (z. B. Dehnung der Fasern beim Verdrehen; desgleichen können wir uns die beiden Hälften des Gallertwürfels voneinander getrennt und durch gespannte elastische Schnüre miteinander wieder verbunden denken, die dann beim Verschieben allein gedehnt werden), so werden die nächsten Mafsbestimmungen für Zugelastizität entwickelt.

Fig. 203.

Versuch: Ein prismatischer oder zylindrischer Streifen (Fig. 203, ein Schlauch) aus Kautschuk, der an dem oberen Ende festgeklemmt und am unteren mit 1, 2, 3 ... kg belastet wird, nimmt Verlängerungen an, die nach Beseitigung der Belastung wieder (annähernd) rückgängig werden. Dabei bringt dieselbe Belastung von p kg an Streifen von bestimmter stofflicher Beschaffenheit um so gröfsere Verlängerungen hervor, je gröfser ihre ursprüngliche Länge und je kleiner ihr Querschnitt ist. — An einem Stahldraht von gleichen Dimensionen sind jene Verlängerungen bei gleicher Belastung viel kleiner, oder: der **„Elastizitätskoeffizient"** des Stahls ist kleiner als der des Kautschuks.

Während es der gewöhnlichen Auffassung nahe liegt, dem Kautschuk „besonders grofse Elastizität" zuzuschreiben, weil er schon durch kleine Kräfte stark deformiert wird, gilt der physikalischen Auffassung z. B. ein Billardball aus Elfenbein elastischer als ein Spielball aus Kautschuk, und zwar 1. weil bei einer Deformation von bestimmter Gröfse in dem Kautschukball eine viel kleinere elastische Gegenwirkung geweckt wird als im Elfenbeinball; 2. weil bei Kautschuk die elastische Nachwirkung sehr grofs und die Elastizitätsgrenze sehr eng ist.

Die numerische Bestimmung des Elastizitätskoeffizienten (Dehnungskoeffizienten, der gegenwärtig häufiger als sein reciproker Wert, der Elastizitätsmodul, bei Berechnungen verwendet wird), ergibt sich aus feineren messenden Versuchen folgendermafsen: Es sei z. B. ein Stahldraht von q mm² Querschnitt am oberen Ende festgeklemmt und am unteren durch Gewichte belastet, welche eben ausreichen, ihn gerade zu strecken; er habe dann die „natürliche Länge"

...en. Werden dann noch 1, 2, 3 ... p kg zu jener Belastung hinzugefügt, so ...mmt er andere Längen L' und somit Verlängerungen $l = L' - L$ an, ...elche durch Mafsstäbe (genauer mittels Fühlhebel, durch Kathetometer- oder ...iegelablesung) gemessen werden können. Wird dann von den drei Gröfsen L, p je eine verändert, so zeigt sich das entsprechende l **umgekehrt proportional** ...m **Querschnitt** q, **direkt proportional der Länge** L und der **Belastung** p. ...e Abhängigkeit vom **Stoffe** wird so ausgedrückt, dafs z. B. bei Stahl für ... $= 1\ \mathrm{mm}^2$, $L = 1\ \mathrm{m}$, $p = 1\ \mathrm{kg}$ die Verlängerung rund $^1/_{20000}\ \mathrm{m}$ ist, welche Zahl ...n **als Elastizitätskoeffizient** k des Stahls bezeichnet wird und sein reziproker ...ert $E = 20000$ als Elastizitätsmodul des Stahls. Die entsprechenden Zahlen ...r einige andere Stoffe in der Tabelle S. 200 (zusammen mit einigen anderen ...rher gehörigen Gröfsenangaben). Jene Abhängigkeiten des l von k, q, L, p ...rden dann allgemein dargestellt durch die Formel für die

$$\text{zugelastische } \textbf{Verlängerung } l = k \frac{L}{q} p.$$

Eben diese Gleichung gilt auch für die **Druckelastizität** (die ...ier als Zugelastizität mit entgegengesetztem Vorzeichen in Rechnung ...bracht werden kann). — Von diesen Abhängigkeiten wurden zuerst ...e zwischen l und p allgemein ausgesprochen als

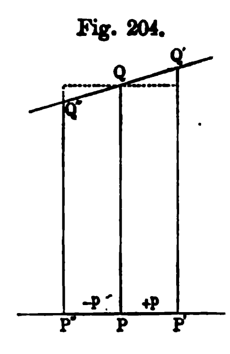
Hookes Elastizitätsgesetz (1678): Die elastischen **Defor...ationen** sind den sie hervorbringenden **Kräften** (Kraftmomenten) ...**nfach direkt proportional.** — Indem dann diese Körper wäh...nd der Deformation eine elastische Gegenwirkung ausüben, die den ...formierenden Kräften gleich und entgegengesetzt ist, **sind den De...rmationen** auch die elastischen **Gegenkräfte einfach direkt pro...rtional** („*Ut tensio, sic vis*"). — Eben diese einfachen Proportionali...ten bilden ihrerseits erst die feste **Definition** des „**vollkommen elastischen**" Stoffes.

Dieses zunächst für feste Körper aufgestellte Gesetz erinnert an das von ...ookes Zeitgenossen Boyle und Mariotte gefundene und bestätigte Gesetz für ...e **Gase**, das ja auch wesentlich ein **Elastizitätsgesetz** ist (LA 126). Ver...eichen wir die in Figg. 180 bis 182, S. 178, dargestellten Gassäulen mit ebenso ...estalteten Zylindern aus festem Stoffe, so entspricht das Verhalten des Gases bei ...em Vermehren und Vermindern des Druckes um verhältnismäfsig sehr kleine ...ruchteile des jeweilig schon vorhandenen Druckes dem druck-, bezw. zugelastischen ...erhalten des festen Körpers. Neben dieser **Ähnlichkeit** bestehen aber zwischen ...em festen und dem gasförmigen Körper folgende **Unterschiede**: 1. Das Gas ...esitzt überhaupt kein „natürliches Volumen", sondern das jeweilige ...olumen richtet sich ganz nach dem ausgeübten äufseren Drucke (und der ...emperatur); wogegen dem Kautschukzylinder, dem Stahldraht, falls er auch gar ...einen äufseren Kräften ausgesetzt ist, ein **natürlicher Querschnitt** und eine **natür...iche Länge** zukommt, die wir uns als ausschliefslich durch die zwischen seinen ...eilchen wirkenden **inneren** Kräfte (anziehende und abstofsende Molekularkräfte, ... 57, gegen die auch die eigene Schwere nicht in Betracht kommt) bedingt ...orzustellen haben. — 2. Hookes Gesetz für feste Stoffe gilt auch nur **inner...alb viel engerer** Grenzen als das Mariottesche Gesetz für Gase; dies zeigt einer...its die theoretische Überlegung (a), die anderseits schon durch die gewöhnliche

LA 126.

Erfahrung, wie durch messende Versuche (β) bestätigt wird: α) Es sei in die natürliche Länge eines Zylinders aus festem Stoffe als PQ, die durch di den, bezw. drückenden Kräfte $+p = PP'$ und $-p$ herbeigeführten Längen als $P'Q'$, bezw. $P''Q''$ g dargestellt. Wäre nun HOOKES Gesetz der einfac portionalität für die festen Körper unbegrenzt gi müfste z. B. Stahldraht von $q = 1\,\mathrm{mm}^2$ und $L = 2$ für die ziehenden, bezw. drückenden Kräfte

Fig. 204.



$\pm p =$	1,	2,	3 . .	20000,	20001
die Längen	20001,	20002,	20003 . .	40000,	40001
bezw.	19999,	19998,	19997 . .	0,	—1

also sogar unter 0 (!) annehmen, was den alltägli fahrungen widerspricht.

In den tatsächlichen Abweichungen von Hc setz ist die erste kritische Stelle gegeben durch di zitätsgrenze, die zweite durch die Festigkeitsgrei genannt „Festigkeit"). Es zeigt nämlich bei genauen Versuchen (β) z. Stahldraht folgendes Verhalten: Beläfst man dieselbe Belastung p kg Zeit, so nimmt die Verlängerung l mm allmählich immer noch gröfsere an, die erst nach monatelanger Belastung einen konstanten Grenzwert nic merklich überschreiten. Ebenso zieht sich nach Beseitigung der Belast Draht nur allmählich auf die ursprüngliche Länge zusammen (elastisch wirkung); ja in theoretischer Genauigkeit erreicht er diese überhaupt au mäfsigen Belastungen nie wieder. Indem man aber (mit WERTHEIM) bei 1 ı eine Verlängerung von $^1/_{20}$ mm (d. h. $^1/_{200}$ Proz.) als praktisch zu vernacl annimmt, ergiebt sich die Elastizitätsgrenze für ausgezogenen Stahldrah (für angelassenen nur 15 kg); und zwar fand bei dieser stärksten Belastı Verlängerung von 0,002 (bezw. 0,000 56) statt. An einen ausgezogenen Kup von $q = 1\,\mathrm{mm}^2$, $L = 1$ m darf man bis zu 12 kg anhängen, ohne dafs merkliche (über 0,05 mm) bleibende Verlängerung erfährt; durch diese 12 er um 0,93 mm verlängert. Wird er durch 40 kg um 3 mm ausgezogen, reifst er, weshalb 0,003 das Verlängerungsmaximum für Zugfestigkeit und 40 den Festigkeitsmodul darstellt. — Ebenso

	Elastizitäts- Koeffizient	Elastizitäts- Modul	Elastizitäts- Grenze	Verlängerung bei der Elastizitäts-Grenze	Verlängerung bei dem Zerreifsen
Stahl . . . (gezog.)	0,000 053	18 809	43	0,002 00	—
Kupfer . . (gezog.)	0,000 080	12 449	12	0,000 93	0,003
Silber. . . (gezog.)	0,000 137	7 274	11	0,001 49	0,0045
Tannenholz (längs d. Faser)	0,000 890	1 113	2,2	—	—

Änderung der Gesamtgestalt fester Körper durch Zu Druck. — Mit der bisher betrachteten Vergröfserung, bezw kürzung der Länge durch Zug- und Druckkräfte geht auc Verkleinerung, bezw. Vergröfserung des Querschnittes

, wie sich bei einem hinreichend dicken Kautschukstreifen r den einfachen Anblick ergibt. (Auch z. B. beim Stofs zweier ille gegeneinander werden diese nicht nur zusammengedrückt, es treten auch seitliche Verschiebungen ein.)

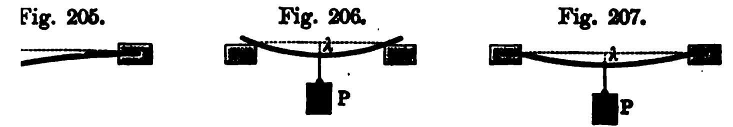


Fig. 205. Fig. 206. Fig. 207.

ı feinen messenden Versuchen an elastischen Drähten (indem z. B. der ı einer mit Wasser gefüllten Röhre umgeben ist, worin dann bei der des Drahtes das Wasser sinkt), entspricht innerhalb der Elastizitäts- ıer Längenänderung von 1 m auf $(1 \pm \lambda)$ m eine „Querkontraktion" ı und eine Volumveränderung (Vergröfserung = Dilatation, Ver- ; = Kompression) von $[1 \pm (1 - 2\mu)\lambda]\,m^3$, wo μ die ätszahl" heifst. Es ist für Glas $\mu = \frac{1}{4}$, für Stahl ür Kautschuk $\mu = \frac{1}{2}$.

Fig. 208.

besonders wichtiger Fall ist der, dafs ein Körper von ·en her gleichförmig zusammengedrückt wird, wobei sche **Kompressibilitätskoeffizient"** K gleich ist dem :n der gesamten Volumveränderung, die bei Druck einer Richtung eintritt (Analogieen zum linearen, ·schen Ausdehnungskoeffizienten der Stoffe für Wärme; ist z. B. für Kupfer $K = 0{,}0001199$, für Glas 0,000179.

Biegungselastizität äufsert sich z. B. an einem n den Schraubstock eingeklemmten Stabe, dessen Ende zur Seite gedrückt wird (— verschiedene : Befestigung und Belastung nach Fig. 205—207). :h eine bestimmte Kraft erzielte seitliche ebung eines Punktes in bestimmtem Abstande Befestigungsstelle (Verbiegung) ist bei weitem , als es die durch die gleiche Kraft erzielte erung oder Verkürzung wäre. — In dem so n Stabe werden dann die Längsfasern an der ı Seite der Krümmung auseinandergezogen, :onkaven Seite zusammengedrückt; zwischen hnten und den verkürzten Schichten des Stabes ine „neutrale Schicht".

bei jenen Drehungen und Verkürzungen geweckten druckelastischen Kräfte geben zusammen Kraft- ı, welche die Teilchen des Stabes um die Punkte der Schicht in die alte Lage zurückdrehen. — Auch nen, bezw. Zusammendrücken eines schrauben- ·wundenen Drahtes, wie bei Jollys **Federwage** LA 29), kommt nicht direkt die Zug- und Druck-, ie Biegungselastizität überwiegend zur Wirkung.

Die **Torsionselastizität** äufsert sich beim Verdrehe[n] Drähten, Fäden um ihre Längsachse. Ihre Gröfse wird also nic[ht] fach durch Kräfte, sondern durch **Kraftmomente** gemessen, un[d] heifst das Moment des Kräftepaars, das zur Verdrehung um Winkel 1 (in absolutem Mafse, d. i. 57° 17′ 44,8″) erforderlich [ist] **Torsionskonstante** des Drahtes. HOOKES Gesetz nimmt hi[er] Form an, dafs der **Torsionswinkel dem Torsionsmoment** e[...] **direkt proportional ist.**

Versuche mit dem Torsionsapparat (Figg. 144 und 145, S. 151) lehren, gegebenem Torsionsmoment der Torsionswinkel der ersten Potenz der Läng[e] der vierten Potenz des Durchmessers umgekehrt proportional ist. Indem sic[h] Drähte von sehr kleinem r und sehr grofsem L verwenden lassen, wi[rd] Torsion bei zahlreichen Apparaten nach dem Prinzip der Drehwage (Fig. 6[...] zur Messung sehr kleiner Kräfte (namentlich auch elektrischer un[d mag]netischer) und Kraftmomente angewendet.

§ 52. Festigkeit, Teilbarkeit, Kohäsion fester Kör[per]. Adhäsion fester und flüssiger Körper.

Entsprechend den Arten der Elastizität unterscheide[t] **Zug-, Druck-, Biegungs-** und **Torsionsfestigkeit** (auch Fes[tigkeit] gegen das Zerreifsen, Zerdrücken, Zerbrechen, Zerdr[...]

Überdies entspricht z. B. der Schubelastizität die **Schub-** oder **festigkeit** (auch „Querwiderstand“); sie ist unter allen Festigkeiten fü[r] Material am gröfsten, z. B. bei Sandstein sechsmal so grofs als die Zugfe[stigkeit].

Welche Art von Festigkeit wird besonders in Anspruch genomm[en] Stricken, Ketten, Tragseilen, Ziegeln, Brückenbalken, den einzelnen Besta[ndteilen] der Kettenbrücken, Zimmerböden, Wellbäume, Bohrstangen u. s. f.? —

Die allseitigen praktischen Anwendungen haben zu einer so umfa[ssenden] Ausbildung der Festigkeitslehre geführt, dafs diese geradezu den H[...] der mechanischen Technologie bildet. Insbesondere sind die Bedin[gungen] für die jeweilig zweckmäfsigste Ausnutzung einer gegebenen Menge Mate[rial fest]zustellen. Einige der einfachsten hierhergehörigen Erfahrungen sind: E[s erfordert] viel mehr Anstrengung, denselben Stab mit rechteckigem Querschnitt (z. [B.] Lineal) durch einen Druck auf die Schmalseite als durch einen auf di[e Breit]seite zu brechen (LA 127). — Eine gegebene Menge Eisen gibt einen vi[el trag]fähigeren Pfeiler, wenn dieser die Gestalt einer Röhre als die einer massiv[en Säule] hat (T-Träger, Röhrenbrücken ...): *Versuch:* Ein zusammengerollter Bogen

LA 127.

en-, Zerdrehtwerden kund. Indem nun z. B. das Zerrissenwerden nur an einer Stelle erfolgt, ist bewiesen, dafs der Körper gerade eine geringere Festigkeit als an den übrigen Stellen gehabt . müsse; wäre er völlig homogen gewesen, so hätte er gleichzeitig ll reifsen, d. h. in Staub zerfallen müssen.

omit gehen wir, streng genommen, über die direkten Erfahrungen schon , wenn wir uns jeden (zunächst festen) Körper als „aus **Teilchen** bestehend" ı, zwischen denen anziehende Kräfte wirken, als deren Gesamtwirkung inn der natürliche Zusammenhang, die **Kohäsion** des Körpers, dar- — Die Molekularhypothese (§ 57) führt diese Vorstellung bis über die n der Wahrnehmbarkeit weiter.

lei vielen, aber keineswegs allen Stoffen sind Zwischenräume reiem Auge oder unter dem Mikroskop sichtbar. So die **Poren** .olzes, Badeschwammes, Brotes, der Haut.

agegen giebt es keine direkten Erfahrungen, die uns zwängen, ähnliche wenn auch viel kleinere, z. B. im Glas, im Wasser anzunehmen. — Die ılarhypothese überträgt aber jenen Begriff der „Poren" auch auf die an- menen intramolekularen Zwischenräume.

'on der Kohäsion je eines Körpers wird unterschieden die **ision je zweier Körper,** sei es aus gleichem Stoffe (z. B. r fein geschliffener Glasplatten), sei es aus verschiedenen n (z. B. festem Spiegelamalgam, Quecksilber, Wasser und Glas).

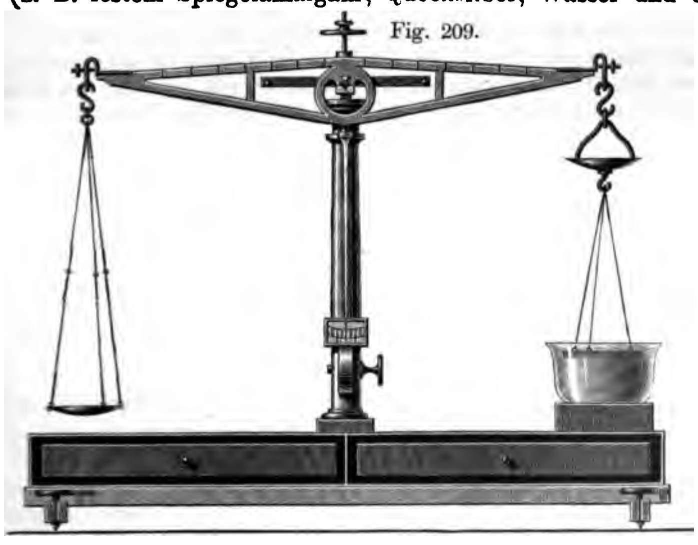


Fig. 209.

Die Gröfse der Kräfte, die beim Trennen zweier aufeinander haftender en zu überwinden sind, wird gemessen durch folgende *Versuche*: Unter die irzeren Schnüren hängende Schale der hydrostatischen Wage wird in genau echter Lage die eine „Adhäsionsplatte" gehängt und äquilibriert (Fig. 209). uf wird sie durch Senken des Wagbalkens herabgelassen auf die ebenfalls echte zweite feste Platte, oder auf den Spiegel von Quecksilber, Wasser . . .

Wird nun der Wagbalken wieder gehoben, so bedarf es bestimmter gewichte in der anderen Schale, um die beiden aneinander haftenden wieder zu trennen. — Die Ergebnisse dieser Versuche dürfen aber kei ohne weiteres sämtlich als Mafs der **Adhäsion** der einander berührenden gedeutet werden. Dies ist sofort ersichtlich z. B. bei Glas und Wasse da an dem Glase eine Schicht Wasser haften bleibt, so wird nicht die A zwischen Glas und Wasser, sondern die **Kohäsion** des Wassers selbs wunden und durch das Abreifsgewicht gemessen. — Aber auch z. I Trennen zweier Glasplatten voneinander ist nicht nur deren Adhäsion, der sie gegeneinander von aufsen pressende Luftdruck zu überwinden dem *Versuch:* Man breitet ein Zeitungsblatt flach auf den Tisch, fafst e Mitte und sucht es rasch emporzuheben). Auch haften zwei solche Platte falls nicht Punkt für Punkt aneinander, sondern es bleibt zwischen ihn wenn auch sehr dünne, Luftschicht eingeschlossen, und es kommt dann Adhäsion zwischen dieser Luftschicht und jedem der beiden Gläser mit tracht. Für die Erklärung der Kapillarerscheinungen (§ 55, III) ist wicl Ungleichung:

Das Verhältnis der **Adhäsion** zwischen Glas und Wass **Kohäsion** des Wassers selbst ist **gröfser**, als das entsprechen hältnis für Glas und Quecksilber.

Wird eine Bleikugel mit einem scharfen Messer durchschnitten und sogleich (bevor Oxydation eintritt) die Schnittflächen kräftig aneinander g so nähert sich die Adhäsion der Gröfse nach wieder der Kohäsion. Do z. B. die Scherben eines zerbrochenen Glases durch noch so inniges Anei drücken der Bruchflächen nicht wieder zu einem Ganzen zu vereinigen. E somit die Adhäsionskräfte das den direkt beobachtbaren Tatsachen möglich bleibende Beispiel von mechanischen Kräften dar, die zwischen den einan nahen, aber nicht mehr einander unmittelbar berührenden (räumlich verei Teilchen der Körper wirken. — Schweifsen, Löten.

§ 53. Kristallisation.

Viele feste Stoffe zeigen in ihrem natürlichen Vorkomme „Minerale") die bestimmte **Gestalt** mehr oder weniger vollk ausgebildeter **Kristalle** oder doch **kristallinisches Gefüge.** — welche jeder Spur eines solchen Gefüges entbehren (Leim, Kautsc überhaupt alle **Kolloide**), heifsen **amorph.**

Die sechs Kristallsysteme: **tesseral** (hexaedrisch), **quadratisch, rho monoklinisch, diklinisch, hexagonal,** werden als aus der Mineralogie vorausgesetzt. — Mit der Gesetzmäfsigkeit der Gestalt gehen aber auch fache besondere physikalische und chemische Eigenschaften Hand in Ha a) **mechanische:** die Spaltbarkeit parallel zu den natürlichen Kristal

Indem sich die Richtungen der Kristallachsen in diesen verschiedenen Beziehungen gegenüber anderen Richtungen hervortun, werden wir auf die Vorstellung geführt, dafs die Stoffverteilung innerhalb eines Kristalls nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene sein müsse. So bieten die Kristalle das auffälligste Beispiel zur Unterscheidung **homogener** und **nicht homogener, isotroper** und **anisotroper** Stoffe. Z. B.: Denkt man sich ein Kalkspatrhomboeder durch drei Bündel paralleler gegeneinander normaler (übrigens beliebig gegen die Kristallachsen orientierter) Ebenen in lauter gleich grofse Würfelchen zersägt, so weisen diese, wie klein man sie auch wählen mag, und gleichviel ob sie nahe der Hauptachse oder den Nebenecken gelegen waren, völlig gleiche Struktur auf: Der Kristall ist homogen. (Ein Kristall, der aus Schichten verschiedener Alaune besteht, ist anhomogen oder nicht homogen; desgleichen ein Hagelkorn . . .) Legt man aber durch irgend einen Punkt eines nicht dem tesseralen Systeme angehörigen Kristalles Gerade parallel, schief, normal zur Hauptachse, so zeigt der Kristall nach diesen verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäts-, Wärmeleitungs-, Brechbarkeits- . . . Verhältnisse: er ist anisotrop oder nicht isotrop. (Der Begriff des Isotropen bezieht sich also auf die Richtungen innerhalb eines Körpers, der des Homogenen auf die einzelnen Orte innerhalb des Körpers.) — Homogen und isotrop ist z. B. ein Kolloid wie Leim, der durch seine ganze Masse hindurch gleichmäfsig gekocht und abgekühlt worden ist.

Wiewohl der Begriff des Kristalls zunächst festen Aggregatzustand voraussetzt, weisen doch auch noch Flüssigkeiten teilweise Analogieen zu kristallinischen Stoffen auf, so namentlich durch ihr optisches Verhalten (§ 129).

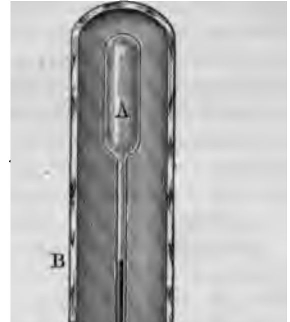
Auch für das Entstehen der Kristalle, das **Kristallisieren** (— das Wort „Kristallisation" bezeichnet einerseits den fertigen Zustand, andererseits sein Eintreten) ist die Beziehung des festen zu den beiden anderen Aggregatzuständen in der Regel von Belang; denn der weitaus häufigste Fall des Kristallisierens ist der, dafs sich ein fester Stoff aus flüssigem abscheidet, sei es im Erstarren bei Entziehung von Wärme, sei es beim Ausscheiden aus Lösungen, namentlich durch Verdunstung der lösenden Flüssigkeit. Doch bilden sich Kristalle auch aus Gasen und Dämpfen ohne beobachtbaren Durchgang, durch den flüssigen Zustand, so beim **Sublimieren** von Schwefel, Jod . . . Auch gibt es eine Umbildung amorpher fester Stoffe in kristallinischen Zustand oder ein Umkristallisieren aus einem Kristallsystem in ein anderes, z. B. beim Schwefel, § 218. Ein in der Praxis sich unliebsam bemerkbar machendes Beispiel ist das allmähliche Kristallinisch- und damit Brüchigwerden schmiedeiserner Wagenachsen infolge der wiederholten Stöfse beim Gebrauch.

§ 54. Zusammendrückbarkeit (Volumselastizität) der tropfbaren Flüssigkeiten.

Von den beiden charakteristischen Merkmalen, durch welche in § 35 der Begriff einer vollkommenen Flüssigkeit definiert wurde, war das erste das der Konstanz des Volumens einer gegebenen Flüssigkeitsmenge. — Ob und inwieweit die wirklichen Flüssigkeiten dieses Merkmal besitzen, hat sich lange Zeit nicht durch Versuche feststellen lassen. So stellte schon die Akademie zu Florenz den Versuch an, Wasser, das in eine hohle Silberkugel eingeschlossen war, dadurch zusammenzudrücken, dafs die Kugel deformiert wurde, was (weil von allen geometrischen Körpern die Kugel bei gleicher Oberfläche das gröfste Volumen hat) eine

Verkleinerung des Wasservolumens hätte bewirken sollen; nach den (n angezweifelten) Berichten drang aber das Wasser durch die Poren des Si Die Schwierigkeit, daſs das die Flüssigkeit umschlieſsende Gefäss von inne einen groſsen Druck erfährt und sich so erweitert oder gar zerspringt, Örstedt (1822) mittels des Piezometers (F So heiſst die mit einem Kapillarrohr verbunde birne (nicht auch der äuſsere Druckapparat!), eine bestimmte Wassermenge durch einen Que faden abgeschlossen ist, dessen Steigen die V verminderung jener Wassermenge anzeigt. eingeschlossene Wasser muſs durch Auskochen gemacht sein; nicht nötig ist dies bei dem da meter von auſsen umgebenden Wasser, auf von einer Wasserleitung mit einigen at oder einer Druckpumpe von auſsen her ein Druck a werden kann (Beschreibung der Hahnstellunge Pumpen). Die Gröſse des Druckes wird du Volumsänderungen einer zylindrischen Luftsä gezeigt, auf die sich der Druck des Wasse unteren offenen, in Quecksilber tauchenden E fortpflanzt. [Schon früher hatte Canton (17 Zusammendrückbarkeit des Wassers dadurch gewiesen, daſs er Wasser in einer thermome lichen Röhre dem Druck der äuſseren Luft a

Fig. 210.



und die Erweiterung des Gefäſses auf folgende Art in Abrechnung brachte dem das Gefäſs zum gröſsten Teile mit Wasser gefüllt, im übrigen dur kochen luftleer gemacht und hierauf zugeschmolzen war, wurde der Wass bis *a* in freier Luft, bis *b* unter der Luftpumpe und dann bis *c* wieder i Luft nach Abbrechen der Spitze des Gefäſses beobachtet.] — Örstedts V wurden später durch Regnault u. a. noch vervollkommnet und ergaben se

Die tropfbaren Flüssigkeiten sind **zusammendrückbar** und durchschnittlich nicht weniger als die festen Stoffe. Es wird n 1 cm³ Wasser bei 0° C. durch den Druck von 1 kg per cm² ≠ 1 etwa $^1/_{20000}$ cm³ zusammengedrückt; Quecksilber um etwa $^1/_{3000}$ wenigstens von allen Flüssigkeiten).

Gegen den von auſsen ausgeübten Druck zeigen die Flüssig eine elastische Gegenwirkung, ebenfalls ganz wie ein gedr fester Körper. Wenn jener Druck beseitigt wird, nehmen sie das frühere Volumen ohne merkliche bleibende Veränderung an sind also einem Druck gegenüber **vollkommen elastisch.**

Diese Elastizität ist am ehesten zu vergleichen mit der Druckelas fester Körper. Weil sie aber zusammen besteht mit der Unselbständigk Gestalt, ist sie genauer als bloſse **Volumselastizität** zu bezeichnen. Ihr über fallen die fünf Hauptarten von Elastizität, welche wir an festen K unterschieden haben, zusammen unter den Begriff der **Gestaltselastizität.** Thomson und Tait wird das den Flüssigkeiten gewöhnlich zugeschriebene charakteristische Merkmal der „Leichtverschiebbarkeit der Teilchen" gena schrieben als ein völliger Mangel an Schubelastizität.

Mit Rücksicht auf dieses elastische Verhalten der tropfbaren Flüssigkeiten winnen wir auch einen tieferen und schärferen Einblick in alle diejenigen Vorge der Fortpflanzung des Druckes in tropfbaren Flüssigkeiten, von welchen wins Satz samt seinen hydrostatischen Folgen handelt. So wird z. B. in einer n hohen Säule das Wasser in den tiefsten Schichten mehr zusammengeprefst als in den mittleren, daher auch gröfsere elastische Reaktion zeigen und so gröfsere Gewicht der hohen Säule tragen. Hiernach aber sind die Zustände einer solchen Säule tropfbarer Flüssigkeit nur graduell verschieden von den § 46 untersuchten einer schweren Gassäule. — Bei sehr hohem Drucke kann Kompressibilität von Gasen sogar kleiner werden als die von Flüssigkeiten. B. Luft von 0° C. (also noch gasförmige, nicht flüssige Luft) hat bei 100 bis at eine Kompr. 0,000883, bei 2000 bis 3000 eine Kompr. 0,000106; dagegen iges CO_2 bei 25,1° C. eine Kompr. 0,003 04.

Hinwieder nähert sich dem flüssigen Zustand der feste insofern, als unter k bis zu Tausenden von Atmosphären z. B. Marmor auf eine Verflüssigung ies, wie sie sonst nur bei Wärmezufuhr erfolgt (feinste Blei- und Zinnspäne ten Legierungen, Cu und S gingen chemische Verbindung ein). Auch z. B. r Sand, feuchter Ton würde in dem zu Stevins idealem Versuch angenommenen fs mit Kolben (Fig. 149, S. 158) annähernd eine gleichmäfsige Fortpflanzung Druckes zeigen wie tropfbare Flüssigkeiten.

Alle diese Übergänge der einzelnen Aggregatzustände ineinander gewinnen an Anschaulichkeit durch Einführung der Molekularhypothese (§ 57, S. 217) insbesondere der kinetischen Wärmehypothese (§ 83).

§ 55. Kohäsionserscheinungen an tropfbaren Flüssigkeiten. — Kapillarerscheinungen.

Von den beiden charakteristischen Eigenschaften einer vollkommenen Flüssig- trifft auch die zweite, wonach zu gegenseitiger Verschiebung der Flüssigsteile keine mefsbare Kraft erforderlich wäre, bei den wirklichen Flüssigkeiten ganz zu. Vielmehr zeigen diese zahlreiche feinere Erscheinungen, welche die Wirkung von Molekularkräften teils zwischen den Flüssigkeitsteilchen reinander, teils zwischen ihnen und den Teilchen der angrenzenden festen per, also aus Kohäsions- und Adhäsionskräften zu erklären sind. Sie den als **Kapillarerscheinungen** im weiteren Sinne bezeichnet, weil eine der llendsten von ihnen darin besteht, dafs in engen Röhrchen (Haarröhrchen, llus, Haar) Abweichungen von den Gesetzen der kommunizierenden Röhren treten; und zwar steht in engen lotrechten Glasröhren Wasser höher, ecksilber tiefer als die umgebende Flüssigkeit. Mit dieser Kapillarerhebung, w. Kapillardepression zusammen zeigt sich aber auch eine nach oben konkave rfläche beim Wasser, eine konvexe beim Quecksilber sowohl innerhalb der rchen wie an allen Rändern, wo die Flüssigkeitsoberfläche an Glaswände nzt. Dieser Gegensatz steht weiter offenbar im Zusammenhang damit, dafs s durch Wasser benetzt wird, durch Quecksilber nicht; und dies wieder hängt von dem Verhältnis der Gröfse der Adhäsion und Kohäsion zwischen s und Wasser, bezw. Quecksilber (§ 52). — Die allgemeine Kapillaritätstheorie uptsächlich ausgebildet durch LAPLACE) hat in die gegenseitige Abhängigkeit ser Erscheinungen folgenden gedanklichen Zusammenhang I, II, III, IV gebracht:

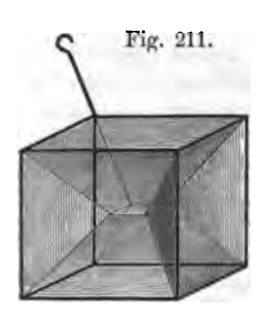
I. Zahlreiche alltägliche Erscheinungen zeigen, dafs Flüssigkeitsiutchen eine gewisse Widerstandsfähigkeit, also Kohäsion, haben.

So die Häutchen der Seifenblasen, des Bierschaums u. dergl. Oberfläche von Wasser bleibt eine trockene, etwas befettete Nähnadel Manche Insekten laufen über den Wasserspiegel fast wie über festen Bo In ein eben volles Glas Wasser kann man nach und nach eine beträchtl zahl von Münzen gleiten lassen, ohne dafs es überfliefst, indem die Oberf den Rändern sich wölbt. Hierher gehört insbesondere auch diejenige Ersc nach der die „tropfbaren“ Flüssigkeiten benannt sind, nämlich die

Tropfenbildung: Giefsen wir Quecksilber auf eine wa Platte von Glas, Holz ..., so trennt es sich in Teile, die tr Schwerkraft Kugelgestalt annehmen, falls sie hinreichend sind, sonst aber wenigstens an den Rändern sich runden. Zwei 1 zur Berührung gebracht, vereinigen sich rasch zu einem (Fettaugen auf der Suppe). — Dies zeigt, dafs die Flüssigkei aufeinander mit anziehenden Kräften wirken, welc gröfstmögliche Menge Arbeit erst dann verrichtet haben keine Erhöhungen und Vertiefungen an der Flüssigkeitsmeng vorhanden sind, was eben erst durch die Kugelgestalt, d Tropfenform, erreicht ist. — Bei dem Zerstieben einer Flü in Tropfen wird also Arbeit entgegen den Molekularkräften braucht (LA 128) beim Zusammenlaufen von Tropfen leiste Kräfte Arbeit entgegen dem Beharrungswiderstand und der S

LA 128.

Ähnlich erteilt die Schwerkraft flüssigen Weltkörpern die Kugelgest auch an der festen Erdrinde führt die Erdschwere bei fortschreitender V rung und Abschwemmung der Gebirge immer mehr zur „Nivellierung“ Grenze erst mit der vollen Kugelung des Erdkörpers erreicht wäre (abgese den Fliehkräften infolge der Achsendrehung, die zu Abweichungen von de gestalt führen). — Doch ist neben dieser Ähnlichkeit als Unterschied zu b dafs bei den eigentlichen Tropfen nicht auch Anziehungskräfte aus den ti Schichten der Flüssigkeitsmenge die Kugelung bewirken, sondern nur d sehr dünnen obersten Schichte. Dieses „**Flüssigkeitshäutchen**“ z Bestreben, eine **möglichst kleine Oberfläche** anzunehmen (gemäfs dem metrischen Satz: Unter allen Körpern von gleichem Volumen hat di die kleinste Oberfläche). — Analoges zeigt besonders auffallend der *Vers* MENSBRUGGHE: Auf ein ebenes Seifenhäutchen innerhalb eines beliel stalteten Drahtrahmens wird eine aus Seidenfaden geknüpfte Schlinge gel dann vorsichtig (etwa mittels des rauhen End Zündhölzchens) das Häutchen innerhalb der Schlin Platzen gebracht. Sogleich nimmt die Schlinge Kreisform an. Da nun unter allen geschlossene von gleichem Umfang der Kreis die gröfste Flä so hat das zurückgebliebene Häutchen aufserha Schlinge die kleinste Fläche angenommen. — Bedingung der kleinsten Fläche entsprechen au schönen ebenen und krummen Flächen der Seifenh an PLATEAUS Drahtgestellen (Fig. 211). — Fig. 212 kann die zusammenziehende Kraft von keitshäutchen durch Gewichtchen gemessen werd


Fig. 211.

Die Tropfenbildung unter Ausschaltung der Schwerkraft zeigt PLATEAUS ...uch: In einem zylindrischen Gefäfs ist längs der vertikalen Achse ein ...t angebracht, der durch einen Schnurlauf in rasche Drehung versetzt werden ... Das Gefäfs wird mit einem Gemenge von Weingeist und Wasser gefüllt, ...n spezifisches Gewicht ...h ist dem des Oliven-. Dieses läfst sich dann ...Tropfen von einigen ...imetern Durchmesser ... 213) um jenen verti-... Draht herumlegen. ... der Draht allmählich ...r schneller gedreht, ...ttet sich zuerst der ...fen ab und bildet ... Ringe, die endlich abreifsen und sich wieder zu Kugeln ballen: dies alles ...fserlicher Ähnlichkeit zu den Vorgängen, wie sie die Kant-Laplacesche ...these annimmt; doch sind wieder (vergl. Fig. 134, S. 144) die hier wirkenden ...itationskräfte nur teilweise ähnlich mit jenen Molekularkräften.

Fig. 212.

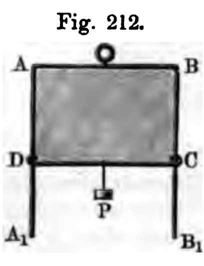
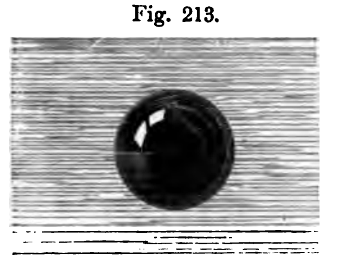


Fig. 213.



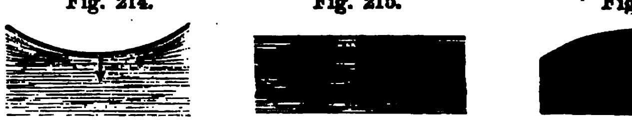
Eben diese Kräfte nun haben zur Folge, dafs im Innern einer hinreichend ...en Flüssigkeitsmenge die Verschiebung je eines Flüssigkeitsteilchens in Bezug ... die übrigen andere und zwar kleinere (bezw. auch gar keine) Kräfte er-...t als eine Verschiebung nahe der Oberfläche; man bezeichnet den ...rbeigeführten besonderen Zustand an und nahe unter der Oberfläche einer ...sigkeit im Gegensatz zu allen Innenteilen als

Oberflächenspannung, die des näheren so zu beschreiben und **erklären ist:** Gesetzt, ein hinreichend tief unter der Oberfläche ...ndes Flüssigkeitsteilchen m (Fig. 219, a. f. S.) wirke auf alle von ... höchstens um die sehr kleine Strecke von ϱ cm abstehenden ...chen anziehend (oder: es hat eine „Anziehungssphäre“ ... ϱ cm Halbmesser. PLATEAU fand für Seifenwasser mit Glyzerin $=$ 56,7 Milliontel Millimeter). Das Teilchen wird dann auch nur ... den innerhalb dieses Abstandes liegenden Teilchen angezogen; ...e Kräfte heben sich aber nach allen Richtungen auf, wie wenn m ...z frei wäre. Ist aber ein Teilchen m so nahe der Oberfläche, dafs ...n Abstand $a \lesseqgtr \varrho$ ist, so kommt ein Teil der Anziehungssphäre ...erhalb der Flüssigkeit zu liegen, und es werden also die einwärts ...benden Kräfte nicht mehr ganz aufgehoben; und zwar für einen um ... gröfseren Teil der Flüssigkeit, je kleiner a ist. Für ein Teilchen ... einer ebenen Oberfläche ist dann der wirksam bleibende Teil („das ...tive Segment“, s. u.) die Halbkugel vom Radius ϱ, und es ist ...mit ϱ „die Dicke des Flüssigkeitshäutchens“.

Oder im Hinblick auf die zur Verschiebung eines Flüssigkeitsteilchens ent-...gen dem Widerstande der von den anderen Teilchen ausgehenden Molekular-...ifte erforderlichen Arbeiten: Das **intramolekulare Kraftfeld** um je ein ...ssigkeitsteilchen hat die **Feldstärke** 0 für $a \geqq \varrho$; die Stärke dieses Kraft-les nimmt zu für $\varrho > a \geqq 0$.

II. **Die Oberflächenspannung ist an einer nach oben kaven Oberfläche kleiner (Fig. 214), an einer konvexen g (Fig. 216) als an einer ebenen (Fig. 215).**

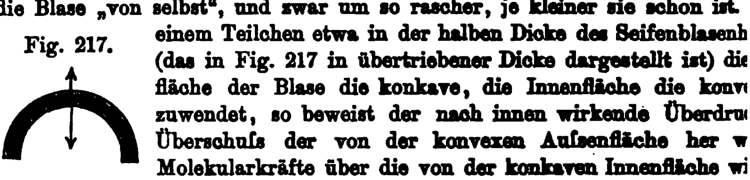
Fig. 214. Fig. 215. Fig. 216.

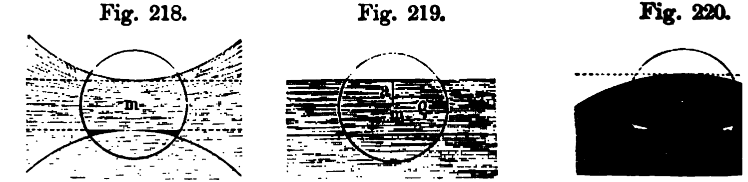


Dafs solche Unterschiede der Kräfte bestehen, zeigen besonders a und auch der Messung zugänglich folgende Erscheinungen: 1. Wird d chen, an dem eine Seifenblase hängt, beiderseits offen gehalten, so verklei die Blase „von selbst", und zwar um so rascher, je kleiner sie schon ist. einem Teilchen etwa in der halben Dicke des Seifenblasenh (das in Fig. 217 in übertriebener Dicke dargestellt ist) di fläche der Blase die konkave, die Innenfläche die konv zuwendet, so beweist der nach innen wirkende Überdru Überschufs der von der konvexen Aufsenfläche her w Molekularkräfte über die von der konkaven Innenfläche wi (Indem man das Röhrchen als Manometer einrichtet, kann man die Gröf Überdruckes messen.) 2. Eine noch auffallendere Erscheinung, die eben nächst beweist, dafs jene Ungleichheiten der Oberflächenspannung je Gestalt der Oberfläche bestehen, sind die unter IV beschriebenen und Erscheinungen der Kapillarerhebung und -depression. Zuvor aber h zu fragen: Warum besteht (d. h. aus welchen Kräften erklärt s Ungleichheit der Oberflächenspannung? Die Antwort ergibt sich aus

Fig. 217.

Fig. 218. Fig. 219. Fig. 220.





gleichung der Figg 218 bis 220: Es bildet nämlich für ein in einem be Abstand $a < \varrho$ unter einer ebenen Oberfläche gelegenes Teilchen das zun ragenden Segment der Wirkungssphäre symmetrische Flüssigkeitssegm „**aktive Segment**", das auf m nach einwärts zieht. Krümmt sich gleichem a die Oberfläche konkav nach oben (Fig. 218), so nimmt da Segment an Volumen (in Fig. 218 schwarz gehalten) und daher auch an der Wirkung ab; ebenso bei konvexer Fläche um ein entsprechendes (in Fig. 220 weifs) und an anziehenden Kräften zu. — Ob die Gröf Ungleichheiten in den Oberflächenspannungen hiermit auch quantitativ vo erklärt sind, mufs hier unerörtert bleiben.

III. Warum nimmt eine Flüssigkeit eine nach oben k bezw. **konvexe** Krümmung an, je nachdem sie einen angre festen Körper **benetzt** oder nicht? Antw.: An eine ebene v Gefäfswand grenze die wagrechte Fläche einer Flüssigkeit un somit daselbst die gerade wagrechte Kante eines Flächenwink

(Fig. 223). Jedes Teilchen an diesem Rande wird dann durch die ...sultierende Q aller Kohäsionskräfte der Flüssigkeitsteilchen längs ...r Winkelsymmetralen, also unter 45° gegen die wagrechte und lot-

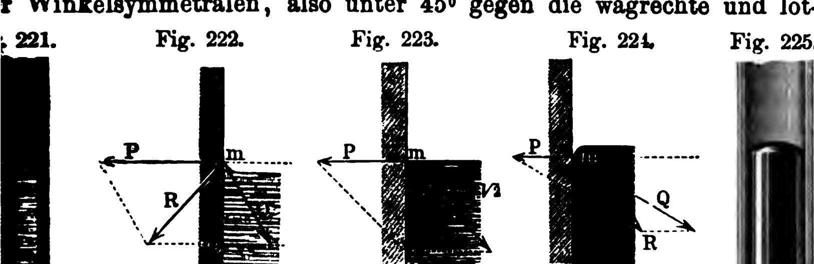


Fig. 221. Fig. 222. Fig. 223. Fig. 224. Fig. 225.

...te Grenzfläche einwärts gezogen. Zugleich wird aber m auch durch ... Resultierende P aller Adhäsionskräfte zwischen den nahe bei m ...enden Teilchen der Wand wagrecht gegen diese hingezogen. Nur ...n dann $Q = P\sqrt{2}$, fällt die Resultierende R in die Richtung der ...echten Wand, und die Flüssigkeit bleibt eben. — Bleibt P gleich ... wird $Q < P\sqrt{2}$, so weicht die Resultierende R aus Q und P gegen ... Wand hin ab, und da die Flüssigkeitsoberfläche nur dann im ...ichgewicht ist, wenn sie normal ist zu R, so gestaltet sich die ...e zu einer nach oben **konkaven** Fläche um. Analog wird für $> P\sqrt{2}$ die Oberfläche **konvex**. — Solche **Ungleichungen** ...ischen Adhäsion und Kohäsion bestehen in der Tat nach den Ver-...chen mit „Adhäsionsplatten" an Wasser und Quecksilber (§ 52).

Sind jene Gestaltsveränderungen der Oberfläche eingetreten, so ändert auch ... Gröfse und Lage, weshalb die Berechnung des **„Randwinkels"**, d. i. des ...Winkels zwischen der vertikalen Wand und der Tangentialebene an die ...e Oberfläche längs des Randes, nicht mehr elementar durchzuführen ist; ...gleichen auch nicht die der Gestalt der Oberfläche in Punkten verschieden ...er Abstände von der Wand (Figg. 222, 224). Doch zeigen Rechnung und ...obachtung, dafs in sehr engen Röhrchen von kreisrundem Querschnitt die ...rflächen sehr annähernd Kugeln angehören (Figg. 221, 225).

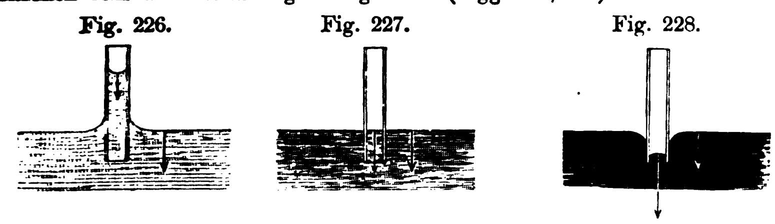
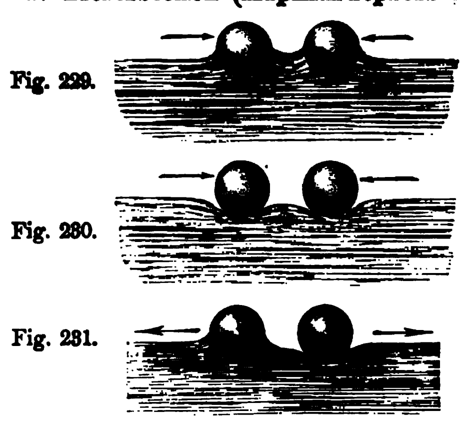


Fig. 226. Fig. 227. Fig. 228.

IV. Wie sich aus der Adhäsion das **Benetzen** und aus dem Be-...ken die **Konkavität** der Oberfläche erklärt, so endlich aus dieser ...s **Höherstehen** der Flüssigkeit in einem engen Rohre (Fig. 226). ... nämlich nach II an einer nach oben konkaven Fläche ein ge-

14*

ringerer Druck nach innen herrscht als an einer ebenen Fläc muſs zu dem molekularen Zug nach einwärts noch ein h statischer Druck nach abwärts kommen, um dem ringsum hen den Druck das Gleichgewicht zu halten. — Analog die Erkläru das Tieferstehen (Kapillardepression) nach Fig. 228.


Fig. 229.
Fig. 230.
Fig. 231.

Umgekehrt bietet die l der gehobenen Säule ein n quemeres Mittel zu einer Messung der Unterschiede einwärts gerichteten Flüs drucke, als die erwähnten metrischen Versuche an Seife Weitere Kapillarerschei Die Bewegung von Flüs tropfen in konischen Röhre das engere, bezw. weitere E scheinbaren Anziehungen u stoſsungen von Körperchen, Flüssigkeiten schwimmen (F —231) u. dergl. m. Praktis wendungen: Lampendocht

§ 56. Diffusion von Gasen und von Flüssigkeiten. Os Mischen und Lösen. Absorption.

Versuch 1: Ist von den beiden Ballons (Fig. 232) der ei einem Gase von irgend welcher Dichte erfüllt, der andere leer werden die beiden Ballons miteinander durch Stellu Hähne in Verbindung gesetzt, so strömt das Gas leeren Ballon (wobei es keinen merklichen Unterschied ob das Gas mit der Richtung der Schwerkraft von nach unten oder in der entgegengesetzten Richtung st und es herrscht erst dann **Gleichgewicht, wenn die nung in beiden Räumen gleich** ist (entsprechen allgemeinen Gesetze über Bewegung und Gleichgew nach Verschiedenheit, bezw. Gleichheit der Spannkr verschiedenen Punkten je eines gleichartigen Gas 2. Aber auch wenn beide Ballons mit verschie Gasen von gleicher Spannkraft gefüllt waren, erst dann keine Bewegung statt, wenn **gleichmä Mischung** eingetreten ist (d. h. es hält nicht et eine Gas vermöge seiner Spannkraft das andere übe vom Strömen ab); nur geht das (nunmehr beider Überströmen langsamer vor sich als bei Vers Die Strömungsgeschwindigkeit bei 1 wie bei 2

Fig. 232.


m Zeitpunkte von der jeweiligen Differenz der Spannkräfte Gase (überdies aber auch von der „inneren Diffusions- ıg", vergl. § 59) ab. Ist Gleichgewicht eingetreten, so herrscht em Punkte ein Druck, welcher einfach gleich ist der **Summe rucke, welche von jedem Gase für sich ausgeübt** würden ›ns Gesetz).

n beschriebenen Erscheinungen der Diffusion der Gase sind bis zu einem ı Grade ähnlich die der Diffusion von Flüssigkeiten: z. B. roter Wein asser, Wasser über Kupfersulfatlösung u. s. f. geschichtet, zeigt wohl für eit der Schwerkraft gegenüber Gleichgewicht gemäſs dem Archimedischen dennoch tritt alsbald Verwaschung der Trennungsfläche und schlieſsliche rmige Mischung der Flüssigkeiten ein. (Damit hier der wichtige Schluſs Eigenbewegung der Flüssigkeitsteilchen, § 57, einwandfrei sei, müſste äſs mit den Flüssigkeiten vor allen äuſseren Erschütterungen geschützt o etwa auf dem Pfeiler einer Sternwarte stehen.) Sogar an festen Stoffen old in massivem Blei) sind ähnliche, nur noch bei weitem langsamer sich ende Diffusionen beobachtet worden.

e Diffusionsbewegungen der Gase und Flüssigkeiten erfahren weitere ıtionen durch Wände aus festen Stoffen; so bei folgendem



Fig. 233.

ersuch: Von einer Flasche ist der Boden ab- ıgt und durch eine Tierblase ersetzt; im Halse ein wasserdicht schlieſsender Pfropf mit einer eits offenen hohen Röhre (Fig. 233). Ist der der Flasche mit Kupfersulfatlösung bis zu einer mten Stelle des Halses gefüllt, und wird das bis zu dieser Stelle in Wasser getaucht, so otz der Gleichheit des hydrostatischen Druckes und auſsen durch die Membrane hindurch ng ein und zwar so, daſs mehr Wasser ıls Kupfersulfatlösung austritt, was sich an ılmählichen Steigen der Flüssigkeit im Rohre Dieser Vorgang heiſst **Osmose**, und der tatische Druck der Flüssigkeit im Rohre über piegel der äuſseren Flüssigkeit ist ein Maſs tens des Kupfersalzes auf die Membrane und ssigkeit ausgeübten **„osmotischen Druckes"**. besondern wird das Eindringen der Flüssig- die Membrane als **Endosmose** bezeichnet (das :en als **Exosmose**).

rmöge der **Endosmose** werden durch pflanzliche nen die Flüssigkeiten aus der Erde in den Pflanzen- die Speisesäfte durch die Darmwände in die Blut- (Venen) gesogen.

r früher auf derartige Wirkungen von festen Membranen eingeschränkte des osmotischen Druckes hat in neuester Zeit eine groſse Erweiterung

erfahren, indem PFEFFER und VAN 'T HOFF die Analogie seiner Gesetze mit des Gasdruckes nachwiesen. Auch ist osmotischer Druck die bewegende bei allen Diffusions- und Auflösungsvorgängen (— sogar die Entstehung de trischen Stromes in den galvanischen Elementen hat man auf ihn zurückzu versucht).

Fig. 284.

Mischen und Lösen. — Pulverisierte feste Körper (z. zweier Malerfarben; Schwefelblumen und Eisenpulver, § 203) g noch so innig zu einem möglichst gleichartigen Pulver rieben, zunächst nur „mechanische Gemenge"; über ihre U schiede von „chemischen Verbindungen" vergl. §§ 203,

Quecksilber und Wasser, Wasser und Öl sind nicht miscl Paare von Flüssigkeiten; Alkohol und Wasser, Schwefel und Wasser mischen sich, und zwar in allen Verhältnissen (. und Wasser nur teilweise).

Wird eine einerseits geschlossene Röhre zur Hälfte mit Wasser, d vorsichtig mit reinem Alkohol gefüllt (Fig. 284) und dann durcl wenden und Schütteln Mischung erzielt, so zeigt sich diese mit V verminderung und Erwärmung verknüpft; woraus zu schließen is es schon hier nicht mehr rein mechanische Mischung sei. Um so aus der starken Erwärmung beim Vereinigen von Wasser und Schwefe

Zucker, Kochsalz ... in Wasser, Schwefel in Schwefelko stoff gebracht, werden gelöst. Dabei vermag z. B. Wasser mehr als 37 Proz. Kochsalz (bei Zimmertemperatur) aufzunel die Lösung ist gesättigt.

Es läge hier nahe, sich den festen Stoff als nur in kleine Teilche fallend zu denken, die aber ihrerseits immer noch fest sind. Es weise namentlich die Tatsachen des Wärmeverbrauches beim Lösen darauf hin, da die festen Stoffe eine dem Schmelzen ähnliche Veränderung erfahren, d. l z. B. das im Wasser gelöste Kochsalz wirklich den flüssigen Aggregatzusta genommen hat. — Des näheren zeigen sich die Vorgänge beim Lösen vo reichen mechanischen und außermechanischen Bedingungen abhängig, nam der innigen Berührung zwischen den Teilen der Flüssigkeit und des festen K (Zerteilen, Umrühren, Einbringen in die Flüssigkeit von oben in einem Sä aus porösem Stoffe, namentlich aber Erwärmen).

Auch die Absorption von Luft, Ammoniak-, Salzsäure-, Ko säure- ... Gas in Wasser (Sodawasser, natürliche Säuerlinge .. nicht einfache Mischung, sondern Lösung. — Was beweist es,

§ 57. Die Molekularhypothese.

Diejenigen mechanischen Einwirkungen, durch welche feste Körper zerdrückt, rissen, . . . allgemein: „mechanisch geteilt" werden, finden bei fortschreitender lung immer stärkere Hindernisse (namentlich wegen der immer kleineren Kraftmente; z. B. ein Zündhölzchen können wir — warum? — nicht in beliebig ne Stückchen zerbrechen). Auch feinstes Pulverisieren liefert Körnchen, die er dem Mikroskop noch als selbständige Körperchen wahrnehmbar sind. — üssigkeiten und Gase lassen sich durch Überleiten in Röhren u. dergl. hanisch teilen. — Bei der Auflösung von Karmin, Fuchsin . . . in Wasser, Verteilung von Riechstoffen (Moschus) in der Luft schliefsen wir, dafs die eben noch wahrnehmbaren Mengen des Lösungs- oder Verteilungsmittels eine h viel kleinere Menge des gelösten Farb-, Riechstoffes, welche für sich nicht r wahrnehmbar wäre, enthalten müssen. — Ausziehen von Platindraht, der die ele" eines Silberdrahtes bildet und nach Wegätzen des Silbers in einer Feinheit herab zu 0,00005 mm Durchmesser zurückbleibt. Blattgold (bis zu 0,0003 mm).

Es drängt sich nun die Frage auf, ob jenseits der Grenzen der Wahrhmbarkeit die mechanische Teilbarkeit der Materie ins Unendliche gehe oder sie endliche Grenzen habe, d. h. ob die Materie aus mechanisch kleinsten ilchen (wie man zum Unterschiede von „chemisch kleinsten" Teilchen = men, vergl. § 209, sagen kann) bestehe. Diese Frage selbst kann wieder in ierlei Sinn genommen werden, je nachdem wir uns die auf Zerteilung hinrkenden Kräfte selbst über die erfahrbaren Kraftgröfsen hinaus, allenfalls ins ndliche, gesteigert denken, oder aber uns auf die in der Natur wirklich kommenden mechanischen (thermischen, elektrischen . . .) Kräfte beschränken. ersteren Sinne wäre ein mechanisch unteilbares Körperchen dasjenige, welches gar, unendlich grofsen zerreifsenden, zerdrückenden . . . Kräften, bezw. Kraftmenten ausgesetzt, eine unendlich grofse Festigkeit aufwiese. In diesem ne ist dann die Frage empirisch überhaupt nicht zu entscheiden. Der folgenden finition liegt dagegen der zweite Sinn zu Grunde:

Wir verstehen unter einem mechanisch kleinsten Teilchen r Materie (**Molekel**, Molekül, *molecula* = kleine Masse) dasjenige ilchen, das auch durch die gröfsten in der Natur vorkommenden und ter den günstigsten Bedingungen auf die Zerteilung hinwirkenden echanischen Kräfte ungeteilt bleibt. (Vergl. über chemische Atome 209.)

Dafs es Molekeln in dem hiermit definierten Sinne wirklich gebe und fs alle Materie aus solchen zusammengesetzt sei, ist insofern nur eine Hypoese, als tatsächlich kein einzelnes Molekül direkt (oder auch unter dem besten ikroskop, dessen Linsen ja dann selbst aus Molekeln bestehen) wahrgenommen rden kann. Zu dieser physikalischen **Molekularhypothese** ist die physikache Gegenhypothese die, dafs in der Natur mechanisch kleinste Teilchen irgends vorkommen oder dafs wenigstens nicht alle Materie aus solchen bestehe. it der physikalischen Molekular- und der chemischen Atomhypothese bleibt mer noch die aufserphysikalische Hypothese verträglich, dafs unendlich grofsen äften gegenüber die Materie unendlich teilbar wäre). Die Entscheidung zwischen n beiden physikalischen Hypothesen kann hier wie überall (log. Anh. Nr. 36) r darin liegen, welche die tatsächlichen Erscheinungen ungezwungener erklärt. Die ysik des 19. Jahrhunderts hat namentlich die erstere Hypothese bis ins einzelne

Anh. 36.

ausgebildet, indem sie sich nicht überhaupt blofs mit der Annahme me
kleinster Teilchen begnügte, sondern anschauliche Bilder davon zu g
suchte, welche Gröfse und Gestalt diese Teilchen haben, ob sie
berühren oder durch leere Zwischenräume getrennt sind, ob sie
relativer Ruhe oder in relativer Bewegung befinden; und wenn letzteres,
Art diese Bewegungen sind, ob und wann fortschreitend oder dreh
schwingend oder aperiodisch u. s. f. Überall müssen es spezielle
nungen sein, welche für je eine Art Stoff, eine bestimmte Temperatur u.
eine oder andere Annahme wahrscheinlicher machen. Namentlich sind
Wärmeerscheinungen an Gasen, welchen man die weitestgehenden de
Aufschlüsse verdankt. Einiges über die „kinetische Gastheorie" als H
zur Erklärung zunächst der Tatsachen der „mechanischen Wärmet
vergl. § 83. Doch gibt es auch schon rein mechanische Erschein
welche durch diese kinetische Gastheorie in sehr befriedigender Weise
werden. Das einfachste Beispiel ist die

Erklärung des Mariotteschen Gesetzes. In einem
drischen Gefäfs mit reibungslosem Kolben (Fig. 180—182, S. 1
eine Gasmenge von M g Masse durch einen Druck von p g per
v cm³ Volumen gebracht. Dafs dann das Gas auf je 1 cm² des
lichen Kolbens einen Gegendruck von p g ausübt, erklärt sich
Annahme, dafs das Gas aus sehr vielen Molekeln besteht, di
geschwind geradlinig nach allen Richtungen fortsch
und dabei schon binnen sehr kurzer Zeit sehr viele Stöfse
Kolben ausführen. Durch jeden solchen Stofs wird der Kolb
wenig gehoben; infolge seines Gewichtes wird er dann wieder ei
herabsinken, sogleich wieder emporgestofsen u. s. w. Das geg
der „Spannkraft" des Gases scheinbar völlig ruhige Gleich
des Kolbens erklärt sich hiernach als „dynamisches Gleichge

Diese insoweit noch ganz allgemein gehaltene Vorstellung
eine Bestätigung und Weiterbildung dadurch, dafs, wenn durch
schieben des Kolbens das Volumen des Gases auf die Hälfte ver
wird, die „Spannkraft" des Gases sich verdoppelt; denn es i
unmittelbare Folge jener Hypothese, dafs bei halbem Volum
Zahl der Stöfse sich verdoppeln mufs. Somit erlaubt die
these des dynamischen Gleichgewichtes auch den mathematisch
druck des Mariotteschen Gesetzes $pv = Konst$ zu erklären.

Eine Weiterführung dieser Betrachtung, wobei $konst = \frac{Mu^2}{3}$ sich

rüber, inwieweit beim Verdichten des Gases die einzelnen Teilchen einander beeinssen. Auf solche und zahlreiche andere Arten gelangte man sogar dazu, die Gröfse r Molekeln im Vergleich zu ihrer mittleren Weglänge, ihre Geschwindigit u. s. f. zu ermitteln. Einige Zahlenangaben hierüber vergl. LA 128, 154. LA 128, 154.

Wie durch die Hypothese der zum überwiegenden Teil geradlinig forthreitenden Gasmolekeln zunächst die in MARIOTTES Gesetz ausgesprochene arakteristische Eigenschaft des vollkommenen Gases erklärt ist, so können wir s von dem flüssigen und festen Aggregatzustande folgende Bilder entwerfen: beiderlei Stoffe annähernd unzusammendrückbar sind, so müssen die olekeln durchschnittlich gleiche Abstände einhalten. Sie brauchen aber shalb nicht in relativer Ruhe zu sein, vielmehr haben sich folgende Vorstellungen n der molekularen Struktur des II. und I. Aggregatzustandes bewährt (wenn auch nicht so einfach sind wie das vom III. Zustand, dem der Gase):

Ein fester Körper bringt auf den Gesichts- und Tastsinn den ndruck, als ob die Teilchen unverrückbar miteinander verbunden iren, dadurch hervor, dafs diese in Wahrheit (gröfstenteils) um abile Gleichgewichtslagen Schwingungen ausführen, deren nplituden aber weit unter der Grenze der Sicht- und Tastbarkeit liegen.

Dafs dagegen die Flüssigkeiten zwar ebenfalls konstantes olumen haben, die Teilchen aber keine festen Lagen gegeneinander nnehmen, erklärt sich so, dafs die Molekeln nicht um stabile Lagen hwingen, sondern gleichsam zwischeneinander hindurchkriechen.

Die überzeugendsten mechanischen Belege für molekulare Bewegungen nerhalb der Flüssigkeiten bilden die Erscheinungen der Diffusion (§ 56).

Sollen wir nun alle diese Bewegungen der Molekeln so erfolgend denken, dafs f sie die Gesetze der Mechanik wahrnehmbarer Massen („Molarmechanik" — *les*, Masse) anwendbar bleiben, so müssen wir auch zwischen den Molekeln stimmte **Kräfte** denken. In diesem Sinne sprachen wir schon in § 50 von „Molelarkräften". Die letzte Aufgabe der Molekularmechanik und überhaupt der lekularphysik wäre die, für je zwei Molekeln das zwischen ihnen bestehende raftgesetz" anzugeben nach dem Vorbilde des Newtonschen Gesetzes für lliche Massen $f = x \cdot \frac{Mm}{r^2}$. In dieser Hinsicht wissen wir aber aus zahlreichen scheinungen zunächst nur so viel, dafs dieses Gesetz, speziell das der umgekehrten reiten Potenz des Abstandes, für je zwei Molekeln nicht gelten kann. (MAXELL hat u. a. als eine rechnerische mögliche Hypothese aufgestellt, dafs für die olekularkräfte in erster Annäherung statt der zweiten die fünfte Potenz des standes zu setzen sei.) Alles in allem aber sind wir noch sehr weit davon tfernt, eine ähnliche Mechanik der Molekularkräfte zu besitzen wie die ewtonsche Gravitationsmechanik für die Bewegungen kosmischer Massen. Und die einzelnen Molekeln, ihre Abstände und gegenseitigen Beschleunigungen auch inftig nie so wahrnehmbar sein werden, wie es die je zweier Planeten sind, so rden immer nur Wahrscheinlichkeitsschlüsse aus dem molaren Verhalten des rpers auf die Art der Molekeln und Molekularkräfte zu ziehen sein.

Noch unabhängig von der eigentlichen Molekularhypothese ist es z. B., nn wir das Verhalten eines Kautschukzylinders, welcher ausgedehnt sich sammenzuziehen, zusammengedrückt sich auszudehnen sucht, in Gedanken so it verfolgen, dafs wir uns durch das Entfernen und Annähern je zweier

benachbarter Teilchen Anziehungs-, bezw. Abstofsungskräfte ge
denken. Da es nun für den Kautschukzylinder ein natürliches Volumen
bei welchem zwischen seinen Teilchen weder Druck- noch Zugspannungen herr

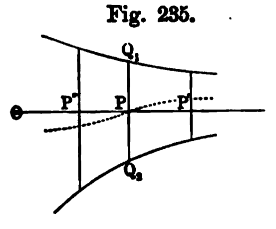


Fig. 235.

so haben wir uns zu denken, dafs dann je
Teilchen O und P (Fig. 235) einen Abstand
für welchen zwischen ihnen entweder überhaupt
Kraft, oder wahrscheinlicher einander gleich
ziehungs- und Abstofsungskräfte wirken. Die k
Annahme ist dadurch dargestellt, dafs wir di
Abstande $OP = r$ gehörige Anziehung durch
und die Abstofsung durch PQ_2 graphisch dar
(wobei diese Kräfte in Wirklichkeit als läng
Strecke OP wirkend zu denken sind, in der graphischen Darstellung al
positive und negative Ordinaten aufgetragen erscheinen). Um dann weit
Tatsache darzustellen, dafs bei einer Dehnung des Körpers eine Zugspannu
wirkt hat, also eine Kraft geherrscht, welche ihn auf die frühere Länge zu b
sucht, nehmen wir an, dafs bei Vergröfserung des Abstandes auf OP
überwiegende Anziehung eintritt; und analog bei Verkleinerung des Abs
auf OP'' eine überwiegende Abstofsung.

Was dabei insbesondere die abstofsenden Kräfte betrifft, so suchte
kinetische Molekularhypothese durch ältere Stofswirkungen zu ersetzen, w
auf welche oben die Spannkraft der Gase zurückgeführt worden ist. Freilich
diese Erklärungsweise auf die weitere Frage, ob denn eine Stofswirkung und
meiner die „Undurchdringlichkeit" wahrnehmbarer und molekularer Massen
haupt denkbar wäre, wenn wir nicht schliefslich doch wieder annehmen, dafs d
dringen einer Masse in eine andere durch Abstofsungskräfte verhindert wird (

Denken wir uns nun je eine Molekel ähnlich als Sitz von anziehenden
kularkräften, wie wir uns einen Planeten oder Fixstern (bezw. seine ein
Massenteilchen) als Sitz von Gravitationskräften denken, so liegt es am nä
auch diese Molekularkräfte sich als radial nach allen Richtungen gl
mäfsig wirkend zu denken und in diesem Sinne jeder Molekel eine „Anzieh
sphäre" zuzuschreiben (ähnlich wie dies in § 55 für je ein Flüssigkeitste
geschehen war, und zwar dort noch unabhängig von der Molekularhypothe
Doch besteht eine solche Gleichwertigkeit aller Richtungen keineswegs allg
sondern höchstens für die molekularen Kräfte homogener isotroper
(§ 53), wogegen die ausgezeichneten Richtungen der Krystallachsen auf
schiede in der Gröfse der Molekularkräfte nach verschiedenen Richtunge
weisen. Insofern kann es auch nur in erster Annäherung der wahren
stitution der Materie entsprechen, die Molekeln selbst als Kügelchen vorzus
die chemischen Tatsachen legen es vielmehr nahe, die Molekeln als selbst
aus Atomen bestehend zu denken (§ 209), und hier machen es wieder die Tat
der verschiedenen Wertigkeiten unwahrscheinlich, dafs man auch nur die
als Kügelchen annehmen dürfe. — Übrigens ist die Hypothese von der molek

... Nähere Beschreibung und Analyse der Vorgänge ...im Stofs fester, flüssiger und gasförmiger Körper.

... § 16, S. 57 wurde der Vorgang beim Stofs bis zu demjenigen Zeitpunkte ..., in welchem die beiden aufeinander treffenden Massen einander keine ...windigkeitsänderung mehr erteilen, indem sie die

$$\text{gemeinschaftliche Geschwindigkeit } c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

...mmen und einander die gröfste Deformation erteilt haben. Dabei war ...inerseits von der besonderen Gestalt der einander treffenden Körper ...en worden, indem es bei der gegenseitigen Beeinflussung der Geschwindig... ...nur auf die Gröfse dieser und der Massen ankam, weshalb die Ableitung ...eichung (1) noch ganz eine Aufgabe der „Mechanik des Punktes" war. ...shalb war anderseits sowohl von der Art, wie jene Deformationen zu stande ...n, wie auch davon abgesehen worden, dafs diese Deformationen verhältnis... klein bei festen, grofs bei tropfbaren und gasförmig flüssigen Körpern sind, ...fs sie ganz, teilweise oder gar nicht bleiben, je nachdem die Körper ...men unelastisch, halbelastisch oder vollkommen elastisch sind. — In ...hkeit sind aber die Bewegungen während des Stofses und nach dem ...wesentlich abhängig von allen diesen Umständen, und auch speziell bei ... Körpern von der Gestalt der aufeinander treffenden Körper, sowie von der ...ng, in welcher sich die Massenmittelpunkte der Körper vor dem Stofse ... hatten. — Eine der einfachsten so sich ergebenden Aufgaben ist folgende:

... Gerader zentraler Stofs unelastischer Kugeln. Bewegen ...ie Mittelpunkte zweier Kugeln von den Massen m_1, m_2 und den ...windigkeiten c_1, c_2 längs derselben Geraden in der gleichen ...ung, so dafs die langsamere durch die schnellere eingeholt wird ...$c_1 < c_2$, beide von gleichem Vorzeichen), so steht jene Gerade ...itpunkte der Berührung auf der gemeinschaftlichen

Null, wenn $m_1 = m_2$, $c_1 = -c_2$. — Indem dabei die Körp vollkommen unelastisch vorausgesetzt sind (was annähernd be Schneeballen, Kugeln aus feuchtem Ton, aus Blei zutrifft), ist dieser Verlust an kinetischer Energie nicht durch gleichen gewonnenen Betrag an potentieller mechani Energie ausgeglichen.

Die Lücke, welche so das Gesetz der Erhaltung der Energie du Vorgänge beim unelastischen Stofs zu enthalten scheint (und welche das der Erhaltung der mechanischen Energie auch wirklich aufweist), wir gefüllt durch das Gesetz der Äquivalenz von mechanischer und kalor: Energie (§ 82). Inwieweit wir, unabhängig von der Rücksicht auf die begle Wärmevorgänge, schon aus rein mechanischen Gründen die Teilch unelastischen Körper während des Stofses in gegenseitige Beweg geratend zu denken haben, siehe unten S. 222.

2. Gerader zentraler Stofs vollkommen elastischer Ku Hier hat sich nach Erlangung der gemeinschaftlichen Geschwindig und der bis dahin erfolgten gröfsten Deformation die kinet Energie ganz oder teilweise in potentielle, nämlich in elas Spannkraft, verwandelt. Indem nun diese Deformationen sich gleichen, bis die volle Kugelgestalt wieder hergestellt ist, erteil Kugeln einander wieder so grofse Geschwindigkeiten, dafs nach Stofs der volle Betrag der kinetischen Energie wieder gestellt ist (LA 131). LA 131.

Stöfst z. B. eine Kugel auf eine gleich grofse ($m_1 = m_2$) ruhende (c_2 so wird $c = {}^1/_2\, c_1$. Indem nun die Kugeln sich gegeneinander stemmen, ert früher ruhende der anderen eine entgegengesetzte Bewegung mit der Geschw keit — ${}^1/_2\, c_1$, so dafs diese zur Ruhe kommt; die früher bewegte erteilt dageg früher ruhenden zur gemeinschaftlichen Geschwindigkeit ${}^1/_2\, c_1$ noch einmal ${}^1/$ dafs diese nun mit c_1 weiter geht. Es ist dies der einfachste Fall des allgem Gesetzes (I), dafs zwei gleiche elastische Kugeln im geraden Stof Geschwindigkeit austauschen (gleichsam durcheinander hindurchgehen, oh Geschwindigkeiten zu ändern). — Diese einfachsten Gesetze sind speziell (Grenzfälle) der folgenden allgemeineren:

Sind die Massen der Kugeln ungleich, $M > m$, und stöfs gröfsere auf die ruhende kleinere, so setzt die gröfsere Bewegung in der ursprünglichen Richtung fort; stöfs kleinere auf die ruhende gröfsere, so kehrt sich die Bewegun kleineren um: die kleine wird an der gröfseren „reflekt

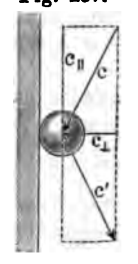
Fig. 236.

LA 130.

Versuche an Mariottes Stofsa (Fig. 236). — Die allgemeinen F für den geraden Stofs elastischer von beliebigen Massen vergl. L Speziell die Formeln für den Stofs recht gegen eine „Wand" ergeben indem $M = \infty$, $C = 0$ gesetzt wi

3. Schiefer Stofs einer elastischen Kugel gegen eine Wand. Bildet die Bewegungsrichtung des Massenmittelpunktes der Kugel ien Winkel mit der Wand, so läfst sich ihre Ge- windigkeit c zerlegen in die beiden Komponenten $c_{\parallel}$ d $c_{\perp}$ (Fig. 237). Von diesen bleibt $c_{\parallel}$ durch die and unbeeinflufst, $c_{\perp}$ ändert bei gleicher Gröfse ihre htung in die entgegengesetzte und setzt sich mit $c_{\parallel}$ mmen zu c'. Somit gilt für einen solchen Stofs das Reflexionsgesetz (II): **Der Reflexionswinkel ist ich dem Einfallswinkel; beide Winkel liegen in r nämlichen Ebene, der Einfallsebene.**

Fig. 237.



Die Gesetze (I) und (II) bilden nur die einfachsten Typen der Vorgänge beim llardspiel. Bekanntlich kann es hier geschehen, dafs, wenn der Spieler den ll „falsch“ genommen, d. h. mit der Queue nicht gegen den Mittelpunkt der gel gezielt hat, die auffallendsten Abweichungen vom Reflexionsgesetz eintreten. e erklären sich einerseits aus den zur Translationsbewegung der Kugel hinzu- mmenden, durch den nicht zentralen (exzentrischen) Stofs eingeleiteten Rota- nen, anderseits durch die Reibung des Balles am Tuch, welche auch einen tral gestofsenen und daher zunächst nur translatorisch bewegten Ball in tation versetzt. Soll z. B. der Ball keine solche Rotation haben, so wird er ras tiefer zu nehmen, d. h. in der Richtung unterhalb des Mittelpunktes zu fsen sein, wobei dann beiderlei Rotationen sich aufheben. (Das Kunststück, rch einen vertikal exzentrisch geführten Schlag der Hand die Kugel zuerst von r Hand weg und dann „von selbst“ wieder zu ihr hin laufen zu machen.)

Bei allen nicht kugeligen Körpern gestaltet sich die Berechnung des nslatorischen und rotatorischen Anteiles der Bewegungen meist noch bei weitem rwickelter. — Allgemein heifst der Stofs **nicht gerade (schief)**, wenn die ewegungsrichtung des stofsenden Körpers gegen die Berührungsebene hief ist; **nicht zentral (exzentrisch)**, wenn der Schwerpunkt des gestofsenen rpers nicht in der zur Oberfläche im Berührungspunkt Senkrechten liegt. Beim hiefen Stofs läfst sich die Bewegung immer, wie im obigen einfachsten speziellen ll, in zwei Komponenten zerlegen, deren eine senkrecht gegen die Oberfläche s gestofsenen Körpers gerichtet ist und einen geraden Stofs zur Folge hat, ren zweite mit der Richtung der Tangente im Berührungspunkte ein Neben- ander-Vorbeigehen und unter Mitwirkung der Reibung Rotation zur Folge hat.

Der Begriff des Stofses ist keineswegs auf feste Körper einzuschränken, dem ja auch z. B. bei Wasser- und Windmühlen sich die Energie der Bewegung 'opfbarer oder gasförmiger Flüssigkeiten auf das Schaufelrad nach den setzen des Stofses überträgt. Mit Rücksicht auf das Zurückströmen der Flüssig- it (Stauen) gegen die neu ankommende und die hierbei eintretenden Strömungen nd natürlich die Vorgänge hier noch viel verwickelter.

Betrachten wir schliefslich allgemein die Vorgänge beim Stofs im Lichte der olekularhypothese, nach welcher ja auch z. B. zwei Blei- oder Elfenbein- geln Aggregate überaus zahlreicher und voneinander durch weite Zwischen- ume getrennter Körperchen sind, so haben wir uns z. B. den Vorgang beim feinanderwirken zweier unelastischer Körper etwa so vorzustellen, wie wenn ei Heere, deren einzelne Soldaten zuerst miteinander marschiert, also „als

Ganzes in Bewegung", in Bezug aufeinander in Ruhe gewesen waren, b
einandertreffen „als Ganzes in Ruhe", dafür aber innerhalb dieses Ganze
so heftigere gegenseitige Bewegung geraten.

Speziell die Vorgänge innerhalb eines in einem Gefäſs eingeschlossene
führen zur **Aufgabe**: Ein geschlossener Raum sei mit einer sehr groſ
von gleichen elastischen Kugeln erfüllt, welche einzeln beliebig verschiede
aber nach den verschiedensten Richtungen durchschnittlich gleich groſse G
digkeiten haben; welche Gesamtwirkung üben sie infolge ihrer Stöſse gegen
und gegen die Wände des Gefäſses aus? Die Antwort liegt in der **Grundgle**
der kinetischen Gastheorie: $p = \frac{n m u^2}{3 v}$, wo n die Anzahl der
m die Masse einer derselben (daher $nm = M$ die Gesamtmasse des Gases
durchschnittliche Geschwindigkeit einer Kugel, v das Gesamtvolumen des
(gleichviel von welcher Gestalt) und p der auf die Flächeneinheit der W
geübte Druck, in Dyn gemessen, ist. Eine Ableitung dieser Gl. in den ein
LA 132. Fällen und eine Erklärung einiger aeromechanischer Gesetze aus ihr vergl.

Gehen wir ähnlich auf was immer für einen mechanischen Vorg
Übertragung von kinetischer Energie ein, z. B. wenn auch nur eine Han
einen Hebebaum drückt und ihn so in Bewegung setzt, so müssen wir uns
sagen, daſs zwischen einer solchen **allmählichen** Bewegungsübertragung
scheinbar „**momentanen**", welche als **Stoſs** im engeren Sinne bezeichn
keine scharfe Grenze, sondern ein stetiger Übergang ist. Es werden a
die Molekeln der Hand denen des Hebebaumes allmählich Bewegung durc
erteilen und ebenso die Teilchen in der von der Hand berührten Stelle de
den entfernteren der Stange. Jede solche Bewegungsübertragung wird d
auch etwas von **Wellenbewegung** an sich haben (folg. Abschnitt VI, §

Speziell STEVINS Prinzip der gleichmäſsigen Druckfortpflanzung in
keiten und Gasen, welches im § 36 zunächst durch die Fiktion harter
Kugeln erklärt wurde, fügt sich unter die Hypothese, wenn wir uns vo
daſs z. B. bei der hydraulischen Presse durch das Herabdrücken des Drucl
den angrenzenden Wasserteilchen gröſsere kinetische Energie erteilt wird,
dann auf die weiteren Teilchen und von diesen auf den Preſskolben ül
hier aber wegen der gröſseren Fläche nur eine kleinere Geschwindigkeit, a
eine kleinere Verschiebung binnen der gegebenen Zeit bewirkt.

Ebenso läſst sich dann das Gesetz der **Erhaltung der Arbeit**
mechanischen wie hydro- und aeromechanischen) **Maschinen**, d. h. das A
gröſserer mechanischer Spannungen an Stellen **kleineren Weg**
den Wirkungen der Molekeln der einzelnen Maschinenteile aufeinander ans
machen. — Gleichwohl müssen wir uns schlieſslich eingestehen, daſs
solchen „Zurückführungen" die Kraft der **Elastizität** selbst, welche
stoſsenden Molekeln oder Atomen beilegen, unerklärt bleibt.

I. Die **Reibung**, und zwar zunächst fester Körper, setzt sich zusammen aus a) den Molekularkräften zwischen den einander berührenden Körpern (also namentlich Adhäsion), b) den Einflüssen der Unebenheiten, welche auch die bestpolierten Oberflächen zeigen, und zwar stofsen 1. die Erhebungen des einen Körpers beim Gleiten an die des anderen; sie senken sich aber auch in die Vertiefungen des anderen, und es mufs daher 2. der gleitende Körper längs der Erhebungen des anderen etwas emporgehoben werden, teils werden diese 3. verbogen, 4. abgerissen. — Da die Wirkungen 2, 3, 4 beim Rollen zum Teil vermieden sind, **ist die Reibung beim Rollen viel kleiner als beim Gleiten.**

Zu vermindern sucht man die Reibung bei den Zapfenlagern der Maschinenräder, Türangeln . . ., und zwar durch Polieren, durch Schmieren (Metalle mit Öl, Hölzer mit Graphit . . .), dadurch, dafs man z. B. Stahlzapfen in Messingpfannen, bei Uhren in Edelsteinlagern laufen läfst; Strafsen baut man aus hartem, gut zusammenhängendem Material; Schlitten, Wagen, Eisenbahnen. — Nützlich ist dagegen die Reibung beim Befestigen von Gegenständen mittels der Nägel, Keile, Schrauben . . .; ohne Reibung würden alle Gewebe, Knoten, alles Genähte . . . auseinander fallen (Halten der Schreibstifte); es wäre keine Übertragung der Bewegung an Maschinen durch Riemen, Seile . . ., keine willkürliche Bewegung der Menschen, Tiere . . ., namentlich über geneigte Flächen, möglich (Glatteis). Bestreuen, Hemmschuh, Bremse.

Reibung findet keineswegs blofs an übereinander hingleitenden (rollenden) festen, sondern auch an flüssigen und gasförmigen Stoffen statt; z. B. Fliefsen von Quecksilber über Platten aus Glas, Holz . . . (bei adhärierenden Flüssigkeiten kommt wieder die Überwindung der Kohäsion dazu, § 52); Reibung des Windes am ebenen Boden . . . Insbesondere beruhen die (den Diffusionserscheinungen verwandten) Vorgänge beim Gleiten von Schichten tropfbarer oder gasförmiger Flüssigkeiten aneinander auf **„innerer Reibung"**. Sie spielt auch im Haushalte der Natur eine weit verbreitete Rolle; so (wie Helmholtz in einer seiner letzten Arbeiten gezeigt hat) beim Hingleiten jedes Lüftchens über einen glatten Seespiegel, der sich dann sofort zu Wellen kräuselt, desgleichen bei der Entstehung der Zirruswolken bis zu den Regenböen, welche Wellen mit Längen bis zu 30 km darstellen, § 194. — Um diese wichtigen Vorgänge zu durchschauen, bemerken wir zunächst, dafs, wenn z. B. von zwei Gasmengen jede aus Teilchen bestand, die in Bezug aufeinander in Ruhe sind, sie beim Gleiten übereinander sich nur in verschwindendem Mafse in ihrer relativen Geschwindigkeit beeinflussen könnten, da die Fläche, an welcher die Reibung stattfindet, im Verhältnis zur ganzen Masse der bewegten Luft sehr klein ist, indem an dieser Fläche nur verschwindend wenig Molekeln zusammentreffen im Vergleich zu den überhaupt bewegten. Da aber nach der kinetischen Gastheorie die Teilchen in raschen Bewegungen nach allen Richtungen begriffen sind, so bringen sie, wenn sie sich normal zur Trennungsfläche aus einer Gasmenge in die andere bewegen, in diese die Geschwindigkeit mit, welche sie parallel zur Trennungsfläche hatten. — Bei ungleich warmen Schichten mischen sich überdies die Gase von verschiedenem spezifischen Gewicht in Form unzähliger feiner Strömchen, mit welchen sich die beiden Gasmassen gleichsam gegenseitig anfassen, so dafs die gegenseitige Beeinflussung der Geschwindigkeiten infolge der vieltausendfach vergröfserten Oberfläche sehr beträchtlich wird.

II. Der Widerstand des „Mittels“, d. h. der tropfbaren gasförmigen Flüssigkeit (Luft, Wasser . . .), in der sich die Kö bewegen, rührt teilweise her von der Trägheit der Flüssigk teilchen, indem diese durch den Körper selbst erst in Bewe gesetzt und beiseite geschoben werden müssen, teilweise von der inn Reibung der Flüssigkeit (diese kommt namentlich bei zähflüss Stoffen in Betracht).

Mit Rücksicht auf die grofse Verwickelung der Strömungen und Wi welche bei dem Durchgange eines (festen, flüssigen oder gasförmigen) Kö durch eine tropfbare oder gasförmige Flüssigkeit eintreten, ist es nicht zu wundern, dafs bisher ein einfaches Gesetz für die Abhängigkeit des Widerst des Mittels von der relativen Geschwindigkeit zwischen Körper und Mittel hat gefunden werden können. Brauchbare Annäherungen sind für ge Geschwindigkeiten Proportionalität des Widerstandes mit der ersten, für grö Geschwindigkeiten mit der zweiten Potenz der relativen Geschwindig Ganz wesentlich von Einflufs ist aber überall die Gestalt des bewegten Kör Linsenform bei Uhrpendelkörpern; Spitzgeschosse; Schiffskörper. Versuch Brett der Reihe nach durch Luft und Wasser, mit kleinerer oder gröfserer schwindigkeit, mit der schmalen oder breiten Seite voraus (einen aufgespa Regenschirm mit der konvexen oder der konkaven Seite nach vorn) zu bew

Nützlich ist der Widerstand des Mittels beim Rudern, Schwimmen (w kehrt man beim Zurückbewegen die breite, beim Vorwärtsbewegen die sc Seite der Hand, des Ruders . . . gegen das Wasser?); Schaufelräder, Schiffssch Fallschirme. Fliegen der Vögel, Insekten . . . — Das Problem des „lenk Luftschiffes“ stellt noch immer das lockendste Ziel für umfassende Forsch auf dem Gebiete der Beherrschung aller dieser Verhältnisse nach theoret und praktischer Seite hin dar. —

Beim Übergange aus einem Mittel in ein anderes tritt Ablen der Bewegungsrichtung ein, und zwar Ablenkung zum Lote, wenn der K in dem neuen Medium gröfsere Geschwindigkeit hat (LA 133); Bedeutu die Exklusion der Emissionshypothese des Lichtes (§ 123).

LA 133.

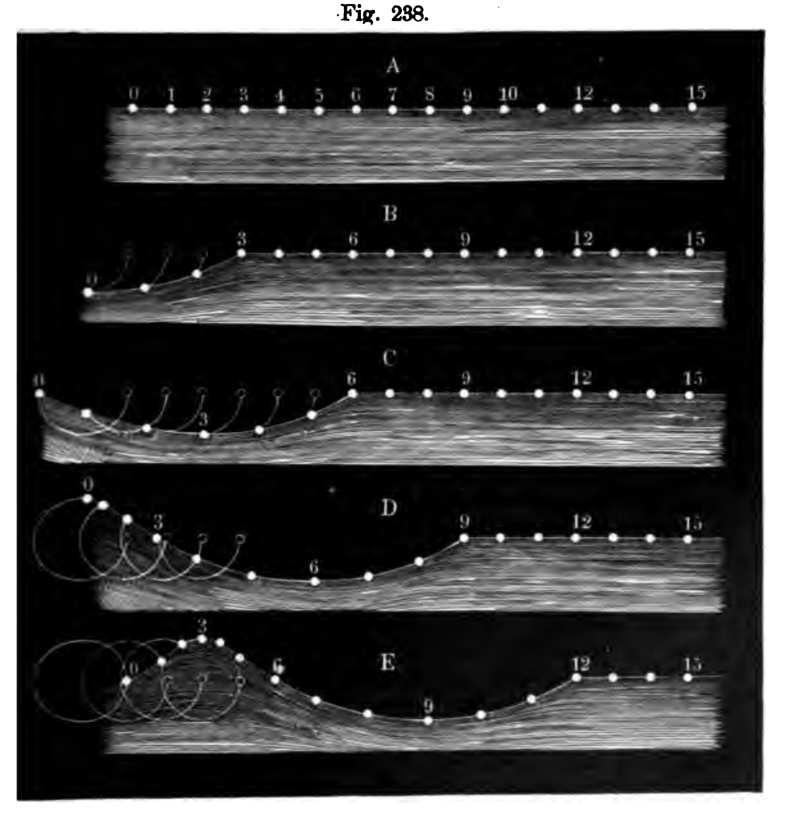
VI. Mechanische Schwingunge und Wellenbewegungen.

---

sein Gleichgewicht z. B. durch Hineinwerfen eines Steines (Fallen von
ntropfen, Anstreifen eines Vogels . . .) an einer Stelle gestört, so breiten sich
ihr Wellenringe aus, indem je einer Erhebung des Wassers über den
erspiegel, einem **Wellenberge**, eine Vertiefung, **das Wellental,** folgt. Ver-
n wir mit dem Blicke von einem bestimmten Zeitpunkte an ein bestimmtes
k des Wasserwulstes zwischen zwei Tälern, so scheint sich diese Wasser-
e von der Erregungsstelle weg mit konstanter Geschwindigkeit über den
erspiegel hinzuschieben. Dafs aber nicht dieser Wasserkörper als Ganzes
fortschreitende Bewegung mit jener Geschwindigkeit besitzt, erkennen wir,
auf der Wasserfläche z. B. ein Baumblatt (auf mächtigeren Wellen ein
. . .) schwimmt, wobei dieser „Schwimmer" keineswegs eine fortschrei-
le Bewegung nach der Richtung des Fortschreitens der Welle und mit deren
hwindigkeit ausführt, sondern nur an Ort und Stelle so lange schaukelt (auf-
ab- und zugleich vor- und rückwärts schwingt), als Wellen unter ihm weg-
n. — Genauer, als es die blofse Betrachtung der in der Natur vorkommenden
erwellen erlaubt, zeigen die

Versuche mit der Wellenrinne (Gebrüder WILHELM und ERNST HEINRICH
ER 1825), einer 1 bis 2 m langen schmalen Wanne mit Glaswänden, dafs

Fig. 238.



perchen an der Oberfläche des Wassers nahezu kreisförmige Bahnen in
ikaler Ebene parallel den Längswänden der Rinne ausführen. Körperchen



unter dem Wasserspiegel bewegen sich in Ellipsen mit wagrechter Hauptachse, in noch gröſserer Tiefe (nahe dem Boden) schwingen die Teilchen in wagrechten Geraden, deren Länge in bestimmter Tiefe Null wird. Von dieser Tiefe an bleibt das Wasser von den Wellenvorgängen an seiner Oberfläche unberührt. Fig. 238 (a. v. S.) *A* bis *E* gibt ein phoronomisches Bild davon, wie nach und nach immer weitere Wasserteilchen der Oberfläche von der Kreisbewegung ergriffen werden und so die Wellenbewegung im ganzen zu stande kommt.

Die Erregung der Wellen, zunächst in der Wellenrinne, kann durch einoder mehrmaliges Emporsaugen und Wiederfallenlassen des Wassers in einem Röhrchen oder durch Hin- und Herfahren mit einem Stäbchen u. dergl. (meist an dem einen Ende der Rinne) vorgenommen werden. — Um den dynamischen Vorgang der Übertragung dieser Bewegungen an einem noch etwas vereinfachten Falle darzustellen und so die Wellenbewegung, zunächst des Wassers, als Wirkung bekannter Kräfte zu erklären, denken wir uns auf die ebene ruhende Wasseroberfläche eine begrenzte Wassermenge aufgelagert. Diese wird durch ihr Gewicht die unter ihr liegenden Wasserteile drücken, diese werden infolge des hydrostatischen Druckes zur Seite und dann nach oben auszuweichen suchen, so daſs sich, indem die erste Erhebung des Wassers sich ausgleicht, neben ihr eine neue Erhebung (ein Wellenberg) bildet, welche nun ihrerseits neben sich wieder eine dritte Erhebung bildet u. s. f. Da die erste Wassermasse mit einer Beschleunigung sinkt, die wie im Kommunikationsrohr proportional dem Abstand vom Niveau ist, so kommt sie mit einer gewissen (Maximal-) Geschwindigkeit ins Niveau und geht von da noch ein Stück nach abwärts: es entsteht die Vertiefung neben der umliegenden Erhebung u. s. f. —

Der in der Volkssprache ganz oder fast ausschlieſslich auf Wasserwellen eingeschränkte Begriff der „Wellenbewegungen“ hat mit sich erweiternder Erkenntnis der physikalischen Erscheinungen eine umfassende Erweiterung erfahren. So zeigen eine unverkennbare Ähnlichkeit mit den Wasserwellen z. B. die unter ganz anderen mechanischen Bedingungen auftretenden „Seilwellen“.

II. *Versuch* 1. Ein Seil (Kautschukschlauch, Spiralfeder . . .) wird an dem einen Ende festgehalten (etwa an der Zimmerdecke befestigt) und das andere Ende wird mit der Hand 1, 2, 3 . . . mal rasch auf- und ab- (hin- und her-) bewegt. Man sieht dann 1, 2, 3 . . . Ausbiegungen als „**Seilwellen**“ das Seil entlang hinlaufen. — *Versuch* 2. Wird an einer Stelle einer geeigneten Drahtspirale das Gleichgewicht statt durch eine seitliche Verschiebung wie bei Versuch 1 durch Zusammen- (bezw. Auseinander-) schieben einiger Spiralwindungen gestört, so schreitet eine Verdichtung (bezw. Verdünnung) längs der Spirale fort (— die Erscheinung wird deutlicher, wenn einzelne Windungen der Drahtspirale an Fäden aufgehängt sind, so bei Weinholds Wellenmaschine). —

III. Ähnliche Erscheinungen zeigen sich überdies an einem Ährenfelde, über welches der Wind hinstreicht, an den Leibringen einer Raupe, eines Regenwurmes, welche sich an verschiedenen Stellen zu verschiedenen Zeiten zusammen- und auseinanderschieben, an den Beinen eines Tausendfüſsers, an den Gliedmaſsen eines langen Zuges Soldaten, welche nach dem Spiel der an der Spitze des Zuges marschierenden Musikkapelle marschieren, wobei der Schall zu den entfernteren erst später gelangt; beim Haltmachen und beim Weitergehen eines langen Zuges von Menschen, den Puffern eines Eisenbahnzuges. Weitere Beispiele!

Alle bisherigen Beispiele I, II, III haben folgendes gemeinsam:

a) Eine **Wellenbewegung** findet statt, wenn in einer Reihe vo[n]

ıssenpunkten jeder einzelne gleiche (ähnliche) **Bewegungen** um ıe gewisse Zeit später als der vorausgehende ausführt.

b) Aber auch Vorgänge, wie die Ausbreitung des Schalles, des ;htes, der strahlenden Wärme, der elektrischen Zustände rings um ıe Entladungsstelle u. s. f., welche sich ihrerseits zunächst nicht ; Bewegung, sondern eben als Schall, Licht . . . der direkten ıнlichen Wahrnehmung darbieten, haben mit obigen rein mechanischen ɘllenerscheinungen so vieles gemeinsam, daſs wir gegenwärtig auch ɑ Schall-, Licht-, Wärme-, elektrischen Wellen, von Luftıllen, Ätherwellen u. s. f. sprechen. — Allgemein bildet der griff der **Wellenbewegung** ein Gegenstück (und zwar eine Art gensatz) zum Begriffe der **Massenbewegung**.

Zu a). Wenn nämlich z. B. ein Kahn über den Wasserspiegel eines Teiches ıinfährt, so nehmen die Teilchen des Holzes, des am Boden angesammelten ısser*s* u. s. w. immer andere und andere Orte in Bezug auf das Ganze der ıssermenge im Teiche ein. Was hier seinen Ort ändert, also sich „bewegt", ist ɪfach die Masse des Kahnes, des in ihm befindlichen Wassers u. s. w. — Was gegen bei der scheinbaren Bewegung eines Stückes des sich ausbreitenden Wellenges immer andere und andere Orte an der Oberfläche des Teiches einnimmt ɪd so den Schein einer ebenfalls fortschreitenden Wassermasse hervorbringt, ist Wahrheit das Auftreten gleicher (oder ähnlicher) Bewegungszustände an ɪeinander folgenden Wasserteilchen. Ähnlich: Erdbebenwellen im Boden ɪd im Luftmeer (eine solche ging 1883 beim Ausbruch des Krakatao über die ınze Erdoberfläche bis zu den Antipoden binnen 36 Stunden, von hier zur Ausngsstelle zurück u. s. f. bis zu allmählichem Erlöschen). — Diese Übertragung ɜ Begriffes der „Bewegung" von einer ihren Ort ändernden Masse auf ɪen seinen Ort ändernden Bewegungszustand muſste angesichts der

b) Wärme-, Licht-, elektrischen Wellen sogar noch dahin erweitert erden, daſs nicht nur ein Bewegungszustand, sondern auch ein Wärmezustand, ɪ elektrischer Zustand u. s. f. sich durch eine als Ganzes ruhende Stoffenge ausbreiten oder, wie wir speziell bei **Wellen** sagen: „**fortpflanzen**" ɪnn. Im Gegensatz zu diesen Wärmewellen (wie sie sich z. B. von der Oberiche des Erdbodens gegen die Tiefe hin fortpflanzen, vergl. § 196), den elektrischen ˈellen (§ 157) u. dergl. können wir die Wasserwellen, die Seilwellen u. dergl., bei elchen das, was sich „bewegt" (ausbreitet, „fortpflanzt"), selbst eine Massenewegung ist, als **mechanische Wellen** bezeichnen.

Zur vollständigen phoronomischen Beschreibung einer mechanischen ˈellenbewegung gehört also a) die Beschreibung der Bewegung jedes einzelnen ˈunktes (welche meistens, wenn auch nicht immer, eine schwingende ist; ie diese Bewegungen schon bei den Wasserwellen in Kreisen, Ellipsen, Geraden or sich gehen können, so kommen bei manchen Wellenvorgängen noch kompliiertere Schwingungsbewegungen der einzelnen Teilchen in Betracht (weshalb die ɪ § 12 gegebene Darstellung der einfachsten Schwingungsbewegungen in den eiden folgenden Paragraphen zu wiederholen und zu erweitern sein wird). b) Die eschreibung der Beziehungen zwischen der Bewegung je eines ˈunktes zu den ihm benachbarten, namentlich die „**Fortpflanzungsˈeschwindigkeit**", mit welcher sich der gleiche oder ähnliche Bewegungszustand on je einem Teilchen auf die weiteren überträgt. Hierbei werden sich aus den

Wellenbewegungen in eindimensionalen Punktreihen auch ergeben die c) in zwei- und dreidimensionalen Punktsystemen (Kreis-, Kugelwellen u. s. f.).

Die dynamische Erklärung der Entstehung und Ausbreitung von Wellenbewegungen hat anzugeben, infolge welcher Kräfte je ein Teilchen seine Bewegung auf die angrenzenden überträgt (bei den Wasserwellen waren diese die Schwerkraft und der aus ihr sich ergebende hydromechanische Druck, bei sehr vielen Wellenbewegungen, z. B. der Erschütterung, welche sich als Schallwelle durch einen elastischen Stab fortpflanzt, sind es elastische Kräfte). —

Für die Phoronomie und für die Dynamik der Wellenbewegungen ist es der denkbar einfachste Fall, daſs sich die Wellenbewegung „ungestört" fortpflanzt, d. h. daſs es zu jedem Teilchen wieder ein nächstes gibt, auf welches sich die Bewegung unter gleichen Umständen überträgt, weshalb wir anfänglich überall unendliche Punktsysteme fingieren werden. In Wirklichkeit ist aber diese Voraussetzung schon z. B. bei den Wellenbewegungen in einem Teiche, aber auch bei den Meereswogen u. s. f. nicht erfüllt, und es treten dann komplizierte Erscheinungen ein, welche oft gerade die gröſste physikalische Wichtigkeit haben; zunächst die der Reflexion, Brechung und Beugung der Wellen, welche sich manchmal schon an den Ufern eines Teiches beobachten lassen; hier werden durch die früheren Wellen neue Wellen erregt. — Während z. B. in offener See (bei ruhiger Luft) selbst hohe Wogen ohne Veränderung ihrer Form fortschreiten, bilden sich in der Nähe des Strandes Schaumkämme, indem durch die Reibung am flachen Meeresboden die unteren Wasserteile ihre Geschwindigkeit früher verlieren als die oberen, so daſs diese sich in der Richtung gegen den Strand hin überstürzen; indem hierbei die Wellenbewegung als solche aufhört, setzt sich ihre Energie um (in Wärme). — Auch die Vorgänge, durch welche Luftwellen und Ätherwellen in uns Schall-, Licht-, Wärmeempfindungen hervorrufen, können wir mit einem solchen „Strande" vergleichen. Solange z. B. die durch ein Musikinstrument erregten Luftwellen sich nur durch den Luftraum selbst fortpflanzen, hören wir nichts, sondern erst, sobald sie nach der Übertragung auf die Gehörnerven sich in einen jedenfalls nicht mehr rein mechanischen Vorgang umsetzen. Ebenso hat, wenn Lichtstrahlen den dunklen Ackerboden erhitzen, gleichsam ein Stranden der Lichtwellen an dem dunklen Körper („Absorption" des Lichtes) stattgefunden, indem die Energie der Lichtwellen in Wärme des Bodens sich umsetzte. In dieser Art der Übertragung von Energie (welche der Übertragung der lebendigen Kraft z. B. von einem stoſsenden Körper auf den gestoſsenen nicht unter-, sondern beigeordnet ist), liegt die hohe Bedeutung aller (mechanischen und nicht mechanischen) Wellen für fast alle Teile der Physik.

a) Schwingungen einzelner Punkte (Wiederholung und Erweiterung).

§ 61. Sinusschwingungen und andere Schwingungsformen.

Eine **einfache Sinusschwingung** (harmonische Schwingung) ist bei gegebener Mittellage und Schwingungsrichtung bestimmt durch die **Schwingungsweite** (Amplitude) a und die **Schwingungsdauer** T. Phoronomisch beschrieben ist diese Bewegung eines einzelnen schwingenden Punktes nach § 12 durch die Gleichungen für die

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Elongation} \;.\;.\; s = & a \sin \alpha t \\ \text{Geschwindigkeit}\; v = & \alpha\, a \cos \alpha t \\ \text{Beschleunigung}\; w = & -\alpha^2 a \sin \alpha t \text{ oder } w = -\alpha^2 s\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{wo } \alpha = \frac{2\pi}{T}, \\ \text{also } T = \frac{2\pi}{\alpha}\end{array}$$

Die als unabhängig veränderlich gedachte Gröfse t gibt die „Phasenzeit" an, so zwar, dafs als Nullpunkt der Zeitzählung ein solcher Zeitpunkt gewählt ist, in dem der schwingende Punkt die Mittellage im Sinne der positiven Elongationsrichtung passiert. — Wird als Nullpunkt der Zeitzählung ein um ϑ Sekunden früherer gewählt, so ist in obigen Gleichungen statt t einzusetzen $t' = t + \vartheta$. Ist z. B. $\vartheta = \frac{T}{4}$, so wird $s = a \sin \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{T}{4}\right) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) = a \cos \frac{2\pi}{T} t$.

Als allgemeinste dynamische Bedingung dafür, dafs ein Massenpunkt solche Sinusschwingungen ausführt, wurde im § 18 die entwickelt, dafs der Massenpunkt durch Kräfte bewegt wird, die direkt proportional seinem jeweiligen Abstand von der Mittellage gegen diese Mittellage hin wirken.

Hat der schwingende Punkt die Masse m und wirken auf ihn, während er

$$\left.\begin{array}{l}\text{die Elongationen } 0,\ 1,\ 2, \ldots s \text{ cm hat,} \\ \text{die Kräfte } \ldots 0,\ \varkappa,\ 2\varkappa, \ldots s\varkappa \text{ Dyn,}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{so ist seine Schwingungsdauer} \\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\varkappa}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 6, § 18)}\end{array}$$

Der häufigste Fall solcher Kräfte sind die elastischen Kräfte. Deshalb führt jeder Punkt z. B. eines zylindrischen oder quadratischen Stabes, der an einem Ende festgeklemmt und aus seinem Gleichgewichtszustande durch Biegen oder Stofsen gebracht worden ist, um seine Gleichgewichtslage längs einer Geraden (vorausgesetzt, dafs ihm nicht noch eine seitliche Geschwindigkeit erteilt ist) Sinusschwingungen aus; desgleichen jeder Punkt innerhalb der Spiralfeder bei den Vorversuchen II des § 16. — Ebenso in den LA 27—30. LA 27-30.

Keineswegs alle Schwingungen folgen aber dem einfachen Wegzeitgesetz $s = a \sin \alpha t$. Schon längs einer Geraden können Schwingungen auch nach irgend welchen anderen Wegzeitgesetzen stattfinden; hiernach unterscheidet man schon an einem geradlinig schwingenden Punkte verschiedene **Schwingungsformen**. Zur Erläuterung dieses Ausdruckes denke man sich unter dem schwingenden Punkte, der mit einer Schreibvorrichtung versehen sei, ein Blatt Papier (z. B. das berufste des Scottschen Phonautographen, § 86) mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht gegen die Schwingungsrichtung fortgezogen. Es wird dann ein nach dem Gesetze $s = a \sin \alpha t$ sich bewegender Punkt (z. B. die Spitze am Ende einer schwingenden Stimmgabel, Fig. 239) auf das Papier Sinuskurven zeichnen (ähnlich wie

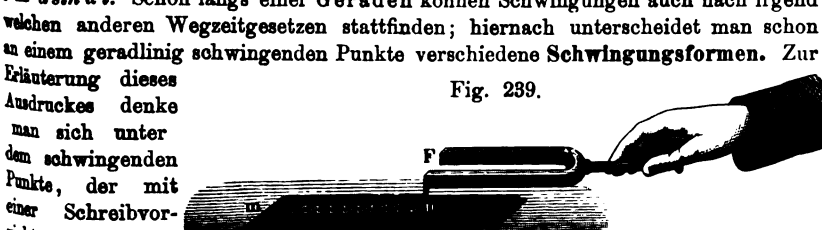


Fig. 239.

sie die Schulknaben an die Hauswände zeichnen, wenn sie, ein Stück Rötel i
Hand, den Arm vertikal auf- und abbewegend die Wand entlang laufen;
dabei die Kurve nahe den höchsten und tiefsten Stellen weniger steil ist a
der Mittelachse der Kurve, entspricht dem Umstand, daſs der Arm nahe
Umkehren unwillkürlich weniger schnell bewegt wird). Würde dagegen
schwingende Punkt mit **konstanter** Geschwindigkeit aufwärts, dann nach
licher Umkehr mit eben solcher Geschwindigkeit abwärts u. s. w. beweg
entstände statt der Sinuslinie eine **Zickzacklinie** u. s. f. Die Schwing

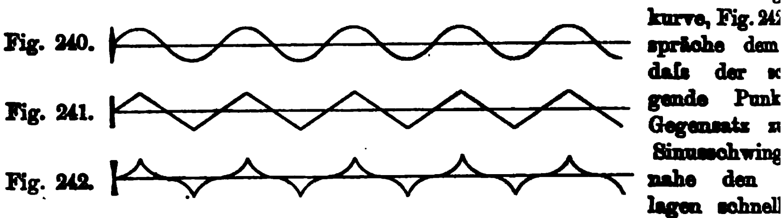


Fig. 240.

Fig. 241.

Fig. 242.

kurve, Fig. 242 spräche dem daſs der sc gende Punk Gegensatz z Sinusschwing nahe den lagen schnell
nahe der Mittellage sich bewegt (— die gröſseren Geschwindigkeiten sind
drei Figuren auch durch die Art der Verdickungen der Linien am Anfang
Figur angedeutet). — Daſs und inwiefern sich alle beliebigen Schwin
formen eines einzelnen Punktes längs einer Geraden auf die **Zusammense**
von Sinusschwingungen längs derselben Geraden zurückführen lasse
im § 69 noch näher erörtert werden.

Alle Schwingungen eines einzelnen Punktes längs **anderer Lini**
gerader lassen sich in Sinusschwingungen längs zweier einander unter
(oder schiefen) Winkeln sich schneidender Geraden zerlegen. Einige der ver
mäſsig einfachsten Fälle im folgenden Paragraphen.

§ 62. Zusammensetzung von Sinusschwingungen

I. Schwingungen von **gleicher Dauer**. — In § 12, Versuch 6, wu
einfache Sinusschwingung als Projektion einer einfachen Kreisung da
Wird dieselbe Kreisung auf **zwei** zueinander normale Geraden in de
projiziert, so ist die **Kreisung in zwei einfache Sinusschwingung**
einer Phasendifferenz von $^1/_4 T$ **Sekunden** zerlegt. (*Versuch nach E*
Ähnlich wie in § 12, Versuch 6, durch **eine** Lichtquelle, wird jetzt die k
Holzkugel durch **zwei** Lichtquellen beleuchtet, deren Strahlen sich in d
rechten Kreisungsebene rechtwinkelig schneiden, und es führen dann a
Schirmen, deren Ebenen zu diesen Strahlen und daher auch untereinander
sind, die Schlagschatten Sinusschwingungen aus, die um $^1/_4 T$ sec diff
Daher auch umgekehrt:

ben die zwei Schwingungen bei gleicher oder ungleicher Am-
keine Phasendifferenz, so setzen sie sich zusammen zu
eradlinigen Schwingung. — Fig. 245.

Fig. 243.

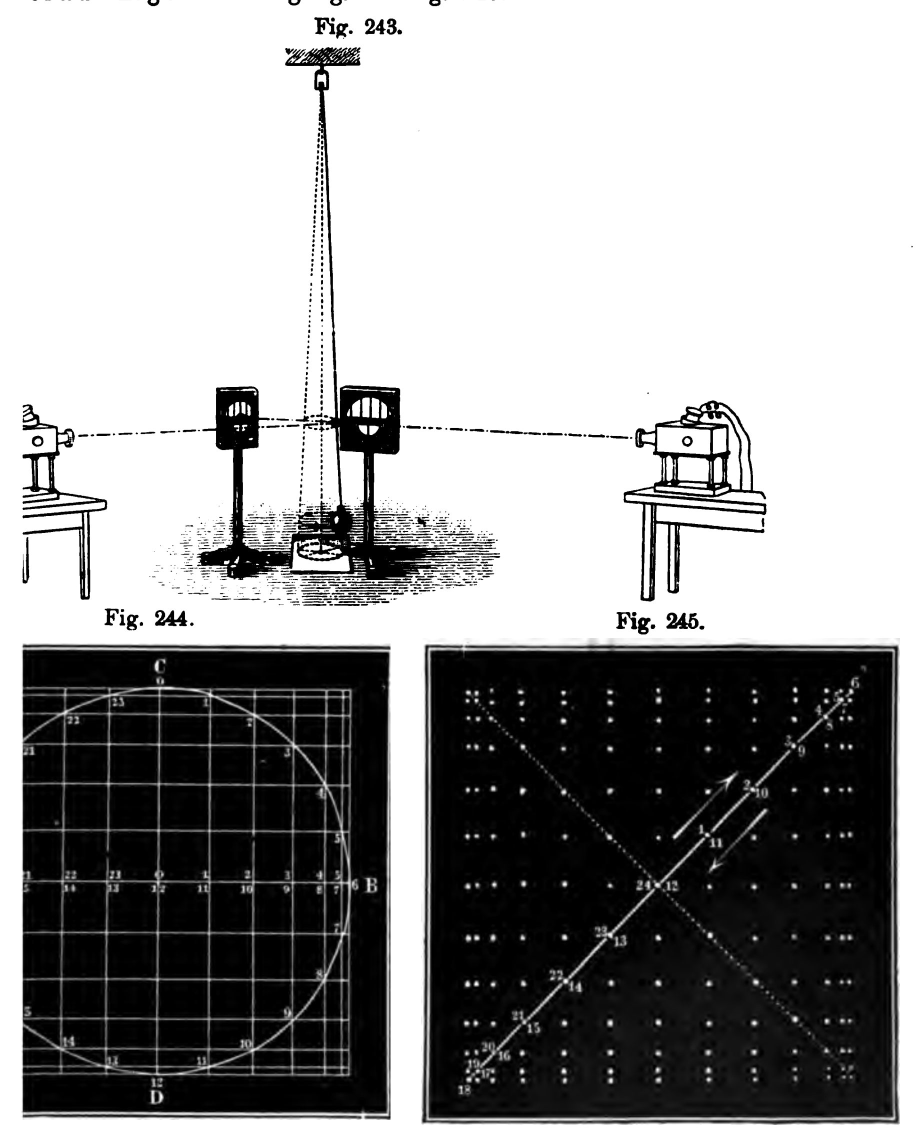
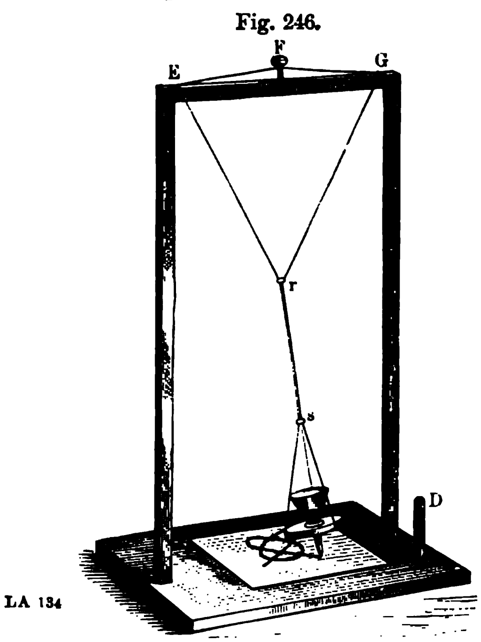


Fig. 244. Fig. 245.

alytisch: Aus $x = a \sin \alpha t$ und $y = b \sin \alpha t$ ergibt sich die Gleichung der
n $y = \frac{b}{a} x$. — *Versuch* ähnlich wie oben, wenn das Pendel und also
Holzkugel in einer Ebene zwischen den Schirmebenen schwingt.

II. Schwingungen von ungleicher Dauer. — *Versuch* (Fig. 246): Inde das Pendel an zwei Fäden aufgehängt ist, ist ihm eine bestimmte Schwingung ebene angewiesen; indem aber von der Verbindungsstelle *r* der beiden Fäden ei Faden bis zum Pendelkörper führt, wir eine ihm nach irgend einer Richtung hi (z. B. durch Loslassen von der Ecke de Zeichenblattes aus) erteilte Schwingun zerlegt in die nach jener Ebene und i die normal dazu erfolgende Schwingung Und diese beiden Schwingungen von ve schiedener Schwingungsdauer setzen sic dann zu mannigfaltigen Schwingung figuren zusammen, welche durch de aus dem Trichterchen ausfallenden Sa oder durch andere Schreibvorrichtung auf dem Papier ersichtlich gemacht we den können. Verhalten sich z. B. d Längen der einfachen und der Gesam aufhängung wie 1 : 4, die Schwingung dauern also wie 1 : 2, so entsteht ei 8förmige Figur, falls beiden Schwingung ein Passieren der Mittellage in demselb Zeitpunkte entspricht; war dagegen d Pendelkörper von der Ecke aus losgelass so entsteht eine parabelähnliche Fig (LA 134). Die Zeichnung in Fig. 246 e spricht 4 : 5 (vergl. Fig. 248).

Fig. 246.



LA 134

Den rationalen Verhältnissen der Schwingungsdauern 1 : 1, 1 : 2, 1 : 2 : 3 . . . u. s. f. entsprechen immer verwickeltere Figuren. — Sind dabei die V

Fig. 247.

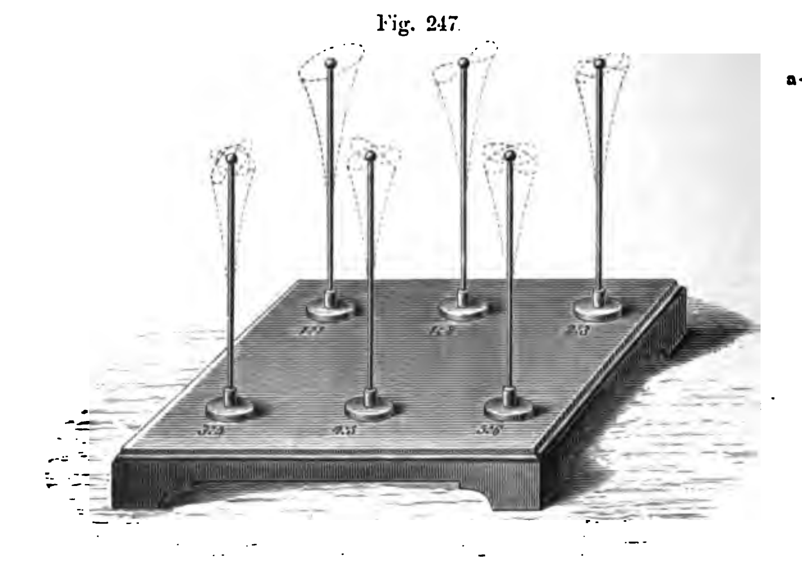
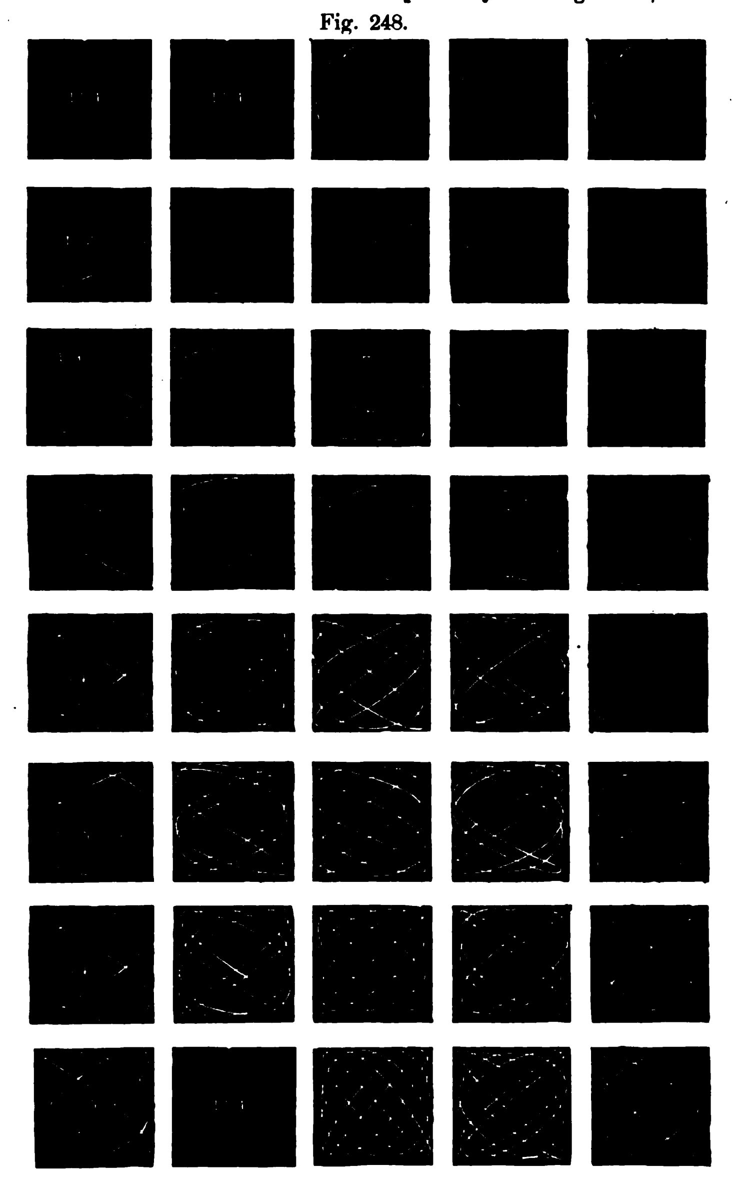


Fig. 247a

isse nicht genau eingehalten, so gehen die je einem Verhältnisse entsprechen-
mehreren Figuren (Fig. 248), z. B. Gerade und Kreis bei 1 : 1, je nach der
endifferenz allmählich ineinander über. [Lissajous Figuren, zu erzeugen

Fig. 248.



ch Stäbe von quadratischem, kreisförmigem, rechteckigem, elliptischem Quer-
nitt (Fig. 247), durch Paare von Stimmgabeln, deren eine einen Lichtstrahl
die andere reflektiert vergl. Fig. 87, S. 303 u. dergl. m.]

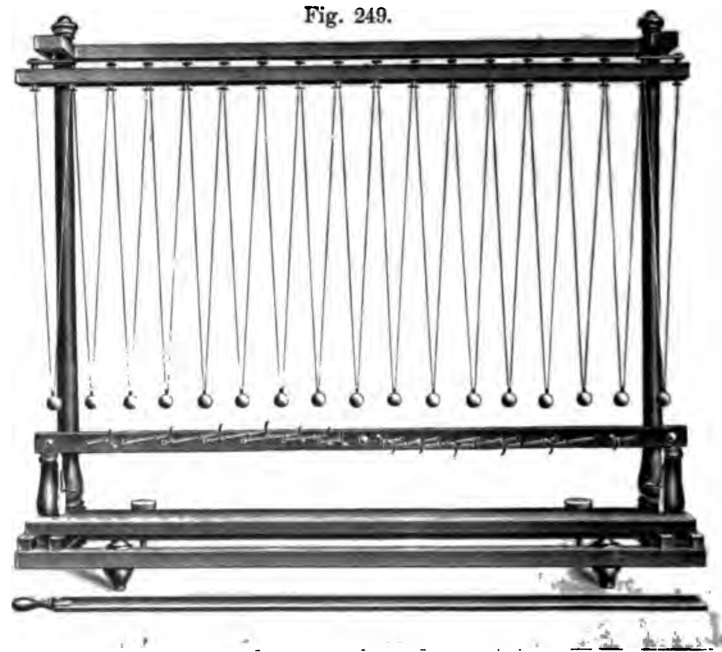
Die **dynamischen Bedingungen für das Zustandekommen solcher zusamm**gesetzten Schwingungen können sehr mannigfaltige sein. Z. B.: Es führt elastischer Stab von rechteckigem Querschnitt (Fig. 247a, S. 232), wenn er para der Schmalseite angestofsen wird, langsamere Schwingungen aus als beim St parallel der Längsseite. Bei einem nicht rein in die eine oder andere Richt fallenden Anstofs **zerlegt** sich dann die Bewegung in zwei einfache Schwingun von verschiedener Schwingungsdauer, die sich wieder **zusammensetzen** zu Schwingungen nach Figg. 247 und 248.

b) Wellenbewegungen in eindimensionalen Punktreihen

§ 63. Phoronomische Beschreibung der Wellenbewegung

Machs Wellenmaschine (Fig. 249) besteht im wesentlichen aus einer R von gleichen Pendeln, welche in gleichen Abständen **bifilar aufgehängt** sind (je nach Stellung der Doppelfadenebene) **transversal, bezw. longitudinal** (ode irgend einer Zwischenrichtung) schwingen können, d. h. so, dafs die **Schwingungsrichtung** jedes Pendels („Punktes") zur Reihe der Pendelkörper („Pun**reihe**") **normal** ist, bezw. **in** sie fällt (oder auch irgend einen schiefen Wi mit ihr bildet).

Fig. 249.



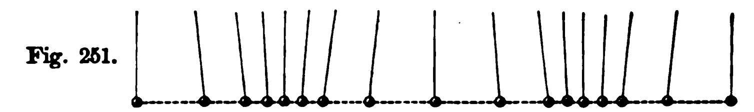
Versuch 1, Fig. 250: Bei Transversalstellung werden die Kugeln n eines Lineals um gleichviel verschoben gehalten. Wird dann das Lineal läng Reihe weggezogen, so treten die Kugeln der Reihe nach in die gleichen Sc gungszustände ein und geben im ganzen das Bild einer **fortschreitenden t versalen Welle** (ähnlich den Seilwellen bei Versuch 1, § 60).

Fig. 250.



Versuch 2, Fig. 251: Bei Longitudinalstellung der Pendel bringt man diese ttels eines längs der Reihe hingeführten Schlittens oder direkt mit der ıd . . .) nacheinander zum Schwingen und erhält so **fortschreitende longitinale Wellen** (ähnlich den Schwingungen der Spiralfeder an Weinholds llenmaschine). — Man kann auch, während wie bei Versuch 1 die Pendel ısversal schwingen, die bifilare Aufhängung um 90° (langsam! — warum?) hen, wobei sich die transversalen Wellen in longitudinale umwandeln.

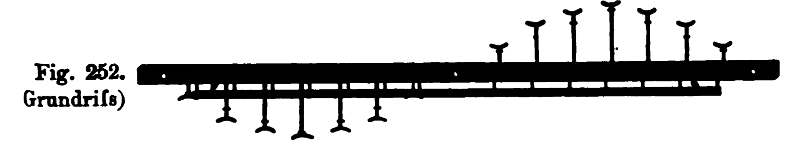
Fig. 251.



Bei einer Umstellung um 45° ergeben sich Wellen mit gleicher transsaler und longitudinaler Komponente.

Versuch 3: Die Kugeln werden mittels eines gebogenen Drahtes (oder einer ıte mit ungleich langen, kurbelartig verstellbaren Drähten, Fig. 252) um leiche Stücke aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht und dann durch rasches

Fig. 252. Grundriſs)



ıeitigen des Drahtes (bezw. Senken der Leiste) gleichzeitig schwingen gesen. Sie bilden als Ganzes eine **stehende transversale Welle.** (Solche Wellen sen sich auch durch anhaltendes Hin- und Herbewegen eines Seilendes in stimmtem Tempo hervorrufen; vergl. Figg. 258 I bis XIX, S. 243.)

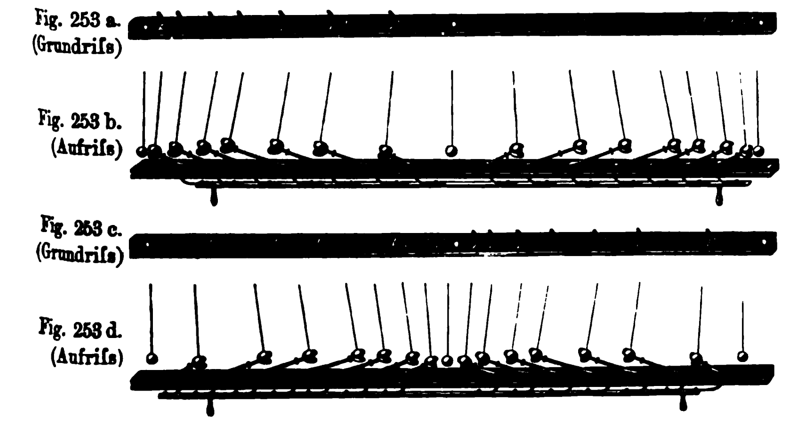


Fig. 253 a. (Grundriſs)

Fig. 253 b. (Aufriſs)

Fig. 253 c. (Grundriſs)

Fig. 253 d. (Aufriſs)

Versuch 4, Fig. 253 b, d (a. v. S.): Durch Verdrehen der Schwingung
LA 135. (bezw. der Drähte an der Leiste, Fig. a, c, LA 135) um 90° ergibt sich w
Versuch 3 die **stehende longitudinale Welle.** (Solche Wellen bilden
auch an Weinholds Wellenmaschine, wenn von beiden Enden der S
her in gleichem Tempo fortschreitende longitudinale Wellen erregt werd
ferner § 65, Fig. 259; § 89, Fig. 321.)

Diesen vier Hauptarten von Wellen entsprechen also folgende :
kreuzenden) Einteilungen der Wellen:

I. **Fortschreitende** Wellen (*V.* 1, 2) und **stehende** Wellen

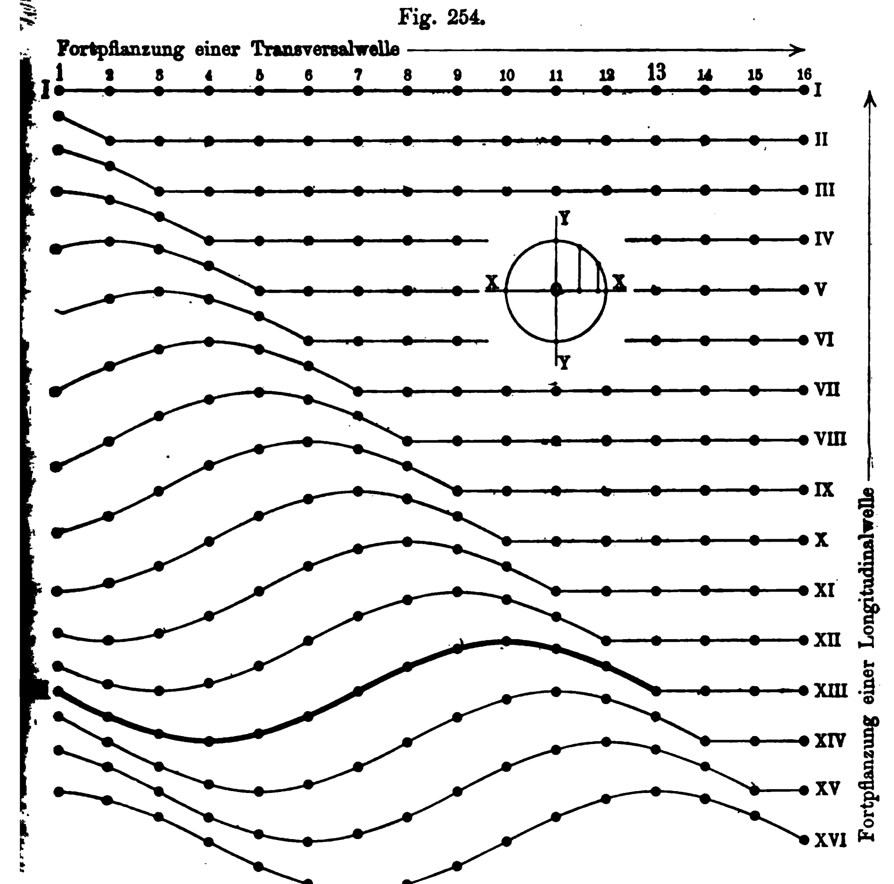
II. **Transversale** Wellen (*V.* 1, 3) und **longitudinale** Wellen

Zu I. Der Begriff „Welle“ ist ursprünglich von den fortschr
Wellen genommen, und zwar, wie schon im § 60 bemerkt, von den Wa
Da aber namentlich auch stehende transversale Wellen durch ihre
die **Wellenberge** und **Wellentäler** der fortschreitenden Wellen erinnern,
die Bezeichnung „Welle“ von den fortschreitenden auf die st
übertragen. — Ein weiterer Grund für diese Übertragung ist der, daß
Wellen unter bestimmten Umständen (§ 65) aus fortschreitenden ents
Gleichwohl ist dies keine Zwischenstufe zwischen fortschreitenden ur
den Wellen (d. h. die Einteilung I gibt einander ausschliefsende

Zu II. Ebenfalls liegt die ursprüngliche Vorstellung von einer „W
transversalen näher als den longitudinalen; denn bei longitudinale
gibt es nicht Wellenberge und Wellentäler, also **keine Gestaltsände**
Punktreihe, sondern nur **Verdichtungen** und **Verdünnungen.** — Da
Schwingungs- und Fortpflanzungsrichtung nicht nur die Winkel 90° un
dern, wie eingangs bemerkt, auch alle schiefen Winkel vorkommen k
gibt die Einteilung II in den Begriffen transversale und longit
Schwingungen, bezw. Wellen nur die beiden Grundtypen, zwisch
es stetige Übergänge gibt; so z. B. gegen Ende des Versuches 2, v
transversale und longitudinale Komponenten vorhanden sind. Wäre statt
Winkel 60° gewesen, so wäre die transversale Komponente überwiegend
longitudinale. — Auch an den kreisförmigen Bewegungen eines Ob
teilchens bei Wasserwellen sind gleiche transversale und longit
Komponenten beteiligt; bei den elliptischen Bewegungen der Teilc
der Oberfläche überwiegt die longitudinale Komponente. — Rein tran
sind dagegen wieder solche kreisförmigen Schwingungen, bei we
Ebene der Bahnen normal auf der Fortpflanzungsrichtu
(wie bei „zirkular polarisiertem Licht“, § 128). Es lassen sich nämlich a
Bewegungen zwei rein transversale Wellen aussondern, aber gar keine lon
Komponente. Desgleichen wenn die einzelnen Teilchen in Ebenen, die

von der schwingenden Bewegung ergriffen werde. Durch welche **Kräfte** diese Übertragung der Schwingungsbewegung geschieht, wird im folgenden Paragraphen untersucht werden; die nächstfolgenden Definitionen und Gleichungen beziehen sich auf die **phoronomischen Eigenschaften der fortschreitenden Transversalwellen**, und sie werden nach Bedarf später (§§ 65, 89) für die drei anderen Hauptarten von Wellen teils übertragen, teils entsprechend modifiziert werden.

Fig. 254.



In einer fortschreitenden Welle heifst **Wellenlänge** der Abstand je eines Teilchens von demjenigen ihm nächsten, das mit ihm **gleiche Schwingungsphase** hat. — Die **Wellenhöhe** (d. i. Höhe eines Wellenberges, bezw. Tiefe eines Wellentales) ist gleich der **Amplitude** der einzelnen schwingenden Teilchen. — Ist die „Schwingungsform" (§ 61) für jedes einzelne Teilchen die der einfachen Sinusschwingungen, so ist die **Wellenform** die einer **Sinuslinie**.

In Fig. 254, XIII ist also der Abstand der Punkte 1 und 13 (bezw. 2 und 14 . . .) eine Wellenlänge; an den längs dieser Strecken liegenden Punkten sind

immer alle möglichen Schwingungszustände je eines Punktes je einmal ver-treten. — Sind die Wegzeitgesetze der einzelnen schwingenden Punkte nicht sol[illegible] von der Form $s = a \sin \alpha t$, so ergeben sich auch entsprechend andere Wellen-formen; z. B. Zickzacklinien (vergl. Fig. 241, S. 230), wenn die einzelnen Punkte m[illegible] konstanten Geschwindigkeiten hin- und hergehen (wie es an Violinsaiten vorkommt). Ja sogar, wenn die Bewegung der einzelnen Punkte überhaupt nicht „Schwin-gungen", d. i. periodische Bewegungen sind (z. B. wenn bei Seilwellen das Seil-ende nur einmal, und zwar etwa nur aufwärts und bis zur Mitte zurück, nicht mehr aber über die Mitte hinaus bewegt wird), kann man noch von „Wellen" sprechen, die nun aber auch keine periodische Wellenform haben. Die folgenden Bestimmungen setzen aber wieder voraus, daſs jedes Teilchen der Punktreihe wenigstens eine Schwingung von der Schwingungsdauer T Sekunden macht.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle. — Folgen wir m[illegible] dem Blick dem Wellenberge bei Wasser- oder Seilwellen oder bei Versuch 1 m[illegible] Machs Wellenmaschine, so liegt es uns nahe, den Begriff der „Geschwindig-keit" von der Bewegung einer Masse auf die Bewegung einer Welle zu übertragen. Wurde z. B. an Machs Wellenmaschine das Lineal mit einer Ge-schwindigkeit von c cm sec^{-1} weggezogen, so schreitet auch eine Welle mit [illegible] dieser Geschwindigkeit durch die Punktreihe vor. Ist nämlich zu einer Zeit $t = 0$ das Ende des Lineals vom Anfangspunkt der Pendelreihe weggezogen word[en] und hat dieses Ende nach der Schwingungsdauer T sec des ersten Pendels läng[s] der Punktreihe eine Strecke cT cm zurückgelegt, so hat das erste der frei ge-wordenen Pendel eine volle Schwingung, das zweite noch nicht ganz ein[e] Schwingung u. s. f. vollendet, während das letzte soeben frei werdende Punkt seine Schwingung beginnt. Auf jener Strecke cT sind also alle Schwin-gungszustände der Pendel vertreten, d. h. jene Strecke cT ist eine Wellenlänge. — Auch wenn dann das Lineal die Punktreihe schon längst ganz verlassen hat, sehen wir noch immer Wellen mit der nämlichen Geschwindigkeit die Reihe entlang laufen (bis die einzelnen Pendel infolge Reibung und Luftwider-stand zu schwingen aufgehört haben). Was wir hierbei am leichtesten mit dem Blicke verfolgen, ist der Abstand zweier Wellenberge (genauer: ihrer Gipfel), d. i. ebenfalls eine ganze Wellenlänge. Dieser Abstand verschiebt sich während einer Schwingungsdauer um seine eigene Länge. Bei allen fortschreitenden Wellen von T sec Schwingungsdauer und λ cm Wellenlänge gilt also für die

Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{\lambda}{T}$ cm sec^{-1}; $\lambda = c\,T$, $T = \frac{\lambda}{c}$.

Wegen der Beziehungen $T = \frac{1}{n}$ und $n = \frac{1}{T}$ (§ 12), gilt ferner

für die Schwingungszahlen: $c = n\lambda$ cm sec^{-1}; $\lambda = \frac{c}{n}$, $n = \frac{c}{\lambda}$.

Versuche: Ziehen wir an Machs Wellenmaschine schnell, bezw. langsam das Lineal weg, so entstehen lange, bezw. kurze Wellen; denn da T immer denselben Wert behält, also $\lambda : c$ konstant ist, so muſs einem gröſseren Wert von c ein gröſserer Wert von λ entsprechen. — Wird ferner, während die der vollen Pendellänge entsprechenden Wellen durch die Punktreihe laufen, das Lineal gleichzeitig an alle Schnüre weiter unten gelegt, so wird die Schwingungsdauer T kleiner, und weil die Wellenlänge λ bleibt, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c gröſser. — Von obigen sechs Gleichungen läſst sich die Gleichung $c = n\lambda$ unmittelbar veranschaulichen durch Seilwellen: werden nämlich an dem einen Ende 2, 3, ... n

wingungen in 1 sec erregt, so ist die Strecke c cm des Seiles, bis zu welcher die erste Erregung binnen 1 sec ausgebreitet hat (und welcher Strecke die tpflanzungsgeschwindigkeit c cm sec^{-1} maßszahlengleich ist), im ganzen von ... n Wellen ausgefüllt.

Durch Einführung der Gröfsen c oder λ läfst sich nun auch die llenbewegung einer ganzen Punktreihe beschreiben durch

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{oder} \quad y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

che Gleichungen aus $y = a \sin \frac{2\pi}{T} t$ für die Schwingung irgend es **Punktes** der Reihe (wo die Elongation statt wie sonst mit s jetzt y bezeichnet ist) dadurch hervorgehen, dafs ein von diesem Punkte die Strecke x cm abstehender Punkt erst nach der Zeit $\frac{x}{c}$ sec dem gleichen Schwingungszustande ergriffen wird.

In diesen Gleichungen sind also sowohl t wie x zwei voneinander unabhängige, änderliche Gröfsen, und y hängt sowohl von der einen wie der anderen ab. Für nd einen speziellen Zeitpunkt, d. h. wenn t zu einer konstanten Gröfse gemacht d, bildet dann jede der Gleichungen im Sinne der analytischen Geometrie die eichung der Wellenlinie für diesen besonderen Zeitpunkt; wird dann t ein etwas anderer konstanter Wert erteilt, so behält die Linie ihre Gestalt, scheint aber längs der Abszissenachse als Ganzes um ein Stück fortgerückt u. s. w., s eben das Eigentümliche der Wellenbewegung als solcher bildet.

Bei **stehenden** Wellen ist es gebräuchlich, schon einen „Berg" oder ein tal" als **„Wellenlänge"** zu rechnen, so dafs also z. B. Fig. 252 (S. 235) zwei Wellenlängen umfafst.

Über die Gleichung einer stehenden Welle vergl. LA 136. LA 136.

64. Dynamische Bedingungen für Wellenbewegungen in eindimensionalen Punktreihen.

Die Pendel an Machs Wellenmaschine hängen untereinander nicht zusammen; damit sie also das phoronomische Bild von transversalen (und longitudinalen) fortschreitenden Wellen geben, müssen sie der Reihe nach jedes eigens regt werden. — Bei den in der Natur auftretenden Wellenbewegungen sind die zelnen Teilchen der den Raum erfüllenden Materie (Luft, Äther ...) durch stimmte Kräfte aneinander gebunden, so dafs ein Impuls, den eines der Teilm empfängt, auf das zweite, von diesem auf das dritte u. s. f. übertragen wird. sehr vielen Fällen sind dies elastische Kräfte, und zunächst nur solche en in diesem Paragraphen vorausgesetzt werden.

Wären z. B. die Massenpunkte 1, 2, 3, 4, 5 ... der obersten ihe in Fig. 254, S. 237 an einem Kautschukfaden in gleichen Abnden befestigt, so würde, wenn dem Punkte 1 eine transversale rschiebung bis zur Elongation $^1/_2 a$ erteilt wird, hierdurch sein Abnd vom Punkte 2 vergröfsert, daher auch dieser Punkt 2 zu einer lichen Bewegung angeregt, die er dann ebenso auf den Punkt 3

überträgt u. s. f. — In erster Annäherung wird, wenn die Be des Punktes 1 eine rein transversale mit der Amplitude a u Schwingungsdauer T gewesen war, auch die jedes weiteren P eine gleiche Bewegung sein; diese Annäherung wird um so zutreffen, wenn der Punkt schon wiederholt die gleiche schwi Bewegung ausgeführt hat.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dafs, wenn die gleichen Massen in Abständen an einer anderen Kautschukschnur angereiht wären, die bei Verlängerung gröfsere Elastizitätskräfte entwickelt, die Übertrag Bewegung je eines Teilchens auf das nächste schneller geschehen wü gegen langsamer, wenn auf dieselbe Schnur gröfsere Massen in Abständen oder gleiche Massen in kleineren Abständen angereiht wäre

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung so gröfser, je gröfser die zwischen den Teilchen einer Pun herrschenden **Elastizitätskräfte** und je kleiner die Dichte („L dichte") der Punktreihe ist. — Schon NEWTON entwickelte the

LA 137. (LA 137) die Gleichung für die

Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle $c = \sqrt{e:d}$ cm

Die hier unter der Annahme getrennter Massenpunkte, die durch Kräfte (versinnlicht durch die der Kautschukschnur) aneinander gefes entwickelte dynamische Erklärung für das Zustandekommen einer W pflanzung führt zunächst unter Annahme der Molekularhypothese zur Vo dafs und warum sich z. B. in einem elastischen Stab aus festem Stoffe versaler Impuls auch als transversale Welle fortpflanzen wird: denn a führt die transversale Verschiebung eines Moleküls eine Abstandsvergr vom nächsten herbei, weckt also nach § 57, Fig. 235 anziehende M kräfte, infolge deren das nächste Molekül vom vorigen nachgezogen, transversal verschoben wird u. s. w. Doch läfst sich auch ohne Molekularh indem wir uns die Punkte stetig aufeinanderfolgend denken, das Eintrete Wellen in festen Stoffen verstehen. — Anders geartet sind die Moleku — allgemeiner: die Anziehungs- (und „Abstofsungs"-) kräfte — in nicht Stoffen, weshalb z. B. in Luft auch nicht transversale, sondern nur l dinale Wellen entstehen werden (§ 91); und umgekehrt: sobald wir an wissen, dafs z. B. die Lichtwellen transversal, nicht longitudinal seien, wir den „Lichtäther" (wenn überhaupt als elastisch) nicht als einen gasf sondern als einen festen Stoff annehmen; Näheres §§ 123, 157.

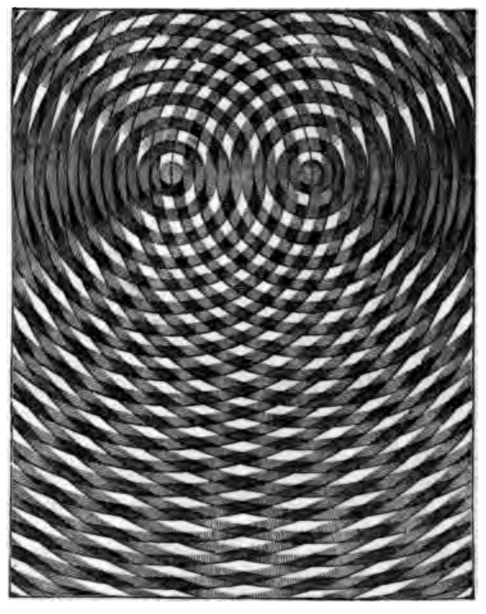


§ 65. Superposition von Wellen. Interferenz.

Ist die Oberfläche eines Teiches, des Meeres . . . von langen un Wellen durchzogen, so wird die schon gekrümmte Wasserfläche durch Regentropfen, durch die Berührung eines vorüberstreichenden Vogels

ich: Wird ein hinreichend langes Seil an jedem der beiden Enden von Hand ein- oder mehrmal geschüttelt, so begegnen und durchdringen ein- Wellen, ohne einander eiteren Ausbreitung zu · So können auch zwei ıschen von den Ecken *D* eines Zimmers aus · Diagonalen *A C* und verständigen, wobei lwellen sich an jedem des Luftraumes zu- ıtzen und erst wieder erlegt werden (§ 96). —

Fig. 255.



e solche Erscheinungen gende Bezeichnungen:

'd dieselbe Punkt- eichzeitig zu zwei ıreren fortschreiten- r stehenden Wellen , so **superponieren** Wellenbewegungen lafs jedem Teilchen ıktreihe in jedem te diejenige eine Elongation (Geschwindigkeit, Beschleunigung, eit) zukommt, die sich aus der algebraischen Summierung ponierenden Bewegungen ergibt.

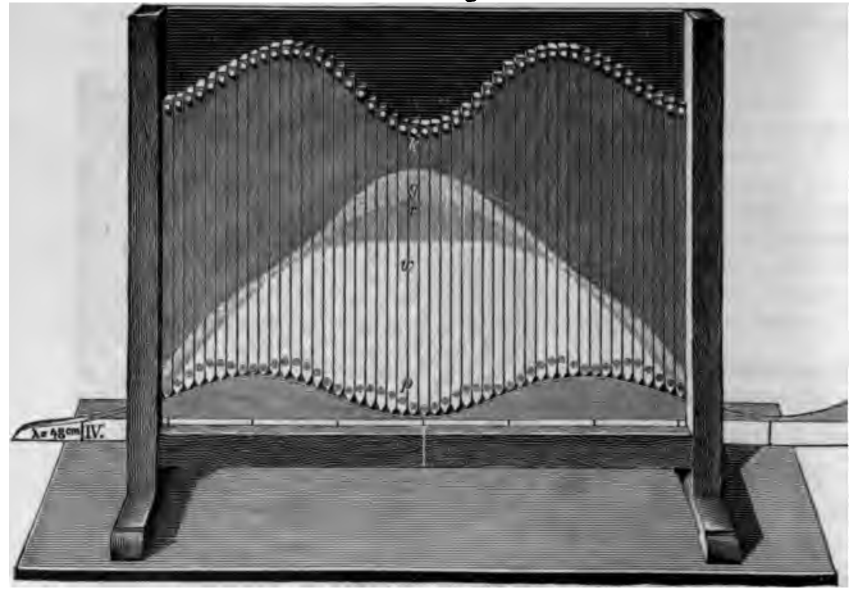
zieller nennen wir **Interferenz** der Wellen, bezw. Wellenzüge *interfere*, dazwischentreten) die Superposition von zwei (oder ı) Wellenzügen gleicher oder entgegengesetzter Fort- ngsrichtung, gleicher Wellenlänge und gleicher Wellen- · Von Interferenz im engsten Sinne spricht man, wenn die ırenden Wellenzüge **um eine halbe Wellenlänge** (allgemeiner ungerade Anzahl halber Wellenlängen) gegeneinander ver- sind, wobei sie sich **völlig aufheben** (z. B. in Fig. 259, S. 243, II, XIII, XIX).

Apparat Fig. 256 (a. f. S.) zeigt, wie sich durch Superposition von zwei reren) Wellenzügen je nach der Wellenlänge, Wellenhöhe und Phasen- (Gangunterschied) mannigfaltige Wellen- (bezw. Schwingungs-) Formen önnen. — Sogar **alle** denkbaren **Wellenformen** lassen sich durch ıition von **Sinus**wellen darstellen, entsprechend dem von FOURIER iesenen geometrischen Satze (mathem. Anhang, Nr. 20), dafs sich alle Kurven durch Superposition von Sinuslinien bestimmter Längen, Höhen seitiger Lage der Nullpunkte darstellen lassen. Anh. 20.

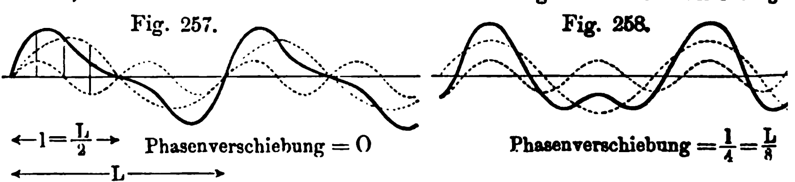
guren 257. 258 (a. f. S.) stellen direkt wieder transversale Wellen vor,



Fig. 256.



bei welchen die Schwingungsebene sowohl der komponierenden als der resultiere
Wellen in die Ebene des Papiers fällt. Zugleich bilden aber diese Figuren
wieder die entsprechenden **graphischen Darstellungen für longitudi**
Wellen; und zwar hierbei einerseits für die **Elongation** der Teile längs



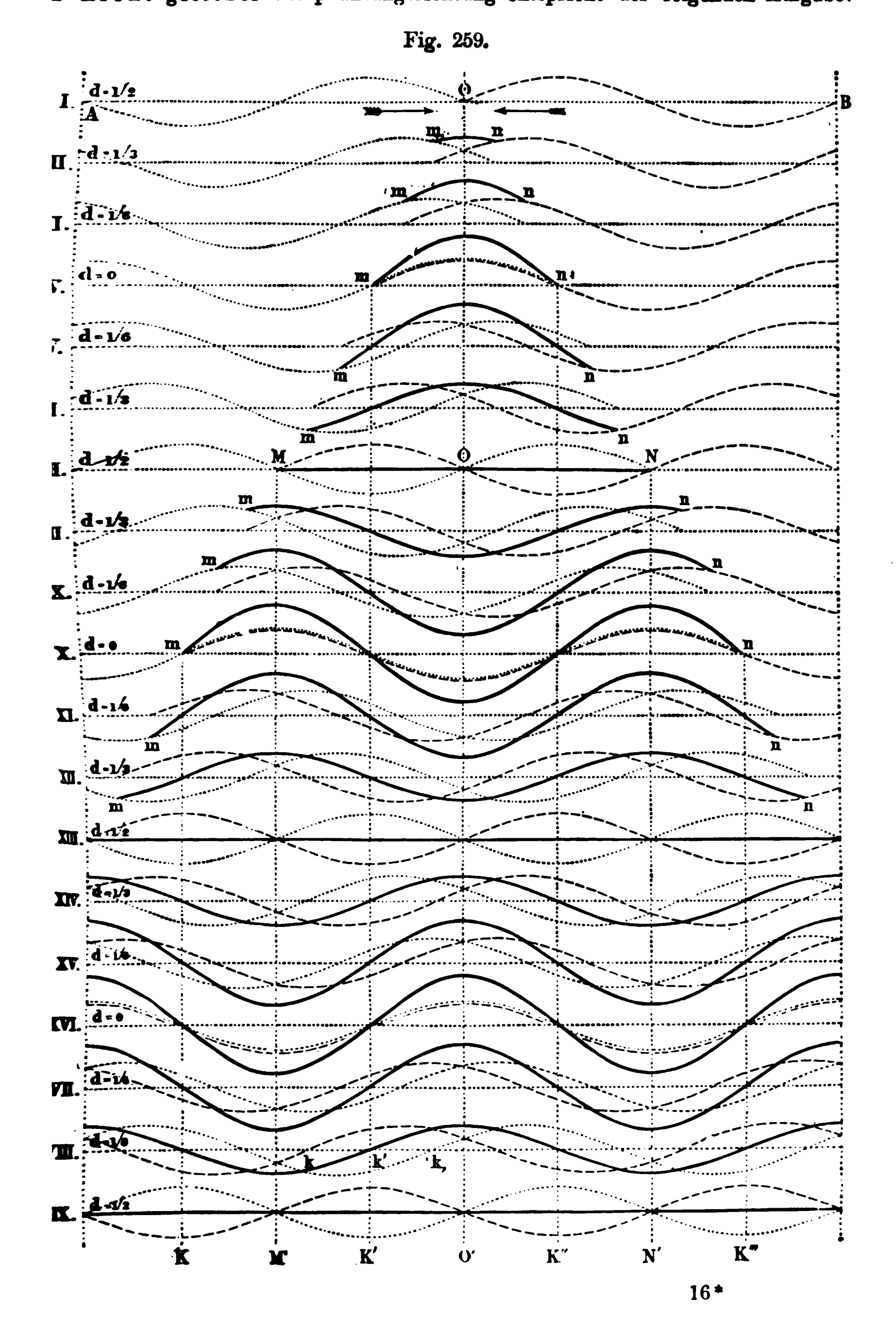
Punktreihe, anderseits (mit einer Phasenverschiebung, ähnlich wie in Fig.
S. 305) für die **Verdichtungen, bezw. Verdünnungen** (wobei gewöhnlich
dichtungen durch Wellenberge, Verdünnungen durch Wellenthäler dargestellt wer

Aber auch für die Schwingungen eines **einzelnen Punktes**, welcher
einer und derselben Geraden Schwingungen von der Schwingungsdauer T
zugleich solche von $\frac{1}{2}T$ ausführt, geben die Kurven eine **graphische**
stellung (vergl. § 61, Figg. 240—242) des Zustandes der Luft an einem
demselben Punkte des Luftraumes, wenn durch diesen gleichzeitig longitud
Wellen von einer Länge L und zugleich solche von $l = \frac{1}{2}L$ hindurchz
(der wichtige Fall des Zustandes der Luft nächst dem Trommelfell eines O
das von zwei Luftwellenzügen vom Schwingungsverhältnis 1:2 getroffen wird

Bei nicht rein longitudinalen Wellen, also z. B. rein transversalen W
deren Schwingungsebenen aufeinander normal stehen, kann das Ergebnis
Superposition in Wellen bestehen, bei welchen die einzelnen Punkte in **Krei**
Ellipsen, Geraden u. s. w. sich bewegen, entsprechend den verschiedenen E
nissen der Zusammensetzung von Schwingungen einzelner Punkte (§ 62). —

Einer der wichtigsten speziellen Fälle der Superpositionen zweier Wellenzüge n nicht gleicher Fortpflanzungsrichtung entspricht der folgenden Aufgabe:

Fig. 259.



Aufgabe: Wie interferieren zwei gleiche Wellenzüge, die in einer Punktreihe nach entgegengesetzter Richtung fortschreiten, nach je einem Viertel der Schwingungsdauer? — Antw.: In Fig. 259 zeigen die Reihen VII, XIII, XII… dafs infolge Interferenz alle Punkte im selben Zeitpunkte die Gleichgewichtslage passieren, wogegen in IV, X, XVI... die stärksten Ausweichungen stattfinden; somit:

Durch Interferenz gleicher entgegengesetzt fortschreitender Wellenzüge bilden sich stehende Wellen. — Ist die Länge einer fortschreitenden Welle λ cm, die der stehenden l cm, so zeigt die Fig. 259, IV, wo *mn* als ganze Länge einer stehenden Welle bezeichnet wird, dafs $\lambda = 2l$ ..... (1); in Worten?

Bei dieser Aufgabe war noch nichts vorausgesetzt darüber, woher der dem einen Wellenzug entgegenlaufende Wellenzug komme. Es könnten z. B. in einer Wellenrinne oder wie beim obigen Versuch an den beiden Enden eines Seiles selbständig Wellen erregt worden sein; der gewöhnlichste Fall ist aber der (wie schon bei den Versuchen mit Seilwellen, § 60, II, beobachtet wurde), dafs die an einem Ende erregten Wellen am anderen Ende „reflektiert" werden. Wir untersuchen diese Erscheinung im folgenden Paragraphen vorwiegend für eindimensionale, im § 69 eingehender für zwei- und dreidimensionale Punktreihen.

§ 66. Reflexion der Wellen.

Verfolgen wir die in einem Teiche (der Blechwanne bei den Vorversuchen in § 60) sich ausbreitenden Wellenringe bis dahin, wo sie an eine geradlinige Begrenzung des Wasserspiegels gelangen, so sehen wir, dafs von hier sich wieder Wellenringe ausbreiten, als ob sie von einem Erregungszentrum kämen, das ebenso weit jenseits jener Geraden liegt, wie das wirkliche Erregungszentrum diesseits (Fig. 264, S. 249). Wir sagen, die Wellen werden an der Wand reflektiert. Die zurückkehrenden Wellenringe interferieren dabei mit den ankommenden. — Ebenso bemerkten wir, dafs, wenn an einem Ende der Wellenrinne (§ 60) Wellen erregt wurden, sie am anderen Ende der Rinne reflektiert wurden. —

Alle diese Erscheinungen der **Reflexion von Wellen** erinnern an die Reflexion von Massen, z. B. beim Stofs einer elastischen Kugel an eine feste Wand. Zu einer solchen Reflexion käme es nur dann nicht, wenn wir uns eine Reihe von gleichen Kugeln ins Unendliche fortgesetzt dächten, da hier jede Kugel die ihr erteilte Bewegung an die nächste überträgt. Erst wenn an eine beliebig lange begrenzte Reihe von Kugeln a) eine Reihe von gröfseren, also schwerer beweglichen, b) eine Reihe von kleineren, also leichter beweglichen Kugeln grenzt, tritt an der Übergangsstelle eine Spaltung des Bewegungsvorganges ein. (Vergl. die Vorgänge beim Stofse zwischen einer grofsen und einer kleinen Kugel, § 58.) Wie nur an einer solchen ungleichartigen Kugelreihe eine Reflexion der Kugelmassen eintritt, so sind auch folgende die wesentlichen Bedingungen für das Zustandekommen einer

Reflexion der Wellen: In einer Punktreihe, die nicht überall gleichartig, sondern im einfachsten Falle aus zwei in sich gleichartigen Reihen zusammengesetzt ist, tritt an der Trennungsstelle eine solche Abänderung der Wellenausbreitung ein, dafs von hier aus eine Welle, die reflektierte, in den ersten Teil der Punktreihe zurückkehrt. Dies auch dann, wenn die Reihe an dieser Stelle überhaupt endigt.

Letzteren Grenzfall ausgenommen, bildet sich auch in dem zweiten Teile der aktreihe eine Welle aus, die im Gegensatz zur reflektierten die **gebrochene** ist (wegen der bei zwei- und dreidimensionalen Punktsystemen mit einem then Übergang aus dem einen Medium in das andere verbundenen Richtungs-ierung der Welle, vergl. § 69).

Bei der Reflexion von Seilwellen fällt ein wesentlicher Unterschied auf, je hdem das Seil an der Wand befestigt ist oder aber in einen langen dünnen len ausläuft (frei herabhängt). Fig. 260 und Fig. 261 stellen dar, dafs an einem

Fig. 260.

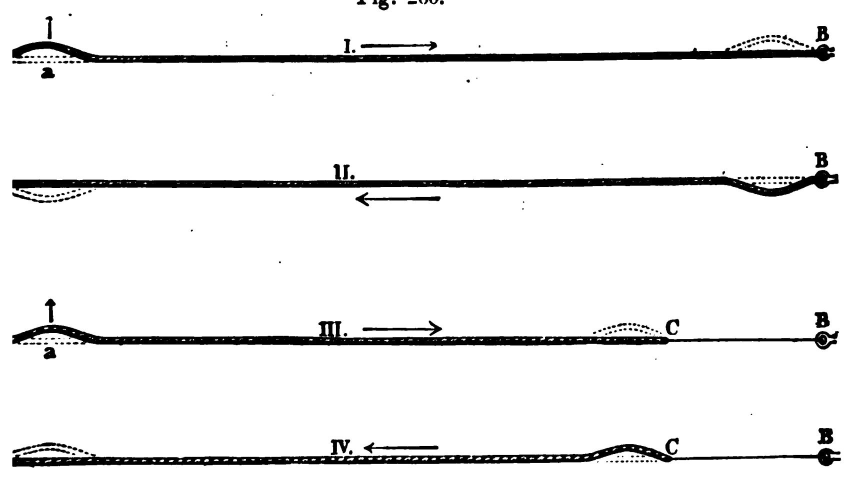


Fig. 261.

en Ende, bezw. beim Anlangen einer Welle an einen schwerer beweglichen l der Punktreihe jede Welle sich **umkehrt** (ein ankommender Wellenberg läuft Tal zurück), an einem freien Ende, bezw. beim Anlangen der Wellen an einen chter beweglichen Teil der Punktreihe hingegen eine solche Umkehrung cht stattfindet. — Bilden die ankommenden und reflektierten Wellen stehende llen (wie in Fig. 259, S. 243), so zeigt ein festes Ende einen **Schwingungs-oten**, ein freies Ende einen **Schwingungsbauch**. — Ähnlich bei folgendem fachen *Versuch*: Wird eine Gerte an dem einen Ende geschüttelt, so bildet sich bestimmtem Abstande von dem anderen, freien Ende ein Knoten. Wird jenes ie Ende zuerst mit einer kleinen, dann mit einer gröfseren Masse (ein Stück t oder dergl.) belastet, so rückt der Knoten gegen dieses Ende hin. Wird es Ende festgemacht, so mufs es selbst ein Knoten werden.

Wellenbewegungen in zwei- und dreidimensionalen Medien.

§ 67. Kreiswellen, Kugelwellen. Wellenstrahlen. Ebene Wellen.

Wie auf dem Wasserspiegel als einem zweidimensionalen Systeme Massenteilchen sich „Wellenringe“ (Kreiswellen) zeigen, so iten sich z. B. die Schallwellen in der ein dreidimensionales System

darstellenden Luft nach allen Richtungen gleichmäſsig aus und daselbst Kugelwellen.

Auf den vom Erregungszentrum aus gezogenen **Geraden** komm eindimensionalen Punktreihen zu liegen, längs deren wir uns die Wellenb fortschreitend denken. Die Geraden heiſsen **Wellenstrahlen.** Jede Ku als geometrischer Ort gleicher Schwingungszustände innerhalb versc Strahlen heiſst **Wellenfläche.** Jedes Flächenstückchen (Element) einer wellenfläche und der zugehörige Wellenstrahl sind zueinander norm

Dynamische Bedingung für die Bildung von Kreis-, bezw. wellen ist, daſs die Wellen vom Erregungszentrum aus nacl Richtungen der Ebene, bezw. des Raumes sich mit gleicher pflanzungsgeschwindigkeit ausbreiten. Diese Bedingung ist in homogenen isotropen Medien (§ 53).

Da nach § 69 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in einem bestimmt ist durch $c = \sqrt{e:d}$, so ist diese Geschwindigkeit überall diese dem Medium von allen Punkten aus und nach allen Richtungen hin die Werte von e und d (allgemeiner des Verhältnisses $e:d$) zukommen.

Ist das Medium homogen, aber anisotrop, so daſs, wenn man immer für einer Stelle Gerade nach verschiedenen Richtungen legt, läng verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestehen, so Wellenfläche keine Kreis-, bezw. Kugelwelle mehr. Umgekehrt kann man daſs sich diese Wellenflächen z. B. als Ellipsen, bezw. Ellipsoide d (wichtigstes Beispiel ist die Fortpflanzung ellipsoidischer Wellen in doppelt den Krystallen, § 129), auf verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit verschiedenen Richtungen und auf deren verhältnismäſsige Gröſse s Analog: Wärmeausbreitung in Holz- und Krystallplatten (§ 79).

Auch bei ellipsoidischen Wellen heiſsen Wellenstrahlen die vor punkte des Ellipsoides aus gezogenen Geraden; es stehen aber hi Strahlen auf den ihnen zugehörigen Elementen der Wellenfläche i meinen nicht normal (sondern nur an den Scheiteln des Ellipsoides).

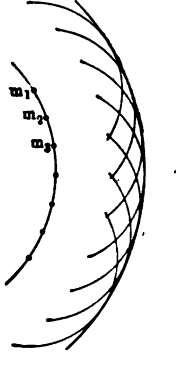
Ebene Wellen. *Versuch:* Wird das Wasser in der quadratische (Vorversuch S. 224) dadurch erregt, daſs ein Stab von der Länge de parallel zu deren einer Seite in wagrechter Lage auf das Wasser gestoſ so schreitet parallel zum Stabe eine geradlinige Welle über die Wa hin. Annähernd geradlinig ist auch jedes Stück eines Wellenringes a Teich, wenn das Erregungszentrum sehr ferne liegt. — Allgemeiner:

Denken wir uns eine Kugelwelle bis zu sehr groſsem Hal erweitert, so stellt jedes Stückchen (Element) einer solchen

ervorragt. Werden dann an einer von jenem Körper möglichst entfernten Stelle reiswellen oder ebene Wellen erregt und breiten diese sich bis zu jenem Körper s, so wird dieser zu einem „sekundären Erregungszentrum", von welchem ehr oder minder deutliche neue Kreiswellen ausgehen. — *Versuch* 2: Es werden ehrere gleiche Körper längs einer geraden, bezw. krummen Linie aufgestellt und ie Interferenzen der von diesen einzelnen sekundären Erregungszentren ausehenden Wellenringe beobachtet.

Als wir uns im vorigen Paragraphen eine von einem „primären Erregungsentrum" O ausgehende Kugelwelle, die binnen t sec den Radius r cm erlangt atte, binnen weiteren τ sec auf den Radius $(r + \varrho)$ cm anwachsend dachten, wo $:(r + \varrho) = t : (t + \tau)$, wurde bei dieser „primitiven Auffassung" nicht darauf geachtet, daſs jeder Punkt m_1, m_2, m_3 . . . Fig. 262) jener Kugelwelle vom Radius r wieder als ein sekundäres Erregungszentrum" aufgefaſst werden sollte, on welchem sich binnen der τ sec Kugelwellen von ϱ cm Halbmesser ausbreiten. Zeichnet man sehr viele gleiche Kreise von em Halbmesser, deren Mittelpunkte auf dem Umfange eines reises von r cm Halbmesser liegen, so haben alle diese Kreise ls „einhüllende Linie" (math. Anhang, Nr. 27) wieder einen reis vom Halbmesser $(r + \varrho)$. Auf Grund dieser geometrishen Anschauung läſst sich somit die „primitive Auffassung" des Anwachsens einer Kugelwelle vom Radius r auf $+ \varrho$ ersetzen durch Huygens' Auffassung, daſs die Kugelellen vom Radius $r + \varrho$ das Ergebnis einer Superposition er Elementarwellen vom Radius ϱ seien. (Huygens beachtete hierbei nur den Zustand der Welle an der Stirnseite er erweiterten Welle, d. h. nur den Schwingungszustand an er Auſsenfläche der Kugelwelle, nicht aber die sehr verwickelten Interferenzen nnerhalb der sich kreuzenden Elementarwellen; z. B. erklärte er noch nicht, arum nicht auch der einhüllenden Fläche vom Radius $r - \varrho$ eine Wellenbewegung ntspricht. Viel später zeigte Fresnel durch Rechnung, LA 138, daſs wirklich ene Interferenzen auch für jeden Punkt im Innern einer primären Welle dieselben Zustände liefert, wie bei direkter Ausbreitung.) Auch die Erfahrung bestätigt

Fig. 262.



Anh. 27.

LA 138.

Huygens' Prinzip der Elementarwellen: Sowohl in einem omogenen Medium, wie beim Übergange in Medien von anderer Ausreitungsgeschwindigkeit, erfolgen die wirklichen Wellenerscheinungen o, wie sie sich aus der Superposition der von den sekundären Erregungszentren ausgehenden Elementarwellen ergeben.

Während es somit für die geradlinige Ausbreitung gleichgiltig ist, ob wir s der primitiven oder der Huygensschen Auffassung bedienen, gibt nur die tztere Einblick in das Zustandekommen der Beugung, Reflexion und Brechung.

§ 69. Beugung. Reflexion und Brechung.

Versuch 1: Legen wir in die quadratische Blechwanne (S. 224) parallel zur nen Seite eine Holzleiste von etwa der halben Länge einer Seite, und lassen wir eder wie beim Versuch zu Beginn des vorigen § eine ebene Welle parallel zu ser Leiste fortschreiten, so wird das freie Ende der Leiste ein sekundäres

Erregungszentrum für neue Kreiswellen. — 2. Stellen wir zwei Leisten so nebeneinander, dafs sie einen 1 bis 2 cm breiten Spalt freilassen, so gehen auch von diesem sekundäre Wellen aus. Solche Erscheinungen werden als Beugung der Wellenstrahlen bezeichnet. — Vergl. Fig. 263.

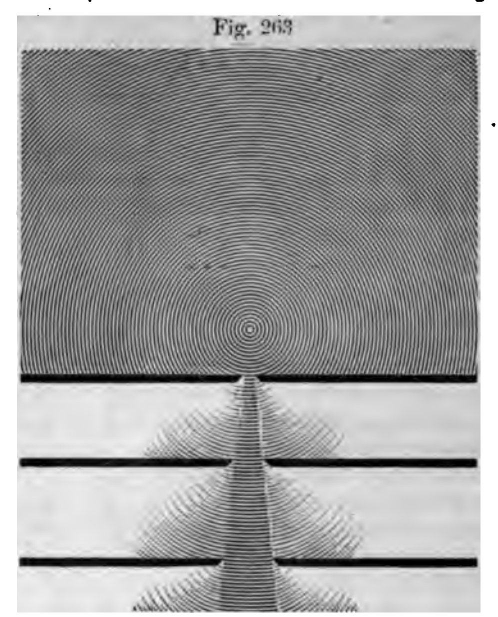


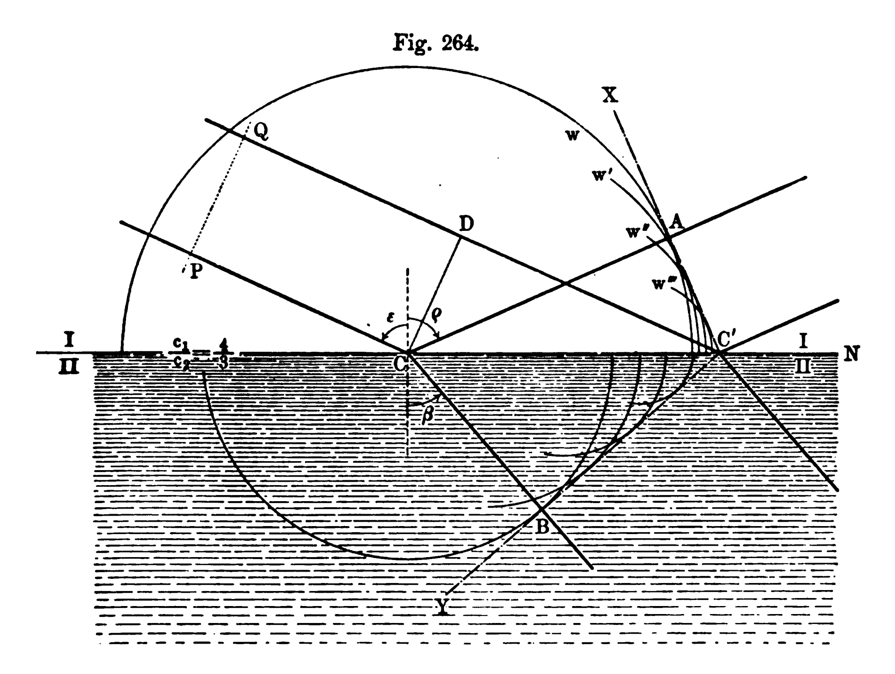
Fig. 263

Diese Erscheinungen lassen sich nach Huygens' Auffassung daraus erklären, dafs die Elementarwellen nicht mehr insoweit sich aufheben wie bei ungestörter Ausbreitung, sondern dafs seitlich vom primären Wellenstücke auch die sekundären Wellen teilweise wirksam bleiben.

Die bei den Versuchen des § 67 nebenher bemerkten Reflexionserscheinungen, sowie die mit Reflexion in der Regel zusammen auftretenden Brechungserscheinungen ergeben sich ebenfalls als Folge von Huygens' Auffassung:

a) **Für ebene Wellen.** Die Gerade MN stelle die zur Zeichenebene normale Trennungsebene zweier Medien I und II dar, welche (sei es infolge verschiedener Werte von e oder von d oder beider zusammen, § 67) für eine bestimmte Art von Wellen verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 aufweisen, z. B. $c_1 : c_2 = 4 : 3$. Durch das Medium I schreite eine zur Zeichenebene normale ebene Welle fort, von der ein Stück durch PQ dargestellt sei, so dafs PC und QC' Randstrahlen darstellen. Von allen Punkten der Ebene MN wird dann am frühesten der Punkt C, am spätesten der Punkt C' erregt. Die Fig. 264 stellt die Elementarwellen dar, wie sie sich bis zu diesem spätesten Zeitpunkte in beiden Medien ausgebreitet haben. Bis dahin hat sich z. B. von dem frühest erregten Punkte C im Medium I eine Halbkugel vom Halbmesser $CA = DC'$, im Medium II eine Halbkugel vom Halbmesser $CB = {}^3/_4\, CA$ ausgebreitet; wogegen die nachmals auch von C' sich ausbreitenden Wellen jetzt noch für beide Medien den Halbmesser Null haben. Die zwischen jenen gröfsten und diesen kleinsten Halbkugelwellen liegenden Wellenflächen $w'\, w''\, w'''$ ... haben je eine einhüllende Ebene, dargestellt durch die Tangenten $C'X$ an den Kreis vom Halbmesser CA, bezw. $C'Y$ an den Kreis vom Halbmesser CB. So wie CD die einfallende Wellenfläche war, ist $C'A$ die **Wellenfläche** des **reflektierten**, $C'B$ die des **gebrochenen Strahles.** Dabei gilt

Fig. 264.



r den reflektierten Strahl CA das **Reflexionsgesetz** $\measuredangle\ \varrho = \varepsilon$ .. (1)

r den gebrochenen Strahl CB das **Brechungsgesetz** $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$ .. (2)

weise: 1. Wegen $\triangle\ CDC' \cong C'AC$ ist $\varrho = \varepsilon$.

2. Wegen $DC' : CB = c_1 : c_2$ ist auch $\frac{DC'}{CC'} : \frac{CB}{CC'} = \sin\varepsilon : \sin\beta = c_1 : c_2$.

Die gleichen Konstruktionen bleiben auch anwendbar (wie Huygens zuerst in iner Theorie der Doppelbrechung mit bewundernswerter geometrischer schauungskraft erkannt hat), wenn die von der Trennungsfläche in das neue edium sich ausbreitenden Wellen Ellipsoide sind. Ist dabei die Schnittebene MN urch das anisotrope Medium so gelegt, dafs sie nicht mit einer der Hauptbenen des Ellipsoides zusammmenfällt, und daher die von C aus gezogene chse des Ellipsoides aus der Zeichenebene heraustritt, so wird auch die Wellenäche $C'B$ so liegen, dafs der gebrochene Strahl CB aus der durch das infallslot CA und den einfallenden Strahl PC bestimmten Einfallsbene heraustritt. — Ein solches Heraustreten findet nicht statt bei dem Aneinandergrenzen zweier in sich homogenen isotropen Medien; für diese lauten so die vollständigen Gesetze für Reflexion und einfache Brechung:

Der reflektierte und der einfach gebrochene Strahl bleiben der (hinreichend erweitert zu denkenden) **Einfallsebene.**

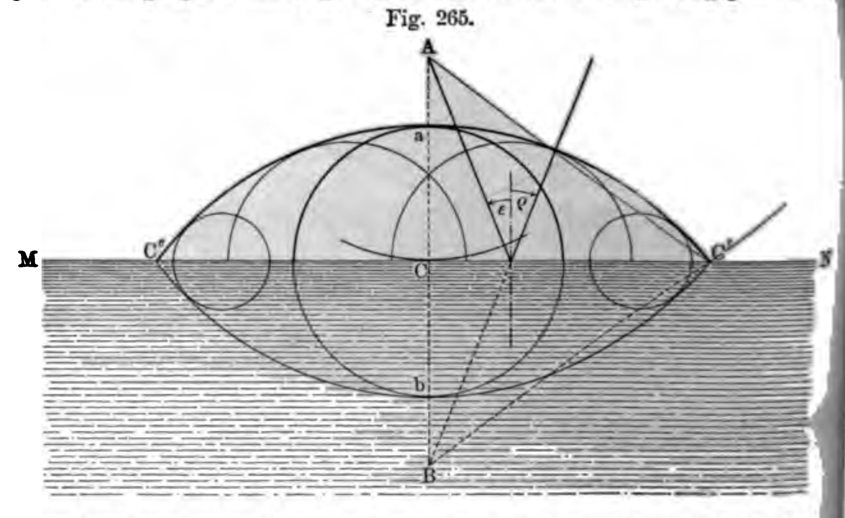
Der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.

Der Sinus des Einfallswinkels steht zum Sinus des Brechungsnkels in einem konstanten „Brechungsverhältnis", welches

gleich ist dem Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des einfallenden und gebrochenen Strahles in beiden Medien.

b) Reflexion von **Kugelwellen an einer ebenen Fläche.** Ist A das primäre Erregungszentrum (Fig. 265), so wird zuerst der Tangierungspunkt C zum

Fig. 265.



sekundären Erregungscentrum von Kugelwellen. Bis zu dem Zeitpunkte, in welchem die primäre Welle soeben die Punkte C' und C'' zu erregen anfängt, hat sich von C eine Welle bis Ca ausgebreitet und von den gegen C' und C'' hin gelegenen Punkten immer kleinere Kugelwellen, deren einhüllende Fläche eine mit $C'bC''$ kongruente Kugelwelle $C'aC''$ ist. Anstatt dafs von A die Kugelwelle in das neue Medium nach $C'bC''$ eindringt, breitet sich also in das alte Medium eine Kugelwelle $C'aC''$ so aus, wie wenn sie von dem Punkte B käme, welcher, wie die beiden Kugelkappen, in Bezug auf MN **symmetrisch** zu A liegt. Daher ist auch für jeden Wellenstrahl wieder $\varrho = \varepsilon$.

Für die Kugelwellen (und alle übrigen nicht ebenen Wellen) gestaltet sich die Konstruktion der gebrochenen Wellenstrahlen und ihrer zugehörigen Wellenflächen aus Huygens' Elementarwellen sehr verwickelt (wie schon nach den verwickelten Ergebnissen der Sinuskonstruktion z. B. in Fig. 366, S. 337 zu erwarten ist).

Zweiter Teil:

Wärme, Schall, Licht

(Physik der Sinnesqualitäten).

Värmelehre (Thermik und Kalorik).

§ 70. Wärmeempfindungen und physikalische Wärmeerscheinungen.

Kalt, kühl, lau, warm, heifs sind die Bezeichnungen für eine Reihe von mpfindungsmerkmalen; aber auch den Körpern, welche uns diese Empfingen erregen, legen wir das Kalt-, Warm-, Heifssein als Eigenschaft bei. — se Empfindungen bilden eine Reihe, die wir, wiewohl kalt und kühl einerits, lau, warm, heifs anderseits in der Empfindung einen Gegensatz aufweisen sychol. Anh., Nr. 42), doch unter dem einen Namen **Wärmeempfindungen** sammenfassen. — Entsprechend dieser Reihe von Empfindungsmerkmalen denken ir uns auch die Wärmezustände der Körper als eine graduell abgestufte Reihe nd sagen von einem Körper, der zuerst kalt gewesen war, dann kühl, dann u u. s. f. wurde, sein **Wärmegrad** oder seine **Temperatur** sei gestiegen. Anh. 42.

Was für eine Wärmeempfindung uns ein Körper erregt, hängt aber nur zum eil von seinem eigenen Wärmezustande, zum Teil aber auch von dem ustande unserer Empfindungsorgane ab: z. B. Eintauchen der erhitzten nd der abgekühlten Hand in dasselbe laue Wasser; scheinbare Temperatur der eller im Sommer und Winter; Fieberhitze und -kälte.

Derselbe Körper zeigt in verschiedenen Wärmezuständen auch verhiedenes anderweitiges physikalisches Verhalten; z. B. in demselben hermometer hat das Quecksilber bei Kälte ein kleineres Volumen als bei Hitze. hr kaltes Wasser ist fest (Eis), sehr heifses gasförmig (Dampf). Eisen ist n einer bestimmten Temperatur an rotglühend, bei noch höherer weifsglühend; eitere Beispiele! — Die physikalische Wärmelehre als solche macht sich öglichst unabhängig von den jeweiligen Wärmeempfindungen (zu nen es überdies in einigen der letztangeführten Beispiele gar nicht mehr käme, il unsere Empfindungsorgane bei jenen Wärmegraden schon zerstört würden).

Zu diesem Zwecke führt die Physik schon für den Begriff **Wärmegrad** **Temperatur** neue Definitionen ausschliefslich auf Grund der **Volumanzeig** **Thermoskops** und **Thermometers** ein; so dafs in diesem Sinne gesetzt kann: „physikalischer Wärmezustand" = thermoskopischer Zu (vergl. die analoge Bezeichnung „elektroskopischer Zustand", § 181). —

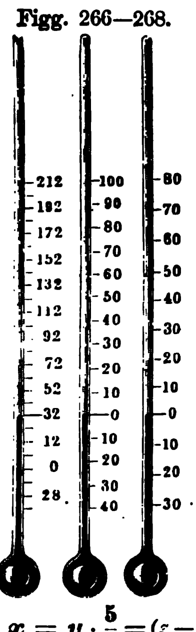
Allgemeine Bestimmungen über das Verhältnis der **Physik** der Sinnesi insbesondere Wärme, Schall, Licht, zu den einschlägigen Lehren der Physi und **Psychologie** vergl. psychol. Anhang, Nr. 39.

Anh. 39.

A. Wärmegrade und Wärmemengen.

§ 71. Wärmegrad oder Temperatur; Thermoskope Thermometer (Thermometrie).

Figg. 266—268.



Geschichtliches. Um 1600 gab es in Holland (Di und Italien (GALILEI) **Luftthermoskope**, die auch vo druck abhängig waren. — **Weingeistthermometer** schon um 1640 zu meteorologischen und biologischen Z (z B. bei der künstlichen Ausbrütung von Hühnereiern wendet. — Den „**Eispunkt**" hat HOOKE, den „**Siede**p des Wassers HUYGENS eingeführt, auch das Quecksill thermometrischen Stoff empfohlen. Die ersten genauen silberthermometer fertigte FAHRENHEIT 1714 an und auch bestimmt die Abhängigkeit des Siedepunktes von druck nach. RÉAUMUR teilte (1730) den Abstand zwisch punkt und Siedepunkt in 80 „Grad". Die hundertteilige gab CELSIUS 1786 an, aber so, dafs der Eispunkt mit 1 der Siedepunkt mit 0 bezeichnet war. Die somit nicht g treffend als „Celsiusskala" bekannte Zählung rührt von her, weshalb auch die herkömmliche. Bezeichnung z. B statt 15 Grad Celsius besser so zu lesen ist: 15 Cent Für die beiden neben dieser wissenschaftlich fast all durchgeführten Skala noch gebräuchlichen Skalen (d Fahrenheit fast nur noch in England und Amerika) gelte einer Temperatur von x^0 C, y^0 R (Réaumur), z^0 F (Fahr die Umrechnungsformeln (vergl. Figg. 266—268):

$$x = y \cdot \frac{5}{4} = (z - 32) \cdot \frac{5}{9}; \quad y = x \cdot \frac{4}{5} = (z - 32) \cdot \frac{4}{9}; \quad z = x \cdot \frac{9}{5} + 32 = y \cdot \frac{9}{4}$$

Bequemer:

$$x = y + \frac{1}{4} y; \quad y = x - \frac{1}{5} x;$$ in Worten! — Z. B. 20° C = 16° R (= 68

Diese dem täglichen Leben geläufig gewordenen Temperaturangaben überhaupt Einrichtung und Gebrauch des **Thermometers** setzen ihrem vollen wissenschaftlichen Verständnis tatsächlich schon fast alle und Gesetze der verschiedenen Teile der Wärmelehre voraus; namentlich:

1. Das Volumgesetz (§ 73), dafs bei den meisten Stoffen dem h **Wärmegrade** ein **gröfseres Volumen** entspricht. Nur solche Stoffe, für das Gesetz gilt, z. B. Quecksilber, Weingeist, Äther (Toluol), nicht aber z. B.

gnen sich als „thermometrischer Stoff". — Weiter ist aber zu beachten, ls es z. B. bei dem Quecksilberthermometer keineswegs blofs auf die Ausdehnung s Quecksilbers, sondern auch auf die des Glases ankommt. Bei Erhöhung r Temperatur erweitert sich nämlich der Hohlraum des Gefäfses um ebenso viel, s sich ein dem Hohlraum an Volumen gleicher Glaskörper ausdehnen würde. as Steigen des Quecksilbers im Thermometer zeigt also nicht die ganze Ausdehnung des Quecksilbers, sondern nur deren Überschufs über die Ausdehnung s Glases an. (So erklären sich folgende feinere Beobachtungen: Wird ein npfindliches Thermometer in heifses Wasser getaucht, so zeigt sich während der sten Augenblicke nicht ein Steigen, sondern ein **Sinken** des Quecksilbers. Wie hon CELSIUS [1736] beobachtet hat, steigt das Quecksilber über den Siedepunkt der Röhre, wenn das Thermometer rasch aus kochendem Wasser herausnommen wird. — *Versuche!*)

2. Die **Ausgleichung der Wärmezustände** benachbarter Körper (§ 78). Es ist ar, dafs jedes Thermoskop und jedes Thermometer unmittelbar immer ur seinen eigenen Wärmezustand anzeigt. Indem man gleichwohl aus m Stande des Thermometers, das z. B. in ein warmes Bad getaucht ist, auch n Wärmezustand des Wassers erschliefst, setzt man voraus, dafs das Thermometer den Zustand des Wassers angenommen habe; dies geschieht hierbei durch ärmeleitung (dünnwandiges Glas). Ist dagegen ein Thermometer an der hatten- (bezw. Sonnen-) seite eines Hauses aufgehängt, damit man daran die emperatur im Schatten" kennen lerne (über die Unzulässigkeit der Bezeichnung emperatur an der Sonne" vergl. § 196), so ist es die Wärmestrahlung, mauer das Verhältnis zwischen der Einstrahlung auf das Thermometer von iten der Hauswand und auch von entfernteren Gegenständen (insoweit nicht rischen ihnen und dem Thermometer „athermane" Stoffe, § 119, sich befinden) nd der Ausstrahlung des Thermometers gegen die Hauswand, ja gegen den eltraum, wovon die schliefsliche Einstellung des Thermometers abhängt.

3. Das **Mischungsgesetz** (§ 72). Taucht man ein ziemlich grofses massives hermometer, welches etwa soeben noch in einem sehr kalten Raume gelegen war, ein kleines Gefäfs mit Wasser, das soeben noch gekocht hatte, so wird man ch nicht wundern, wenn das Thermometer nach dem Eintauchen statt 100° C ur etwa 80° C oder 50° C anzeigt. Denn gemäfs 2. hat zwischen dem Wärmezustande der grofsen Masse des Thermometers und dem der kleinen Masse Wasser n Wärmeausgleich stattgefunden, und nur diese Ausgleichstemperatur wird om Thermometer angezeigt. Wird dagegen ein Thermometer in eine gefüllte adewanne getaucht, so wird offenbar der überwiegenden Wassermasse nur eine erhältnismäfsig kleine Wärmemenge entzogen, welche zur Erwärmung des Thermometers bis zur Ausgleichstemperatur erforderlich ist. — Damit das Thermometer auch bei Körpern von nicht sehr grofser Masse möglichst annähernd die Temperatur, welche sie vor der Messung hatten, angebe, mufs die thermometrische Substanz **kleine spezifische Wärme** (§ 72) haben, was namentlich bei Quecksilber in ausgezeichnetem Mafse der Fall ist und so einen Vorzug der Quecksilberthermometer bildet. Bei feinen Versuchen empfiehlt es sich, das Thermometer auf die annähernd zu erwartende Temperatur vorzuwärmen.

4. **Die Konstanz des Schmelzpunktes.** Hält man ein Thermoskop (oder ein fertiges Thermometer) in ein Gemenge von Eis und Wasser, so nimmt das Quecksilber, der Weingeist . . . eine bestimmte Stellung in der Röhre ein. Wird nun dem Gemenge (z. B. durch eine darunter gestellte Flamme) Wärme zugeführt oder durch Einsenken des Gefäfses in eine Kältemischung) Wärme entzogen, so ändert

das Quecksilber seinen Stand nicht; sondern bei Zuführung einer bestimmten Wärmemenge wird ein Teil des festen Wassers flüssig, bei Entziehung einer gewissen Wärmemenge wird ein entsprechender Teil des flüssigen Wassers fest. Man nennt daher den Wärmegrad des Gemisches „Temperatur des schmelzenden Eises“ und findet sie gleich der „Temperatur des gefrierenden Wassers“. — Damit der Versuch das beschriebene Ergebnis liefere, ist nötig, α) dafs Eis und Wasser, welche beide schlechte Wärmeleiter sind, bereits so lange gemischt waren, dafs sie einerlei Temperaturen angenommen haben, β) dafs bei untergestellter Flamme, wobei sich das flüssige Wasser beträchtlich über den Gefrierpunkt erwärmt und in einem Strome aufsteigt, das Thermometer nicht in diesen Strom, sondern in solche Teile des Gemisches gehalten wird, in welchen schon wieder Wärmeausgleich hatte stattfinden können. — Es bleibt noch das Bedenken offen, ob jedes Wasser und jedes Eis die gleiche Gefrier-, bezw. Schmelztemperatur zeige. Dieses Bedenken durch sorgfältige Versuche beseitigt zu haben, ist ein Hauptverdienst von CELSIUS, welcher Schnee und Eis bei verschiedenem Wetter, verschiedenem Barometerstand, von Orten verschiedener Breite (Torneå, Paris u. s. f.) untersuchte. — Dafs und inwiefern der Schmelzpunkt zwar auch von dem Druck abhängig ist, der auf dem Gemisch lastet, aber in so unerheblichem Mafse, dafs nicht, wie beim Siedepunkte, das Hinzufügen des Barometerstandes nötig ist, vergl. § 77.

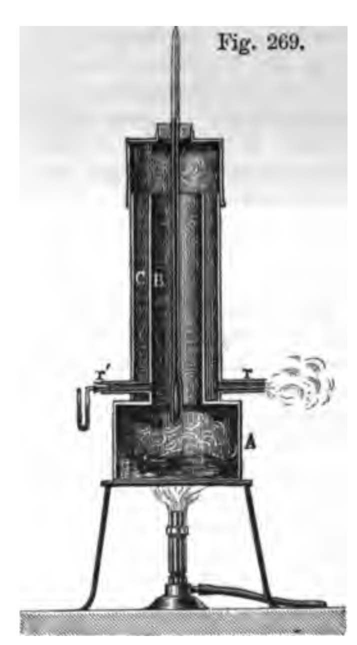


Fig. 269.

5. **Die Konstanz des Siedepunktes** bei gegebenem Drucke. Wird ein Thermometer in ein Gefäfs von der in Fig. 269 im Durchschnitte dargestellten Form angebracht und so von den Dämpfen kochenden Wassers umspült, so nimmt das Quecksilber in der Röhre wieder einen bestimmten Stand ein. Dabei läfst ein seitlich angebrachtes Manometer erkennen, dafs, bezw. ob die Spannkraft der Dämpfe gleich ist dem äufseren Luftdrucke. Der Stand des Thermometers bleibt dann derselbe, gleichviel ob das Wasser durch eine mehr oder weniger starke Flamme im Sieden erhalten wird. Das siedende Wasser zeigt infolge von Beimengungen oft eine etwas höhere Temperatur, als die aus ihm sich entwickelnden Dämpfe. Den Siedepunkten bei 99°, 100°, 101° C entsprechen die Spannungen gesättigten Wasserdampfes 73,3, **76**, 78,7 cm Quecksilberdruck (§ 77). — Auch die Konstanz der Siedetemperatur des Wassers bei je einem gegebenen Luftdruck hat CELSIUS durch umfassende Versuche bestätigt, indem er verschiedenes (Quell-, Flufs-, Brunnen-) Wasser kochen liefs und dabei die Barometerhöhen bis auf Bruchteile einer Linie ($1''' = \frac{1}{12}'' \neq 2\frac{1}{4}$ mm) notierte.

Auf die beiden Tatsachen 4. und 5., die in dem Verbrauche von Wärmemengen (§ 76, § 77) bei Erhöhung des Aggregatzustandes ohne Erhöhung des Wärmegrades begründet sind, stützen sich nun zunächst folgende Definitionen:

Für je ein bestimmtes Thermometer bilden der **Eispunkt** E und der **Siedepunkt** S, auf die sich die thermometrische Substanz bei der

ıtur des (bei nicht abnorm groſsem Druck) schmelzenden Eises, ɔi der Temperatur des unter 76 cm Druck gesättigten Wasser- einstellt, die beiden **Fundamentalpunkte** und ihr räumlicher den **Fundamentalabstand** dieses Thermometers. — Dieser wird in 100 gleiche Teile geteilt und der Eispunkt mit 0° C, der ıkt mit 100° C bezeichnet. Ferner werden gleich lange Skalen- terhalb 0° C und oberhalb 100° C so weit aufgetragen, als es nometrische Substanz und das sie einschlieſsende Glas (bei Metall- ıetern, Pyrometern . . . deren ganze sonstige Einrich- läſst. — Warum müssen die Röhren sorgfältig kalibriert ːugel-, zylinder-, spiralförmige „Gefäſse" unterhalb der — Verfahren beim Füllen der Quecksilberthermometer 'ig. 270). — Empfindlichkeit der Thermometer (bis ıd, Bolometer [§ 119] bis $\frac{1}{1\,000\,000}$ Grad); besondere neter für sehr hohe und sehr tiefe Temperaturen.

Fig. 270.

h

t

d je ein Thermometer T mit zwei oder mehreren Körpern K, Wärmeausgleich gebracht und zeigt es für beide denselben m $t$ten Skalenteil, so darf man zunächst nur schlieſsen, daſs, e Körper die gleiche Temperatur haben wie das Thermometer, untereinander die gleiche Temperatur haben. Dagegen ir noch nicht schlieſsen, daſs das Thermometer und die Körper eine Temperatur von t° C" haben; höchstens dürften wir sagen: ses speziellen Thermometers". Es ist nämlich Tatsache, daſs ene Thermometer T, T' . . ., bei denen die Fundamentalpunkte eschriebene Art bestimmt sind und ihr Abstand in 100 gleiche ɜilt worden ist, mit einem und demselben Körper K in Wärme- gebracht, im allgemeinen doch nicht Stände bei genau gleich be- sondern bei etwas verschiedenen Skalenteilen t, t' . . . ein- was sich daraus erklärt, daſs die Wärmeausdehnungen ver- ıer Stoffe einander nicht genau proportional sind speziell zeigen bei Thermometern aus Quecksilber und Glas ver- Glassorten Ungleichheiten der Ausdehnung, die innerhalb 0° Abweichungen zwar nur um etwa $^1/_5$°, bei 350° C aber schon ı 10° zur Folge haben. Es muſs daher ein **Normalthermometer** verden und zwar eignet sich hierzu das Gasthermometer (aus § 74, 83 zu entwickelnden Gründen — und zwar wieder am s Heliumthermometer, fast ebenso gut das Wasserstoffthermo- l mit groſser Annäherung auch noch das Luftthermometer). ir aber im folgenden von diesen feineren und feinsten Ab- en verschiedener Thermometer voneinander absehen, bleibt die ausreichend:

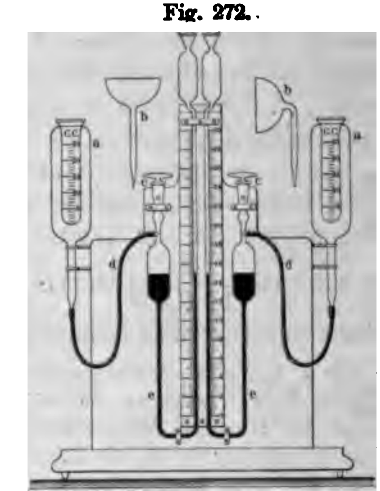
Körper K hat eine Temperatur t° C (spr. t Zentigrad, ıd: den Wärmegrad t), wenn ein mit ihm in Wärmeaus- stehendes Thermometer einen Stand beim Skalenteil t an- en hat.

Über die Frage, ob die Temperaturzahlen eigentliche Mafszahlen
Anh. 42. vergl. psychol. Anhang, Nr. 42. Die Frage ist physikalisch jedenfalls zu b
für Thomsons absolute Skala, § 83.

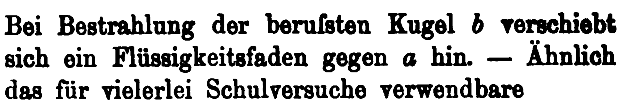
Einige besondere Formen von Thermoskopen und Th meteru. — 1. Das Differentialluftthermometer von Leslie (Fi

Fig. 271. Fig. 272. Fig. 273.









Bei Bestrahlung der berufsten Kugel *b* verschiebt sich ein Flüssigkeitsfaden gegen *a* hin. — Ähnlich das für vielerlei Schulversuche verwendbare

Doppelthermoskop von Looser (Fig. 272): An jeder der zwei symmetrisch angeordneten Hälften sind die Hauptbestandteile der Rezeptor *a*, d. i. ein kubiziertes Gläschen, das in ein weiteres, mit Luft gefülltes Glasgefäfs eingeschmolzen ist. Dieses ist durch einen Schlauch *d* in Verbindung mit dem Indikator *e*, der mit einer gefärbten Flüssigkeit gefüllt ist und als Manometer wirkt.

In allen vier Schenkeln steht vor dem Versuche (bei der Zimmertemperatur) die Flüssigkeit bei Teilstrich 15 einer (nicht mit der Centigradskala sich deckenden) Centimeterskala. Werden in die Rezeptoren *a* und *a* Körper verschiedener Tempe gebracht (oder durch sonstige der mannigfachen Versuche Temperaturve heiten hervorgebracht), so zeigt die Verschiedenheit der Stände eine a sehr kleine Verschiedenheit der Wärmegrade der Luft in *a* und *a* an (d der Name Differentialthermoskop). Nach jedem Versuche werden dur der Hähne *c* die Indikatoren wieder auf Teilstrich 15 eingestellt.

2. **Maximum- und Minimumthermometer** zeigen die und niedrigste Temperatur an, die in der Umgebung des meters innerhalb eines bestimmten Zeitraumes geherrscht hat.

Bei der in Fig. 273 dargestellten Form ist thermometrische Substanz das in befindliche Kreosot; dieses schiebt einen langen Quecksilberfaden in einer Thermometerröhre mit zwei parallelen Schenkeln vor sich her, an deren beiden iten sich Stahlstifte mit elastischen Glasfäden verschieben. Diese Zeiger bleiben nn an den Stellen des höchsten und niedrigsten Standes stecken; vor jeder sen Beobachtungsperiode werden sie mittels eines kleinen Magneten bis an die den des Quecksilberfadens herzugeschoben.

Selbstregistrierende **Thermometer** geben (nach ähnlichem Prinzip wie die lbstregistrierenden Barometer, § 44) den Gang der Temperatur während längerer iträume durch eine stetige Kurve an (wodurch natürlich die Aufgabe der ximum- und Minimumthermometer auch von selbst mit erfüllt ist).

Über **Metallthermometer** und **Pyrometer** § 73; **Luftthermometer** § 74; SMANNS **Aspirationsthermometer** (speziell zur Bestimmung der Lufttemperatur, mit Psychrometer) vergl. § 196. — Temperaturmessung durch Thermoulen § 153, Bolometer § 119.

72. Wärmemenge und spezifische Wärme (Kalorimetrie).

Wenn das Wasser eines über einer Gasflamme oder einem Herdfeuer stehenden fäfses die Reihe der Wärmegrade z. B. von der Brunnentemperatur bis zur detemperatur durchläuft, so liegt die Vorstellung nahe, dafs aus der Flamme, h. den glühenden Gasen, eine „**Wärmemenge**" in das Wasser übergegangen . Ähnlich, wenn das kühle Wasser eines ganzen Teiches durch die Sonnenstrahlung während eines Tages lau wird. — Für die zu bestimmten Veränderungen des Wärmegrades erforderlichen Wärmemengen kommen in Betracht:

1. Die zu erzielende Temperaturdifferenz. (Das kalte Wasser eines Topfes wird lau, wenn es eine geringe Wärmemenge dem Herdfeuer entnommen hat, rm, heifs durch immer gröfsere Wärmemengen, nämlich nach längerem Stehen er der Flamme. Doch ist es nicht selbstverständlich, ja auch im allgemeinen icht genau richtig, dafs den zugeführten Wärmemengen die Temperaturhöhungen einfach proportional sind.)

2. Die zu erwärmende Stoffmenge. (Das viele Wasser im Teich braucht el mehr Sonnenwärme, um lau zu werden, als das Wasser eines Topfes zum Lau-, selbst zum Heifswerden braucht. Dabei versteht es sich zwar nicht von selbst, aber durch die feinsten Messungen bewährt, dafs als „Stoffmenge" in ermischer Hinsicht dieselbe Gröfse einzuführen ist, welche in der Mechanik ch der durch gegebene mechanische Kräfte erzielten Beschleunigung messen und als Masse bezeichnet worden ist (§ 16); somit: **Die Wärmemengen sind den Massen genau proportional.**

Fig. 274.

3. Die stoffliche (chemische) Beschaffenheit des zu erwärmenden Körpers. Dies zeigen folgende *Vorversuche:* 1. Kugeln aus Blei, Kupfer, Eisen von gleichem Gewichte werden in demselben Wasser- oder Ölbade erhitzt und dann auf eine Wachstafel gelegt; sie sinken bis zu verschiedener Tiefe nach der obigen Reihenfolge ein (Fig. 274). — 2. Über einer gleichmäfsig brennenden Flamme steht ein dünnwandiges Metallgefäfs, in das nacheinander gleiche Gewichtsmengen von Wasser, Alkohol, Quecksilber . . . gebracht werden. Waren die Anfangstemperaturen gleich und wird beobachtet,

binnen welcher Zeiten die Temperatur der Flüssigkeiten (unter Umrühre dieselbe Anzahl von Graden gestiegen ist, so liegt der Schlufs nahe, dafs, we diese Zeiten verhalten wie 1 : 0,6 : 0,03, sich annähernd auch die zu gl Veränderungen des Wärmegrades erforderlichen Wärmemengen z. B. für und Quecksilber wie 1 : 0,03 = 1 : $^1/_{33}$ verhalten haben.

Der folgenden Definition der Wärmeeinheit liegt also eine best Temperaturerhöhung (um 1°, bezw. von 0 bis 100°), eine bestimmte (1 g, bezw. 1 kg) und ein bestimmter Stoff (Wasser) zu Grunde; nämlich:

Einheit der Wärmemenge oder kurz **Wärmeeinheit** is **Grammkalorie** (cal), bezw. **Kilogrammkalorie** (Cal), d. i. die W menge, welche erforderlich ist, um 1 g, bezw. 1 kg flüssiges Wasse 0° auf 1° C (nach neuerer Übereinkunft von 14,5 auf 15,5° C) : wärmen. — Es erfordern dann m g Wasser von 0° zur Erwärmun 1° C genau m cal und zur Erwärmung von t^0 auf T^0 C annäl $m(T - t)$ cal. — Ebenso viel cal werden bei der Abkühlung v auf t^0 abgegeben.

Der durch unsere gewöhnlichen Heizmethoden uns geläufigste Fal Erhitzung durch eine Flamme (ähnlich: durch Bestrahlung seitens der Son nur ein besonderer Fall der Übertragung von Wärme aus einem K höheren in einen Körper niedrigeren Wärmegrades; woran sic unterscheiden lassen: die Abgabe dieser Wärmemenge seitens des einen I und die Aufnahme seitens des anderen. Von einem solchen Doppelv ist wieder ein spezieller Fall jede **Mischung** zweier Stoffmengen von ung Wärmegraden. Hier werden wir nun erwarten, dafs z. B. 1 kg Wasser vo mit 1 kg Wasser von 30° C 2 kg Wasser von 20° C geben werden; der V bestätigt dies auch (annähernd). Werden hingegen dem 1 kg Wasser vo 3 kg von 30° zugesetzt, so verschiebt sich die Mischungstemperatur von de fachen arithmetischen Mittel gegen den Wärmegrad des der Masse nac wiegenden Körpers hin, nämlich von $\frac{10 + 30}{2} = 20^0$ auf $\frac{1 \cdot 10 + 3 \cdot 30}{1 + 3}$ Allgemeiner ist das ausgesprochen in RICHMANNS Regel (1750) für die

$$\text{Mischungstemperatur: } t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} \quad . \; . \; .$$

Anh. 9. Ähnlichkeit dieses Gesetzes mit dem für Schwerpunkte (math. Anh., Nr. für den Stofs (§ 16); Verallgemeinerung für 3, 4 ... n Körper desselben Sto

Eine weitere Verallgemeinerung erhält das die Mischungstemperatur dars arithmetische Mittel, wenn wir nebst der Masse der Körper auch ihre bish schweigend als gleich vorausgesetzte stoffliche Beschaffenheit in B

Die **spezifische Wärme** s (Kilogrammkalorien per Kilogramm) mmt einem Stoffe (bei t^0 C) zu, wenn s Cal erforderlich sind, um kg von ihm um 1° C (von t^0 auf $t + 1^0$) zu erwärmen. (LA 139.) LA 139.

Gemäfs der Definition der Kalorie kommt also dem Wasser die ›ezifische Wärme 1 zu; und zwar hat Wasser von allen Stoffen Vasserstoff ausgenommen) die gröfste spezifische Wärme.

Wie schon oben (unter 1) bemerkt, sind die durch Zu- und Abfuhr von ırmemengen erzielten Differenzen der Wärmegrade jenen Wärmemengen ɔht genau proportional. Dies hat einen doppelten Grund: α) in den inen Ungleichheiten der Temperaturskalen verschiedener Thermometer, von ıen aber im folgenden wieder abgesehen wird; β) in den Verschiedenheiten r spezifischen Wärmen desselben Stoffes innerhalb verschiedener mperaturregionen. So erreicht die spezifische Wärme des Wassers, wenn bei 0° C als 1 angenommen wird, bei 25° C ihr Minimum von 0,991, bei 65° C der den Wert 1, bei 80° das Maximum 1,0053, bei 100° sodann 1,0033 u. s. w. ch von diesen immerhin geringen Verschiedenheiten wird im folgenden wieder eesehen werden (wo sie berücksichtigt werden müssen, geschieht es durch die terscheidung der **mittleren spezifischen Wärme** innerhalb eines bestimmten nperaturintervalls z. B. von 0° bis 100° und der **wahren spezifischen Wärme** eine bestimmte Temperatur t^0; vergl. mathem. Anhang, Nr. 13; LA 139). Die Anh. 13. LA 139. tlere spezifische Wärme des Eises (festen Wassers) zwischen —20° C und 0° C 0,52 ≑ 1/2, die des Wasserdampfes zwischen 123° C und 226° C ist 0,48 ≑ 1/2. Einige weitere spezifische Wärmen: Quecksilber 0,0330 ≑ 1/30, Kupfer 0,0949 ≑ 1/10, s 0,177 ≑ 1/6, Wasserstoff 3. — Daraus, dafs die spezifische Wärme des Erdlens beträchtlich kleiner ist als die des Wassers (je nach der verschiedenen schaffenheit des Gesteins, Humus u. s. f. durchschnittlich etwa 1/4), erklärt sich ben mancherlei Erfahrungen des Landwirtes) insbesondere der auffallende Unterıied von Land- und Seeklima, § 197.

Durch Mitberücksichtigung der verschiedenen spezifischen Wärmen erweitert ı nun Richmanns Regel auf Grund der *Versuche* so:

Für zwei Körper von m_1 und m_2 g Masse, den spez. Wärmen s_1 und s_2 d den Temperaturen t_1 und t_2 gilt Blacks Gesetz (1760) für die

$$\textbf{Mischungstemperatur: } t = \frac{m_1 s_1 t_1 + m_2 s_2 t_2}{m_1 s_1 + m_2 s_2} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

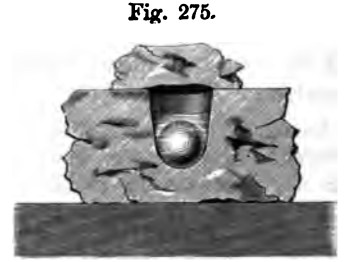
Diese Gleichung bestätigt sich und wird angewendet in Blacks ischungsmethode zur Bestimmung der spezifischen Wärmen.

So ergibt sich obiger Wert von $s = 1/_{30}$ für Quecksilber, wenn wir z. B. einem Probiergläschen 100 g Quecksilber auf t^0 C erwärmen (etwa $t_2 = 100^0$, lem wir das Gläschen in den Kochkolben senken, wie in Fig. 282, S. 265), das ße Quecksilber dann rasch in ein Becherglas mit m_1 g Brunnenwasser von t_1^0 C ßen und die Mischungstemperatur beobachten. Es ist dann die Gleichung (2) :h s_2 aufzulösen. Ebenso bei anderen Flüssigkeiten oder festen Körpern. — ınere Versuche mit Kalorimetern (auch mit Loosers Doppelthermoskop).

Bei Blacks Eisschmelzmethode zur Bestimmung der spezifischen ırme werden die zu untersuchenden Körper in die vorher an›rachte und gut ausgetrocknete Höhlung eines blasenfreien Eis-

blocks gebracht (Fig. 275), dann das Schmelzwasser mittel tarierten Schwämmchens ausgetupft und samt diesem gewoger

Fig. 275.



ergibt sich dann s_2 aus der bel Schmelzwärme des Eises (= 80 Gramm Eis von 0°; § 76).

Die zur Bestimmung von spe Wärmen und allgemeiner überha Wärmemengen dienenden Apparate **Kalorimeter**; die erste Anforde sie ist möglichst vollkommene isolierung gegen aufsen.

Diese wird erreicht durch mehrere ineinander gesetzte Gefäfse, deren Z räume durch schlechte Wärmeleiter (Sägespäne, Watte ...) ausgefüllt sin Eiskalorimeter von LAVOISIER und LAPLACE wird dann (ähnlich Fig. 275) die Menge des abfliefsenden Schmelzwassers gewogen; es lief wesentlich bessere Werte als obige Methode mit dem Eisblock. — Bei Eiskalorimeter wird auf die Menge des abgeschmolzenen Eises au Volumverminderung beim Übergang in flüssiges Wasser volumetrisch ge — Für jedes Kalorimeter einschliefslich der Thermometer, Wärmemänt rohre, Rührer u. s. w. ist die Kenntnis seines „Wasserwertes" nötig, jenigen (gedachten) Wassermenge, die zur Erhöhung des Wärmegrades um gleiche Wärmemenge erfordert wie das Kalorimeter. — Dieser Begriff de wertes ist ein spezieller Fall zum Begriffe der

Wärmekapazität eines Körpers. Erfordert zu irgen Temperaturveränderung 1 kg eines bestimmten Stoffes s Cal, fordern m kg desselben Stoffes ms Cal. Dieses Produkt bil Mafs der „Wärmekapazität" des Körpers, indem wir uns vo dafs der Körper um so gröfsere Wärmemengen „fasse", je seine Masse und seine spezifische Wärme ist.

Analogieen der Wärmekapazität zur elektrischen Kapazitä Für je eine Masseneinheit eines Körpers ist die Mafszahl der Wär zität gleich der Mafszahl seiner spezifischen Wärme; mit anderen Die Wärmekapazität eines Stoffes ist gleich der spezifischen Wärn Stoffes, und es ist somit die Unterscheidung von „spezifischer Wärme" und kapazität" je eines Stoffes überflüssig — nicht aber für ganze Kör denen wir nebst der stofflichen Beschaffenheit auch die Stoffmenge in

eeichnung **Thermometrie**, für die der Wärmemengen **Kalorimetrie** einbürgerte, läſst sich die „Wärmelehre" in eine Thermik und eine Kalorik scheiden.

Dem Begriff der Wärmemenge liegt die zunächst instinktive Voraussetzung zu Grunde, daſs z. B. bei einer Mischung dieselbe Gröſse (sei sie nun nach Blacks Bild die Menge eines Fluidums oder nach der mechanischen Theorie der Wärme eine bestimmte Menge aktueller Energie, § 83), die der eine Körper abgibt, der andere unvermindert und unvermehrt wieder als „Wärmemenge" aufnimmt. Nur wo diese Voraussetzung zutrifft, gilt die einfache Richmannsche Regel und das verallgemeinerte Blacksche Gesetz; denn diese stellen nur die Gleichungen zwischen je zwei Wärmemengen $m_1 (t - t_1) = m_2 (t_2 - t)$, bezw. $m_1 s_1 (t - t_1) = m_2 s_2 (t_2 - t)$ nach t aufgelöst dar. Dagegen gilt eine solche „Erhaltung der Wärmemenge" bei Mischungs- und anderen Wärmevorgängen keineswegs, wo während der Ausgleichung der Wärmegrade auch ein Umsatz von Wärme in andere Formen der Energie eintritt; z. B. wenn zu einer Masse Wasser von $+5^{\circ}$ eine gleich groſse Masse Eis von -5° gebracht wird, wobei nicht nur der Wärmegrad, sondern auch der Aggregatzustand verändert, wo die Kohäsion der Eisteilchen überwunden wird, vergl. § 76 und § 82.

Eines der einfachsten Beispiele eines solchen Umsatzes von Wärme in Nichtwärme, nämlich in mechanische Arbeit, liegt darin, daſs die **spezifische Wärme der** (meisten) **Gase bei konstantem Druck 1,41 mal so groſs ist als die spezifische Wärme desselben Gases bei konstantem Volumen.** In der Tat knüpfte an dieses schon von CLÉMENT und DESORMES, später von GAY-LUSSAC gefundene Verhältnis R. MAYER die erste Methode zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. Daher über die Ursache dieser Erscheinung Näheres erst in § 82.

Über DULONG-PETITS Gesetz vom Zusammenhang zwischen spezifischer Wärme und Atomgewicht siehe Chemie, § 209.

3. Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Wärmegrad, Volumen und mechanischer Spannung.

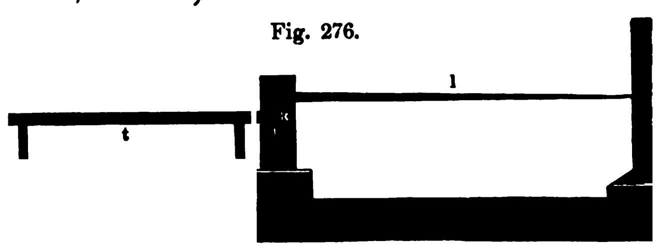
§ 73. Das Volumgesetz.

Die sogen. „Ausdehnung der Körper durch die Wärme", wie sie z. B. beim Thermoskop und Thermometer Anwendung findet, ferner in der Verlängerung, bezw. der Verkürzung der Eisenbahnschienen bei Sommerhitze und Winterkälte, beim bekannten *Versuch* mit Kugel und Ring u. dgl. m. beobachtet wird, stellt eine Abhängigkeitsbeziehung zunächst zwischen dem Wärmegrad einerseits, den **Längen-, Flächen-, Raumdimensionen** anderseits je einer bestimmten Stoffmenge dar. Aber mit diesen Abhängigkeitsbeziehungen Hand in Hand gehen auch solche zwischen den Wärmegraden und den in diesen Körpern herrschenden **mechanischen Spannungen.** Diese äuſsern sich an festen und flüssigen Körpern in der „unwiderstehlichen Gewalt" (siehe unten), mit der sie sich bei Erwärmung auszudehnen, bei Abkühlung zusammenzuziehen suchen (Sprengen der Steinsockel durch Gitterstäbe, wenn diese beim Erwärmen keinen Spielraum finden; Festmachen der Radreifen; Geradstellen auseinandergewichener Mauern . . .). Am deutlichsten zeigt den Einfluſs des Wärmegrades auf Volumen und Spannung bei Gasen (Luft) folgender

Vorversuch: Eine dünnwandige Glasflasche ist mit einem Pfropf versc
durch den eine rechtwinkelig gebogene, beiderseits offene Röhre mit einem
silbertropfen als leicht verschiebbarem Kolben geht. Schon die Erwärm
Berührung der Flasche mit der Hand reicht hin, den Tropfen in der Röh
aufsen zu verschieben. Der Tropfen kann aber an dieser Bewegung gel
werden, wenn entweder von aufsen gegen ihn Luft eingeblasen wird, od
die Röhre statt wagrecht schief oder lotrecht gehalten wird, wobei das
des Tropfens dem Bestreben nach Ausdehnung entgegenwirkt. — Soll
Abhängigkeit zwischen Wärmegrad und Volumen für sich untersucht we
mufs dafür gesorgt sein, dafs während des ganzen Versuches der äufs
daher auch der ihm gleiche innere Druck konstant bleibt. — Dies ist
nächsten quantitativen Versuchen überall stillschweigend angenommen, un
dann das Volumgesetz: **Dem höheren Wärmegrade entspricht das**
Volumen desselben Körpers.

A. Feste Körper. *Versuch:* Stäbe aus verschiedenen
(Kupfer, Eisen, Zink ...) werden mit dem einen Ende an den

Fig. 276.



Arm eines Fühlhebels k gelegt, dessen längerer Arm auf de
punkt einer Teilung zeigt. Das andere Ende v der Stäbe wi
geklemmt, während diese von Eiswasser umgeben sind. Wir
dieses bis zum Sieden erhitzt, so steigt der Zeiger an der
empor und zeigt so die Verlängerung des Stabes zwisch
Temperatur des schmelzenden Eises und des sied
Wassers an. — Diese Verlängerung ist merklich gröfser fü
Kupferstab als für einen gleich langen Eisenstab.

Ist ein Stab aus bestimmtem Stoffe beim Eispunkte 1 m
Siedepunkte $(1 + \lambda)$m lang, wo λ als Verlängerung für 1
Längenausdehnungskoeffizient dieses Stoffes für den Fundam

Man nennt $\varkappa = 3\lambda$ den kubischen Ausdehnungskoeffizienten es Stoffes für den **Fundamentalabstand.**

Es sind z. B. für Glas $\lambda = 0{,}0008$ $\left(\varkappa = 0{,}0025 \neq \frac{1}{400}\right)$, Kupfer $\lambda = 0{,}001\,67$ $\cdot = 0{,}0051 \neq \frac{1}{200}\big)$, Silber $\lambda = 0{,}001\,943 \neq \frac{1}{500}$, Platin $\lambda = 0{,}000\,886$.

Für Alkohol $\varkappa = 0{,}1$, Wasser $\varkappa = 0{,}0429 \neq \frac{1}{25}$, Quecksilber $\varkappa = 0{,}0181 \neq \frac{1}{50}$.

Für **alle Gase** (§ 74) $\varkappa = 0{,}367 \neq \frac{1}{3}$.

Allgemeiner sind die beiderlei Ausdehnungskoeffizienten definiert durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{L-l}{l} &= \lambda \neq \frac{1}{3}\varkappa \text{ der lineare} \\ \frac{V-v}{v} &= \varkappa \neq 3\lambda \text{ der kubische} \end{aligned}\right\}$$

Ausdehnungskoeffizient **für den Fundamentalabstand** (unabhängig von dessen Teilung in 100 Grade).

Für je 1° C sind bei den meisten Stoffen in **erster Annäherung** die Aushnungen je $^1/_{100}$ der entsprechenden Ausdehnungen zwischen 0° und 100° C. ;zen wir dann für einen bestimmten Stoff $^1/_{100}\,\lambda = \beta$, $^1/_{100}\,\varkappa = \gamma$, wobei dann ler **lineare**, γ der **kubische Ausdehnungskoeffizient dieses Stoffes für je 1°** ifst, so ist wieder $\gamma = 3\beta$. Ist dann v_0 das Volumen eines Körpers aus diesem offe bei 0°, l_0 eine seiner Längsdimensionen, so drückt sich jene **Erfahrung**, ls die Zunahme der Länge, bezw. des Volumens der **der Temperatur direkt oportional ist**, so aus:

$$\frac{l_t - l_0}{l_0} = \beta t, \text{ woraus folgt } l_t = l_0\,(1 + \beta t); \text{ daher auch } l_t = l_0\left(1 + \frac{\gamma}{3}t\right);$$

$$\frac{v_t - v_0}{v_0} = \gamma t, \text{ woraus folgt } v_t = v_0\,(1 + \gamma t); \text{ daher auch } v_t = v_0\,(1 + 3\beta t).$$

Sehr genaue Versuche haben aber gezeigt, dafs eine solche **Proportio-**.**lität der Ausdehnung verschiedener Stoffe nicht völlig zutrifft.** Mit deren Worten: Die Ausdehnungskoeffizienten, berechnet nach je 1° **je eines** ıermometers, sind für alle Körper aus anderem Stoff als jenes ıermometer nicht völlig konstant, sondern **mit der Temperatur-**ˌgion **veränderlich.** Dies der Grund, warum auch die Anıben von Thermometern mit verschiedener Thermometersubstanz ıtereinander im allgemeinen nicht völlig übereinstimmen (§ 71; iheres LA 140). — Mit Rücksicht auf diese Ungleichmäfsig-ːiten (von denen aber im folgenden wieder abgesehen wird), geben e Hundertel obiger Zahlen nur die **mittleren Ausdehnungs-**ɔeffizienten **für je 1°** zwischen 0° C und 100° C; z. B. Glas: $= 0{,}000\,025$, Quecksilber $\gamma = \frac{1}{5000}$.



Fig. 277.

LA 140.

Die **Ungleichheit der Ausdehnung verschiedener** ıster **Stoffe** findet **Anwendung** a) beim **Kompensations-**ɔdel. Wenn sich nämlich bei Erhöhung der Temperatur nur e **Eisenstäbe** (in Fig. 277 dunkler gehalten) **abwärts** verlängerten, würde die Pendellänge gröfser. Indem sich aber die kürzeren nkstäbe HG, KI **aufwärts** ausdehnen, ist durch richtige Wahl r Längen dafür gesorgt, dafs die **Pendellänge von der** ·**mperatur unabhängig** wird. b) **Kompensationsstreifen**

sind der Länge nach aus zwei Metallen von verschiedenem Ausdehnungskoeffi
zusammengelötet und nehmen bei verschiedenen Temperaturen verschiedene K
mung an. Anwendung bei der Kompensation der Taschenuhren nach Fi

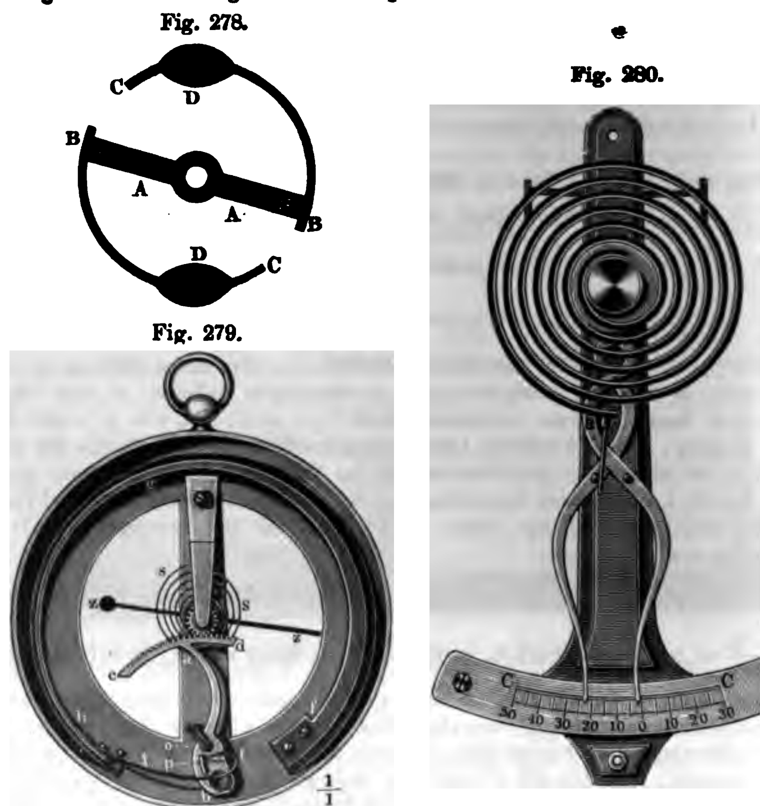


Fig. 278.

Fig. 279.

Fig. 280.

(indem hier das Trägheitsmoment verändert und damit die Schwingungsda elastischen Drehschwingungen unverändert erhalten wird). **Metalltherm** Fig. 279 und 280 (— letzteres mit Maximum- und Minimumzeiger).

B. Werden tropfbare oder gasförmige Flüssigkeit zylindrische (kalibrierte) Röhren eingeschlossen und die Verlän der Flüssigkeitssäule für die Erwärmung vom Eis- bis zum punkte beobachtet, so wird hierdurch nicht die lineare, sonde kubische Ausdehnung dieser Stoffe gegeben.

Dafs nämlich z. B. bei der Erwärmung einer zylindrischen Röhre etwa nur die Aufsenfläche sich nach aufsen, dagegen die Innenfläche nur innen verschiebt und die Röhre also durch Erwärmen wohl gar enge sondern dafs die Erweiterung des Innern genau **gleich** viel betrā ob es durch den Stoff der Wände ausgefüllt wäre, ergibt sich aus den weiteren Überlegungen: a) Ist ein massiver zylindrischer Stab gege kann man ihn als aus einem zylindrischen Kern und beliebig vielen röhrenf

zusammengesetzt denken, deren jede sich dann nur **nach aufsen**, nicht n erweitern kann (Fig. 281). b) Werden normal zur Achse der Röhre llele einander nahe Ebenen gelegt, so schneiden sie aus en ringförmigen Stab heraus, der bei Erwärmung länger ufs. — Auf Grund dieser Regel für die Erweiterung von äfst sich dann aus dem bekannten wahren Ausdehnungs- en des festen Stoffes, aus dem das Gefäfs, z. B. eine sterkugel und -röhre besteht, und aus der scheinbaren ung der im Gefäfse eingeschlossenen Flüssigkeit (z. B. des Queck- if den **wahren kubischen Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeit**

Fig. 281.



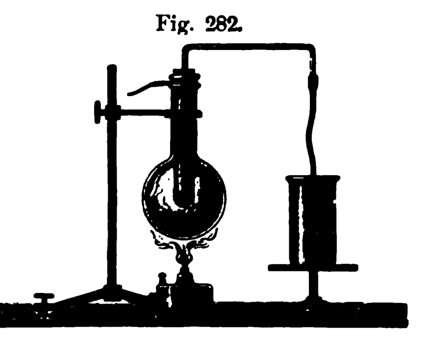
Er beträgt bei Quecksilber für den Fundamentalabstand 0,0181 $\neq \frac{1}{55}$. —

opfbare Flüssigkeiten, z. B. das Quecksilber im Thermometer, beim Er- es Gefäfses im allgemeinen noch immer Ausdehnung zeigen, wiewohl ngsraum sich vergröfsert hat, so folgt, dafs die Flüssigkeiten sich usdehnen als die festen Stoffe.

gilt um so mehr für die Gase, so dafs im Vergleich zu ihrer Ausdehnung sten Stoffe meist vernachlässigt werden kann. Unter dieser Annahme Gröfse der Ausdehnung zunächst der Luft folgender

ersuch: Ein zylindrisches (möglichst grofses) Probiergläschen, das durch pf mit Glas- und Kautschukrohr luftdicht zu verschliefsen ist, wird mit Luft gefüllt und durch umgebendes schmelzendes Eis auf 0° C abgekühlt. alten des Schlauches wird Zu- reiterer Luft verhindert und läschen mit Dämpfen sieden- s umgeben (z. B. indem es in en Hals eines Kochkölbchens ird, Fig. 282); es entweicht Rohr ein Teil der Luft, die in Form von Blasen aufsteigt. n die Erhitzung der Luft im unterbrochen, so drückt der ftdruck Wasser in das Probier- damit dieses hierbei nicht zer- t jenes Wasser genügend vor- . Ist endlich das Gläschen wieder auf 0° abgekühlt, so ist ein Viertel umens mit Wasser gefüllt. Die Volumina der Luft bei 0° und 100° also annähernd wie 3 : 4 verhalten und es ist (etwas mehr als) ein der ursprünglichen Menge beim Erhitzen entwichen. Der kubische ngskoeffizient für den Fundamentalabstand ist also für Luft 1 : (im folgenden Paragraphen wird sich genauer ergeben 100/273 — nicht nur für Luft, sondern für alle Gase).

Fig. 282.



[illegible] die „Kraft, mit der sich Gase bei Erwärmung ausdehnen", [illegible] Vergleich gesetzt werden kann mit der Erhöhung der Spannkraft [illegible] Druck, so ist auch die „unwiderstehliche Kraft", mit der flüssige [illegible] sich bei Erhöhungen der Temperatur ausdehnen, bei Erniedrigung [illegible] (*Versuch* über Abknicken eines Eisenstäbchens durch einen sich [illegible] Eisenstab), nicht etwa als unendlich grofs zu denken, [illegible] unmittelbarer Beziehung zu den Gröfsen der Zug-, bezw. [illegible] Indem z. B. ein Stahlstab von 1 m Länge und 1 mm² Quer-

schnitt durch einen Zug von 1 kg um $^{1}/_{20000}$ m verlängert wird und die glei
längerung durch eine Erwärmung um 2° C erfährt, so wird durch eine
druck von 1 kg jene Wärmeverlängerung verhindert. Es ist aber d
mechanische Spannung im Betrage von 1 kg in dem Stabe ein
entsprechend bei einem 100 mm² = 1 cm² dicken Stab eine Spannung v
— Gegenüber diesen Spannungen ist dann bei flüssigen und festen St
äufsere Luftdruck meist als belanglos sowohl für das Volumen bei der
lichen als bei künstlich erhöhter und erniedrigter Temperatur aufser acht

Abweichungen vom Volumgesetz. — Ton, Lehm
Holz ... nehmen beim Erhitzen an Volumen ab, aber nur, weil
entweicht; die Ausnahme vom Volu
ist also nur eine **scheinbare**, in
Erniedrigung der Temperatur s
Volumen auch nicht mehr vergrö
Anwendung bei **Pyrometern** f
hohe Temperaturen.

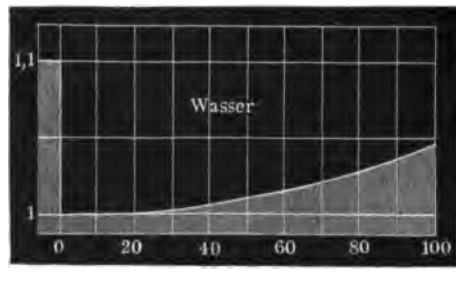
Fig. 283.



Eine **wirkliche Ausnahm**
Volumgesetz bildet nebst einigen
Stoffen das **Wasser** zwischen 4
0° C, indem innerhalb dieser Gren
niederen Wärmegrad das gröfsere V
entspricht; und zwar so, dafs einai
nähernd die Volumina bei 5° un
und 2°, 7° und 1°, 8° und 0° gle
(*Versuche* mit dem Wasserdila
Fig. 283; hierzu LA 141). — N
weitem stärker als das flüssige
von 4° bis 0° dehnt sich das W
Gefrieren bei 0° aus, nämlich u
$^{1}/_{11}$ seines Volumens.
befolgt das feste Wass
das Volumgesetz, indem
nehmenden Wärmegr
—1°, —2° ... auch abn
Volumina entspreche

LA 141.

Fig. 284.



LA 142.

Vergl. die graphi
stellung Fig. 284, genaue
— Über die Bedeutung d
haltens des Wassers für
halt der Natur vergl. §
Wasser ist aber nicht d
Stoff, der solche Abweichungen vom Volumgesetz zeigt; z. B. auch gesc
Wismut dehnt sich beim Erstarren aus.

. Boyle (Mariotte) — Gay-Lussacs (Charles) Gesetz.

ı die beiden im vorigen Paragraphen geschilderten Vorversuche zu messen-*suchen* auszubilden, dient der im § 45 zunächst nur zum Nachweis des ›schen Gesetzes benutzte Apparat Fig. 187, S. 183; vergl. Fig. 285, S. 269.

ı Volumrohre seien v_0 cm³ eines trockenen Gases (Luft, Leucht-.) unter einem bestimmten Drucke von p_0 abgeschlossen. Durch , bezw. Senken des Druckrohres tritt eine Änderung des ıens von v_0 auf v cm³ ein. Während dieser Versuche habe dieselbe Temperatur t_0°C innerhalb der abgeschlossenen ıge geherrscht. — Umgekehrt lassen sich dann jene Verände-des anfänglichen Volumens von v_0 auf v auch durch ent-ınde Änderungen der Temperatur herbeiführen, falls d des ganzen Versuches das Gas unter demselben Druck p_0 n wird. — Endlich läfst sich das Volumen der Gasmenge auch die gleichzeitige Veränderung von Druck und Tempe-verändern.

ie die Abhängigkeit von Volumen und Druck durch das Boyle-tte)sche Gesetz, so wird die Abhängigkeit von Volumen und ›ratur durch das Gay-Lussac-(Charles)sche, endlich die von en, Druck und Temperatur durch das Mariotte-Gay-sche Gesetz dargestellt.

Beispiel: Es sei das Volumrohr umgeben von einem „Mantelrohr", das rasser gefüllt ist. Das Druckrohr werde so gestellt, dafs bei 0° C in dem hr eine Luftsäule von 27,3 cm (— im Hinblick auf die für die Gase so Zahl 273, siehe unten) abgeschlossen ist, und das Quecksilber stehe im und Druckrohr gleich hoch, somit die Gasmenge unter dem Druck der Luft p_0, welcher durch den augenblicklichen Barometerstand b angezeigt [un wird das Mantelrohr mit den Dämpfen von siedendem Wasser erfüllt eingeschlossene Gasmenge nimmt 100° C an. Sie dehnt sich hierbei aus, cksilber im Druckrohr steigt zunächst; wird aber das Druckrohr so enkt, dafs wieder das Quecksilber beiderseits gleich hoch steht, so hat nenge von 100° C eine Länge von 37,3 cm angenommen. Einer Länge cm bei 0° entspricht also eine Verlängerung um 10 cm beim Erwärmen uf 100°; also einer Länge von 273 cm eine Verlängerung von 100 cm. Da ängen des Luftzylinders auch die Volumina proportional sind, so ist stantem Drucke p_0 das Volumen $v_{100} = v_0(1 + {}^1/_{273} \cdot 100^0) = 1{,}367\, v_0$.

Beispiel: Wird beim vorigen Versuch, nachdem das Gas bei der Er-; von 0° auf 100° C sich ausgedehnt hat (statt durch Senken auf gleichen durch Heben des Druckrohres auf gleiches Volumen eingestellt, d. h. h die Erwärmung ausgedehnte Gas auf sein Volumen wie bei 0° C zurück-, so zeigt der Unterschied der Stände in Druck- und Volumrohr, dafs ıstantem Volumen v_0 der Druck $p_{100} = p_0(1 + {}^1/_{273} \cdot 100^0) = 1{,}367\, p_0$.

versteht sich nicht von selbst, dafs hier 1. dieselbe Zahl ${}^{100}/_{273}$ ($\neq {}^{100}/_{300}$ ür je 100°, also speziell auch für den Fundamentabstand, die Erhöhung

des Volumens wie der Spannung mifst; und um so mehr ist es zu als eine merkwürdige Tatsache hinzunehmen, dafs 2. **auf je 1° C** die um $^1/_{273}$ = **0,00367** gilt, und zwar 3. **für alle Gase**, gleichviel ob e einfache (H, O, N ...) oder chemisch zusammengesetzte (CO_2 mechanische Gemenge (Luft ...). — In der Tat **ergaben sehr genaue** für verschiedene Stoffe und verschiedene Temperaturinterv eine wenn auch sehr geringe Verschiedenheit jener beiden Gröfsen koeffizient bei konstantem Druck, kurz: **Ausdehnungskoeffizient** des G α^v (Gaskoeffizient bei konstantem Volumen, kurz: **Spannungskoeffizi** folgenden behalten wir aber für beiderlei Koeffizienten jenen gemeins Mittelwert $^1/_{273}$ unter der kurzen Bezeichnung **„Gaskoeffizient"** bei. — *suchen* ähnlich den in den beiden obigen Beispielen, aber nicht nur sondern auch für irgendwelche t^0 (die ein in das Wasser des Manteln gesenktes Thermometer anzeigt), ergibt sich die sehr allgemeine Beziehu

Für dieselbe Menge eines beliebigen Gases, das unter dem drucke $p_0 = 1$ at bei 0° C das Volumen v_0 cm³ erfüllt hat durch verschiedene Drucke $p', p'', \ldots p$ auf die zugehörigen V $v', v'', \ldots v$ gebracht wird, gilt bei jeder durch das Quecksilbe meter gemessenen Temperatur t^0 C für zusammengehörige W Gröfsen p, v, t das

Boyle (Mariotte) - Gay-Lussacsche Gesetz: $pv = p_0 v_0$ (wo der **Gaskoeffizient** $\alpha = {}^1/_{273} = 0{,}00367$ (genauer: $\alpha =$

LA 144. Graphische Darstellung dieser Abhängigkeit zwischen p, v, t verg Luftthermometer und Quecksilberthermometer; Norm raturskala. — Absoluter Nullpunkt. — **Luftthermometer** heifsen welche in Bau und Verwendung wesentlich mit dem oben beschrieb einstimmen; denn während wir durch Beobachtung der einer b Temperaturveränderung entsprechenden Veränderung des Volumens Spannung oder beider den Ausdehnungs- und Spannungskoeffizienten bestimmen konnten, kann man umgekehrt auf Grund dieser Kenntnis den Veränderungen von Volumen und Spannung auf die Temperaturv schliefsen. Bei Jollys Luftthermometer wird ein mit trockener Lu Glasballon, der in ein kalibriertes Kapillarrohr mündet, in die auf ih ratur zu untersuchende Flüssigkeit gebracht und aus dem Stand des Q in einem Druckrohr bei unverändertem Volumen der Luft im Ballon Spannung und somit deren Temperatur geschlossen. — Die verschieden der Gasthermometer sind zwar alle bei weitem weniger handsa Quecksilberthermometer, sie haben aber grofse theoretische Bedeutun

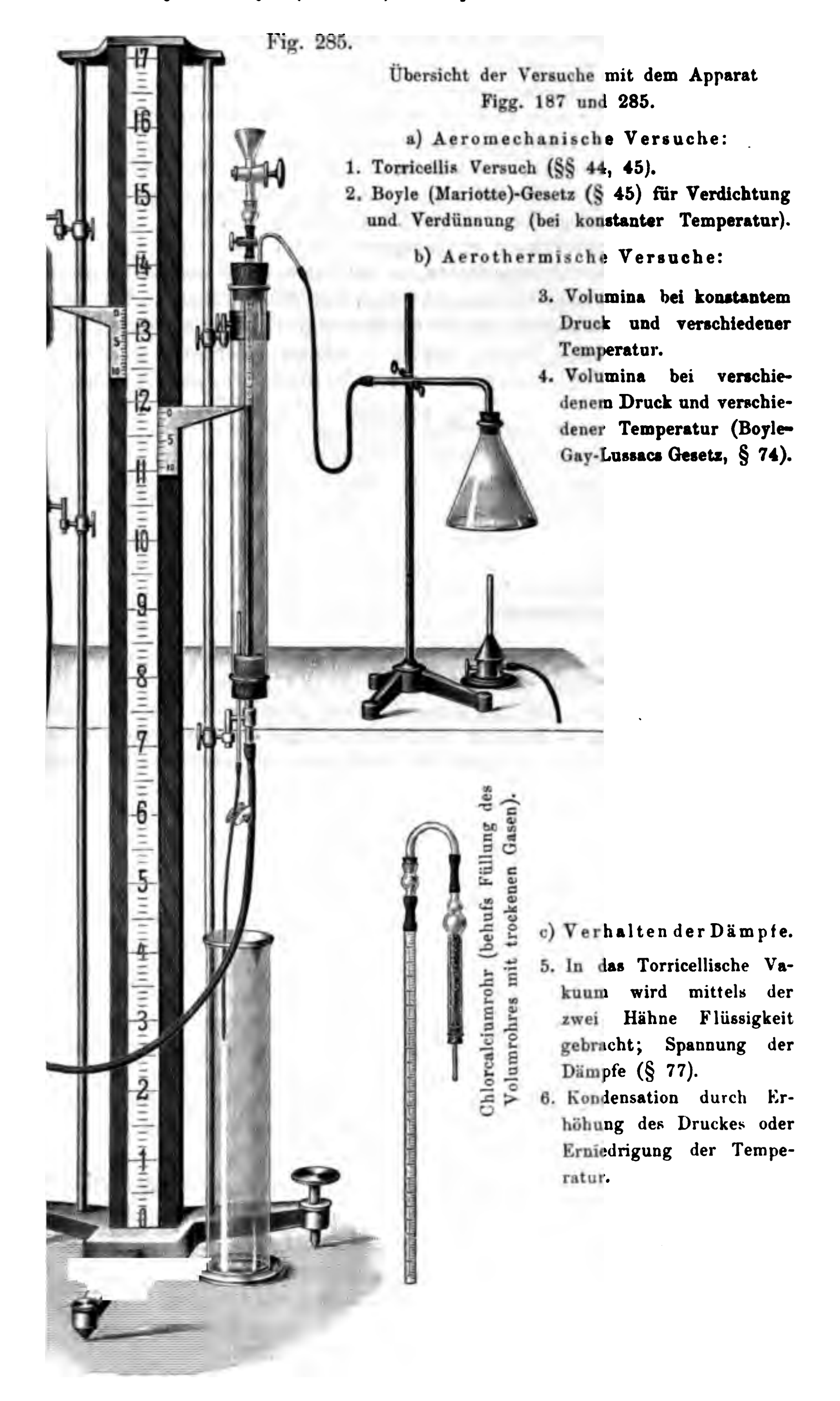


Fig. 285.

Übersicht der Versuche mit dem Apparat Figg. 187 und 285.

a) Aeromechanische Versuche:

1. Torricellis Versuch (§§ 44, 45).
2. Boyle (Mariotte)-Gesetz (§ 45) für Verdichtung und Verdünnung (bei konstanter Temperatur).

b) Aerothermische Versuche:

3. Volumina bei konstantem Druck und verschiedener Temperatur.
4. Volumina bei verschiedenem Druck und verschiedener Temperatur (Boyle-Gay-Lussacs Gesetz, § 74).

Chlorcalciumrohr (behufs Füllung des Volumrohres mit trockenen Gasen).

c) Verhalten der Dämpfe.

5. In das Torricellische Vakuum wird mittels der zwei Hähne Flüssigkeit gebracht; Spannung der Dämpfe (§ 77).
6. Kondensation durch Erhöhung des Druckes oder Erniedrigung der Temperatur.

des **Luftthermometers** sind nach diesem Gesichtspunkte die des Wasser am vollkommensten die des Heliumthermometers, vergl. § 77, V. Indem mit den Angaben der Gasthermometer doch auch die der Quecksilberthe erfahrungsmäfsig sehr nahe übereinstimmend erweisen (wenigstens viel l z. B. die von Eisen-, Kupfer- . . . Thermometern), darf auch die Sl **Quecksilberthermometers als eine nicht blofs willkürliche** geh wieweit der sehr verbreitete Satz: „das Quecksilber dehnt sich gleichmäl freilich nur ein tautologischer ist, vergl. log. Anhang, Nr. 38.) Anh. 38.

Ein **Luftthermometer einfachster Form** wäre eine zylindri dem einen Ende verschlossene Röhre, in der durch einen Quecksilbertro so grofse Luftmenge eingeschlossen ist (vergl. Fig. 286 und Melders Röhre, dafs unter dem Normaldruck 1 at (76 cm Quecksilber) einander entsprech LA 148.

die Längen 273 cm, 272 cm, 271 cm ... 172 cm ... 72 cm ... 1 cm
die Temperaturen 0°, — 1°, — 2° ... — 100° ... — 200° ... — 27

Fig. 286.

Der physikalischen Wirklichkeit entspricht dieses Schema schon desh weil z. B. die Luft schon bei — 194° flüssig ist (§ 77), und auch, wenn ni Kondensation einträte, die Luft jedenfalls nicht gänzlich auf das Volum herabzubringen wäre. — Leichter vorstellbar ist, dafs wir die eingeschlos auf **konstantem Volumen** erhielten, wobei dann mit abnehmender Te die **Spannung** abnähme; angenommen, der Temperaturabnahme um spräche wieder ohne Rücksicht auf Kondensation und sonstige Abweichu Spannungsabnahme um je $\frac{1}{273}$ der Spannung bei 0°, so hätte die Luft bei - **Spannung Null** erreicht. Trotzdem nun beide Vorstellungen fiktiv (ph weder realisiert noch realisierbar) sind, bezeichnet man doch eine ge Temperatur von — 273° als **absoluten Nullpunkt der Temperatur.** weit es physikalische Richtigkeit haben mag, dies als die „Temperatur d Weltraumes“ anzunehmen, vergl. § 196.) Die Annahme dieses neuen, tie punktes hat wesentlich den **rechnerischen** Vorteil, dafs sich der in allen Fo die Ausdehnung von Gasen immer wiederkehrende Ausdruck $1 + \alpha t =$ folgendermafsen vereinfacht: Einer Temperatur von t^0 C entsprechen in der Skala $T^0 = 273^0 + t^0$, daher ist $1 + \frac{1}{273} t = 1 + \frac{1}{273}(T - 273)$ somit $1 + \alpha t = \alpha T$. Speziell vereinfacht sich auch der Ausdruck für Gay-Lussacs Gesetz in $pv = p_0 v_0 \alpha T$; indem überdies abkürzend $p_0 v_0 \alpha$ setzt wird, ergibt sich als kürzeste Form für

!. Abhängigkeiten zwischen Wärmegraden, Wärmemengen und Aggregatzuständen.

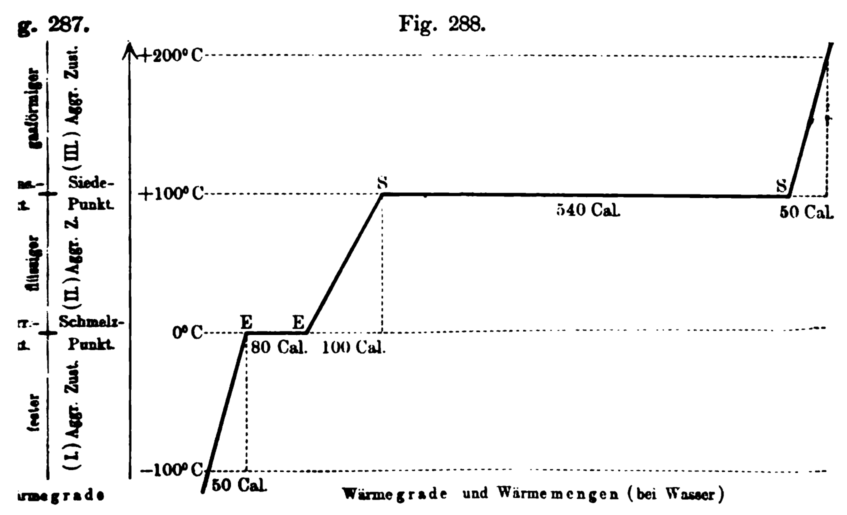
·. Übersicht der Erscheinungen. — Die Aggregatregel.

Vorbemerkung. An den Vorgängen des Schmelzens und Siedens eits, des Kondensierens und Erstarrens anderseits — vergl. das Schema, 87 —, welche gewöhnlich als die „Änderungen des Aggregatzustandes ı Wärme" bezeichnet werden, sind genauer folgende zwei Arten von ıgigkeitsbeziehungen auseinander zu halten:

:. **Dem höheren Wärmegrade entspricht** in der Regel **der höhere gatzustand desselben Stoffes** („Aggregatregel").

ı. Während der durch Zufuhr, bezw. Abfuhr von Wärmemengen herbeiten Änderung des Aggregatzustandes bleibt der Wärmegrad (die **Verungstemperatur**) mehr oder weniger annähernd konstant. — **Der** (bei dieser ndlungstemperatur) **zugeführten oder entzogenen Wärmemenge ist den nächst höheren, bezw. nächst niedrigeren Aggregatzustand überde Stoffmenge direkt proportional.**

)ie nähere Beschreibung der Vorgänge beim Schmelzen, Verdampfen u. s. w. t also nicht nur in der Feststellung der als **Schmelzpunkte** (in der Regel :h Erstarrungspunkte) und **Siedepunkte** (Kondensationspunkte) hneten Wärmegrade, sondern auch der als **Schmelzwärmen** und **Verungswärmen** bezeichneten Wärmemengen. Während das Schema Fig. 287 ıf jenen Wärmegrad geht, läfst sich die Abhängigkeit zwischen den zuge-



n Wärmemengen einerseits, den Wärmegraden und Aggregatzuständen eits in den einfachsten Fällen durch das Schema Fig. 288 darstellen. Soll 1 kg festes Wasser von — 100° durch den flüssigen Zustand hindurch in miges Wasser von 200° übergeführt werden, so erfordert (in runden Zahlen,

mit Rücksicht auf die mittlere spezifische Wärme des flüssigen Wassers = festen und gasförmigen $\neq$ ½) die

Temperaturerhöhung des Eises von — 100° bis 0° C 50
Überführung des festen Wassers von 0° in flüssiges von 0° . 80
Temperaturerhöhung des Wassers von 0° bis 100° C 100
Überführung des flüssigen Wassers von 100° in gasförmiges . 540
Temperaturerhöhung des Wasserdampfes von 100° bis 200° C . . 50

Dieses einfachste Schema trifft aber schon nicht mehr zu bei allen welche sich vor dem eigentlichen Schmelzen **erweichen.** Hier sind näml Ecken bei *E* abzurunden, indem ein Teil der zugeführten Wärme noch zu rung der Temperatur, ein anderer Teil zur Änderung des Aggregatzustan braucht wird. Bei solchen Stoffen kann auch, streng genommen, nicht m einem bestimmten **Schmelzpunkt** gesprochen werden. — Noch mehr Übergang vom ersten in den zweiten Aggregatzustand ist die Beziehung z Wärmegrad und Aggregatzustand kompliziert beim zweiten und dritten, bei allem **Verdunsten** (unter dem Siedepunkt) demselben Wärmegrad Zustände entsprechen. Mit Rücksicht hierauf, sowie auf das „**Unterk** (§ 76) und den „**Siedeverzug**" (§ 77) stellt die „**Aggregatregel**" l. wegs ein so selbständiges Gesetz dar wie das „**Volumgesetz**" (§ 78), da höheren Wärmegrade das gröfsere Volumen entspricht.

§ 76. Schmelzen und Erstarren.

A) Die **Wärmegrade** des Schmelzens und Erstarrens **Schmelz-**, bezw. **Erstarrungspunkt** (letzterer speziell **Gefrier** wenn er hinreichend tief liegt, wie bei Wasser, Kohlendioxyd, w man z. B. von dem bei 1000° C fest werdenden Silber zwar eb sagt: es erstarre, aber nicht: es gefriere).



Fig. 289.

Wie bei der Bestimmung des Eispunktes unteren Fundamentalpunktes der Réaumur- und gradskala bemerkt wurde, ist beim Versuch ül Konstanz des Schmelz- bezw. Erstarrungspunkt Wassers Rücksicht auf das geringe Wärmeleitungsve von Eis und Wasser zu nehmen; sonst kann ein T meter, das in ein Gemenge von Eis und Wasser bei zu rascher Zufuhr äufserer Wärme auch 5 über 0 ausweisen, wiewohl noch feste Eisstü Wasser schwimmen. Aber auch wo solche Fel Experimentieren vermieden sind, zeigt sich als w Ausnahme von der **Gleichheit des Schmel Erstarrungspunktes** das

Unterkalten (Überschmelzen). Fahr machte 1740 zuerst die Beobachtung, dafs Wasser, das in kalten Räumen vor jed schütterung geschützt ist, bis auf — 10° neueren Versuchen sogar bis — 13° C, ja — erkaltet werden kann, ohne zu gefrieren.

as unterkaltete Wasser nur ein wenig erschüttert, so tritt augenblicklich isbildung und Steigen der Temperatur auf 0° C ein. (Ähnlich noch affallender bei unterschwefligsaurem Natron, *Versuch* nach Fig. 289.)

B) Die Wärmemengen beim Schmelzen und Erstarren. — BLACKS *ersuch*: Werden zu *m* g Wasser von *t*° C *m* g Schnee von 0° C gebracht, sinkt die Mischtemperatur viel tiefer, als wenn die *m* g flüssiges Wasser von 0° C gewesen wären. Solche und feinere Versuche ergeben, die **Schmelzwärme des Wassers 80** (genauer 79,25) Cal per kg , d. h.: Um 1 kg festes Wasser von 0° C in 1 kg flüssiges Wasser n 0° C zu verwandeln, sind 80 Cal erforderlich (also ebenso viel, wie 1, 2 . . . 80 kg flüssiges Wasser von 0° C auf 80°, 40° . . . 1° C zu wärmen).

Früher sagte man, beim Schmelzen werde Wärme „latent". Jetzt sagt n, die Wärmemenge werde zum Erhöhen des Aggregatzustandes **verbraucht**. Ein solcher „Wärmeverbrauch" wird plausibel, wenn man bedenkt, dafs schon beträchtliche mechanische Arbeit kostet, z. B. 1 kg Eis durch Schaben Eispulver zu verwandeln: diese Arbeit wird hier verbraucht zum Überwinden r Kohäsion der Eisstäubchen. Nun kostet bei der Verflüssigung des Wassers Überwindung der Kohäsion jedenfalls noch viel mehr Arbeit — aber nicht chanische (denn durch blofses Schaben, Pulverisieren u. dergl. ist bekanntlich fester Stoff nicht zu verflüssigen), sondern „thermische (besser: kalorische) beit". — Durch den Satz von der Äquivalenz der mechanischen Arbeit und rme wird sonach die zunächst überraschend grofse Schmelzwärme des Wassers wie anderer Stoffe) vollends verständlich (§ 83).

Dem Wärmeverbrauch beim Schmelzen entspricht umgekehrt das „Freirden" der Wärme beim Erstarren, wie es sich z. B. beim plötzlichen Steigen r Temperatur unterkalteter erstarrender Flüssigkeiten zeigt.

Einige Schmelz- (und Erstarrungs-)punkte [in ° C] und Schmelz- (und Errungs-)wärmen [in Cal per kg]:

Kohlendioxyd —78,2° C; Quecksilber —39,4° C, 2,82; Wasser 0° C, 80; Butter ° C; Silber 1000° C, 21; Schmiedeeisen 1600° C; Platin 2000° C, 27,2.

Kältemischungen. *Versuche*: Mischt man zu annähernd gleichen Teilen asser (Schnee, Eis) und Kochsalz, so erniedrigt sich die Temperatur (und der frierpunkt) um einige Grade; bei Salmiak um $18\frac{1}{2}$°; noch weiter durch entrechende Zusätze von Säuren oder von gewissen Paaren von Salzen. — Diese bkühlungen zeigen, dafs das Lösen (§ 56) jener Salze ein Flüssigwerden ter Verbrauch von Wärmemengen ist. Die bei manchen Mischungen, z. B. von asser und Schwefelsäure, erzielten Erhöhungen des Wärmegrades rühren her n den durch chemisches Verbinden produzierten („freiwerdenden") Wärmengen.

77. Verdunsten und Verdampfen; Sieden, Kondensieren. Dämpfe und Gase. — Dampfwärme. — Kritischer Punkt.

I. Die vorwissenschaftlichen Wörter Dunst und Dampf („dunstige" Atmohäre über einer Stadt, vor einem Gewitter, die „Dampfwolke", die aus dem hornstein einer Lokomotive, einer Waschküche . . . dringt) haben in der Physik e wesentlich andere Bedeutung angenommen: **Dunst** oder **Dampf** hiefsen (solange

noch nicht die Kondensation sämtlicher Gase gelungen war) nur die
Stoffe im dritten Aggregatzustand, die als aus dem zweiten durch Verdun
oder Verdampfung hervorgegangen gedacht wurden und auch wieder
zweiten Aggregatzustand zurückzuführen waren. Hiernach war und ist
„Wasserdampf“ = Wasser im dritten Aggregatzustand = gasförmiges W
dagegen ist die sichtbare Wolke über der Lokomotive schon wieder Wa
zweiten Aggregatzustand, bestehend aus feinen Tröpfchen, die in de
schweben. — Überdies drängen sich der gewöhnlichen Erfahrung beim
Beobachtungen über den Wasserdampf auf, während es ebenso Äther-, A
Quecksilber-, Natrium-, Schwefeldampf ... gibt (— dafs überdies SO_2 u
fälschlich „Schwefeldämpfe“ genannt werden, vergl. § 218). — Seitdem d
Kondensation sämtlicher Gase gelungen war, hätte man sie auch alle als ,
oder „Dampf“ ansehen und bezeichnen können; doch stellte sich eine neue
scheidung zwischen „Dampf“ und „Gas“ auf Grund der kritischen Tem
(siehe unten V.) als zweckmäfsig heraus. —

Zunächst geben den Beweis, dafs der unsichtbare Wasserdampf
Nichts noch Luft sei, die folgenden *Vorversuche:* In dem Probierg

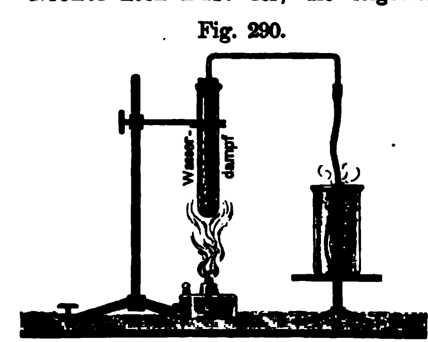


Fig. 290.

nach Fig. 290 befindet sich nich
blofs trockene Luft wie beim '
§ 73, sondern auch etwas Wasser.
dieses durch das umgebende Wa
Kochkolben (oder auch durch di
das Gläschen gehaltene Flamme,
das Wasser ohnedies nicht über 1(
wärmen läfst) bis zum Sieden erh
dringen aus dem Schlauche wieder
aber sie entwickeln sich viel anh
und stürmischer als die Luftblasen, e
auch das Kühlwasser viel ausg
Wird dann das Probiergläschen
abgekühlt, so füllt sich durch das zurückströmende Wasser nicht nur ein
des Probiergläschens, sondern sein ganzer Raum. Beim Einströmen von tro
Quecksilber zeigen sich die aus dem ganzen Raum des Gläschens konde
Dämpfe als einige spärliche Wassertröpfchen. Aus einem gegebenen V
Wasser entwickelt sich nämlich ein etwa 1700faches Volumen Dampf von
LA 148. siehe unten VI. und LA 148. — Zischen des aus der Röhre in die Luft entweic
Dampfes, Kondensieren und Sichtbarwerden in einigem Abstande von der Mi
Beschlagen einer in einen Dampfstrahl gehaltenen kalten Glas- oder Metal
Nichtkondensieren auf einer heifsen Platte. — Diese vorläufigen Feststе
gestatten nun auch erst einen näheren Einblick in die Bedingungen für
fallendste aller Erscheinungen des Überganges aus dem zweiten in den
Aggregatzustand, nämlich das

II. Sieden: Bringen wir über einer Gasflamme das Was
einem Becherglase zum Kochen, so lassen sich folgende Teile
nungen unterscheiden: 1. Sofort nach Entzünden der F
beschlägt sich das Glas von aufsen; es sind dies Wasserdünst
sich beim Verbrennen der Kohlenwasserstoffe des Leuchtgase
wickelt haben und am kühlen Glase kondensieren. 2. Bei
Erwärmung zeigen sich an der Innenseite des Glases Bläsche

stehen aus den im Wasser absorbiert gewesenen Gasen (Luft, Kohlendioxyd). 3. Diese Bläschen dehnen sich aus, reifsen sich vom ...se los und erreichen die Oberfläche. 4. An einzelnen Stellen der ...denfläche treten Bläschen auf, die in den oberen Schichten des ...assers wieder verschwinden: es sind Dampfblasen, welche sich in ...n höheren, minder heifsen Schichten des Wassers wieder kondensieren. 5. Sowie diese Blasen bis an die Oberfläche dringen und dort ...tzen, ist die ganze Flüssigkeit ins Wallen geraten, worin das äufserliche Kennzeichen des **Siedens** besteht.

Werden neben diesen vorwiegend mechanischen Vorgängen mittels eines ...das Wasser gesenkten Thermometers auch die Wärmegrade beobachtet, so ...gibt sich für die Art des Verbrauches der jeweilig zugeführten Wärmemengen ...gendes: Auch wenn durch Verkleinern und Vergröfsern der Flamme die ...mpfentwickelung und damit das Wallen beliebig verkleinert oder vergröfsert ...rd, so ändert dies doch nichts an der Siedetemperatur: Alle zugeführte ...ärmemenge wird also nicht mehr zur Änderung des Wärmegrades, ...dern nur zur Änderung des Aggregatzustandes verbraucht; über die ...öfse der Dampfwärme des Wassers (540 Cal per 1 kg) siehe unten VII.

III. Wird die Temperatur beliebig tief **unter** der Siedetempe...tur konstant erhalten (z. B. Wasser in einer flachen Schale bei ...mmertemperatur — feuchte Wäsche . . .), so findet ebenfalls ein ...ergang von dem zweiten in den dritten Zustand statt, aber nur an ...r Oberfläche der Flüssigkeit. Diesen Übergang nennt man ...zugsweise **Verdunsten** zum Unterschiede von dem **bei** der Siede...mperatur auch im Innern der Flüssigkeit stattfindenden **Verdampfen.**

Wird also einer Flüssigkeit unter dem Siedepunkte eine Wärmemenge zuge...rt, so wird diese **teils** zur Änderung (nämlich Erhöhung) des Wärme...ades, **teils** zur Änderung des Aggregatzustandes verwendet. Eine ...klärung, warum eine solche Spaltung der zugeführten Wärmemenge beim ...den nicht mehr eintritt, gibt die kinetische Wärmehypothese § 83. Unab...gig von dieser Hypothese erhalten die beschriebenen Tatsachen ihren festen ...sdruck durch die folgenden Begriffe:

IV. Maximum der Spannkraft; gesättigte und unge...ttigte (überhitzte) Dämpfe. *Versuch*: Wird in das Torri...llische Vakuum eine kleine Menge Äther gebracht, so verdunstet sie ...fort ganz, eine gröfsere Menge nur zum Teil bei derselben Tempe...tur; dagegen eine noch gröfsere Menge oder wieder der ganze ...her, wenn die Röhre von aufsen hinreichend erwärmt wird. Indem ...rbei die Quecksilbersäule sinkt, zeigt sie (wie beim Mariotteschen ...setz für Verdünnung, § 45) die jeweilige Spannkraft der Ätherdünste . — Ähnliche Versuche mit Alkohol, Wasser . . .

Das Einbringen der Flüssigkeit in das Vakuum kann entweder vom unteren ...nen Ende der Röhre oder aber bequemer von oben her geschehen, wenn sich ...oberen Ende zwei Hähne übereinander befinden, durch deren oberen Wasser,

Alkohol oder Äther in den Raum zwischen den Hähnen eingebracht wer von welcher Flüssigkeitsmenge man dann nach Verschlufs des oberen u des unteren Hahnes beliebig wenig oder viel in das Vakuum abtröpfeh dunsten läfst. — In dem Apparat Fig. 285, S. 269 und S. 183 kann zu Heben des Druckrohres das Quecksilber im Volumrohr bis an den unt gehoben und dann durch geringes Senken des Druckrohres die gewünsc Flüssigkeit zwischen Hahn und Quecksilber eingeführt werden. Wird Druckrohr weiter gesenkt, so **verdunstet** die Flüssigkeit in dem sich i gröfsernden Raum oberhalb des Quecksilbers im Volumrohr; und umgekeh sie wieder als **Flüssigkeit zum Vorschein** beim Verkleinern dies mittels Heben des Druckrohres. — All dies zunächst bei der Zimmert

Werden überdies mittels eines Mantelrohres (durch das sich, wi Versuchen über das Gay-Lussacsche Gesetz, § 74, das Volumrohr au Temperaturen zwischen 0° und 100° bringen läfst) Flüssigkeit und Volumrohr auf beliebige gleiche Wärmegrade gebracht, so zeigt sich:

Bei je einem bestimmten Raum und Wärmegrad gibt gewisse gröfste Menge Flüssigkeit, die eben noch ganz v (ein Überschufs bliebe flüssig). Der **Raum** ist dann **mit gesättigt**, oder abgekürzt: **der Dampf ist gesättigt.** dann diese Dampfmenge auf ein gröfseres Volumen (also l Spannung) gebracht, so ist der Raum **nicht mit Dampf** g oder abgekürzt: **der Dampf ist ungesättigt.**

Aber auch wenn das Volumen des gesättigten Dampfe ändert geblieben war, aber seine Temperatur erhöht jetzt der **Dampf** ungesättigt oder **überhitzt.**

Diese beiden Bezeichnungen „ungesättigt“ und „überhitzt“ w auf zwei verschiedene Seiten derselben Erscheinung hin; dies wird auffällig durch Umkehrung der Vorgänge in folgendem

Versuch. Ist der Dampf im Volumrohr ungesättigt oder überhitzt er sich in gesättigten verwandeln entweder durch Erhöhen seiner Sp (mittels Hebens des Druckrohres) oder durch Abkühlung (mittels de bades oder schmelzenden Eises im Mantelrohr) — beidemale bis zum sationspunkt (übrigens gleichviel, ob neben dem nunmehr wieder ge Dampf noch Flüssigkeit da ist oder nicht).

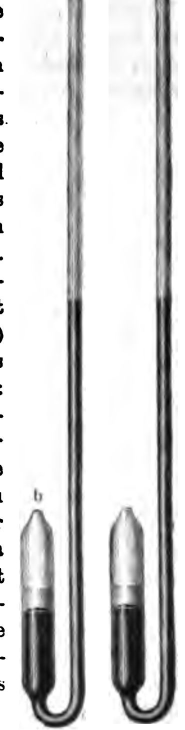
War bei diesen Versuchen nebst dem gesättigten Dampf im Volum hinreichend grofse Menge tropfbarer Flüssigkeit vorrätig, dafs man Auftreten von Blasen verfolgen kann, so zeigt, sobald durch Druckver oder Temperaturerhöhung die Grenze zwischen Gesättigt- und Ungesätti Dampfes erreicht ist, diese Flüssigkeit die Erscheinungen des Aufwal

Normalsiedepunkt einer Flüssigkeit wird speziell der dem luftdrucke von 76 cm entsprechende Siedepunkt bezeichnet. ge Normalsiedepunkte: (Wasserstoff — 243,5° C, Luft — 194° C, siehe Kohlendioxyd —78° C, Chlor —33,6° C, Schwefeldioxyd —10° C, Schwefel- 5° C, Alkohol + 78,4° C, Wasser 100° C, Quecksilber 357° C, Schwefel 448° C, C. — LA 149.

LA 149

dem oben zunächst nur an einer Reihe von Versuchen entwickelten hange erklärt sich nun vor allem die äufserliche Verschiedenheit von ten und Verdampfen: Hat z. B. das in einer flachen Schale an der ende Wasser nicht die dem augenblicklichen Luftdruck entsprechende peratur erreicht, so würden, wenn im Innern des Wassers sich trotz- pfbläschen entwickeln könnten, diese doch sogleich durch den gröfseren Druck wieder zusammengedrückt und kondensiert. Ist dagegen die nperatur erreicht, so hält die Spannkraft einer solchen Dampf- m äufseren Drucke das Gleichgewicht, und sie vermag sich als erhalten, steigt also auf u. s. f. — So erklärt sich auch die paradoxe ng, dafs Wasser in einem Kochkolben, der während des starken Siedens dampfdicht zugepfropft wurde, immer wieder von neuem aufzuwallen jemehr die Dämpfe über dem Wasser abgekühlt werden (denn ihre t nimmt hierbei ab u. s. f.); *Versuch!* — Umgekehrt künstliche Steige- Dampfspannung und somit der Siedetemperatur in Papins Topf.

Fig. 291 a u. b.



Methoden zur Messung des jeder Siedetemperatur igen Maximaldruckes oder, was dasselbe ist, der aft gesättigter Dämpfe, sind sehr zahlreich. Eine e Methode ist z. B. die, dafs in einer barometer- 'orrichtung (Fig. 291) oberhalb des Quecksilbers im Schenkel luftfreies Wasser und darüber durch Aus- ftfreier Raum sich befindet, der durch ein umgebendes rerschiedene Temperatur gebracht werden kann. Die wird dann durch das Quecksilber im längeren Schenkel Prinzip des offenen bezw. geschlossenen Manometers Die dynamischen oder Siedepunktsmethoden n die Temperatur, bei der Aufwallen stattfindet (z. B. r Verdünnungsluftpumpe mit hinreichend langer Baro- e). Bei den isothermischen Methoden beobachtet n bei gleichbleibender Temperatur (daher der Name) ehmendem äufseren Drucke die Spannung des nicht mehr zunimmt (daher in graphischer Darstellung: hr wie die idealen Gase nach dem Mariotteschen Ge- n einem Hyperbelbogen aufsteigt, sondern in eine zur achse parallele Gerade übergeht, LA 150). — Solche wurden von zahlreichen Forschern immer wieder neu gröfserer Sorgfalt durchgeführt, als sich zwar immer fs **mit zunehmender Siedetemperatur die Maxima nkraft rasch wachsen,** dafs es aber bisher nicht rar, die mathematische Abhängigkeit zwischen Siede- r und Spannkraft anders als durch blofs empirische uszudrücken (mit anderen Worten: für die jene Ab- t darstellende Kurve die analytische Gleichung aus eren Gesetzen abzuleiten; math. Anh., Nr. 12).

LA 150.

Anh. 12.

Bisher war angenommen, dafs der Dampf an allen seinen Stellen dieselbe Temperatur habe. Ist die Temperatur an verschiedenen Stellen eines Dampfraumes verschieden (z. B. im Kondensator einer Dampfmaschine, § 84), so entspricht die Spannung im ganzen Raume (Minimalspannung) dem der Stelle niederster Temperatur entsprechenden Maximum der Spannkraft. —

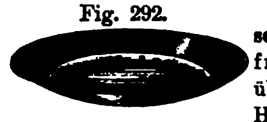


Fig. 292.

Abweichungen von dem bisher entwickelten Gesetze des Siedens und Kondensierens stellen dar: a) Leidenfrosts Phänomen (sphäroidaler Zustand): Auf einer weit über die Siedetemperatur erhitzten Metallplatte (z. B. die Herdplatte), einer Porzellanschale, auf heifsem Öl ... bewegt sich Wasser in grofsen Tropfen mit vibrierender Oberfläche. Hier schützt die sich bildende Dampfhülle die übrige Masse vor rascher Verdampfung. Zerreifst die Hülle, so tritt die Verdampfung mit explosionsartiger Heftigkeit ein. Hierin liegt eine teilweise Erklärung des „Siedeverzuges" (u. a. eine Hauptursache von Dampfkesselexplosionen).

b) Nach Beobachtungen von Aitken bedarf es zum Beginn der Kondensation fester Kondensationskerne, z. B. Staubteilchen. (Hieraus Erklärung der reichlichen Nebelbildung in staubiger, rauchiger Luft, § 194.) Fehlt es an solchen Kernen, so kann in einem Raum auch eine gröfsere Dampfmenge, als dem Sättigungsgrad entspricht, sich unkondensiert erhalten und es mufs insofern der Raum als mit Dämpfen übersättigt bezeichnet werden.

V. Leicht und schwer kondensierbare Gase. Kritische Temperatur. Während bei zahlreichen Stoffen wie Wasser, Schwefeläther . . . , die im zweiten und dritten Aggregatzustand bekannt waren, auch die Überführung aus dem dritten in den zweiten durch Druck oder Abkühlung seit langem bekannt war, gelang erst Davy und Faraday auch die Kondensation von Chlor, Ammoniak, Kohlendioxyd u. s. f., die von da an als „koerzible Gase" bezeichnet werden.

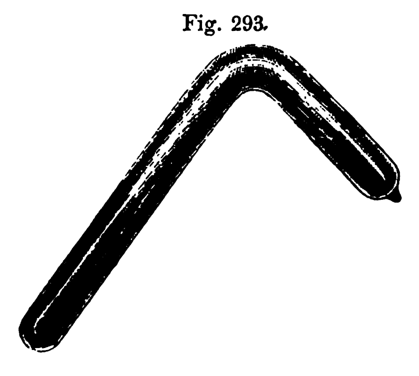


Fig. 293.

Faraday bediente sich u. a. starker Röhren nach Fig. 293, in deren einen Schenkel die das Gas liefernden Stoffe gebracht wurden, das sich nach eingeleiteter Gasentwickelung im anderen zugeschmolzenen Schenkel unter seinem eigenen Drucke kondensierte. Mehrere Jahrzehnte widerstanden dann nur noch die „permanenten Gase" Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff, Kohlenoxyd, Stickoxyd, Sumpfgas (Methan); und zwar trotzdem Natterer 1844 Drucke bis zu 2700 at angewendet (und Colladon die Gase bis — 30° abgekühlt) hatte. Erst als auf Grund von Andrews Entdeckung, dafs es für jeden Stoff eine „kritische Temperatur" gebe, oberhalb deren eine Kondensation überhaupt nicht möglich ist, 1877 Cailletet in Paris und fast ganz gleichgiltig Pictet in Genf zwar bei weitem nicht so hohe Drucke, aber um so tiefere Temperaturen anwendeten, gelang die Kondensation (und zwar zunächst Wasserstoff noch ausgenommen, den erst Olszewski bei — 234,5° unter 20 at aufbrausen, also sieden sah; bei — 243,5° C erfolgte das Sieden bei 1 at, es ist also dies der Normalsiedepunkt des Wasserstoffs). Von den später entdeckten Gasen Argon und Helium ist letzteres auch bei de

edrigsten bisher erreichten Temperatur von —263,9° nicht kondensiert worden, ist also das permanenteste Gas und eignet sich deshalb am meisten zur Messung tiefster Temperaturen nach dem Prinzipe der Gasthermometer (§ 74).

Jener Begriff der kritischen Temperatur (sowie die damit zusammenhängenden des kritischen Druckes, kritischen Volumens und kritischer Dichte) gibt folgender Tatsache Ausdruck: Ist in einer Glasröhre flüssiges Kohlendioxyd eingeschlossen, über dem sich gasförmiges Kohlendioxyd befindet, sind bei hinreichend niederer Temperatur, z. B. 0° C, Flüssigkeit und Gas durch einen sichtbaren „Meniskus" gegeneinander abgegrenzt. Wird das Ganze auf 10°, 20°, 30° erwärmt, so entwickelt sich zwar immer neues Gas aus der Flüssigkeit; bei etwa 31°, der „kritischen Temperatur" des Kohlendioxyds, wird aber nunmehr dieser Meniskus unsichtbar und es ist also bei dieser und allen höheren Temperaturen der sichtbare Unterschied des zweiten und dritten Aggregatzustandes weggefallen. (Eine genauere Charakteristik vergl. LA 150.) — Indem sich auch für andere Stoffe solche kritischen Temperaturen ergaben (z. B. für Schwefelwasserstoff 100° C, für Chlor 141° C, für Wasser 364°), schlofs ANDREWS: „Der gewöhnliche Gas- und der gewöhnliche Flüssigkeitszustand sind nur weit voneinander getrennte Formen eines und desselben Aggregatzustandes und können ineinander übergeführt werden, ohne dafs eine Kontinuitätsstörung in diesem Übergang bemerkbar ist." — Gleichwohl bleiben natürlich nicht nur für alle fern von der kritischen Temperatur liegenden Zustände die Begriffe des Flüssigen und Gasförmigen theoretisch und praktisch in Kraft, sondern es ergibt sich auch, trotzdem durch die Kondensation sämtlicher Gase der Unterschied zwischen Dampf (Dunst) und Gas hinfällig geworden zu sein schien, gerade die scharfe Unterscheidung: LA 150.

Jeder Stoff ist **Gas** bei jeder Temperatur oberhalb seiner kritischen; der Stoff ist **Dampf** abwärts vom kritischen Punkt bis zum Kondensationspunkt (d. i. zugleich der dem jeweiligen Druck entsprechenden Siedetemperatur); von da abwärts **Flüssigkeit** (bis zum Erstarrungspunkt; unter diesem **fest**).

VI. Dampfdichten. Die im § 46 angegebene Methode zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes (der Dichte) der Gase erfordert mannigfache praktische Abänderungen, wenn sie auf Dämpfe übertragen werden soll, die zwar ungesättigt (überhitzt), aber dem Sättigungspunkt nahe sind; und um so mehr die Bestimmung der Dichte gesättigter Dämpfe. Dabei werden meist die relativen Dichten in Bezug auf trockene Luft bei gleicher Temperatur und gleichem Druck (oder auch bei 0° und 76 cm) kurz als **Dampfdichten** bezeichnet; in der Chemie auch speziell für ungesättigte Dämpfe die relativen Dichten in Bezug auf die des Wasserstoffes, diese = 2 gesetzt (vergl. § 211).

Eine der Methoden besteht darin, dafs in einem Glasballon mit ausgezogener Spitze etwas von der auf ihre Dampfdichte zu prüfenden Flüssigkeit gebracht wird; dann wird der Ballon in einem Bad (Wasser-, Öl- . . .), dessen Siedepunkt über dem der zu untersuchenden Flüssigkeit liegt, so lange erhitzt, bis keine Dämpfe mehr aus der Spitze ausströmen, worauf die Spitze zugeschmolzen, der Ballon abgewogen, seine Spitze unter Quecksilber abgebrochen und so sein

Fassungsraum bestimmt wird. — Die relative Dichte des **Wasserdamp** Bezug auf **trockene** Luft von gleicher Temperatur ist rund 5/8 (LA 148).

VII. Wärmemengen beim Verdampfen und Kondens Wie die Schmelzwärme des Wassers 80 Cal, so beträgt die **D wärme des Wassers 540 Cal** (genauer 536,7 Cal), d. h. um flüssiges Wasser von 100° in 1 kg Dampf von 100° zu verwande eine Wärmemenge erforderlich, mit der 5,4, 54 . . . 100 kg ' von 0° in flüssiges Wasser von 100°, 10° . . . 5,4° (warum nich 1 kg auf 540°?) zu erwärmen wären.

Eine Erklärung, warum dieser Wärmeverbrauch beim Verdampfen n so viel gröfser ist als der beim Schmelzen, vergl. § 83. Warum sind heizungen viel ausgiebiger als Heifswasserheizungen? — Destillationsa

Der nicht erst beim Sieden, sondern schon beim Verdunsten ein Wärmeverbrauch gibt sich als **Verdunstungskälte** (Frösteln nach einem B kund und findet Anwendungen bei der künstlichen Eisbereitung (§ 84).

Über den Unterschied beim Abkühlen feuchter und trockene vergl. Meteorologie § 195 und LA 225.

VIII. Verflüchtigen, Sublimieren. Kampfer, Jod . . . (geringem Mafse wahrscheinlich die meisten festen Stoffe, u. riechende Metalle, wie Zinn . . .) gehen aus dem ersten in den d Aggregatzustand über ohne merklichen Durchgang durch den zw Diesem **Verflüchtigen** entgegengesetzt ist das **Sublimieren** z. Schwefeldämpfen an kalten festen Körpern.

D. Ausbreitung der Wärme.

§ 78. Ausbreitung der Wärme durch Leitung, bei Strö und durch Strahlung.

Wenn ein geheizter Ofen die Körper im kalten Zimmer erwärmt, dreierlei Arten des Überganges der Wärme zu unterscheiden: 1. Durch erwärmen sich die der Feuerstelle näheren Teile des Ofens früher, die entf später; der Boden eines auf dem Ofen stehenden leeren eisernen Topfes als dessen oberer Rand; bei einem irdenen Topf geschieht dies noch langsa 2. Durch **Strömung** gelangt das nahe dem Boden des Topfes erhitzte W die Oberfläche und es tritt früher eine gleichmäfsige Durchwärmung ein

2. um so rascher, je gröfser der jeweilige Unterschied zwischen en Wärmegraden ist. Nach Newtons Abkühlungsgesetz ist e **Geschwindigkeit der Temperaturänderung dem Temperatur-terschiede nahezu proportional.**

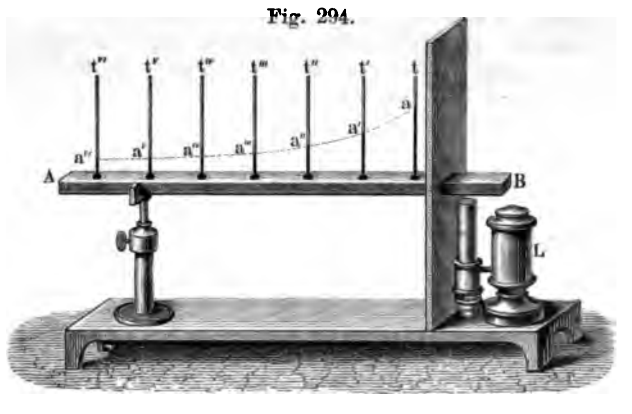
So sinkt ein über die Zimmertemperatur stark erhitztes Thermometer anfangs h, später langsam; desgleichen steigt die Temperatur von Wasser, dem durch gleichmäfsig brennende Flamme in gleichen Zeiten gleiche Wärmemengen führt werden, dennoch nicht gleichförmig (sondern anfangs rasch, später er langsamer), da das Wasser, je heifser es schon ist, einerseits dem Wärme-d der Flamme näher gerückt ist, und anderseits auch um so mehr Wärme die annähernd gleichwarm bleibende Umgebung abgibt.

Von den drei Arten des Überganges werden die ersten beiden in den beiden nden §§ näher untersucht, dagegen die Strahlung erst im Zusammenhang mit Erscheinungen der Lichtstrahlung (§ 119 ff.).

§ 79. Wärmeleitung.

Die Unterscheidung von **Gut-, Halb-** und **Schlechtleitern** der Wärme drängen schon alltägliche Erfahrungen auf; z. B. dafs wir einen Schürhaken, dessen Ende im Feuer liegt, am anderen Ende alsbald nicht anfassen können, wenn Metall ist, wohl aber, wenn er einen Holzgriff besitzt. Das scheinbare Wenig-r Nichtleiten der Wärme wird näher untersucht im folgenden

Fig. 294.



Versuch: Eine bis 1 m lange senstange (Figur 4) hat in gleichen ständen Vertie-ngen mit Queck-lber, in welche gleiche Thermo-eter tauchen. Wird s eine Ende durch e Flamme oder n Dampfbad er-ärmt (und hierbei rch einen Schirm die Strahlung von den Thermometern abgehalten), o steigen anfänglich alle Thermometer der Reihe nach (wobei die jeweiligen Quecksilberstände Ordinaten einer Kurve bilden, die sich also anfänglich mit der Zeit verändert). Nach einiger Zeit aber tritt ein stationärer Zustand ein (so dafs sich jene Kurve nicht mehr ändert). In bestimmten Abständen von der Heizstelle bringt die Wärmequelle überhaupt keine Temperaturänderung mehr hervor: dies aber nicht, weil bis dahin überhaupt keine Wärme geleitet werden kann, sondern weil eine der jeweilig zugeführten Wärmemenge gleiche

durch die Oberfläche des Stabes in die umgebende Luf[t] Leitung, Strömung und Strahlung) übergeht.

Um für die theoretische Untersuchung die in der Erwärmung durc[h] zusammenwirkenden Umstände wenigstens in Gedanken zu isolieren, st[...] uns nach FOURIER (Stab bei gleichb[...] Länge L cm unend[...] dickt vor, d. h. ers[...] eine Platte von de[...] Fig. 295, in der, in allen zu diese[...] dimension normal[...] tungen unendlich a[...] ist, eine Wärmeabgabe durch Seitenflächen ausgeschlossen bleibt. Dur[...] (ebenfalls unendlich grofs zu denkendes) Reservoir zu beiden Seiten [...] werden deren Grenzschichten auf den konstanten Temperaturen T^0 [...] erhalten; z. B. $T = 100^0$, wenn in dem einen Reservoir siedendes Wasse[r] wenn im anderen Eiswasser sich befindet. Gesetzt nun, es hätte in einem zeitpunkte auch die ganze Platte z. B. die Temperatur $t = 0^0$ gehabt, kurze Zeit darauf von der heifsen Seite her die Wärme auf eine kurz längerer Zeit auf eine längere Strecke vorgedrungen, „geleitet“ wo[...] „geströmt“ sein. (Ebenso könnten wir uns denken, dafs, wenn die ga[...] anfangs die Temperatur T^0 gehabt hätte, allmählich von der anderen „Kälte vordringe“.) Nach einer bestimmten Zeit, welche bei gutleiten[...] klein, bei schlechtleitender grofs ist, mufs sich in der ganzen Platte w[...] beim Stab, ein **stationärer Zustand** hergestellt haben, in der Weise, noch immer Wärme von den Stellen höherer zu Stellen niedriger Temp[...] leitet wird oder „strömt“, dafs aber jeder Stelle m ebenso viel [...] menge zugeführt wird, als nach der anderen hin abfliefst (d[...] träte „Wärmestauung“ wie bei III, also Temperaturerhöhung, bezw. b[...] peraturerniedrigung ein). Dazu gehört aber, dafs in zwei zu m symme[...] legenen Stellen gleiche Differenzen gegen die Temperatur in m bestehen beim „Abfall nach einer geraden Linie“ erfüllt ist, wie bei II. V[...] $L = 100$ cm, $T = 100^0$, $t = 0^0$, so käme auf je 1 cm ein Temperat[...] von 1° C. — Allgemein ist das Mafs für das

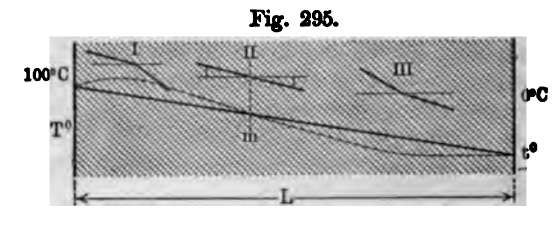


Fig. 295.

Temperaturgefälle $\frac{T-t}{L}$, indem der Abfall um so gr[...]

je gröfser bei gegebenem Abstand L der Grenzflächen der Un[...] $T - t$ der daselbst herrschenden Temperaturen ist; wogegen

Die **Einheit des spezifischen inneren Wärmeleitungsvermögens** sitzt ein Stoff, in welchem durch je **1 cm²** Querschnitt auf je **1 cm** stand bei einem Unterschiede der Wärmegrade von **1° C** eine ärmemenge von je **1 cal** binnen **1 sec** hindurchgeht.

Dieses Wärmeleitungsvermögen kommt sehr nahe dem Kupfer zu, dem binnen 1 min (nach welcher Einheit man aus praktischen Gründen r häufiger rechnet als nach Sekunden) 61 cal, also in 1 sec $1^1/_{60}$ cal rch 1 cm² Querschnitt gehen. Das spez. Leitungsvermögen des Eisens 6 mal, das des Glases und des Wassers etwa 600 mal, das der Luft 000 mal so klein (in beiden letzteren Stoffen Konvektion ausgeschlossen).

In anhomogenen, anisotropen Körpern (§§ 53, 67), z. B. Krystallen, Holz . . . das Wärmeleitungsvermögen nach verschiedenen Richtungen verschieden.

Da die fiktiven Versuchsbedingungen wie bei der unendlichen Platte in irklichkeit nicht hergestellt werden können, so wird meistens auf das innere ärmeleitungsvermögen aus Versuchen über das **äufsere Wärmeleitungsmögen** geschlossen. Dies kann geschehen auf Grund des von FOURIER aus theoischen Überlegungen abgeleiteten Gesetzes, dafs für einen homogenen Stab von lichem, überall konstantem Querschnitt die Temperaturüberschüsse über die gebende Luft nach einer geometrischen Reihe abnehmen, wenn man längs s Stabes um gleiche Strecken (nach einer arithmetischen Reihe) fortschreitet. rmit ist auch die Natur der Kurve beim obigen Versuch gegeben.

Über das langsame Fortschreiten der durch die jeweiligen Temperaturänderungen im Erdboden erzeugten „Wärmewelle" vergl. § 196.

Anwendungen guter und schlechter Wärmeleiter. Drahtgitter an Davys herheitslampe. Wärmeschutz an Dampfleitungsröhren u. s. f.

Über die weitgehenden Analogieen zwischen Wärmeleitung und Elektriätsleitung vergl. § 149. Während wir aber bekanntlich elektrische Ströme ithin durch verhältnismäfsig dünne Drähte leiten können, geschieht solches ht mit der Wärme; es ist deshalb auch der theoretische Begriff des „Wärmeroms" nicht so ins praktische Leben übergegangen wie der des „elektrischen oms". Insofern hat auch der Ausdruck für die

kalorische Stromstärke $i = k \frac{q}{l} (T' - T)$ cal (per cm² und sec),

k das spezifische innere Wärmeleitungsvermögen, q den Querschnitt in cm², $-T$ die Temperaturdifferenz in l cm Abstand bedeutet, vorwiegend erst Interesse rch seine Analogie zu OHMS Gesetz für elektrische Stromstärken (§ 149).

80. Strömungen in erwärmten Flüssigkeiten und Gasen; Wärmeübertragung durch Konvektion.

Versuche: Die Strömungen im Wasser, das von unten her erwärmt wird, rden deutlich ersichtlich, indem man dem Wasser Sägespäne oder dergl. beischt. Je enger begrenzt die erwärmte Stelle gewählt wird (z. B. nach g. 296 [a. f. S.] durch galvanische Erhitzung eines kurzen, schlechter leitenden iles des in die Flüssigkeit versenkten Drahtes), um so deutlicher zeigt sich der fwärts gehende Strom der durch die lokale Erwärmung spezifisch leichter gerdenen Wasserteilchen. — Analoge Beobachtungen an dem Spalt einer Tür ischen einem kalten und einem geheizten Zimmer: eine an den Spalt gehaltene Kerze

, d unten kalte Luft ein-, oben warme Luft ausströmt. „Aufwärtsst
. Bedeutung richtiger Luftzirkulation für Ventilation, Heiztech
ckern der Luft über einem erhitzten Blech (sich verratend
urch diese Luft hindurch gesehenen Gegenstände) zeigt, dafs au

Fig. 296.



gröſseren Flächen die gasförmige Flüssigkeit (und auch eine tropfbare) nicht in gleichmäſ Schichten, sondern in unregelmäſsigen Stro aufsteigt, bezw. abwärts flieſst. Erst hierdurch g in solchen von unten erwärmten tropfbaren u förmigen Flüssigkeiten der Wärmeausgleich, näm Mischung der verschieden warmen Flüssigkeitsfä weitem rascher, als es durch Wärmeleitung ruhenden Flüssigkeitsmengen geschehen würde.

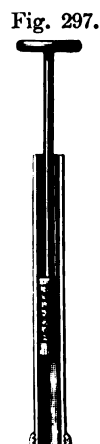
Theoretisch bleibt also scharf auseinander z das di ragung der Wärme vermittelnde S (Konv der ungleich erwärmten F keiten d das „Strömen" der Wärme se ruh förmigen, flüssigen und festen d. i. die eigentliche Wärmel mmerhin aber läſst sich von der leitung selbst wieder hypoth Erklärung aus der Konvektion wenn man sich denkt, daſs die ler grenzenden ungleich erwärmten des Körpers aneinander die Wärm bgeben; werden hier als die „T geradezu die Moleküle angenommen, so ist dies die Erklärung der Wärm gemäſs der kinetischen Wärmehypothese, § 83.

E. Wärmequellen. Mechanische Wärmethe

§ 81. Überblick über die Arten der Entstehung un Verbrauches von Wärme.

Zunächst nach praktischen Gesichtspunkten geordnet, **ist als erste** u nehmste Wärmequelle für die Erde die **Sonne** zu nennen; **Näheres** über

Fig. 297.



der Sonne durch Strahlung ausgehende und nach teilwei sorption in der Erdatmosphäre an die Erdoberfläche gel Wärmemenge vergl. § 196. Ihr gegenüber ist für das Leben Erdoberfläche schon die **Eigenwärme des Erdinnern** t hohen Wärmegrades und der groſsen Wärmemenge unbeträch nennen; vergl. § 196. Nächst der Sonne verdanken wir wei gröſsten Wärmemengen den **Verbrennungen;** und zwar ist weitem ausgiebigste Brennstoff, nämlich die Steinkohle, selbs als „aufgespeicherte Sonnenstrahlung" aufzufassen, § 225. Wärmeerzeugung bei zahlreichen anderen **chemischen** Vor z. B. beim Kalklöschen, Mischen von Schwefelsäure und Wasser entzündung faulenden Heues u. s. w. Ferner Wärmeerzeugun **elektrische** Vorgänge, § 152. Endlich Wärmeerzeugung du brauch **mechanischer Arbeit:** Erhitzung schlecht geschmiert achsen, pneumatisches Feuerzeug (Fig. 297) u. s. f.

Für die theoretische Erforschung der Entstehung und brauches von Wärme sind die letztgenannten Vorgänge, die Bezi von Wärme und mechanischer Arbeit, grundlegend ge

Geschichtliches: Im Lichte der folgenreichsten theoretischen Entdeckung des
. Jahrhunderts, der des mechanischen Wärmeäquivalents durch ROBERT
AYER (1842) und der darauffolgenden Ausbildung der kinetischen Wärme-
ypothese durch THOMSON, CLAUSIUS, MAXWELL, BOLTZMANN und andere stellten
ahlreiche frühere Spekulationen und Forschungen als Vorläufer jener Entdeckung
ins. — So hatte schon LUCREZ und ähnlich wieder FRANCIS BACON (1665) in den
ewegungen der kleinsten Teilchen" das „wahre Wesen der Wärme", d. h. die
sache der durch sie in anderen Körpern hervorgebrachten Wärmeerscheinungen,
ie der in uns erregten Wärmeempfindungen vermutet. — Unabhängig von
lchen Spekulationen hatte Graf RUMFORD (1798) beobachtet, es werde beim
nonenbohren so viel Wärme erzeugt, dafs das umgebende Kühlwasser bis zum
eden sich erhitzt. Auch hatte RUMFORD die Bedingungen für das Auftreten
lcher Wärme schon so richtig zurückverfolgt, dafs er darauf hinwies, es hätte
h eben diese Wärmemenge erzeugen lassen, wenn das Futter, statt von den die
hrer in Drehung setzenden Pferden gefressen und verdaut zu werden, verbrannt
d so das Wasser erhitzt worden wäre.

CARNOT (gestorben 1832 im 36. Lebensjahre) kam durch seine Theorie der
rbeitsleistung in Dampfmaschinen der Entdeckung des Wärmeäquivalents noch
her, irrte aber von diesem Ziel wesentlich nur noch dadurch ab, dafs er meinte,
e geleistete Arbeit wäre Folge des Überganges der Wärme vom höheren Wärme-
rade auf einen niedrigeren (ähnlich wie beim Umsetzen der potentiellen in
etische Energie, wenn Wasser aus höherem Niveau über ein Mühlrad in tieferes
h bewegt), und dafs hierbei die übergehende Wärmemenge konstant bleibe;
ch hat sich CARNOT von letzterem Irrtum (der eben der Verwandlung von
ärme in Arbeit widerspräche) kurz vor seinem Tode noch frei gemacht.

R. MAYERS Entdeckung, dafs einer bestimmten mechanischen Energie,
e als solche verschwindet, eine bestimmte Wärmeenergie, die als
lche auftritt, **äquivalent** sei und umgekehrt, ist eine von Hypothesen freie
tsache. Dagegen ist es eine über diese Tatsache hinausgehende, wenn auch
vielen Beziehungen sehr ansprechende Hypothese, „die Wärme als eine Art
r Bewegung" zu erklären. Es werden daher in den beiden folgenden Para-
aphen getrennt jene Tatsache und diese Hypothese abgehandelt. —

Noch unabhängig von der in jenem Äquivalenzgesetz ausgesprochenen
antitativen Beziehung zwischen Arbeit und Wärme und um so mehr von der
netischen Wärmehypothese sind die allgemeinen

Umkehrungsbeziehungen zwischen mechanischer Arbeit und
ärme: Z. B. Im pneumatischen Feuerzeug tritt an Stelle der beim Hineinstofsen
s Stempels gegen die Spannkraft der Luft geleisteten mechanischen Arbeit eine
ärmemenge auf, welche den Wärmegrad der Luft und des Feuerschwammes
es Schwefelkohlenstoffs) so stark erhöht, dafs dieser sich entzündet. Umgekehrt
rliert in der Dampfmaschine der heifse Dampf, indem er dem Kolben im
ylinder entgegen dem Widerstande der äufseren Luft und vielmehr noch entgegen
em Trägheitswiderstande der in Bewegung zu setzenden Massen (des Eisenbahn-
ges und seiner Lasten) Arbeit leistet, eine bestimmte Wärmemenge (gemessen
on HIRN 1858), so dafs sich auch der Wärmegrad des Dampfes mehr herabsetzt,
s es durch die Wärmeverluste infolge Leitung und Strahlung geschehen würde.
— Als eine Umkehrung der Vorgänge in der Dampfmaschine sind auch die
n der Eismaschine (§ 84) aufzufassen.

§ 82. Das mechanische Wärmeäquivalent.

ROBERT MAYERS Aufgabe: In einem würfelförmigen Raume, Deckfläche als beweglicher Kolben gedacht ist, befinde sich 1 r von 0° C und 76 cm Spannkraft und werde um 1° C α) bei stantem Druck, β) bei konstantem Volumen erwär a) Welche mechanische Arbeit ist bei der Ausdehnung d durch Verschiebung jenes Kolbens entgegen dem konstanten von 76 cm geleistet worden? b) Eine um wieviel größere W menge ist zur Temperaturerhöhung um 1° C verbraucht worden sich der Kolben verschob (α), als wenn er unbeweglich (β) wäre? c) Wieviel Meterkilogramm sind also 1 Cal äqui

Zu a: Beim Luftdruck von 76 cm lastet auf 1 cm² ein Dr 1,0334 kg, also auf 1 m² ein Druck von $p = 10334$ kg. Die Versc des Kolbens entgegen diesem Druck beträgt infolge der Aus der Luft bei Erwärmung um 1° den Weg $h = {}^1/_{272,6}$ m. Somit geleistete mechanische Arbeit $ph = 10334 \times {}^1/_{272,6} = 37,$

Zu b: Die spezifische Wärme der Luft bei konstantem D 0,2377, die spezifische Wärme bei konstantem Volumen 0,16 mit erfordert 1 kg Luft um 0,2377 — 0,1685 = 0,0692 Cal Wärme, wenn es sich nicht nur um 1° C zu erwärmen (β), auch um ${}^1/_{272,6}$ seines Volumens auszudehnen (α) und dabei gegen den Luftdruck zu leisten hat. Für 1 m³ Luft von de 1,293 kg beträgt somit dieser Mehrverbrauch an Wärme . 0,0690 = 0,08534 Cal.

Zu c: Es sind also einander äquivalent 37,861 mkg und 0, also **424 mkg und 1 Cal** oder **1 mkg und ${}^1/_{424}$ Cal.**

Man nennt die Zahl $J = 424$ mkg **das mechanische** **äquivalent** und $A = {}^1/_{424}$ Cal **das kalorische Arbeitsäqu** (siehe unten I. und II.).

Da 1 mkg = 9,81 Joule und 1 Cal = 1000 cal, so entspricht de des irdischen Maßsystems 0,2394 im C-S-G-System **1 Joule = 0**

Die Tragweite dieser Größenbeziehung besteht darin, daß sie 1. zwei qualitativ ganz verschiedenen Gebieten, wie es mechanisc

denken) in Energie der Lage des Wassers. Stürzt nun dieses Wasser aus der Höhe wieder herab und verliert im Stofs gegen den Boden alle mechanische (sowohl kinetische wie potentielle) Energie, so tritt dafür eine Wärmemenge von ... auf, welche, wenn sie nur zur Erwärmung dieses Wassers (nicht auch des ...ens . . .) verwendet würde, es um 1° C wärmer machen würde. So wurde ... Wasser des 85 m hohen Niagarafalles unten um etwa $^1/_5$° C wärmer gefunden ... oben; nach einem Sturme soll nach alter Seemannserfahrung das gepeitschte ...wasser wärmer sein. ROBERT MAYERS Versuch mit wiederholtem Hin- und ...giefsen von Quecksilber aus einem Glase in ein anderes. Ausführlicher besagen ... die Zahlen 424 und $^1/_{424}$:

I. Verschwindet mechanische Energie im Betrage von $J = 424$ mkg ...d tritt dafür als neue Energieform nur Wärme auf, so beträgt ...se 1 Cal (mechanisches Äquivalent der Wärmeeinheit).

II. Verschwindet kalorische Energie im Betrage von $A = {}^1/_{424}$ Cal ...d tritt dafür als neue Energieform nur mechanische Energie auf, so ...trägt diese 1 mkg (kalorisches Äquivalent der Arbeitseinheit).

Die Zahl 424 ist ein Mittelwert aus zahlreichen Bestimmungen, welche nach ...n mannigfaltigsten Methoden vorgenommen worden sind.

R. MAYER selbst hatte zuerst 365 angegeben, aber nicht, weil der Gedanken...ng oder die rechnerische Durchführung seiner Methode irgend welche Fehler ...wies, sondern weil die Zahl 0,2669 (Delaroche und Berard 1813), welche er ...n Gay-Lussac überkommen hatte, durch die richtigere 0,2735 (Regnault 1840) zu ...setzen gewesen wäre. Auch hat er schon in seiner ersten Schrift: „Bemerkungen ...er die Kräfte der unbelebten Natur (1842)" und in seinem Hauptwerke: „Die ...ganische Bewegung in ihrem Zusammenhang auf den Stoffwechsel 1845" auf die ...echselbeziehungen zwischen mannigfaltigen anderen „Kräften" (gemeint war, was ...r heute „Energieen" nennen), nicht nur auf die zwischen mechanischer und ...lorischer Energie hingewiesen; vergl. Chemie § 225.

Fig. 298.

Ein Jahr nach MAYER und ohne Kenntnis von dessen ...tdeckung führte JOULE (sprich Djoul) direkte Versuche ...r Bestimmung von A nach mehreren Methoden aus. Er ...fs ein Schaufelrad (Fig. 298) durch langsam sinkende Ge...chte in Drehung versetzen und so die durch die Gewichte ...leistete Arbeit in Wärme durch Reibung des Rades im ...asser oder Quecksilber umsetzen. Auch andere Formen ...r Energie als mechanische und thermische zog JOULE ...ran, wie z. B. die Wärme, welche bei der Rotation von ...upferscheiben und Spulen in magnetischen Feldern auftritt ... 150).

HELMHOLTZ veröffentlichte 1847, ebenfalls ohne von R. MAYERS voraus...gegangenen Arbeiten zu wissen, sein Buch „Über die Erhaltung der Kraft", worin ... ebenfalls für die mannigfaltigsten Energieformen das Umwandlungs- und ...rhaltungsgesetz nachwies und so zwischen den verschiedensten Teilen der Physik ...nen auch rechnerisch zu verfolgenden Zusammenhang herstellte.

§ 83. Die kinetische Wärmehypothese.

Wie schon im § 57 und § 58 an dem Beispiel des Mariotteschen Gesetzes ...zeigt wurde, erklären sich aus der Hypothese, dafs die kleinsten Teilchen

(Moleküle und Atome) aller Körper in lebhaften Bewegungen sind, nicht erst die Wärmeerscheinungen, sondern auch schon rein nische Vorgänge; denn die Spannkraft eines Gases, welche durch das Ma Gesetz in Abhängigkeit vom jeweiligen Volumen gesetzt ist, und w kinetische Gastheorie aus den Stöfsen der Molekeln gegen die festen un lichen Wände des Gefäfses erklärt (§ 57), wäre auch noch vorhanden, Körper einerlei Temperatur oder wenn wir keine Wärmeempfindung h Indem nun aber nach dem Gay-Lussacschen Gesetze jene Spannkraft gleichbleibendem Volumen zunimmt, falls die Temperatur erhö und nach dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz auf die Spannkraft minderung und Temperaturerhöhung ganz gleichartigen Einflufs haben, so es den logischen Regeln der Hypothesenbildung (log. Anhang, Nr. 36), Temperaturerhöhung durch nichts anderes zu erklären, als durch eine Bewegung jener Teilchen; genauer: den physikalischen Wärmezust Körpers mechanisch „zurückzuführen" auf die kinetische Energie d tiven Bewegungen seiner Teilchen. (Vergl. psychol. Anhang, Nr. diese Hypothese am ausführlichsten durchgebildet ist für Gase, wird sie „kinetische Gastheorie" bezeichnet; doch erklären sich aus der kinetisc these auch für die beiden anderen Aggregatzustände alle einzelnen Tats Wärmelehre. Hier nur einige einfache Beispiele solcher Erklärungen (LA

Anh. 36. Anh. 36.

1. Das Volumgesetz: Wird die Gesamtmasse eines flüssigen oder gasförmigen Körpers auf einen höheren Wärme bracht, also nach der Hypothese die kinetische Energie de Körpers in Form der lebendigen Kraft seiner einzelnen Teilc gröfsert, so werden diese zu ihren gröfseren Bewegungen g auch „mehr Raum" brauchen (ähnlich wie eine lebhaft durch wogende Menschenmenge im Vergleich zu einer ruhigen). —

Dabei ist zunächst vorausgesetzt, dafs die Körper, welche den fe flüssigen Körper umgeben, auch nach seiner Temperaturerhöhung u vergröfserung denselben Druck gegen ihn ausüben; ist dagegen jer durch Vergröfserung dieses äufseren Druckes verhindert, sich auszudehne er um so gröfsere Spannung zeigen, die sich an Gasen gemäfs dem Ga schen Gesetz, an flüssigen und festen Körpern als die „unwiderstehli ihres Ausdehnungsbestrebens, richtiger als die Beziehung zwischen Aus koeffizient und Elastizitätskoeffizient (§ 73, S. 265) äufsert.

Auch die Abweichungen im Verhalten der wirklichen Gase von d Gasen haben sich aus der kinetischen Gastheorie sehr befriedigen lassen. Dafs die diesem Ideal am meisten sich nähernden Gase Helium stoff, Stickstoff, Sauerstoff . . . sehr annähernd die gleichen Ausdehn

Thomsons **absolute Temperaturskala** gilt unabhängig von der thermo-
trischen Substanz, der der Reihe nach Wärmemengen w, $2w$, $3w$ ... cal zu-
führt werden, die äquivalent sind mechanischen Arbeiten von a, $2a$, $3a$ ... Erg.
so erzielten Wärmegrade des Körpers von 1°, 2°, 3° ... nach mechanischer
bilden dann ein absolutes Mafs von Temperaturunterschieden auf Grund der
nischen Messung von Wärmemengen (wogegen im § 72 die Wärmemengen
kehrt erst nach den Wärmegraden bestimmt worden waren). Dieser absoluten
geht die Skala des Luftthermometers proportional, insoweit die Anziehungen
den Molekülen der Luft als verschwindend angenommen werden dürfen.
beachte, dafs dieser Gedanke, Temperaturen (richtiger Temperaturdifferenzen)
mechanischem (u. zw. nach absolutem Mafse im Sinne auch des § 16) zu messen,
von der Tatsache des mechanischen Wärmeäquivalents, nicht auch von der
tischen Gashypothese als solcher abhängig ist.

2. Die Aggregatregel (§ 75, 1): Nach der kinetischen Theorie
r drei Aggregatzustände, die im § 57 auf Grund des rein mechanischen
haltens der Teilchen fester, flüssiger und gasförmiger Stoffe zuein-
der entwickelt wurde, ist zu erwarten, dafs, wenn zunächst den
feste Gleichgewichtslagen schwingenden Molekeln eines festen
rpers kinetische Energie in Form von Wärme zugeführt wird, sie
Amplituden ihrer Schwingungen so vergröfsern, dafs
die elastischen Kräfte überwinden (sozusagen nicht mehr in ihre
ichgewichtslagen zurückfinden — ähnlich wie ein durch Hineinsingen
Mittönen versetztes Glas bei allzu kräftigem Singen zerspringen
n): **Schmelzen.** — Ebenso werden dann von den gleichsam durch-
ander kriechenden Molekeln flüssiger Körper bei immer kräftigerer
wegung zuerst einzelne, dann immer mehr sich von der Gesamt-
se losreifsen: **Verdunsten.** Bei fortgesetzter Wärmezufuhr und
peraturerhöhung wird die Dampfbildung auch im Innern eintreten:
den. — Hieraus erklärt sich auch sogleich

3. Der Wärmeverbrauch beim Schmelzen und Ver-
mpfen (§ 75, 2): Die zugeführte kinetische Energie der Wärme-
vegung wird nicht mehr dazu verwendet, die Geschwindigkeit
einzelnen Teilchen zu vergröfsern, sondern nur dazu, ihren Zu-
mmenhang mit den anderen zu lösen.

Vorbildlich hierfür ist der Aufwand an Arbeit schon beim Schaben des
s; es ist begreiflich, dafs ein noch gröfserer Arbeitsaufwand erforderlich ist,
nicht nur Eispulver, sondern flüssiges Wasser herzustellen (§ 76), und ein noch
gröfserer Arbeitsaufwand, um einzelne Molekeln der Anziehungssphäre der
eren so weit zu entreifsen, dafs sie überhaupt nicht mehr diesen Anziehungen
rliegen, sondern geradlinig als Gasmolekeln durch den Raum fortfliegen.

Durch Schlüsse aus der mechanischen Wärmetheorie sagten James Thomson
Clausius voraus, dafs Eis, weil beim Schmelzen sein Volumen abnimmt,
je 1 at Druckerhöhung einen um je 0,0074° C tieferen Schmelzpunkt haben
e; dafs dagegen bei Stoffen, die sich normalerweise beim Schmelzen ausdehnen,
höheren Druck der höhere Schmelzpunkt entspreche (analog wie der höhere
epunkt). Die Prophezeiung wurde durch William Thomsons Versuche glänzend

bestätigt. — Aus jenem abnormen Verhalten des Eises erklären sich Ersch
im gröfsten Mafsstabe bei der Gletscherbildung („Regelation des Eises",
nach TYNDALL über Herstellen klaren Eises aus Eispulver u. dergl.).

Der Unterschied zwischen **ungesättigten** und **gesättigten** Däm
sich so erklären: Von den im Dampfraum umherfliegenden Moleküle
immer eine Anzahl wieder in die Flüssigkeit zurück; u. zw. solange no
Dampfmoleküle im Raum sind, also auch nur wenige gegen die Flüss
fliegen, wird diese Zahl übertroffen werden durch die der Moleküle
Flüssigkeit neu entsendet. Ist Gleichheit der beiden Zahlen erreicht, s
Dampf gesättigt.

Da die Dampfwärme (z. B. des Wassers zu 540 cal) und somit a
mechanisches Aquivalent bekannt ist, so läfst sich schliefsen auf die G
kalorischen Arbeit, die zur Überwindung der Anziehung zwischen den Fl
molekülen nötig ist; diese aber ist anderseits auch bekannt aus der Me
Kapillarkräfte. Über eine hierauf sich gründende Methode zur Berech
Gröfse der Dampfmoleküle (die hiernach nichts anderes sind als die
Tröpfchen, die sozusagen beim Zerstieben der Flüssigkeit entgegen ihrer
infolge der aufgewendeten Dampfwärme entstehen) vergl. LA 154. — In
des Sättigungspunktes (und umsomehr des kritischen Punktes) werden
weichungen der Dämpfe vom Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz immer
licher.

LA 154.

4. Ausbreitung der Wärme: Denken wir uns die ein
eines Gefäfses mit heifsem, die andere mit kaltem Gase er
werden die schnelleren Teilchen zum Teil zwischen den lang
hindurchfliegen, zum Teil auch diesen selbst durch Stofs et
ihrer Energie übertragen, also Wärme mitteilen. Ähnlich bei
und festen Stoffen (vergleiche ein Billard mit vielen anfänglich r
oder langsam bewegten und einigen schnell rollenden Kugeln)

Die Ausbreitung der Wärme durch Konvektion gibt das direkt beo
Vorbild einer solchen Übertragung von Wärme (gleichsam gebunden an
Massenbewegung); die Wärmeleitung wiederholt nach der Hypothese e
lichen Vorgang von Molekel zu Molekel (gleichsam ungeordnet). Bei de
strahlung ist es nötig, aufser den Bewegungen der Körpermolekel auch
Schwingungszustände des hypothetischen Äthers zur Erklärung heranzuzi
zwar aus denselben Gründen, um derentwillen auch die Lichterscheinu
Annahme eines Äthers aufser der wägbaren Materie verlangen (§ 121).

§ 84. Dampfmaschinen. — Eismaschinen.

bwechselnd von der einen und der anderen Seite des Kolbens wirken. asmenge, welche so ihre Arbeit verrichtet hat, entweicht teils in reie Luft, wo sie ruck dieser Luft zu inden hat; teils wird ampfmaschinen der f in einen Konden- geleitet, wo seine kraft herabgesetzt teils (bei Compound- inen) verrichtet der trömende heifse f nochmals Nutz- (in einem Nieder- ylinder mit Kon- or).

Fig. 299.

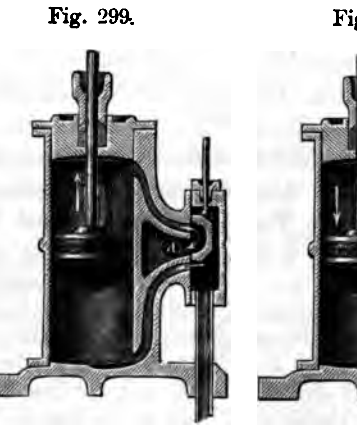
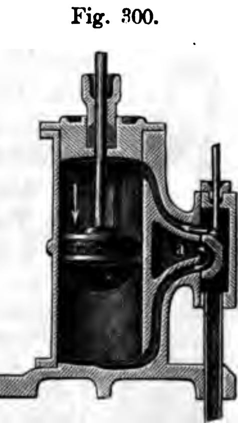


Fig. 300.

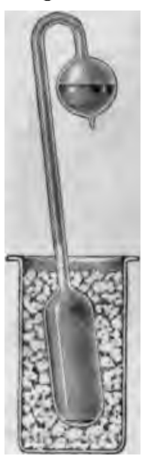


ähere Beschreibung besonderer Formen von Dampfmaschinen (mit stabilem szillierendem Zylinder, mit verschiedenen Formen von Steuerungen, stabiler lung, Lokomobilen und Lokomotiven u. s. f.) nach Modellen und Wand- — Man unterscheidet **Niederdruck-** und **Hochdruckmaschinen**, je nachdem mpf eine Spannung von weniger oder mehr als 2 at besitzt. Angenommen, re der Dampf im Kondensator alle Spannung (in Wahrheit entspricht sie gleichstemperatur von Dampf und Kühlwasser), so müfste auf der mit ondensator in Verbindung stehenden Seite des Kolbens der Dampf die ng 0 haben (gemäfs dem Gesetz § 77, IV, dafs in einem geschlossenen Raum r Stelle die Minimalspannung herrscht) und es käme somit die Spannung npfes auf der anderen Seite voll zur Arbeitsleistung. Strömt dagegen der ohne Kondensator ins Freie, so hat er (falls hier ein Luftdruck von 76 cm t) 1 at Gegendruck zu überwinden. Es wird also durch die Anbringung ndensators annähernd 1 at leistungsfähigen Druckes gewonnen, i einer Niederdruckmaschine, z. B. von $1^1/_2$ at Spannung, eine Steigerung rkung im Verhältnis $1^1/_2 : {}^1/_2 = 3 : 1$ bedeutet (weshalb sich bei Nieder- aschinen — die aber fast ganz aufser Gebrauch gekommen sind — die gung eines Kondensators lohnt; nicht so lohnend ist ein solcher bei Hoch- aschinen, z. B. Lokomotiven mit 10 at, wo der Gewinn nur 10 : 9 betrüge, lich aber das Kühlwasser nicht zu beschaffen ist).

eschichtliches. Herons Versuch (um 100 n. Chr.); Papins Versuch 1690; aktisch verwendete Dampfmaschine von Newcomen 1705; Potter erfindet be die Selbststeuerung (1710); Watt vervollkommnet die Maschine (von); erstes Dampfschiff (Fulton) 1807, erste Lokomotive (Stephenson) 1829. ieoretisch fallen alle kalorischen Maschinen unter den Typus von Robert Aufgabe (§ 82, S. 286), indem auch bei dieser die sich ausdehnende Luft olben entgegen dem Widerstande des äufseren Luftdruckes zu verschieben Tie hier ein Verbrauch von Wärmemenge darin gegeben ist, dafs die he Wärme bei konstantem Druck gröfser ist als bei konstantem Volumen, Irrn durch direkte Versuche gezeigt, dafs sich der Dampf, nachdem er im Arbeit geleistet hat, um mehr abkühlt, als sich aus den Wärmeverlusten

durch Leitung und Strahlung ergibt; worin also die direkte Bestäti mechanischen Äquivalents der Wärme liegt, während Mayers Me nächst das kalorische Äquivalent der Arbeit betraf.

Fig. 301.



Eine Umkehrung des Vorganges in der maschine in anderem Sinne stellen die Eisma dar. Ihr Vorläufer ist Wollastons Kryophor (Fi Im Zylinder werden durch eine umgebende Kältem fortwährend Dünste kondensiert, wodurch sich neue aus dem Wasser der Kugel entwickeln. Sie er dem Wasser daselbst so viel Wärme, daſs es frie

Noch einfacher: Gefrieren des Wassers durch ver den Äther oder Schwefelkohlenstoff, indem man dieser dünnwandiges Schälchen von Kupferblech bringt, unter de die Dünste mittels eines Blasebalges rasch weggeschafft einige Tropfen Wasser zum Gefrieren kommen. — In den Fabriken von „Kunsteis“ werden durch Dampfmaschi hierbei den Druck der äuſseren Luft zu überwinden habe geschaffen, in denen Ammoniak immer wieder zum Ve gebracht wird, worauf dann die beim Wiederverdicht werdende“ Dampfwärme des Ammoniaks durch Kühlwa seitigt wird. So läſst sich in groſsen Bassins mit Salzlösungen die Te bis auf mehrere Grade unter 0° C herabsetzen, und in diesen Bassins gefrie das Wasser in Hunderten metallener Guſsformen. (Lindes Maschine zur E flüssiger Luft; zahlreiche Versuche mit dieser; Temperatur — 194° C.)

Wäre es möglich, die Wärme, welche mit dem Kühlwasser wegflie dessen selbst wieder zum Heizen der Dampfmaschine zu verwenden? ebenso wenig, als daſs eine Dampfmaschine funktioniert, wenn sie sich Umgebung befände, die die Temperatur des Dampfkessels hat. Vielme die Wärme, um sich in mechanische Arbeit umsetzen zu könn einem höheren auf ein niedrigeres Temperaturniveau sinken und hiermit hängt es zusammen, daſs immer nur ein Teil der Wä mechanische Arbeit zu verwandeln ist, wogegen alle mechanische in Wärme verwandelt werden kann. Mit diesen Tatsachen beschäfti der „Zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie“ (und griff der „Entropie“), auf Grund dessen die Thermodynamik noch allg zeigt, daſs auch alle anderen Formen von Energie sich zwar le ganz in Wärme umwandeln lassen, die Wärme aber immer nur z in jene anderen Formen (weshalb man die Wärme das schlieſsliche aller Energie“ nennen kann); doch dies unbeschadet der Erhaltu Energie, d. h. des Gesamtbetrages aller potentiellen und aktuellen Energi Robert Mayers Satz, daſs die Wärme zu diesen in gegenseitigen Äq verhältnissen stehenden Energieformen gehöre, u. zw. daſs sie aktuelle E sei, bildet den „Ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmeth

Lehre vom Schall (Physikalische Akustik).

---

§ 85. Schallempfindungen und physikalische Schallerscheinungen.

Alles Hörbare nennen wir **Schall.** Der Qualität nach unterscheiden wir
hst Geräusche und **Klänge**; an einem Klange sind weitere qualitative
kmale Tonhöhe und **Klangfarbe.**

Zur Bezeichnung der Unterschiede der Tonhöhe besitzt die Verkehrssprache
die Namen hoch und tief. Die Musiker (und nach ihnen die Physiker,
iologen und Psychologen) bedienen sich zu genauerer Benennung von be-
mten absoluten Tonhöhen der Notenbezeichnungen *C*, *D* ... *c*, *d* ...
... *cis*, *des* ..., ferner zur Bezeichnung der **relativen Tonhöhen** der
rvallbezeichnungen Sekund, Terz (grofse, kleine), Oktave ..., Doppel-
e; Ganz-, Halbtöne (Viertel . . .-Töne).

Die Klangfarbe wird teils bezeichnet als klangvoll, schmetternd, dumpf...,
mittelbar als Klangfarbe der Geige, Trompete, einer Knaben-, Frauenstimme.

Jeder Schall besitzt (neben seiner Qualität als Klang, bezw. Geräusch) auch
e bestimmte Intensität (laut, leise, *pp*, *p*, *f* . . .). — Jedem Schall kommt
r Dauer zu. — Beim **Knall** ist die Intensität grofs, die Dauer sehr kurz,
Qualität die eines Geräusches.

1. Alle vorstehenden Beschreibungen betreffen nur unsere Schallempfin-
gen, sind also rein psychologischer Natur. — 2. Die nächste Bedingung
, dafs es zu Schallempfindungen einer bestimmten Art kommt, ist ein ge-
s Gehörorgan; von seinem Bau handelt die Anatomie, von seinen Funktionen
Physiologie. 3. Ein gesundes Gehörorgan funktioniert nur, wenn es von
mmten physikalischen Vorgängen erregt wird. Diese sind für Geräusche
egelmäfsige, für Klänge regelmäfsige oder periodische, **schwingende**
gungen der Schallerreger (Glocken, Saiten ...) und **Wellenbewegungen**
Schallleiter, meist der Luft vom Schallerreger bis zum Gehörorgane. —
Entsprechend der Reihenfolge der Vorgänge bis zum Hören gliedert sich
Lehre vom Schall (Akustik, ἀκούω hören) in die Abschnitte:

A. Erregung des Schalles, insbesondere der Klänge;
B. Ausbreitung des Schalles (Fortpflanzung der Schallwellen);
C. Bau und Funktionen des Gehörorganes.

Hiervon fallen A. und B. in die physikalische Akustik, C. in die physio-
sche Akustik. Beide setzen voraus, dafs man schon wisse, wie ein Geräusch
ein Klang, eine Dur-, eine Molltonleiter sich anhört, was dumpfe, grelle
farbe, **Konsonanz**, Dissonanz heifst u. s. f. Diese zum Teil aus dem alltäg-
Leben und genauer aus der Musik bekannten rein deskriptiven Merkmale
rer Schallempfindungen und der zwischen ihnen bestehenden Beziehungen
t die psychologische Akustik zum Gegenstande selbständiger wissen-
aftlicher Untersuchung (psychol. Anh., Nr. 43). Anh. 43.

A. Die Erregung des Schalles.

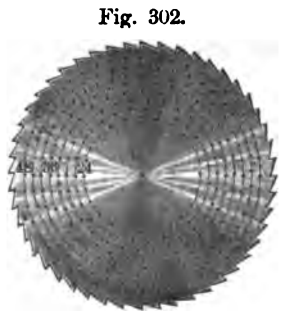
a) Abhängigkeit der Tonhöhe von der Schwingung

§ 86. Relative und absolute Schwingungszahle

Geschichtliches. Pythagoras (um 500 v. Chr.) hat einen Zusam zwischen Tonhöhen und Zahlen bemerkt und ihn mittels des „Mon experimentell verfolgt. Er beachtete nämlich, dafs, wenn eine bestimn einen bestimmten Ton gegeben hatte, sie bei Verkürzung z. B. auf die Häl bei unveränderter Spannung) die höhere Oktave jenes Tones gibt. Ebenso von den Intervallen der damals gebräuchlichen Tonleitern, dafs sie rat Verhältnissen der zugehörigen Saitenlängen entsprechen. — D hierbei die Saitenlänge nur dadurch mittelbar einen Einflufs auf die Tonh dafs von der Saitenlänge die Schwingungszahl und dafs nur Schwingungszahl, gleichviel was immer für eines Klangerregers, die T abhängt, ist erst seit Galilei bekannt; er hatte bemerkt, dafs z. B. der Rand einer Münze, je nachdem man langsamer oder schneller über ihn Fingernagel hinfährt, tiefere oder höhere Töne gibt: das Vorbild der Za

I. **Relative Schwingungszahlen.** — *Versuche* mit der Zah Lochsirene: An die Zähne der Scheibe (Fig. 302) wird ein Kart gehalten, bezw. gegen die eine der Loc wird geblasen und die Scheibe all immer rascher gedreht: man hört anfa Geräusche der einzelnen Stöfse, spät Klang, der sich allmählich in die Höh

Fig. 302.



Damit man bei gleichförmige reichend rascher Drehung und Anblas einzelnen Lochreihen die Töne einer „D leiter“ höre, müssen die Zahlen der Zäh der Löcher je einer Reihe in den Verhäl der relativen Schwingungszahlen

für	Prim	Sekund	Terz	Quart	Quint	Sext	Septim	(
	24	27	30	32	36	40	45	
oder	1	$^{9}/_{8}$	$^{5}/_{4}$	$^{4}/_{3}$	$^{3}/_{2}$	$^{5}/_{3}$	$^{15}/_{8}$	

;ie dies in §§ 87—89 an einigen der einfachsten Aufgaben solcher Art
rden wird. —

er **Molltonleiter** tritt an Stelle der „grofsen Terz" die um einen
Ton" tiefere **„kleine Terz"** (mit der Schwingungszahl $^6/_5 < {^5/_4}$; über-
man beim Absteigen durch die Molltonleiter die Septim und Sext oder
letztere um einen halben Ton tiefer zu nehmen).

namentlich für die Theorie der Teil- oder Partialtöne und hiermit
farbe (§ 90) wichtige Reihe von Tönen ist diejenige, für welche die
Schwingungszahlen **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** . . . gelten. Da hier
$_2$, $4 = 2 . 2$, $5 = 2 . 2 . {^5/_4}$, $6 = 2 . 2 . {^3/_2}$, $8 = 2 . 2 . 2 \ldots$,
sich als die zu jenen ganzen Zahlen zugehörigen Töne für
**undton, 2 Oktav, 3 Quint der Oktav, 4 Doppeloktav, 5 Terz der
tave, 6 Quint der Doppeloktave (7 annähernd die kleine Septim
eloktave), 8 dreifache Oktav, 9 Sekund
chen Oktave** u. s. f. — Da von diesen Tönen
3., 4., 5., 6., —, 8., —, 10., —, 12. ... Ton
rundton konsoniert, heifst jene Tonreihe
nische Tonreihe. —

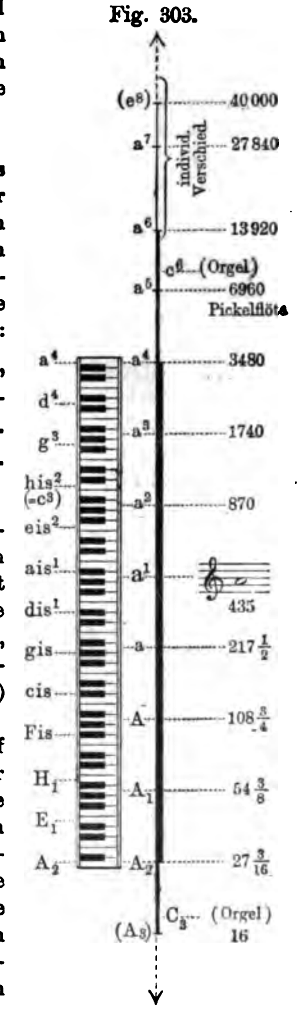
er Hervorbringung einer Durtonleiter mittels
rene mufste die Winkelgeschwindigkeit der
bezw. ihre Umdrehungszahl) bei je einem
streng konstant bleiben. Wird bei einem
ersuche eine gröfsere konstante Winkel-
igkeit gewählt, so erhält man wieder eine
iter, aber in höherer Tonlage. Somit:

den relativen Schwingungszahlen 1,
.. hängen nur die relativen Ton-
; mit den **absoluten Schwingungs-**
ndern sich auch die **absoluten Ton-**

Zahlen 1, $^9/_8$, $^5/_4$ . . . gelten also (abge-
den feinen Unterschieden, welche durch
erierte Stimmung", siehe unten, bedingt
leicherweise für die **„Tonart"** *C*-Dur, wie
rigen Dur-Tonarten *G*-Dur, *A*-Dur u. s. f.,
r durch die absolute Tonhöhe ihrer Grund-
der einander entsprechenden übrigen Töne)
r unterscheiden.

303 gibt einen Überblick über die auf
lavieren verwendeten 85 Töne (sowie über
r hinaus überhaupt noch hörbaren Töne
e_8). Die 7 Oktaven des Klaviers stellen
2 Quinten dar: dies aber offenbar nur an-
da die siebente Oktave eines Tones die
wingungszahl $2^7 = 128$, die zwölfte Quinte
Tones $(^3/_2)^{12} = 129{,}742$ hat. Da wir nun
e Verfälschung der Oktave viel empfind-
als gegen eine der Quinten, so werden in

Fig. 303.



der „temperierten Stimmung“ statt der reinen Quinten von der Schw
zahl $^3/_2 = 1,5$ solche von $\sqrt[12]{128} = 1,49831$ gewählt. — Da ferner eine O
zwölf „halbe“ Töne unterteilt ist, so wird in der „gleichschwebend
rierten“ Stimmung als relative Schwingungszahl für einen Halbton $\sqrt[12]{2} =$
gewählt, für den ganzen Ton somit $(\sqrt[12]{2})^2 = 1,12246$. Von den ur
rationalen Zahlen der reinen Durtonleiter weichen diese irrationalen Za
Ausnahme der für die Oktaven) ab.

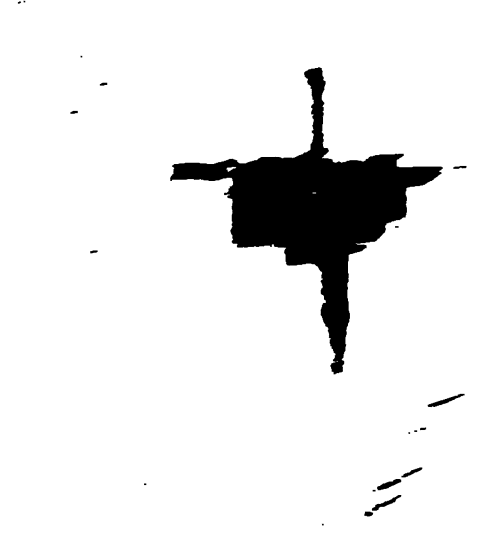
Zwischen reiner Quarte $^4/_3$ und reiner Quinte $^3/_2$ besteht das
$^3/_2 : {^4/_3} = {^9/_8}$, d. i. derselbe „grofse ganze Ton“ wie zwischen Pr
Sekunde. Zwischen der reinen Quinte $^3/_2$ und der reinen Sexte $^5/_3$
dagegen das Intervall $^5/_3 : {^3/_2} = {^{10}/_9}$, welches als „kleiner ganzer T
zu verwechseln mit einem Halbtone) bezeichnet wird. Das Verhältnis $^9/_8$:
war schon den alten Musikern als ein „Komma“ bekannt. Es ist ersich
bei solcher reinen Stimmung die Tonfolgen *C*, *D*, *E* und *F*, *G*, *A* gleich
G, *A*, *H* etwas verschieden klingen. In der gleichschwebend temperierten
z. B. eines Klaviers werden von jedem beliebigen Tone aus in gleich
Durtonleitern (bezw. Molltonleitern) gespielt.

Die Fragen, warum aus dem Kontinuum der von einem beliebig
ton allmählich steigenden Töne gerade die in die „Tonleitern“ auf
Reihe bevorzugt wurde, und warum mit einem Grundtone die Okt
Quart, Terz, Sext **konsonieren**, Sekund und Septime **dissonieren**
Anh. 43. psychologische (Anhang, Nr. 43), da die Musiker als solche von S
zahlen nichts wissen. Tatsache aber ist es, dafs nur die Töne von
tiven Tonhöhen „konsonieren“, deren relative Schwingungszah
die kleinsten Zahlen 1:2, 2:3, 3:4, 4:5, 3:5, 1:3, 1:4, 1:
1:10 ... ausdrückbar sind. Den Dissonanzen Sekunde und Septime e
die gröfseren Zahlen 8 : 9, 8 : 15. Über die durch die gröfseren relative
gungszahlen bedingten Rauhigkeiten des Zusammenklangs vergl. § 98.

Der vollkommenste „**Dreiklang**“ ist der von Grundton, Terz u
entsprechend $1 : {^5/_4} : {^3/_2}$ oder **4 : 5 : 6**. Denken wir uns einem solchen
z. B. *C*, *E*, *G*, je einen nach abwärts, *C*, *A*, *F*, und einen nach aufwärts
hinzugefügt, so kommen hierin alle Töne der Durtonleiter (bezw. ih
C, *D*, *E*, *F*, *G*, *A*, *H*, *c* vor.

II. **Absolute Schwingungszahlen.** Es ist geschichtliche Ta
schon lange vor Kenntnis irgend welcher Schwingungszahlen in
Orchestern u. dergl. unter den Namen *C*, *D*, ... *a* ... gewisse a
höhen verstanden waren, so dafs, wenn für ein Tonstück z. B. *C*-Dur v
war, dieses in verschiedenen Orchestern um nicht allzu viel höher o
in einer gewissen durchschnittlichen „Stimmung“ ausgeführt we
(Allerdings zeigt die Stimmung in der Regel eine merkwürdige

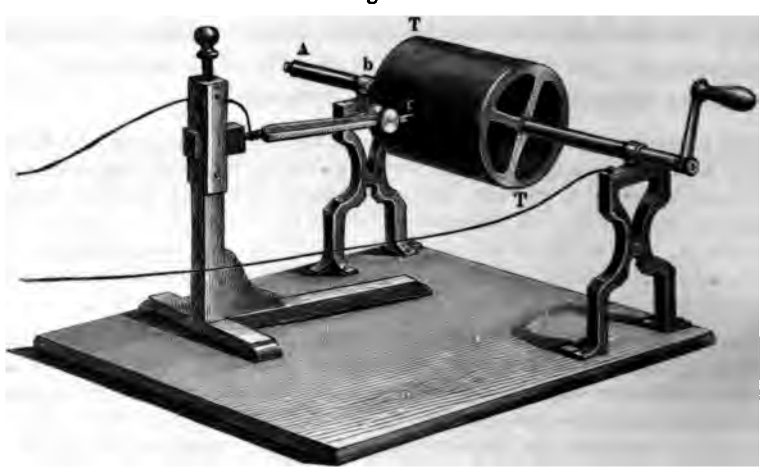




.. B. im
.ier auch
·eiterchen,
ammen als
ı Schwin-

(SCOTTS Phonautograph. 1860, Fig. 305); es werden dann die Wellen, welche auf je 1 sec entfallen, direkt abgezählt.

Fig. 305.



Endlich lassen sich an Klangerregern einfacher Form, namentlich Saiten und Pfeifen (sowie longitudinal schwingenden Stäben), die Schwingungszahlen aus den Dimensionen, den Dichtigkeits- und Elastizitätsverhältnissen berechnen und dazu deren Tonhöhe mit dem Tone einer geeichten Stimmgabel durch das Gehör vergleichen. — Um mit einem schon genau geprüften Klangerreger andere sehr genau in das Verhältnis des Einklanges, der Oktave, der Quinte u. s. w. zu bringen, dienen bei Stimmgabeln die Lissajouschen Figuren (§§ 62 und 88), welche um so langsamer (oder gar nicht) aus einer Form in die verwandte sich verwandeln, je genauer das Intervall getroffen ist. Ferner die Methode der Schwebungen (§ 95).

Auch zu anderweitigen physikalischen Untersuchungen, bei welchen es große Zahlen zu ermitteln gilt (z. B. die Umdrehung des Foucaultschen Spiegels, § 122), läfst sich umgekehrt aus der Tonhöhe auf die Schwingungszahl, und von dieser wieder bei bekannten Dimensionen auf die Elastizität und Dichtigkeit schliefsen. Z. B. Bei Gitterbrücken werden Änderungen der mechanischen Spannungen manchmal aus Änderungen der Tonhöhe einer eingespannten Saite erkannt.

b) Schwingungen einiger musikalischer Klangerreger.

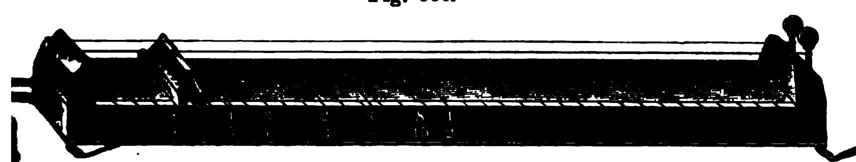
§ 87. Tönende Saiten.

Die Saiten an Musikinstrumenten sind durch Spannen (Drehen der Wirbel) auf bestimmte Töne gestimmt; sie werden am Klavier durch Anschlagen mittels der Hämmer, an der Harfe und Zither durch Zupfen, an der Geige (Violine), Bratsche (Viola), Kniegeige (Violoncello), Bafsgeige durch Streichen mittels eines durch Kolophonium klebrig gemachten Bogens in schwingende Bewegungen versetzt. Diese Schwingungen sind in weitaus den meisten Fällen sehr annähernd rein transversal, und zwar solche in stehenden Wellen. Nur wenn z. B. der Geigenbogen unter einem spitzen Winkel gegen die Saiten bewegt wird, bilden sich auch longitudinale Schwingungen. Von den hierbei erregten, musikalisch

ist verwendeten Klängen sind zu unterscheiden die „Flageoletttöne", welche **zelnen** Partialtönen der Saite (siehe unten) entsprechen. — An den Geigen hat **r** Spieler durch Niederdrücken der Saite ihr die für verschiedene Töne nötige **äge** zu geben; am Klavier, Harfe u. s. f. ist für jeden Ton eine Saite (bezw. **i** sind zwei, drei gleichgestimmte Saiten) vorhanden. Die Saiten für die tieferen **e** pflegt man dicker zu wählen, damit das Instrument in allen Tonlagen **ausgeglichen**", d. h. in durchschnittlich gleicher Stärke erklinge.

Bekanntlich entsprechen z. B. am Klavier, an der Harfe u. s. f. 1. den **iefsten** Tönen die längsten, den höchsten Tönen die kürzesten Saiten. 2. Dieselbe Saite gibt einen höheren Ton, wenn sie stärker gespannt wird. 3. An der **Violine** ist für die höchsten Töne die dünnste Saite (e^2) bestimmt — Diese Er-**fahrungen**, zunächst zu 1, werden zahlenmäfsig ausgestaltet durch

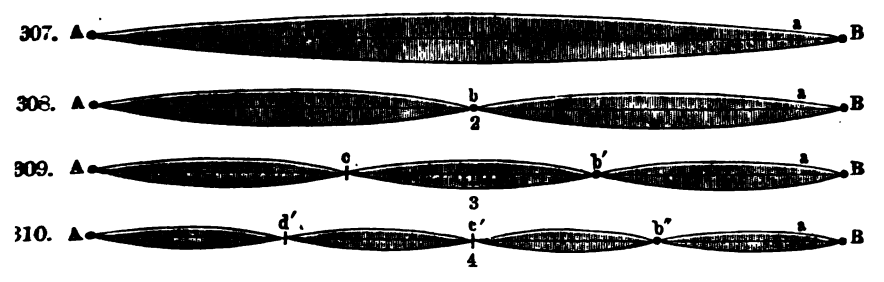
Fig. 306.



Versuche an dem Monochord (richtiger: Dichord, Fig. 306, **Tetrachord**): Zu 1: Ist der Abstand der Befestigungsstellen der Saite **an** beiden Enden L cm, so mufs durch einen verschiebbaren Steg (bei **unveränderter** Spannung) der schwingende Teil der Saite auf die **Längen** L, $^8/_9\,L$, $^4/_5\,L$, $^3/_4\,L$, $^2/_3\,L$, $^3/_5\,L$, $^8/_{15}\,L$, $^1/_2\,L$ gebracht werden, **damit** wir die Töne einer Durtonleiter hören.

Zählt man die Längen	L	$^1/_2\,L$	$^1/_3\,L$	$^1/_4\,L$ ...,
so hört man	Grundton,	Oktave,	Quint d. Oktave,	Doppeloktav,
entspr. den rel. Schw.-Z.	1	2	3	4 ...

Allgemein sind **Schwingungszahl und Saitenlänge einander** **einfach umgekehrt proportional.** Hierbei ist zunächst vorausgesetzt, **daſs** die Saite als Ganzes schwingend ihren „Grundton" gebe.



Teilschwingungen und Teiltöne. — Wird wieder die Saite z. B. im **en** Drittel (b', Fig. 309) durch den Steg unterstützt, oder wurde sie hier auch **mit** dem Finger leise berührt, so zeigt das Aufsetzen von Papierreiterchen, **s** die übrigen zwei Drittel der Saite weder in Ruhe blieben, noch zusammen als **zes** schwangen, sondern dafs sich auch im zweiten Drittel ein Schwin-

gungsknoten (*c*) gebildet hat. **Die Saite schwingt hierbei „in drei gleich**
Teilen", so zwar, daſs, wenn z. B. die Teilchen des ersten und letzten Dritt
nach aufwärts sich bewegen, die des mittleren nach abwärts sich bewegen u
umgekehrt. Ähnlich kann die Saite veranlaſst werden, in 3, 4, 5 ... gleich
(„aliquoten") Teilen zu schwingen (Figg. 307 bis 310): alle diese Teilschwingung
wie bei den Versuchen über Seilwellen (§ 68). **Meldes Apparat (Fig. 311).**

Fig. 311.



Wird die Saite, während sie in drei Teilen schwingt, im ersten oder zweiten Drittel, d. h. an den Schwingungsknoten berührt, also unbeweglich gemacht, so hindert das die Schwingungen nicht, wohl aber, wenn sie zwischen diesen Stellen, insbesondere an der Stelle eines Schwingungsbauches berührt wird. — Umgekehrt: Die Saite kann dann nicht in drei gleichen Teilen schwingen, wenn im Abstande $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ vom Ende, da wo die Schwingungsknoten auftreten soll bewegt (gezupft, gestrichen, geschlagen) wird. So wird z. B. eine Saite, die $\frac{1}{7}$ ihrer Länge angeschlagen wird (wie die Saiten guter Klaviere — Erklär aus der Theorie der Klangfarbe, § 90), nicht in sieben gleichen Teilen schwing

Daſs aber eine Saite sogar Schwingungszustände besitzen kann, in welch sie Töne mit relativen Schwingungszahlen 1, 2, 3 ... 12 ... zugleich hören lä kann man schon bei passender Lenkung der Aufmerksamkeit auf die du Streichen erregten Klänge bemerken (Sauveur 1701, Rameau 1726). Solange m in diesem „Heraushören" der „Teiltöne" noch nicht hinreichend geübt ist, erleicht man sich das Bemerken je eines einzelnen dieser Töne, indem man, nachdem Saite in Schwingung versetzt war, wobei sie nur den Grundton zu geben schi sie nun im ersten Drittel berührt, worauf die übrigen Töne gedämpft werden u der Ton mit der relativen Schwingungszahl 3 (die Quint der Oktav des Gru tons) deutlich hervortritt. Diese Erfahrungen an schwingenden Saiten sind erstes Beispiel zu dem Begriffe der „Teiltöne" oder „Partialtöne", die wir auch beinahe sämtlichen anderen Klangerregern bemerken werden; somit:

Ein Klangerreger kann je nach der Art der Erregung verschiedenen Formen schwingen, denen verschiedene **Teil-** o **Partialtöne** entsprechen. Der tiefste Teilton heiſst **Grundton**, übrigen **Obertöne** und zwar werden sie gezählt

als 1. 2. 3. 4. ... Teilton
oder als Grundton, 1. 2. 3. ... Oberton.

Die Teiltöne schwingender Saiten gehören der harmonisc Reihe mit den relativen Schwingungszahlen 1, 2, 3, 4 ... an (§

Die Erklärung der bisher beschriebenen und der sonstigen Abhängigkeiten chen der Schwingungsart einer Saite von der Art der Erregung, von der Länge, nnung u. s. f. ergibt sich, wenn wir uns vorstellen, daſs an einer in ihren beiden en befestigten Saite fortschreitende Wellen, und zwar anfänglich aller erdenk- en Wellenlängen hervorgerufen und an den beiden Enden reflektiert worden n, worauf sie mit den neu ankommenden Wellen stehende Wellen zu bilden ben (§ 65). Aber es werden nur wenige der so eingeleiteten Schwingungszustände r Saite dieser „angepaſst", d. h. verträglich sein mit den mechanischen dingungen, unter welchen die verschiedenen Teile der Saite stehen. Die erste ser Bedingungen ist, daſs die beiden befestigten Stellen Knotenpunkte n: es werden also einerseits überhaupt nur solche stehenden Wellen sich lten können, bei denen **an den Enden der Saite Knotenpunkte** zu liegen mmen (wogegen fortschreitende Wellen auch an den Enden der Saite Elonga- en verlangen würden). Anderseits werden von den verschiedenen mit diesen dingungen gleich verträglichen stehenden Wellen, nämlich bei welchen die Saite ser an den Enden noch 1, 2, 3 . . . Knoten hat, also in 2, 3, 4 . . . gleichen len schwingt, je nach der Erregungsweise bald die einen, bald die anderen, d mehrere zugleich besonders begünstigt sein. In der Tat hören wir, wenn . die Saite durch Reiſsen mit einem harten Stift (Zitherring) erregt wird, und höhere Teiltöne als beim Zupfen mit dem weichen Finger. Sollte die e nur den Grundton geben, so wäre sie allenfalls durch ein sinuskurven- miges Brett aus der Gleichgewichtslage zu bringen und loszulassen; ähnlich durch i nach entgegengesetzten Seiten gekrümmte und angedrückte Bretter für die tave u. s. w. — Für je eine dieser Teilschwingungen (gleichviel, ob gleich- ig noch andere Teilschwingungen stattfinden oder nicht) gelten also dann ischen der Länge L cm der ganzen Saite und den Längen l_1, l_2, l_3 . . . cm der r die Saite gebreiteten stehenden Wellen (über ihr Maſs vergl. § 63) die Be- ungen:

$$L = l_1, \qquad L = 2\,l_2, \qquad L = 3\,l_3, \ldots$$

o

$$l_1 = L, \qquad l_2 = \frac{L}{2}, \qquad l_3 = \frac{L}{3} \ldots$$

Diese Erklärung des Zustandekommens der verschiedenen stehenden Wellen s fortschreitenden führt auch (LA 156) von der Gleichung für die Fortpflanzungs- schwindigkeit $c = \sqrt{e:d}$ (§ 64) auf die dem Grundton entsprechende LA 156.

Schwingungszahl einer gespannten Saite: $n = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{p}{d}}$.

Von den hiermit zusammengefaſsten Abhängigkeiten entspricht e zwischen n und L der oben direkt aus den Tonhöhen durch Ver- ch 1 gefundenen einfachsten Beziehung. Die Beziehung von n zu r Spannung p (gemessen durch spannende Gewichte) läſst sich ähn- h nachweisen, indem die Saite durch 1, 4, 9 . . . kg belastet wird.

Minder einfach durch Versuche zu bestätigen ist die Beziehung zwischen n d der auf die Längeneinheit entfallenden Masse oder der „Längendichte" d B. eine Aluminiumsaite gibt annähernd die Oktave einer Silbersaite von gleichen nensionen bei gleicher Spannung; Verhältnis der spezifischen Gewichte 3 : 12 = $^1/_4$).

§ 88. Tönende Platten und Stäbe.

Die Glocken stellen gekrümmte elastische Platten dar, welche durch d Klöppel angeschlagen in Schwingungen geraten. (Die Fülle des Klanges ein guten Glocke rührt aber nicht nur von den Schwingungen des Metalles, sonde auch von dem Mitschwingen der Luft im Kessel her, § 94.) Horchen wir a den Klang einer soeben angeschlagenen und dann verklingenden Kirchenglock so bemerken wir neben dem Grundtone auch leicht einige Obertöne, die aber im allgemeinen zum Grundton unharmonisch sind. Die besondere Kunst de Glockengießers besteht darin, die harmonischen Obertöne durch die Gestalt de Glockenwand und durch die Wahl der Anschlagstelle zu bevorzugen. Wegen de im allgemeinen unharmonischen Obertöne sind die schwingenden Platten a eigentliche Musikinstrumente wenig in Gebrauch (Pauken, Becken . . .).

Für die experimentelle Untersuchung der Schwingungen vo **Platten** empfehlen sich überall gleich dicke **quadratische** und **kreisförmige** Platten. Eine quadratische Platte, in der Mitte fest geschraubt und an der einen Ecke mit einem Geigenbogen gestriche gibt den tiefsten Ton der Platte; in der halben Länge einer Seit gestrichen gibt sie annähernd die Quint. Ist die Platte wagrecht, un wird sie mit trockenem Sand bestreut, so werden die Knotenlinie durch „Chladnis Klangfiguren" (Figg. 312 bis 316) sichtbar.

Fig. 312. Fig. 313. Fig. 314. Fig. 315. Fig. 316.



Hierbei ist *a* die jeweilige Erregungsstelle, *b* eine Stelle der Knotenlini welche sich entweder „von selbst" oder durch den Druck mit den Fingern bild Daraus, daſs der Sand empor-, aber auch zur Seite g schleudert wird und erst auf den Knotenlinien Ruhe find läſst sich erkennen, daſs die Schwingungen einer solch Platte vorwiegend, aber nicht ganz rein, **transversale** sin Bei genaueren Beobachtungen zeigen die Knotenlinien manc mal ein langsames Wandern in der Längsausdehnung d Platte. Hiervon abgesehen bilden diese Schwingungen e Beispiel **stehender Wellen im zweidimensionale Punktsystem.** — In je zwei längs einer Knotenlinie a einander grenzenden Feldern sind die **Schwingungsric tungen** der Plattenteilchen einander **entgegengeset** Aufsetzen der gegabelten Hopkinsschen Interferenzröhre n Membran (Fig. 317); die von Feldern gleicher, be entgegengesetzter Schwingungsrichtung ausgehend Luftschwingungen zeigen an der mit Sand bestreu Membrane Verstärkung, bezw. Schwächung du

Fig. 317.

a

b

erferenz an (§ 93). — Die sehr schwierige mathematische Theorie der schwingen-
ı Platten als Erklärung der Chladnischen Figuren (die z. B. zur Aufstellung
Gleichungen der Kurven in Fig. 314 führt) wurde zuerst von SOPHIE GERMAIN
16) gegeben.

**Tönende Stäbe sind die Stimmgabeln, die Stäbchen der Glas-
ılz-, Metallharmonika (Spieluhren . . .). Auch die bei den Trans-
rsalschwingungen der Stäbe wahrnehmbaren Obertöne gehören
cht der harmonischen Reihe an.**

Der Versuch (§ 66) mit der Gerte, die wir bei dem dicken Ende mit der
nd schütteln und die nahe dem dünnen Ende einen deutlichen Schwingungs-
oten hat, zeigt den Unterschied in der mechanischen Definition des „steifen"
ıbes und der biegsamen Saite.

An Stimmgabeln bewegen sich die Zinken zueinander hin und voneinander
g. Daher sind (mindestens) zwei Schwingungsknoten zu erwarten, welche
h nahe den Enden des
krümmten Teiles der
ıbel befinden (Fig. 318).
r Stiel der Gabel nimmt
a dem gekrümmten
ile longitudinale Bewe-
ngen an, die beim Auf-
tzen auf den Tisch oder
f einen Resonanzkasten
n Stimmgabelton kräf-
g hörbar machen. —
iferstimmen der Gabel
rch Laufgewichte. —
ngen zwei Stimmgabeln
ı den Enden der Zinken
piegelchen und werden
ese einander gegenüber
rallel, die Zinkenrich-
ngen aber zueinander normal gestellt, so gibt ein von dem einen Spiegelchen
f das andere und von hier auf einen Schirm reflektierter Lichtstrahl „Lissajous
langfiguren" (Fig. 319; vergl. § 62).

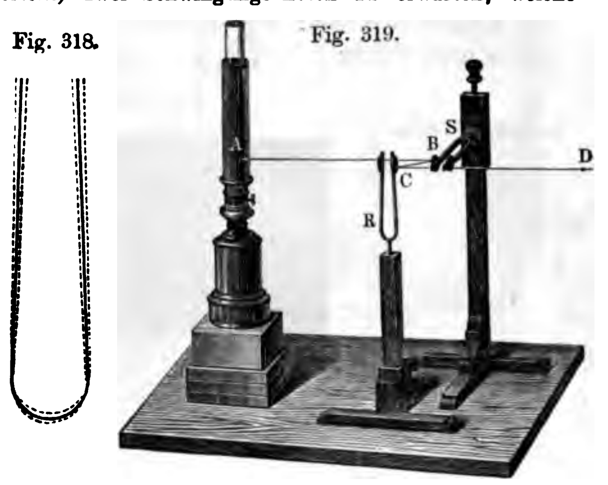


Fig. 318. Fig. 319.

Longitudinale Schwingungen gibt z. B. ein Holz-, Glas- . . . -Stab, der
ı einem Ende befestigt ist, und der Länge nach mit einem Kolophoniumlappen
rieben wird. Die Teilschwingungen sind harmonisch und folgen ähnlichen
setzen, wie die Teilschwingungen tönender Luftsäulen in Pfeifen.

§ 89. Tönende Luftsäulen (Pfeifen).

Vorversuche: Ein beiderseits offenes Röhrchen gibt Töne, wenn man über
sen Rand hinbläst; desgleichen ein Schlüssel mit Längsbohrung, eine Flasche,
ı Fingerhut. Da alle diese Körper nicht im Tönen gehindert werden, wenn die
ten Wände festgehalten sind, so liegt es nahe, die in ihnen eingeschlossene
ıft als den schwingenden und daher tönenden Körper anzusehen. Diese
rmutung wird bestätigt, wenn man bemerkt, dafs ein Probiergläschen, das

zuerst mit Luft, dann mit Wasserstoff, Leuchtgas oder Kohlendioxyd g worden ist, beim Klopfen an seinem Boden beträchtlich verschiedene Töne gib

Schwingende Luftsäulen sind die Klangerreger in den Lippenpf (Figg. 321 a, b) und Zungenpfeifen der Orgel, des Harmoniums, in den (B und Holz-) Blasinstrumenten, im menschlichen Stimmorgan u. a. f. —

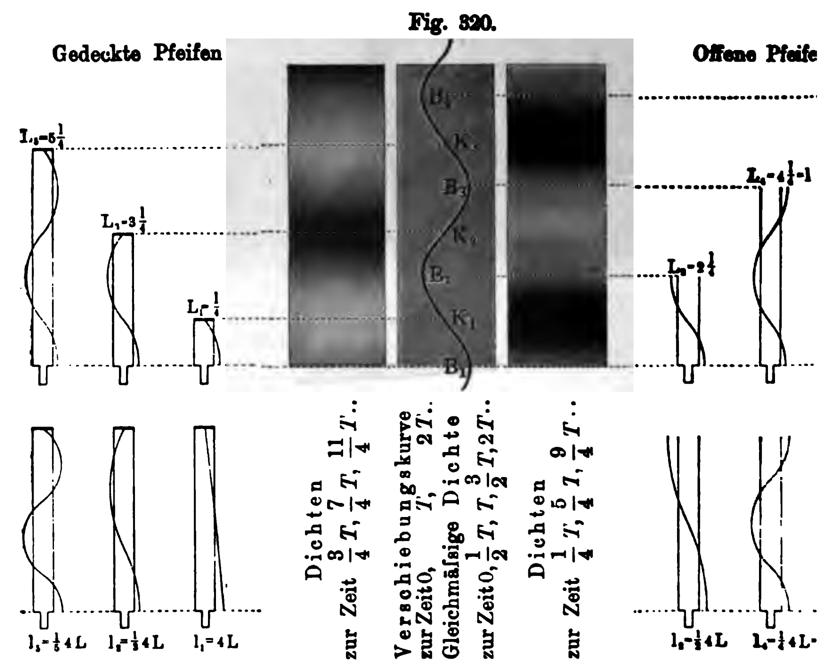
Der Vorgang der Erregung ist bei mehreren dieser Klangerreger ein verwickelter. Wir gewinnen Einblick in ihn am leichtesten bei den Lippenpf (Beschreibung nach Fig. 321 b) nach folgendem Gedankengang:

Versuch: Eine lange enge Lippenpfeife, die nach Zu- oder klappen eines Deckels als gedeckte, bezw. offene Pfeife wirkt, zuerst schwach, dann immer stärker angeblasen. Nach den Tonh welche hierbei hörbar werden, erkennen wir, daß sie, wenn der tie Ton, den sie als gedeckte Pfeife gibt, die Schwingungszahl *n* Teiltöne mit folgenden Schwingungszahlen gibt:

als gedeckte Pfeife: n $3n$ $5n$ ...: „ungeradzahlige Teiltö

als offene Pfeife: $2n$ $4n$ $6n$ ...: „geradzahlige Teiltö

Fig. 320.



Diese Erscheinungen sind von Dan. Bernoulli (1762) nach demselben G gedanken einer „Anpassung“ bestimmter Wellen an die gegebene Pfeife erklärt worden, wie die Teiltöne an gespannten Saiten. In Fig. 320 sei die linie $B_1 K_1 B_2 K_2 \ldots$ die graphische Darstellung der longitudinalen hier: in die Richtung der Längsausdehnung der Pfeife fallenden) Elongati In den Bäuchen B erfahren die Luftteilchen die gröfsten Verschiebungen, i Knoten K keine Verschiebungen. Denken wir uns nun a) dieselbe ste

alwelle von der Wellenlänge rschiedene gedeckte Pfei- ɜn Längen L_1, L_3, L_5 . . . und ıiedene offene Pfeifen von n L_2, L_4, L_6 . . . gebracht, so len Anblasestellen Bäuche, edeckten Enden Knoten, an nen Enden wieder Bäuche zu ımen, wenn die Pfeifen zur Welle passen sollen. Denken erauf b) dieselbe Pfeife von L cm, und zwar abwechselnd te und offene, von den zu ihr longitudinalen stehenden Wellen lener Wellenlängen l_1, l_2, l_3, . erfüllt, so bestehen zwischen . den l die aus der Figur er- Beziehungen und somit auch a Beziehungen zwischen den ıngszahlen.

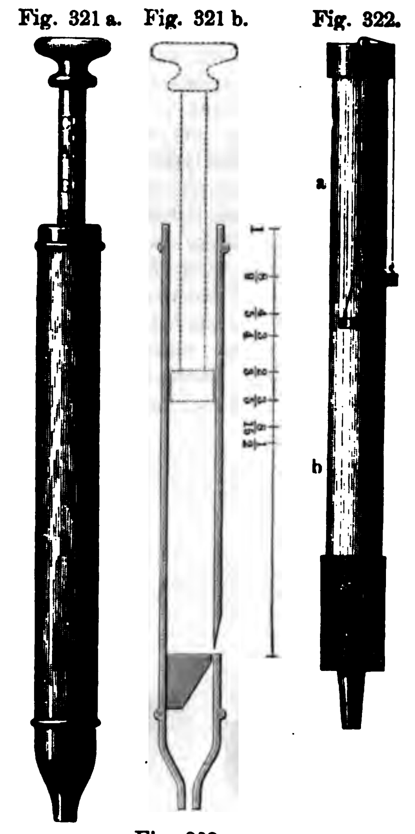
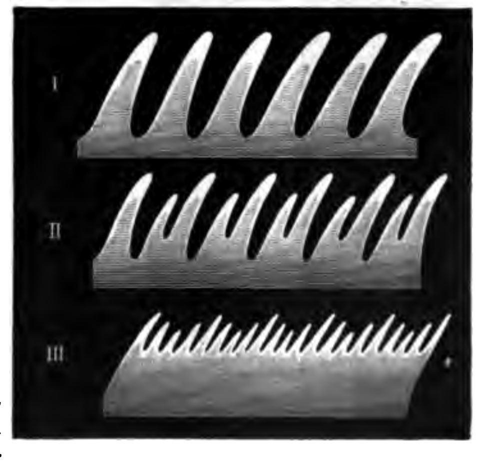


Fig. 321 a. Fig. 321 b. Fig. 322.

isher entwickelten Vorstellungen verschieden grofsen Elonga- er Luftteilchen werden nach urch Versuche bestätigt, indem (tambourinartiges) Rähmchen, mbran mit Sand bestreut ist, ›dene Stellen im Luftraum der gt, wo dann der Sand am stärk- n Stellen der erwarteten gröfs- tion erschüttert wird (Fig. 312, ›uche mit Seifenlamellen, Wind- lergl.). Als „Luftteilchen“ ei nicht die einzelnen und Sauerstoff-Moleküle ; sondern die ganzen ›en rücken abwechselnd r und zusammen. In- sind die Elongationen ›n einem ebenfalls perio- echsel der Dichtig- zwar so, dafs diese ıe gröfsten sind an ›n K; gerade in diesem sind aber die Elon- die kleinsten, näm- dig gleich Null. [— Das ende Paradoxon erklärt ınschaulichsten an dem rat zu Machs Wellen- Versuch IV, Fig. 254 a, c;

Fig. 323.

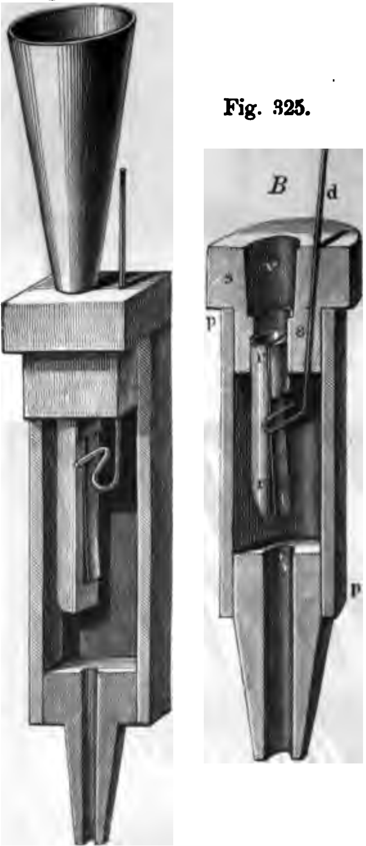


LA 135. vergl. LA 135.] — In der Tat zeigen Pfeifen, deren eine Wand aus Papier mit aufliegenden Pendelchen besteht, und noch schöner „manometrische Flammen“ (Fig. 323 a. v. S.), die stärkste Reaktion an den durch Bernoullis Theorie für die Schwingungsknoten zu erwartenden Stellen. Erst durch diese Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch ist auch der strenge Beweis erbracht, dafs die **Schwingungen der Luft in Pfeifen longitudinal sind.**

Verfolgen wir nun den Vorgang der Entstehung solcher longitudinalen stehenden Wellen in den Luftsäulen der Pfeifen noch weiter zurück: Das aus der Spalte gegenüber der Lippe austretende Luftband oder Luftblatt stöfst gegen die Lippe und teilt sich in einen Teil aufserhalb und einen innerhalb der Pfeife, so dafs abwechselnd mehr, bezw. weniger als die Hälfte des Luftstromes in das Innere der Pfeife dringt und daselbst Dichtigkeitswechsel hervorbringt, welche die Pfeife entlang fortschreiten. Indem diese fortschreitenden Wellen am gedeckten, bezw. offenen Ende mit, bezw. ohne Umkehrung der Schwingungsphase (§ 66) reflektiert werden, setzen sie sich mit den immer neu ankommenden fortschreitenden Wellen zu stehenden Wellen zusammen, von welchen dann in der bereits erklärten Weise die mit den mechanischen Bedingungen und der jeweiligen Art der Erregung der Pfeife verträglichen (der Pfeifenlänge „angepafsten“) stehenden Wellen sich erhalten, die übrigen unwirksam werden. —

Fig. 324.

Fig. 325.



In der „chemischen Harmonika“ werden die Dichtigkeitswechsel durch die Hitze einer Leuchtgas- oder Wasserstoffflamme eingeleitet, und die beiderseits offene Röhre tönt dann nach den Gesetzen der offenen Lippenpfeifen. (Singende Flammen.) — Bei den Trompeten, Hörnern … unterbrechen die in Schwingung versetzten Lippen des Bläsers den Luftstrom.

Bei Blasinstrumenten mit Klappen (Flöten, Klarinetten . . .) kann die schwingende Luftsäule durch Öffnen der Klappen verkürzt werden; bei Instrumenten ohne Klappen entstehen durch entsprechend stärkeres Anblasen höhere Obertöne (vergl. obigen Versuch); „Naturtöne“ der einfachsten Blasinstrumente.

Bei den **Zungenpfeifen** (Fig. 324 mit durchschlagender, Fig. 325 mit aufschlagender Zunge) wird der eingeblasene Luftstrom durch elastische Metallstreifen (wie bei der Mundharmonika) in regelmäfsigen Stöfsen unterbrochen (ähnlich wie bei der Sirene). Die Tonhöhe hängt hier einerseits von der Schwingungszahl der Zunge als eines elastischen Stäbchens, anderseits von der Länge

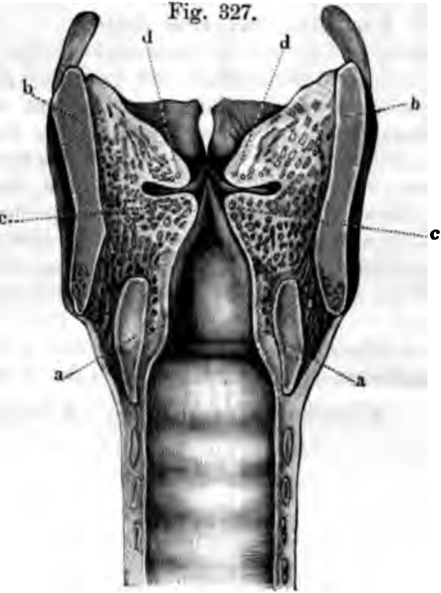
der Luftsäule in der Röhre und im Schallbecher ab, wobei beiderlei schwingende Körper einander in ihren Schwingungen beeinflussen.

Holzblättchen im Mundstück der Oboen, Fagotte. — Membranöse Zungen (ähnlich dem Grashalm, der in die Spalte zwischen den Daumen der ihn haltenden Hände gespannt den Luftstrom in Schwingungen versetzt) sind das einfachste Vorbild für

Bau und Funktionen des **menschlichen Stimmorganes** (Figg. 326, 327). Es besteht aus der Luftröhre, dem Kehlkopfe, an dem sich zwei elastische Bänder (Stimmbänder) befinden, welche die Luftröhre bis auf eine kleine Spalte (Stimmritze) schliefsen, und dem Kehldeckel, der die Stimmritze schützt. — Durch Muskeln werden die Stimmbänder mehr oder weniger gespannt, und durch die aus der Lunge ausströmende Luft entsteht der Klang (ähnlich wie bei Zungenpfeifen), der durch den resonierenden Luftraum der Mundhöhle teilweise verstärkt wird und seine Klangfarbe erhält.

Fig. 326.

Fig. 327.



o Stimmritze. a Ringknorpel. b Schildknorpel. c untere Stimmbänder. d obere Stimmbänder.

Bei Frauen und Kindern ist der Kehlkopf kleiner und die Stimmritze kürzer als bei Männern. Mutieren (Stimmwechseln).

c) Abhängigkeit der Klangfarbe von den Teilschwingungen.

§ 90. Klangfarbe und Teiltöne. Schwingungsform und Teilschwingungen.

Worin sich die weiche, dumpfe . . . „**Klangfarbe**“ einer Flöte von der schmetternden, glänzenden . . . einer Trompete unterscheidet (wobei Flöte und Trompete die gleiche Tonhöhe geben können), scheint zunächst ein ebenso unmittelbar gegebener und nicht weiter zu beschreibender Unterschied wie der zwischen der Tonhöhe eines tiefen, bezw. hohen Tones. Dabei scheinen an diesen

und anderen Klangerregern Tonhöhe und Klangfarbe innerhalb weiter Grenzen voneinander unabhängige Eigenschaften der Klänge zu sein.

Helmholtz hat aber zuerst gezeigt, daſs die **Klangfarbe** psychologisch notwendig und ausreichend bestimmt ist durch die den Grundton eines Klanges begleitenden **Obertöne** (psycholog. Anh., Nr. 43). Da das „Heraushören" der Obertöne aus dem Klange mit „freiem Ohre" bei wenig geübter Aufmerksamkeit schwierig ist, unterstützte Helmholtz das Ohr durch Resonatoren, welche auf verschiedene Töne abgestimmt waren (über den Mechanismus des Mitschwingens vergl. § 99). — Schon vor Helmholtz waren die den Grundton begleitenden Obertöne bemerkt (Sauveur 1701, § 87) und für verschiedene Klangerreger als teils harmonische, teils unharmonische festgestellt worden. Hieraus ergab sich die Frage, ob es auch **einfache**, d. h. obertonlose **Klänge** gebe. Ihr Dasein wurde festgestellt von Ohm 1843, und zwar fand er als die physikalische Bedingung für ihr Gehörtwerden, daſs der Klangerreger **einfache Sinusschwingungen** mache. Solche führen z. B. Stimmgabeln auf passenden Resonanzkästchen aus (indem die beim Anschlagen einer Stimmgabel etwa mit einem harten Körper zuerst hörbaren hohen Teiltöne bald verklingen), ferner kubische Pfeifen (angeblasene Flaschen). Ebenfalls schon vor Helmholtz war es mehr und mehr wahrscheinlich geworden, daſs, wie der Wellenhöhe die **Stärke**, der Wellenlänge die Tonhöhe, so der **Wellenform die Klangfarbe** entspreche; und zwar hatte man letzteres eben aus dem Umstande erschlossen, daſs erstere beiden Eigenschaften der Wellen durch jene beiden Merkmale der Empfindung in Anspruch genommen (sozusagen schon für sie vergeben) seien, so daſs eben für die Klangfarbe nur die Wellenform übrig blieb. — Aber erst Helmholtz hat ganz bestimmt die Art und Weise angegeben, inwiefern die Wellenform Einfluſs gewinnt: er bewies nämlich in seinem klassischen Buche „Die Lehre von den Tonempfindungen" (1863):

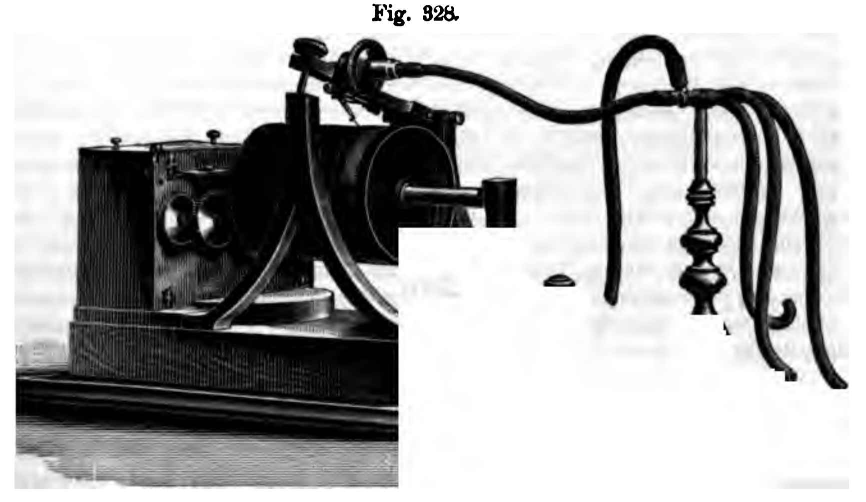
Klängen verschiedener **Klangfarbe** entsprechen verschiedene Schwingungsformen, und zwar jene, welche sich aus der Superposition der den Teiltönen des Klanges entsprechenden **Sinuswellen** ergeben. — Haben aber Wellen gleicher Länge und Amplitude nur eine Phasenverschiebung, so ergeben sich zwar verschiedene Schwingungsformen (vergl. Figg. 239 bis 242, Figg. 256, 257), denen aber dennoch nicht eine merklich verschiedene Klangfarbe entspricht.

Wie also die Klangfarbe psychologisch durch die Teiltöne, so ist sie physikalisch durch die Wellenlängen und Amplituden der Teilschwingungen notwendig und ausreichend bestimmt, wogegen deren Phasen für die Klangfarbe unwesentlich sind.

Helmholtz zeigte auch, daſs die Unterschiede zwischen den **Vokalen** nur solche der Klangfarbe sind (nicht der Tonhöhe, denn wir können auf dieselbe Tonhöhe verschiedene Vokale und denselben Vokal in verschiedenen Tonhöhen singen), also nur von den zum Grundton hinzutretenden Obertönen abhänge. So hören wir aus dem *U* beinahe keine Obertöne heraus; und in der Tat ist der Klang einer angeblasenen Flasche (der unsere Mundhöhle beim Aussprechen des *u* gleicht) ähnlich dem *U*. Mehr Obertöne hat das *A*, die meisten das *I*. — Nachdem die einzelnen Vokale mit Hilfe der Resonatoren analysiert waren, gelang es, durch Zusammensetzung der Klänge von elektromagnetisch erregten Stimmgabeln mit davorgesetzten Resonanzröhren, die einzelnen Vokale nachzuahmen; besser *O* und *A* als *E* und *I*. — Eine ähnliche Synthese der Konsonanten aus Teilgeräuschen ist bisher nicht gelungen. — Alte Sprechmaschinen.

Eine zusammenfassende Bestätigung für alle bisher dargestellten Abhängigiten der Tonhöhe von der Schwingungszahl und der Klangfarbe von der hwingungsform, sowie der Schallstärke und Schalldauer von der Stärke d Dauer der physikalischen Erregung, gibt in seinem Bau und seiner Leistung s Telephon (§ 161) und noch einfacher und unmittelbarer der später erfundene

Fig. 328.



Rhonograph. — Nachdem schon 1860 SCOTT in seinem Phonautographen ngende Körper ihre Schwingungen auf eine in Schraubenbewegung versetzte rufste Trommel hatte aufzeichnen lassen (§ 61), gelang es 1877 EDISON, indem jene Schwingungen in die plastische Oberfläche eines Zylinders (zuerst Stanniol, nn eine Wachsmischung) eingraben liefs, durch diese Phonogramme umgekehrt eder einen dem ursprünglichen Schall (Worte, Gesang, Orchestermusik . . .) nach nhöhe und Klangfarbe, Dauer und Stärke ähnlichen Schall zu erregen. — Wird ar bei der Wiedergabe des Schalles die Trommel z. B. zweimal so rasch gedreht als i der Aufnahme des Phonogramms, so erklingt alles in der nächst höheren Oktav. ıch kann man aus der Aufeinanderfolge der Pünktchen eines Phonogrammes auf efe oder Höhe der entsprechenden Töne schliefsen (falls sie hinreichend lang aushalten sind), ebenso auf Stärke und Schwäche. Die feineren Unterschiede der Schwinngsform dagegen, nach welchen man sogar noch den Stimmcharakter einzelner nger bei der phonographischen Wiedergabe sehr wohl unterscheiden kann, sind r das Auge bei weitem nicht mehr zu erfassen. (Das Grammophon ist ein verıfachter Phonograph. — Der Telephonograph von POULSEN 1900, vergl. § 161.)

B. Ausbreitung des Schalles.

§ 91. Die Wellentheorie des Schalles.

Geschichtliches: Wenn der Nichtphysiker davon spricht, dafs der Klang ıer Geige, der Knall einer Kanone zu ihm dringe, so mag nicht selten mehr er minder deutlich der „Schall" wie ein körperliches Ding gedacht werden B. der Schall eines Waldhorns als ein rundes weiches, der eines Zündhütchens etwas kleines spitzes). Gleichwohl ist es nie zu einer eigentlichen „Emissions-

theorie des Schalles" (analog der Newtonschen des Lichtes, § 128) gekommen, sondern schon im Altertum war gelegentlich die Ausbreitung des Schalles mit der von Wasserwellen verglichen worden (Vitruv). Als dann namentlich durch Galileis Schüler Mersenne (1636) die wissenschaftliche Beschäftigung mit den Schallerscheinungen begann, war die Mechanik schon so weit ausgebildet, dafs sowohl die Erregung des Schalles als rein mechanisch durch **Schwingungen**, wie auch die Ausbreitung des Schalles als rein mechanisch durch **Wellen** verursacht gedacht werden konnte. Dafs es **longitudinale Wellen der Luft** seien, in welchen sich Geräusche wie Klänge von der Erregungsstelle rings durch den lufterfüllten Raum ausbreiten, war ebenfalls nicht erst Sache besonderer experimenteller Feststellungen, sondern es lag aus der um jene Zeit erforschten Eigenschaften der Luft (§ 43) sogleich nahe, dafs in der Luft leichter Verdichtungen und Verdünnungen (longitudinale) als seitliche (transversale) periodische Verschiebungen herstellbar sind. — Schon ein halbes Jahrhundert später hatte sich die Einsicht in den mechanischen Vorgang so vertieft, dafs Newton unter anderen die allgemeine Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen in elastischen Körpern (§ 64) zunächst speziell für Schallwellen aus den Gesetzen der Mechanik ableitete, worauf dann die Anwendbarkeit dieser Formel für irgend welche Störungen des Gleichgewichtes in elastischen Medien allgemein erkannt wurde. —

Die der **Ausbreitung des Schalles** zu Grunde liegende **Fortpflanzung der Schallwellen** ist im einzelnen so zu beschreiben und zu erklären:

a) Eine **Verdichtung** (z. B. infolge der aus dem Kanonenrohr dringenden Pulvergase) breitet sich im Luftraum von der Erregungsstelle weg dadurch aus, dafs die Verdichtung begleitet ist von einer Erhöhung der Spannung, infolge deren die nächstfolgende Schicht eine Verdichtung erfährt u. s. f. Aber auch

b) eine **Verdünnung** (Herausreifsen eines Stempels aus einer Knallbüchse, in welche die nächsten Luftteilchen hineinstürzen und so eine Verdünnung bewirken), breitet sich von der Erregungsstelle **weg** aus (so dafs hier die Fortpflanzungsrichtung des Schalles **entgegengesetzt** ist der Bewegungsrichtung der in die Verdünnung jeweilig zurückströmenden Luftteilchen).

c) Ein **Wechsel von Verdichtungen und Verdünnungen** (z. B. 435 in 1 sec bei einer Normalstimmgabel, Fig. 329) breitet sich so aus, dafs an je einem anderen Punkte des Luftraumes ein gleicher Wechsel von ebenso grofser Schwingungszahl und Gesamtdauer stattfindet. Eben hierdurch überträgt sich speziell auch ein Klang in **unveränderter Höhe** (eine Ausnahme nach **„Dopplers Prinzip"** vergl. LA 157) und **Klangfarbe** auf alle Punkte des Luftraumes, bis zu welchen er überhaupt noch hörbar ist.

Fig. 329.

LA 157.

Für eine genaue quantitative Beschreibung aller dieser Vorgänge ist die grundlegende Gröfse die der

§ 92. Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles.

Dafs dem Schalle eine auch noch im Vergleich zu den gröfsten Windgeschwindigkeiten (etwa 50 m sec^{-1}) verhältnismäfsig grofse Ausbreitungsgeschwindigkeit zukommt, beweisen die kunstlosen Beobachtungen des bei einiger Entfernung bald merklichen Zeitunterschiedes zwischen dem Sehen des Blitzes und Hören des Knalles einer Kanone; desgleichen dem Sehen und Hören eines Axt-, eines Hammerschlages; zwischen dem Sehen des Wölkchens und Hören des Pfiffes einer Lokomotive, Blitz und Donner beim Gewitter u. dergl. Hierbei zeigt sich der Zeitunterschied um so gröfser, je entfernter wir von der Schallquelle sind. — Dafs dabei **Geräusche und Klänge von beliebiger Stärke und beliebiger Tonhöhe sich mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreiten**, folgt schon aus der einfachen Erfahrung, dafs die Musik eines Orchesters in allen Entfernungen, bis zu welchen sie überhaupt hörbar ist, zusammenstimmend bleibt und nichts von einem Vorauseilen etwa der höheren Töne vor den tieferen, der schwächeren vor den stärkeren zeigt (eine Ausnahme für die ungewöhnlich starken Schallerreger z. B. Explosionen siehe unten).

Jene Beobachtungen an Kanonen wurden schon von der Florentiner Akademie (1660) zu messenden Versuchen ausgebildet. Im Prinzipe wäre nur die Raumstrecke von s m zwischen der Kanone und dem Beobachter von Blitz und Knall, sowie die Zeitstrecke von t sec zwischen beiden Wahrnehmungen zu messen. Dann ist die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{s}{t}$ m sec^{-1}, vorausgesetzt, dafs diese Geschwindigkeit eine konstante ist. Dafs diese Voraussetzung zutrifft, liefse sich beweisen durch mehrere Beobachtungen, welche $\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \ldots = const$ ergäben. — Bei der Ausführung der Versuche ist aber zu beachten, dafs zwischen Kanone und Beobachter die Luft zumeist eine Bewegung von unbekannter Richtung und Geschwindigkeit hat, wodurch die Geschwindigkeit des Schalles um einen zunächst unbekannten Betrag x m sec^{-1} vergröfsert oder verkleinert wird. Diese Schwierigkeit wurde bei den sehr sorgfältigen Versuchen, die 1822 von einer Pariser Kommission durchgeführt wurden, an der unter anderen Arago, Humboldt, Gay-Lussac teilnahmen, dadurch ausgeschaltet, dafs an zwei Stationen gleichzeitig in einem vorher verabredeten Zeitpunkte Kanonen abgefeuert und ihr Knall von je der anderen Station aus beobachtet wurde. Sind dann die Geschwindigkeiten $c_1 = c + x$ und $c_2 = c - x$, so wird: $c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Aus 12 einzelnen Versuchen nach je fünf Minuten ergab sich für die Temperatur von 16° C (und der damals herrschenden Luftfeuchtigkeit) $c = 340{,}88$ m sec^{-1}.

Dafs hiermit wirklich schon die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft ermittelt sei, ist aber auch nur unter der stillschweigenden Voraussetzung richtig, dafs das Licht (des Kanonenblitzes) die Strecke zwischen den zwei Stationen in unmerklich kurzer Zeit zurückgelegt habe; die Berechtigung dieser Voraussetzung bewährt sich aus der unabhängig von dem beschriebenen Versuch ermittelten Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, welche so grofs (300 000 km sec^{-1}, § 122) ist, dafs es die Strecke von 19 km bei den Pariser Versuchen in 0,000 06 sec zurücklegt. Diese Gröfse ist verschwindend schon gegenüber der viel gröfseren „Reaktionszeit“ (psycholog. Anh., Nr. 41), welche auch für die Anh. 41.

geübtesten Beobachter zwischen dem Sehen und dem Auffassen von Blitz, Knall und Zeigerstellung der Uhr verfliefst. Die Beobachtungen bei je einem der Pariser Versuche differieren bis zu 0,4 sec, was schon einen Geschwindigkeitsunterschied bis zu 8 m in 1 sec bedeutet.

Dafs es bei den oben beschriebenen alltäglichen Erscheinungen und den wissenschaftlichen Versuchen wirklich die Luft ist, welche als Schallleiter fungiert (zum Unterschiede von dem die Ausbreitung des Lichtes vermittelnden „Lichtäther" § 121), zeigt der sogleich als einer der ersten Luftpumpenversuche von GUERICKE erbrachte Nachweis, dafs wir von einer unter dem Rezipienten einer Verdünnungsluftpumpe stehenden Glocke (einem Läutwerk) um so weniger hören, je mehr die Luft ausgepumpt ist (wogegen der luftleere Rezipient keineswegs weniger lichtdurchlässig ist), und dafs sich umgekehrt der Schall wieder stärker vernehmen läfst, wenn Luft zugelassen wird.

Überdies zeigt aber dieser Versuch mittelbar, dafs **auch andere Stoffe als Luft den Schall leiten**, indem er nur gelingt, wenn das Läutwerk durch „schlechte Schallleiter" (Tuch, Kautschuk, Wolle, Blei...) gegen die guten Schallleiter (Metalle, Glas . . .) des Luftpumpentellers und Rezipienten isoliert ist. — Aber auch schon vor diesen Versuchen waren es zunächst alltägliche Erscheinungen, bei welchen die Schallleitungsfähigkeit auch anderer Körper als Luft zur Geltung kommt: Man hört in der Luft erregten Schall, wenn man unter Wasser schwimmt, desgleichen durch geschlossene Türen, Fenster, durch Mauern. Legt man das Ohr auf das Eisenbahngeleise, so kann man das Rollen des noch fernen Zuges vernehmen. Das Ticken einer Uhr hört man durch einen langen Holz-(Eisen- . . .)stab, wenn man das Ohr an das andere Ende des Stabes legt, oder es mit den Zähnen fafst.

Fig. 330.



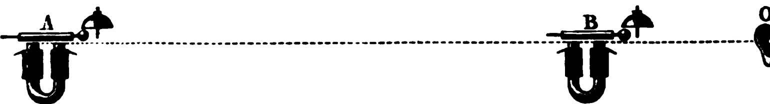
Von diesen anderen Schallleitern aufser Luft ist noch für Wasser die Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch direkte Versuche (Glockenschlag. im Genfersee, COLLADON und STURM 1827) bestimmt und 1435 m sec^{-1} gefunden worden.

Die Erklärung der Tatsache einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft und anderen Stoffen ergibt sich für uns heute als eine Folge davon, dafs alle Schallausbreitung durch Fortpflanzung von Wellen und zwar fortschreitenden longitudinalen erfolgt; umgekehrt wird diese Vorstellung durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles bestätigt. Die Kräfte, infolge deren die Wellen sich ausbreiten, sind ausnahmslos die Elastizitätskräfte der Luft und der übrigen Schallleiter. Daher sind auch **alle elastischen Stoffe Gutleiter, alle unelastischen Schlechtleiter des Schalles.**

Indem Kautschuk sich als sehr schlechter Schallleiter erweist, werden wir aufmerksam, dafs hier nicht das Elastischsein des Kautschuks im populären Sinne, sondern seine geringe Fähigkeit, erhaltene Deformationen vollständig wieder herzustellen, wesentlich ist (§ 51).

Zu den direkten experimentellen Methoden für die Bestimmung der sbreitungsgeschwindigkeit des Schalles kommen noch direkte rechnerische thoden auf Grund von NEWTONS Formel $c = \sqrt{e:d}$; sowie mancherlei indirekt-perimentelle, z. B. die nach Fig. 331.

Fig. 331.



Allerdings gab Newtons theoretische Formel sowohl im Vergleich mit den ›ch vor Newton gefundenen ungenaueren als auch den späteren genauen Ver-.chsergebnissen Werte, die etwa im Verhältnisse $1 : \sqrt{1{,}41}$ zu klein waren. Aber ıch diese Nichtübereinstimmung wurde durch LAPLACE (1816) als eine Folge ıvon erkannt, dafs die mechanischen Verdichtungen und Verdünnungen von ıermischen Veränderungen begleitet sind, welche infolge des raschen Wechsels ch nicht so rasch ausgleichen, dafs sie nicht die elastischen Kräfte der Luft ›einflussen müfsten. Es wird nämlich in den Verdichtungen die Luft erwärmt ıd ihre Spannkraft vergröfsert, in den Verdünnungen ebenso die Spannkraft ɪrkleinert, daher der Unterschied der Spannungen, d. i. die die Fortpflanzung ewirkende Spannungsdifferenz, in stärkerem Mafse vergröfsert, als es bei gleichıäfsiger Temperatur wäre. Die durch LAPLACE korrigierte Formel lautet dann: $= \sqrt{\frac{e}{d} \cdot \frac{S}{s}}$, wo $\frac{S}{s} = 1{,}41$ das Verhältnis der spezifischen Wärme der Luft i konstantem Druck zu jener bei konstantem Volumen (§§ 72, 82) ist. Zu diesem urch die Temperaturwechsel bedingten Korrektionsfaktor tritt noch der 'aktor $(1 + \alpha t)$, wenn die durchschnittliche Temperatur nicht 0°, sondern $t°$ C it, wodurch sich die Formel zu $c = \sqrt{\frac{e}{d} \cdot \frac{S}{s} (1 + \alpha t)}$ erweitert. — Dagegen st eine Angabe des jeweiligen Dichtigkeitszustandes (gemessen durch den Baroneterstand) für die Schallgeschwindigkeit in Gasen nicht nötig, weil bei 2, 3 . . . nal so grofser Dichte auch die Spannkraft 2, 3 . . . mal so grofs ist und somit ler Quotient $e:d$ derselbe bleibt. — Wohl aber sind an obigen Formeln noch weitere Korrektionen anzubringen mit Rücksicht auf die Beimischung von Wasserdampf und anderen Gasen zur Luft. Erst durch Abrechnung dieser Mitbedingungen ergibt sich als

theoretische **Fortpflanzungsgeschwindigkeit** der Schall- und anderer **elastischer Wellen** in trockener **Luft** bei 0°C (unabhängig vom **Barometerstand**): $c = \mathbf{333\,m\,sec^{-1}}$ (genauer: 331,36). — Für Luft von mittlerer Temperatur und Feuchtigkeit kann rund $340\,\mathrm{m\,sec^{-1}}$ gelten.

Für ungewöhnlich starke Schallerregungen, wie Explosionen, aber auch für e Verdichtung der Luft vor einem Projektile, fand MACH durch mittelbare ethoden (es wurde die Luft um das fliegende und durch einen elektrischen ınken beleuchtete Projektil mit Hülfe der „Schlierenmethode" photographiert), ſs hier die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher Impulse in Luft bis gegen) m $\mathrm{sec^{-1}}$ betragen kann. Von diesen Geschwindigkeiten wird die obige schwindigkeit von $340\,\mathrm{m\,sec^{-1}}$ als die normale Fortpflanzungsgeschwindigkeit s Schalles in der Luft unterschieden.

Bei festen und flüssigen Stoffen sind Korrektionen für die Temperaturwechsel und für die Durchschnittstemperatur gewöhnlich nicht nötig (immerhin aber für geeichte Stimmgabeln, § 86), da weder Elastizität noch Dichte sich merklich mit der Temperatur ändern. Es gelten daher folgende Angaben annähernd für beliebige Temperaturen: In Hölzern ist die Schallgeschwindigkeit 10 bis 18mal, in Gufseisen 10mal, in Silber 9mal, im Wasser 4,2mal so grofs als in der Luft. Dabei stimmt der bei Wasser direkt gefundene Wert sehr gut mit dem theoretischen. — Für feste Stoffe (Metalle, Glas, Holz . . .) läfst sich c am leichtesten ermitteln, indem man aus ihnen Stäbe formt, sie in longitudinale Schwingungen versetzt und deren Schwingungszahl aus der Tonhöhe entnimmt. Weil nun, wenn der Stab in der Mitte festgeklemmt ist und den Grundton gibt, die Stablänge L gleich ist der Länge l einer stehenden Welle (= der halben Wellenlänge einer fortschreitenden), so kann aus $2L = \frac{c}{n}$ geschlossen werden $c = 2Ln$. — Ebenso läfst sich c für Luft und andere Gase bei beliebigen Temperaturen indirekt experimentell finden, indem man Pfeifen mit diesen Gasen füllt und die Tonhöhen beim Anblasen beobachtet; vergl. die Beziehungen zwischen L und l in § 89, Fig. [illegible]

Wie in diesen Beispielen kann überhaupt die Kenntnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles in einem gegebenen Stoff für die mittelbare Erkenntnis der elastischen Kräfte dieses Stoffes Aufschlufs geben.

§ 93. Reflexion und Brechung, Beugung und Interferenz des Schalles.

Beobachtungen und Versuche: Ruft man gegen eine hinreichend entfernte Wand (Gebäude, Waldessaum, Felsen . . .), so vernimmt man den Ruf als **Echo** oder **Wiederhall**. Ist der Schall so stark (Pistolenknall), dafs eine 340 m entfernte Wand noch ein merkliches Echo gibt, so verfliefsen zwischen Schufs und Echo 2 sec; bei 340 : 18 = $18^{8}/_{9}$ m nur $^{1}/_{9}$ sec. Je nachdem der Schall hinreichend stark und zeitlich scharf abgegrenzt ist, vernehmen wir schon nach etwa $^{1}/_{9}$ sec, also in etwa 20 m Abstand von der Wand, das Echo, sonst nur bei entsprechend gröfserem Abstande. Bei kleinerem Abstande (in Sälen, Gängen . . .) zeigt sich nur ein **Nachhall**.

Bei einer entsprechend weit entfernten Wand gibt es ein **mehrsilbiges**, bei mehreren verschieden weit entfernten und entsprechend gerichteten Wänden ein **mehrfaches** Echo; z. B. bei Adersbach in Böhmen ein siebensilbiges dreifaches.

Dafs bei den Erscheinungen des Widerhalles (wie man Wiederhall und Nachhall zusammen auch nennt) eine **Reflexion** der Schallwellen stattfindet, schliefsen wir zunächst nach Analogie zur Reflexion elastischer Körper an Wänden einerseits, der Reflexion von Licht- und Wärmestrahlen anderseits. Wir werden daher auch erwarten, dafs auch für „Schallstrahlen" das Reflexionsgesetz gilt: Der reflektierte Strahl bleibt in der Einfallsebene; und Der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel. Doch ist zu bemerken, dafs weder der Begriff des **„Schallstrahles"** auf so direkt nachweisbaren Tatsachen beruht wie der des Lichtstrahles, noch auch die Reflexion des Schalles sich auf annähernd ebene Flächen beschränkt, bei denen man überhaupt von einem Einfallslot und daher einem Einfalls- und Reflexionswinkel mit einiger Genauigkeit sprechen kann.

:antlich kann ja auch ein Waldessaum, der nichts weniger als einer Ebene icht, ein sehr kräftiges Echo geben; was sich immerhin daraus erklären läfst, s auch die Luft zwischen den Baumblättern und Zweigen schwerer beweglich . [Dies wieder läfst sich vergleichen mit den Erscheinungen der Reflexion am deckten Ende der Pfeifen. Überdies zeigt sich eine Reflexion auch an dem fenen Ende von Gängen, die ins Freie münden, wovon dann die Reflexion an m offenen Ende der Pfeifen (§ 89) ein spezieller Fall ist, und was sich, wie dort, raus erklärt, dafs die Luft aufserhalb des Ganges freier beweglich ist als in m.] Erst solche Tatsachen berechtigen uns also, den Begriff der Reflexion wirkch auch auf Schallwellen auszudehnen. In der Tat haben sich die Reflexions:scheinungen für Licht und strahlende Wärme auch für den Schall nachahmen sen, z. B. Ticken einer Uhr zwischen zwei Hohlspiegeln, ähnlich dem Versuch it zwei Brennspiegeln (§ 119). — Flüstergewölbe. Ohr des Dionysius.

Desgleichen wurden durch grofse linsenförmige Säcke, die mit Gasen von derer Dichtigkeit als Luft erfüllt waren, die Erscheinungen der Lichtbrechung i Linsen nachgeahmt. In der Natur kommen solche **Brechungen** von Schallrahlen vor, wenn Schall schief durch verschieden dichte Schichten der Atmohäre hindurch weit sich fortpflanzt; also zu vergleichen der atmosphärischen rahlenbrechung des Lichtes (§ 197). Vorwiegend aus solchen Brechungen erklärt sich nach Jäger, dafs wir um so viel besser den Schall aus dem Tal auf dem erg, als umgekehrt hören. — Viel auffallender als die Brechungen sind übrigens die Erscheinungen der **Beugung** des Schalles. Wir können ohne weiteres m die Ecke hören". Es fehlt geradezu an Tatsachen, welche die volle Analogie iten zu denjenigen Grunderscheinungen der Optik, die uns zum Begriffe der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes" führen, nämlich Dunkelkammer nd Schatten (§ 99), wir könnten höchstens von sehr verschwommenen „Halbchatten des Schalles" sprechen.

Namentlich diese Tatsachen der Beugung des Schalles und seiner Reflexion ach an sehr unebenen Wänden stehen aber in vollem Einklange mit der Huygensschen Vorstellung von der Ausbreitung der Wellen (§ 68), wenn wir edenken, dafs die Schallwellen so unvergleichlich gröfsere Länge haben als die ichtwellen. Denken wir uns nämlich z. B. in Fig. 264 und Fig. 265 (S. 250) statt er durch die Gerade MN dargestellten reflektierenden Ebene eine von dieser Ebene unregelmäfsig abweichende Reihe von Punkten (die Bäume des echogebenden Valdessaumes darstellend), welche als jeweilige Erregungszentren Huygensscher Elementarwellen wirken, so wird die einhüllende Fläche der Elementarwellen och noch einer Ebene ähnlich bleiben, wenn jene Abweichungen im Vergleich zu en Wellenlängen unbeträchtlich sind. — Erst nach Berücksichtigung aller dieser Nebenumstände dürfen wir sagen:

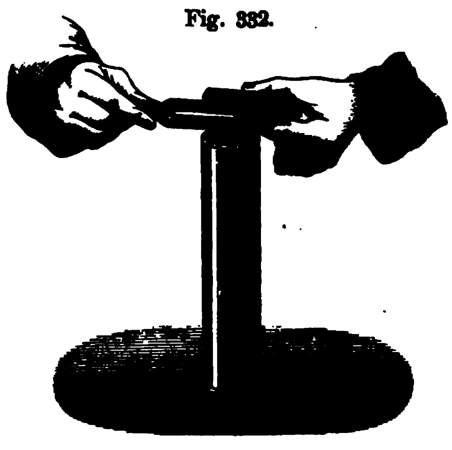
Auch für die als Schallwellen wirksam werdenden Luftwellen elten die Gesetze der **Reflexion, Brechung** und **Beugung** gemäfs er allgemeinen Wellenlehre.

Aufser der gerade bei den Schallwellen namentlich für die Klangfarbe (§ 90) wichtigen Erscheinung der Superposition im allgemeinen läfst sich auch eziell **Interferenz** von Wellen gleicher Wellenlängen und Amplituden in zahlchen Erscheinungen nachweisen; so in folgendem

Versuch: Eine Stimmgabel (ohne Resonanzkasten) wird nahe dem Ohre bei igens unveränderter Stellung zu diesem um ihre Längsachse gedreht. Man t dann ein An- und Abschwellen des Tones. (Auch für einen gröfseren

Zuhörerkreis wird dieser Wechsel der Tonstärke deutlich, wenn man die Gabel über eine passend abgestimmte Resonanzröhre hält. Wird über die eine Zinke ein Papierrohr geschoben, so zeigt sich die Schwächung der Tonstärke nicht; Fig. 332. — Erklärung: Die Stimmgabelzinken befinden sich in Bezug auf die zwischen ihnen liegende Symmetrieebene in symmetrischen Schwingungszuständen und entsenden daher zu jedem Punkte jener Ebene Wellen, die, weil sie gleiche Wege zurücklegen müssen, immer im selben Zeitpunkte je eine Verdichtung, bezw. eine Verdünnung erregen, also sich zu allen Zeiten unterstützen. Dagegen wird es Punkte M, M' geben, bis zu welchen die Wegunterschiede je eine halbe Wellenlänge betragen; an diesen Stellen heben sich dann die Wellen auf. Die Erscheinung wurde von Th. Young beobachtet und von den Gebrüdern Weber gründlich untersucht; sie ist vorbildlich für Fresnels Spiegelversuch (§ 126).

Fig. 332.



Weitere Erscheinungen der Interferenz des Schalles: Hopkins gegabelte Röhre (Fig. 316); Kundts Interferenzröhre mit posaunenartig zu verlängernden Röhren; hier gibt der leicht direkt zu messende Wegunterschied der Wellen ein Mittel zur Bestimmung der Wellenlänge und weiterhin der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft. — Eine besondere Art der Interferenzerscheinungen sind die

Schwebungen oder Stöfse. *Versuch*: Werden von zwei gleich gestimmten Stimmgabeln die Zinken der einen mit leichten Laufgewichten versehen (oder mit Wachs beklebt), so vernimmt man ein An- und Abschwellen des gemeinsamen Tones in um so rascherer Folge, je stärker die Verstimmung ist. Die Anzahl der Schwebungen oder Stöfse ist gleich der Differenz der Schwingungszahlen der beiden Gabeln, übrigens unabhängig von den absoluten Schwingungszahlen (LA 158).

LA 158.

Fig. 333.

Erklärung (vergl. Fig. 333): Beträgt z. B. diese Differenz 1, d. h. sind die Schwingungszahlen der Gabeln n und $n + 1$, so enthält der in 1 sec entsendete Wellenzug n, bezw. $n + 1$ Wellenberge, so dafs i[n] der Mitte dieses Wellenzuges Berg und Tal aufeinander fallen, also einand[er] schwächen, am Anfang und Ende des Wellenzuges aber Berg auf Berg einand[er]

stärken. Bei n und $n + 3$ ist $n:(n + 3) = \frac{n}{3} : \left(\frac{n}{3} + 1\right)$ und es tritt somit ein An- und Abschwellen des Tones schon in je $^1/_3$ sec ein, also in 1 sec dreimal. bt also z. B. eine Stimmgabel mit einer Normalstimmgabel in 1 sec ν Stöfse, so trägt ihre Schwingungszahl 435 + ν oder 435 — ν. Entscheidung zwischen sen zwei Möglichkeiten durch direktes Anhören oder durch Aufkleben von achs auf die zu prüfende Gabel. — Über die Beteiligung dieser Stöfse an dem uhen Zusammenklang dissonierender Klänge vergl. psycholog. Anh., Nr. 43. Anh. 43.

§ 94. Mittönen und Resonanz. Absorption und Intensität des Schalles.

Versuch a): Hält man in die Nähe einer klingenden Glocke eine öhre, die zu solcher Länge ausgezogen ist, dafs sie, wie eine Pfeife ngeblasen, einen Ton von gleicher Höhe gibt, wie die Glocke, so erät die Luft in der Röhre ins **„Mittönen“**, und zwar selbst dann, enn die Glocke nur mehr so schwach klingt, dafs man sie allein aum noch hören würde.

Versuch b): Eine von der Zimmerdecke oder dergl. herabhängende nd durch ein Gewicht gespannte Saite gibt selbst bei starken Schwinungen nur einen kaum hörbaren Klang; wird sie auf das Monochord, ine Violine ... gespannt, so wird ihr Klang durch die **„Resonanz“** es elastischen Holzes und der Luft im Kasten voll und kräftig.

Das Mittönen tritt nur bei gleichgestimmten Körpern ein, Resonanz agegen auch bei solchen, die nicht auf einen bestimmten Ton abgestimmt sind; rsteres dauert häufig (z. B. zwischen zwei leichen Stimmgabeln) auch nach dem ufhören des ursprünglichen Klanges noch rt, letzteres nicht. — Wovon hängt die üte einer Violine hauptsächlich ab? — inge in ein offenes Klavier, dessen Dämpfer ehoben sind, Klänge verschiedener Höhe nd Klangfarbe (Vokale); nur die mit em Grundton und den Obertönen jedes langes gleichgestimmten Saiten geraten u Mittönen, wodurch der Klang genau achgeahmt wird. — HELMHOLTZ' Resonatoren (Fig. 334, hierzu § 90).

Fig. 334.



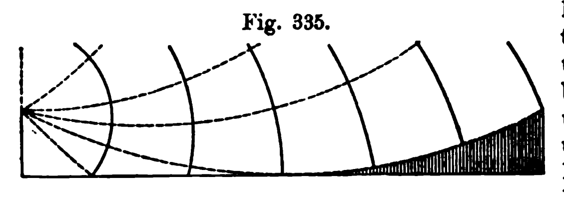
Das Mittönen erklärt sich als rein mechanische Folge der allmählichen ummierung schwacher Anstöfse an einen Körper, dem eine bestimmte Schwinungszahl zukommt. Hat man z. B. von einem Pendel (Zwirnknäuel an Faden) ie ihm nach seiner Länge zukommende Schwingungsdauer ermittelt und bläst nun hwach, aber in gleichem Tempo mit den Schwingungen auf das Pendel, so gerät es bald in kräftige Schwingungen. (Dies auch noch, wenn man nur bei jeder weiten, dritten ... Schwingung bläst.) Läuten schwerer Glocken durch kleine naben. Schwingungen einer Kettenbrücke beim Darübergehen im bestimmten ikte... Da strenge Gleichheit der Schwingungsdauern zweier zusammen schwinender Körper unendlich unwahrscheinlich wäre, so zeigen alle Erfahrungen über

das Mitschwingen, speziell Mittönen, daſs dieses auch bei hinreichen
Verschiedenheit der Schwingungsdauern eintritt. Es suchen sich aber zv
Körper in ihren Schwingungsdauern einander anzupassen, z. B. zwei Pen
welche an demselben Brett befestigt sind, nehmen gleichen Gang an,
auch sonst merklich differieren würden.

Die Tatsachen der Resonanz machen uns insbesondere darauf auf
daſs, wenn z. B. eine Saite gar keine Gelegenheit hätte (sie hänge an ein
starren Körper in luftleerem Raume), ihre lebendige Kraft an umgebend
abzugeben, zwar ihre Schwingungen ins Unendliche fortsetzen müſste
so lange, bis sie durch innere Reibung sich in Wärme umgesetzt hätt
auch keinerlei Ton von sich geben könnte. Indem die Resonanzkästen ei
Abgabe der lebendigen Kraft erleichtern, dämpfen sie zugleich die Schw

Daſs der Schall sich nicht auf sehr groſse Entfernungen ausbreitet
schläge sind bis auf höchstens 22 km gehört worden, die Explosion des
1883 allerdings auf Abstände wie von Berlin bis nach Petersburg und l
hat mannigfaltige l
teils Reflexion des
teils Brechung v
beim Übergang in d
und dabei meistens
und feuchteren Schi
Luft (Fig. 335), s
Umsetzung der l

Fig. 335.



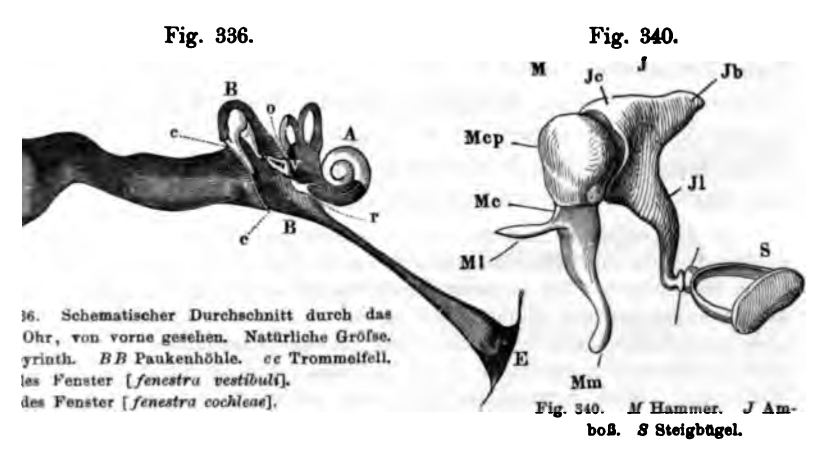
Kraft der Schallschwingungen in andere Formen von Energie, meist s
Wärme. So wird durch ein Schneegestöber der Schall sehr gedämpft. G
mit Schaumwein, Bier, gestandenem Wasser gefüllt sind, klingen beim .
dumpf. Dieses Aufgezehrtwerden der Schallwellen als solcher kann v
werden mit der Absorption des Lichtes und der strahlenden Wärme (§§

Nur wo solche Absorption des Schalles nicht stattfindet, gilt
retische Überlegung, daſs, wenn von einem Punkte in einem allseitig glei
Medium der Schall sich ausbreitet, dieselbe lebendige Kraft sich über Ku
von 1, 2, 3 . . . r cm Radius und daher über 1-, 4-, 9-, 16 . . . r^2mal
Flächen verteilt, so daſs auch für den Schall das Intensitätsgeset
gilt (§§ 97, 117).

C. Die Wahrnehmung des Schalles.

§ 95. Aus der Anatomie des Gehörorganes.

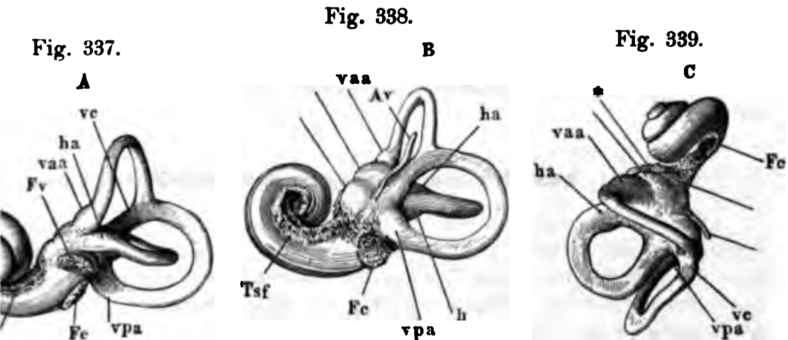
Fig. 336. Fig. 340.



36. Schematischer Durchschnitt durch das Ohr, von vorne gesehen. Natürliche Größe. yrinth. *BB* Paukenhöhle. *cc* Trommelfell, les Fenster [*fenestra vestibuli*]. des Fenster [*fenestra cochleae*].

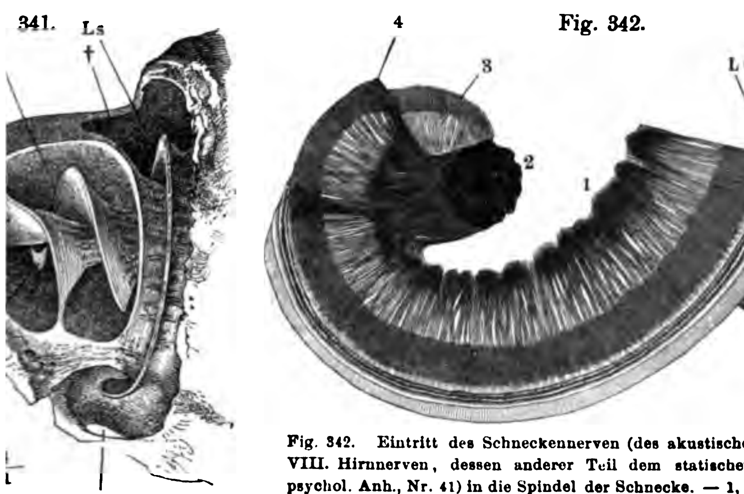
Fig. 340. *M* Hammer. *J* Amboß. *S* Steigbügel.

Fig. 337. Fig. 338. Fig. 339.



17—339. *A* Linkes Labyrinth, von außen. *B* Rechtes Labyrinth, von innen. *C* Linkes Labyrinth, en. — *Fc Fenestra cochleae* (der Schnecke). *Fv Fenestra vestibuli* (des Vorhofes). — *h* Horizontaler Bogengang. *vc* Gemeinschaftlicher Schenkel der beiden vertikalen Bogengänge.

341. Fig. 342.



ıerne rechte Schnecke, von — *H* Hackenförmiges Ende ıs Helikotrema (die Komıöffnung begrenzend).

Fig. 342. Eintritt des Schneckennerven (des akustischen Zweiges des VIII. Hirnnerven, dessen anderer Teil dem statischen Sinne dient, psychol. Anh., Nr. 41) in die Spindel der Schnecke. — 1, 3, 4 knöcherne Anh. 41 Scheidewand der Schnecke.

die Schnecke durch die das **runde Fenster überziehende** Memb
Vom Trommelfell erstreckt sich in der Paukenhöhle die Ke
Gehörknöchelchen: **Hammer, Ambofs, Steigbügel** (Fig. 340
bis an die Membran des ovalen Fensters. — Im übrigen sind
höhle, Gehörgang und Eustachische Röhre von Luft, Schnecke
und Halbzirkelgänge von Gehörwasser erfüllt.

Da die peripheren Endorgane der die Klangempfindungen vermittelnd
gewisse Gebilde der Schnecke sind, so beschreiben wir diese noch etwa
(nach Helmholtz): Die Höhlung der Schnecke ist der des Gehäuses ei
bergschnecke durchaus ähnlich, nur ist der Schneckenkanal des Ohres d
quer verlaufende, teils knöcherne, teils häutige Scheidewand in zwei
ständig voneinander getrennte Gänge getrennt. Nur an der Spitze der
bleibt eine kleine Kommunikationsöffnung zwischen den beiden Gän
Helicotrema. Der eine Gang kommuniziert mit dem Vorhofe, der andere
runden Fenster. Ein Teil jener häutigen Scheidewand heifst *membrana*
und ist eine feste, straff gespannte, elastische Membran, die in radialer
ihren starken Radialfasern entsprechend gestreift ist. Auf dieser *memb*
laris sind die Enden des Schneckennerven und deren Anhänge befestigt
342 a. v. S.).

§ 96. Aus der Physiologie des Gehörorganes.

Wie von den Anfängen der wissenschaftlichen Akustik an klar war
Ausbreitung des Schalles durch Wellenbewegung erfolge, so lag es a
diese Bewegungen bis an das Trommelfell und die Gehörknöchelchen zu
Aber erst Helmholtz erkannte allseitig im Zusammenhange mit seine
der Klangfarbe und Teiltöne (§ 90):

Die physiologische Funktion des Gehörorganes besteht w
im Mitschwingen der peripheren Enden des Gehörnerven,
der einzelnen Radialfasern der *membrana basilaris*.

Wegen der Ähnlichkeit, welche hiernach die Schnecke mit einem Kl
in welchem die Saiten je nach den ankommenden Schwingungen ins
geraten, nennt man diese Erklärung die „Hypothese von der Schnecken
(psychol. Anhang, Nr. 43). Eine physikalische Stütze erhält die Hypo
darin, dafs nach Versuchen von Hensen je einige der äufseren Hör
Schwanze einer Krebsart auf bestimmte Töne eines Klapphornes ins Mit
gerieten — also wohl ebenfalls zu den Hörorganen des Tieres gehören.

Anh. 43.

Früher wurde der ganze VIII. Hirnnerv als „Gehörnerv" bezeich

›ehre vom Licht (Physikalische Optik).

§ 97. Lichtempfindungen und physikalische Lichterscheinungen.

Rot, gelb, blau . . ., auch **weifs, grau, schwarz, braun** . . . und die übrigen „Farben“ (im weiteren Sinne) gelten der vorwissenschaftlichen Auffassung als Eigenschaften der Körper — der wissenschaftlichen Auffassung (psychol. Anh., Nr. 44) zunächst nur als Qualitäten unserer Lichtempfindungen. — Ebenso bezeichnen **hell, dunkel** einerseits Intensitätsgrade unserer Lichtempfindungen, anderseits aber selbst wieder qualitative Unterschiede, indem sich uns z. B. gelb als eine helle, blau als eine dunklere Farbe darstellt. Anh. 44.

Welche Lichtempfindung uns ein bestimmter Körper erregt, hängt nicht allein von ihm, sondern ebenso wesentlich auch vom Zustande unseres Auges ab (z. B. aus einem halbdunklen Hausflur auf die sonnenbeleuchtete Strafse tretend fühlen wir uns geblendet, von der Strafse in den Hausflur tretend erscheint uns dieser für kurze Zeit ganz finster. Vergleiche dieser verschiedenen „Adaption der Netzhaut“ mit der verschiedenen Wärmeadaption, § 70). — Wieder ist der Physiker als solcher bemüht, sich in der Untersuchung der „Lichtzustände“ der Körper (welcher Ausdruck nur zufällig nicht so gebräuchlich ist wie der analoge Ausdruck „Wärmezustand“) von seinen Gesichtsempfindungen möglichst unabhängig zu machen. — Von den Begriffen, die das „physikalische Verhalten der Körper zum Licht“ charakterisieren, sind schon der gewöhnlichen Erfahrung die folgenden geläufig:

I. **Selbstleuchtend** nennen wir Körper, wie die Sonne, Fixsterne, ›lektrisches Bogen- und Glühlicht, Flammen u. s. f., insofern sie Licht ›ussenden (Emission des Lichtes), ohne dafs ihnen Licht von ›nderen Körpern zugekommen ist (— eine Erweiterung dieses Begriffes ›r fluoreszierende, phosphoreszierende . . . Stoffe § 121). Alle nicht ›lbstleuchtenden Körper nennt man in der Physik (vom gewöhn- ›hen Sprachgebrauch etwas abweichend) **dunkle** Körper. Sie können **›leuchtet** werden durch selbstleuchtende oder auch wieder durch **leuchtete** Körper; z. B. durch den Mond, der als Vollmond die Erde leuchtet. — Der physikalische Vorgang an einem beleuchteten Körper unregelmäfsige Reflexion (Diffusion § 116) des Lichtes.

II. **Durchsichtig, durchscheinend, undurchsichtig** nennen wir › Stoffe nach der geringeren oder gröfseren Absorption des ›chtes, das in sie eindringt; feste Grenzen zwischen jenen drei ›fen gibt es nicht. Die durchsichtigen Stoffe heifsen **Lichtmedien.**

Auch klares Wasser ist in Schichten von mehreren Metern Dicke nur mehr ›chscheinend, und zwar von grünblauer Färbung, bei noch gröfserer Dicke

undurchsichtig. Umgekehrt ist Gold, welches, wie die übrigen Metalle, zu den undurchsichtigen Stoffen zählt, durchsichtig in äufserst feinen Schichten (0,00001 mm, durch chemische Vorgänge auf Glas niedergeschlagen); wobei die blaugrüne Färbung beweist, dafs es nicht etwa nur Risse und Spalten in der Schicht sind, die Licht durchlassen. — Die Beispiele zeigen auch, dafs die nähere Untersuchung über Durchsichtigkeit auf die verschiedene Absorption verschiedener Lichtqualitäten Rücksicht zu nehmen hat. Daher alles Nähere über Emission und Absorption des Lichtes erst im Abschnitt B (§ 114 ff.).

III. Nach alltäglichen Erfahrungen erscheint uns dieselbe Lichtquelle, aus grofser Entfernung gesehen, weniger hell leuchtend als aus kleiner; auch wird z. B. ein Buch in grofser Entfernung von einer hell leuchtenden Lampe nur wenig hell beleuchtet.

Gehen wir von der Annahme aus, dafs die „Lichtmenge", welche von einem leuchtenden Punkte A kommt, sich unvermindert (und unvermehrt) über zwei um A als Mittelpunkt mit den Radien r und R cm beschriebene Kugelflächen ausbreite, und dafs auch diese Kugelflächen, ohne etwas von dem Licht zurückzubehalten, dieses wieder (gegen innen) zurückwerfen, so ergibt sich schon aus diesen Annahmen rein geometrisch (wegen $o : O = 4\pi r^2 : 4\pi R^2 = r^2 : R^2$), dafs sich die Beleuchtungsstärken der beiden Flächen wie $\frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2}$ verhalten werden. Inwieweit diese Annahmen physikalisch verwirklicht sind, hängt aber ebenfalls wieder ganz 1. von der Emission seitens der Lichtquelle (die ja z. B. bei elektrischen Bogenlampen keineswegs nach allen Seiten gleichmäfsig erfolgt), 2. von der Absorption innerhalb des zwischen Lichtquelle und Fläche verbreiteten Mediums und 3. von der diffusen Reflexion der beleuchteten Fläche ab. Daher auch die nähere Untersuchung über Lichtintensitäten erst im Abschnitt B (§ 117). —

Fig. 343.

Wiewohl die physikalische Optik ihrem Namen nach (Stamm ὀπ, sehen — vergl. über physiologische und psychologische Optik psychol. Anh., Nr. 44) es nur mit den Lichterscheinungen zu tun hätte, so haben sich doch die für sie geltenden physikalischen Gesetze (der **geradlinigen Ausbreitung, Reflexion, Brechung; Emission, Absorption, Dispersion, Diffusion; Beugung, Interferenz; Polarisation, Doppelbrechung**) in so durchaus analoger Weise auch für die Wärmestrahlung und chemische Strahlung, ja zum gröfseren Teil neuestens auch für die Ausbreitung elektrischer Strahlen, Röntgenstrahlen und anderer als giltig erwiesen, dafs — unter Beibehaltung des herkömmlichen Namens „Optik" (physikalisch sachgemäfser wäre ganz allgemein: „Lehre von der Strahlung") — in ihr auch diese für unsere direkten Sinnesempfindungen heterogenen Erscheinungsgebiete behandelt werden.

Dieser Mannigfaltigkeit der Erscheinungen gegenüber wird es notwendig (und entspricht auch der historischen Entwickelung), zuerst die geometrische Seite aller dieser Erscheinungen für sich in der **„geometrischen Optik"** zu behandeln und zu diesem Behufe den der gewöhnlichen Sprache geläufigen Begriff „Lichtstrahl" einer künstlichen Umbildung zu unterziehen.

A. Geometrische Optik.

§ 98. Lichtstrahl.

Die gewöhnliche Sprache nennt „Lichtstrahlen“ die hellen, mehr oder minder
ten Streifen, welche man bemerkt, wenn z. B. die Sonne durch zerrissene
olken ihr Licht in die dunstige Luft sendet (Fig. 344), desgleichen die Streifen

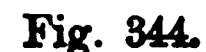


Fig. 344.



der, Zylinder, Kegel . . .), innerhalb deren die Staub-, Rauch- . . . Teilchen
Zimmerluft beleuchtet werden, wenn Sonnenlicht durch die Öffnung eines
sterladens oder wenn elektrisches Bogenlicht aus der Linse des Skioptikons tritt.
Der Physiker bildet diesen populären Begriff des „Lichtstrahls“ mehrfach
nämlich: 1. Der Lichtstrahl wird als eine Linie ohne jede Ausdehnung in
Dicke gedacht; eine solche wäre also zu erhalten, wenn von einer punk-
llen Lichtquelle Licht durch eine punktuelle Öffnung, z. B. des Fenster-
ns einträte — was beides physikalisch nicht genau, wohl aber an der Dunkel-
mer ohne Linse (§ 99) annähernd herstellbar ist. Der Forderung, dafs der
tstrahl keine Dicke haben soll, kommen wir übrigens auch dadurch näher,
wir an einem Lichtstreifen nicht ihn selbst, sondern nur seinen Rand in
acht ziehen. 2. Es wird von allen qualitativen Unterschieden der Strahlen
sehen, also zunächst von ihrer Farbe (§ 114), die sich für feinere Unter-
ungen wieder von der Schwingungszahl, bezw. Wellenlänge (§ 124) abhängig
. 3. Auch die hiermit zusammenhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit
ichtes, die aufser in den subtilen Erscheinungen der §§ 122 und 186 überall
ıdlich grofs anzunehmen ist, kommt für die geometrische Optik nicht in
cht. — Dagegen:

Dem Begriff des Lichtstrahles sind innerhalb der geometrischen
k wesentlich die beiden Merkmale 1. **Richtung**, 2. **Geradlinigkeit.**

Dafs wir z. B. sagen, das auf der Erde wahrnehmbare Sonnenlicht breite
in der Richtung Sonne-Erde aus, nicht umgekehrt, ist zunächst nur ein

Ausdruck der allbekannten Tatsache, dafs, wenn z. B. durch eine Öffnun
Fensterladen ein Lichtstreifen auf eine Stelle C der gegenüberliegenden Wa
und ich halte zwischen A und C in B meine Hand oder sonst einen undurchs
Schirm, hierdurch nicht die Lichterscheinung längs AB, sondern nur di
BC aufgehoben wird. Das Erlöschen und Wiederauftreten des Lichtes sc
allen Punkten dieser Strecken streng gleichzeitig zu geschehen. — Dafs
die Geradlinigkeit keineswegs allgemein, sondern nur unter der Be
eines „gleichartigen Mediums" gilt (auf das wir aber umgekehrt
selbst erst wieder aus der Geradlinigkeit schliefsen), zeigen die folgenden

Fig. 345.

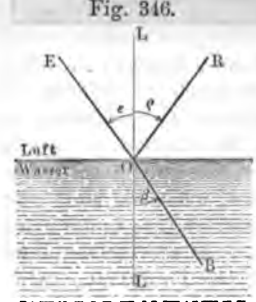






Vorı
über Ref
und Bre
1. Trifft ei
band auf d
nungsfläc
Luft und
(Fig. 345
lich die „(
Scheibe"
spaltet
in zwei
das eine
alte Medium (Luft) **reflektiert,** das a
das neue Medium (Wasser, Glas) **gebı**
Denken wir uns diese Bänder von ver
dender Dicke, also durch Gerade ers
gilt für diese: Der reflektierte Str
und der gebrochene OB liegen n
einfallenden EO und dem Einfalls
(Fig. 346) in einer Ebene, der **Einfall**
Einfallslot und Einfallsebene stehen
Trennungsfläche der beiden
normal. **Vom Einfallslot aus** wer
zählt der **Einfallswinkel** ε, der **Reflexionswinkel** ϱ, der **Brec**
winkel β. —

Fig. 346.



2. In einem Gefäfse seien mehrere Schichten Kupfervitriollösung
schiedener Konzentration übereinander gelagert. Fällt ein **Lichtband schie**
Luft auf die oberste Schicht, so zeigt es bei jedesmaligem **Übergang in ein**
Schicht eine merkliche Ablenkung, es bildet also eine **gebrochene Linie.**
einiger Zeit Diffusion zwischen benachbarten Schichten **eingetreten, so**
statt der gebrochenen Linie eine stetig gekrümmte auf. **Dies zeigt,**
Licht sich unter Umständen auch krummlinig ausbreiten **kann.**

Es ist also bei allen zunächst folgenden Konstruktionen **und Rechnu**
geometrischen Optik in Erinnerung zu behalten, unter **welchen Bedi**
die Darstellung von Lichtstrahlen durch mathematische **Gerade nicht me**



[I]ndem ferner im Abschnitt II zunächst die **Reflexion** abgesehen von der
g und dann in III die **Brechung** abgesehen von der Reflexion behandelt
st überdies zu beachten, daſs in der Natur beide Vorgänge immer
ıen vorkommen (mit Ausnahme der „**totalen** Reflexion“, § 104).

I. Geradlinige Ausbreitung des Lichtes.

§ 99. Schatten und Dunkelkammer.

schichtliches: PORTA, dem die Erfindung der Dunkelkammer meistens zu-
ben wird, beschreibt 1558 die Dunkelkammer ohne Linse, 1589 die mit
mmellinse. Aber schon LIONARDO DA VINCI † 1519 hatte den Augapfel
r Dunkelkammer verglichen, ohne noch der Linsenwirkung des Auges zu
n. Ja schon im 14. Jahrhundert waren Sonnenfinsternisse mittels Dunkel-
wirkung beobachtet und messend verfolgt worden. —

rversuch: Schneiden wir aus einem Stück Karton ein kleines Dreieck
nd stellen I. dieses undurchsichtige Dreieck, II. den mit der dreieckigen
versehenen undurchsichtigen Karton zwischen eine Kerzenflamme und
hirm, so treten bei I. die allbekannten Erscheinungen des **Schattens**, bei
ninder allgemein beachteten Erscheinungen der **Dunkelkammer ohne**
uf. Die **verwaschenen** Ränder des Bildes bei II. entsprechen den
ıatten bei I.

e Einzelheiten dieser Erscheinungen I. und II. (ausgenommen die sie
ıden „Beugungen“ siehe unten) ergeben sich, wenn wir von **allen Punkten**
ıtquelle zu **allen Punkten** des schattenwerfenden Körpers (einschlieſslich

Fig. 347.

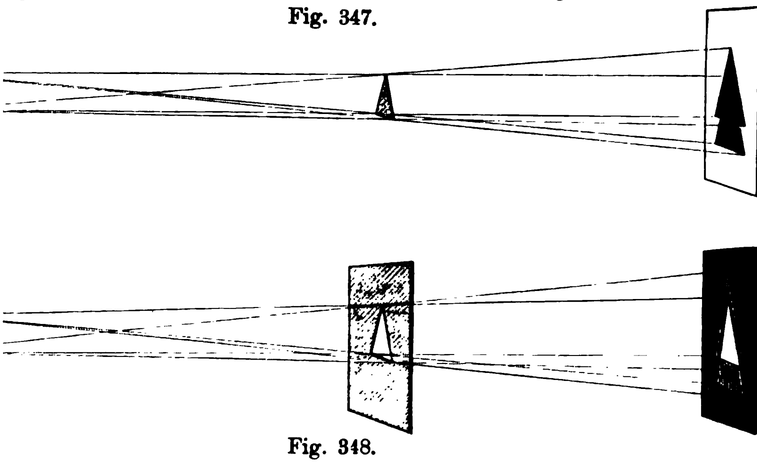


Fig. 348.

undurchsichtigen Karton umgrenzten Öffnung bei II) **Gerade** ziehen und
Schirm verlängern (Fig. 347, Fig. 348). — Je nach den verschiedenen
ıchen Gestalten der **Lichtquelle** (Kerzenflamme, Lampenkugel, Sonne ...)
Schattenwerfers (undurchsichtige Kugel, Schattenspielfiguren, Dia-
ı mit kreisrunder, dreieckiger, spaltförmiger . . . Öffnung) lassen sich
eometrisch **konstruieren** und **berechnen**

I. α) 1. **Selbstschatten, 2. Schattenraum, 3. Schlags**
β) 4. **Kernschatten, 5. Halbschatten;**

LA 159. sechs Kombinationen von α und β (LA 159), z. B. **Kern- u**
schatten im Schlagschatten, desgleichen im Schattenraum.

II. Gestalt und Gröfse der Bilder in der **Dunkelkamm**
sind um so schärfer, aber auch um so lichtschwächer, j
die Öffnung ist. Ist der Schirm sehr nahe an der Öffnung, s
im Bilde vorwiegend die Gestalt der Öffnung, ist der Sch
von ihr, so kommt vorwiegend die Gestalt des Gegenstan
Ausdruck; warum? Z. B. Auch eine schmale Spalte im Fen
gibt auf einem entfernten Schirm noch ein rundliches Sc

Indem nun die wirklich eintretenden Erscheinungen bei den Sc
der Dunkelkammer mit diesen Ergebnissen der Konstruktion und Rechn
weg übereinstimmen, ist der Satz von der geradlinigen Fortpfla
Lichtes erst erwiesen, und zwar indirekt. Der direkte Beweis w
bestehen, dafs wir uns sowohl die Lichtquelle wie den schattenwerfend
(bezw. die Öffnung der Dunkelkammer) punktuell herstellen, was
Anh 36. vornherein physikalisch unmöglich ist. (Log. Anhang, Nr. 36.)

Aber auch wenn wir diesen Grenzfällen unendlich kleiner Lichtq
Schattenwerfer, bezw. Öffnungen wenigstens sehr nahe zu kommen suc
Anwendung einer sehr schmalen Spalte im Fensterladen und eines ihr
dünnen Drahtes (z. B. einer Stricknadel), so zeigt auf einem Schirm
Abstände von Spalte, Draht und Schirm hinreichend grofs sind) der
sehr beträchtliche Abweichungen von der nach der blofsen Konstrukti
„gerader Lichtstrahlen" zu erwartenden Erscheinung; am auffallendste
dunklen, sowie die farbig eingesäumten hellen Streifen parallel zum
Insofern diese Erscheinung über die der geradlinigen Fortpflanzung h
heifst sie **Beugung.** Ähnliche Abweichungen von der Erscheinung de
kammer ergeben sich, wenn statt des Drahtes eine zweite schmale S
gebracht ist; Näheres über diese Erscheinungen im § 124.

§ 100. Optische Bilder.

Das Bildchen in der Dunkelkammer ohne Linse ist ein erstes Bei
optischen Bildes. Solche Bilder entstehen namentlich auch bei der R
(an ebenen und gekrümmten [Kugel-, Zylinder- . . ., Konkav-, Konvex-]
und bei der Brechung (Linsen, Prismen, auch an einer einzelnen Flä
von einer im Wasser liegenden Münze). Überall stellen wir hier den I

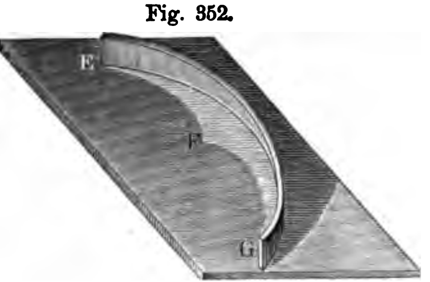
Alle von einem Punkte A ausgehenden Geraden bilden ein **homo- ıtrisches Strahlenbüschel.** Ist sein Scheitel A ein leuchtender nkt, so heifst er kurz Gegenstandspunkt. Werden nun diese ahlen durch irgend welche Vorgänge (insbesondere Reflexion und echung) so abgelenkt, dafs sie wieder ein homozentrisches

Fig. 349. Fig. 350. Fig. 351.



ischel mit einem anderen Scheitel B bilden, so ist B der **Bild- nkt** zu A. Gehen durch B die Lichtstrahlen selbst, so ist B ı **physisches Bild**; es läfst sich auf einem Schirm (in Rauch...) ıffangen. Gehen durch B nur die Rückwärtsverlängerungen r abgelenkten Lichtstrahlen, so ist B ein **geometrisches Bild**; läfst sich auf einem Schirm nicht auffangen.

Fig. 352.



In weitaus den meisten Fällen ist s Bild nur verschwommen, d. h. nem Punkte A entspricht nicht ieder genau ein Punkt B (scharfes ild), sondern ein beleuchteter aum, meistens begrenzt durch eine einhüllende Fläche" (math. Anang, Nr. 27, „kaustische Fläche"); hat iese eine Spitze wie z. B. die leuchtende urve, die sich an der inneren Seite ines auf Papier liegenden und durch ine etwas entfernte Lichtquelle A beleuchteten Fingerringes zeigt (Fig. 352), so eifst diese Spitze vorzugsweise das Bild B von A. —

Anh. 27.

Allgemeine Bemerkung zur geometrischen Optik: Begnügt man ch nicht nur mit der geometrischen Konstruktion und Berechnung der hatten, Bilder u. s. f., sondern nimmt man hinterher wieder Rücksicht auf die ichtbarkeit dieser optischen Erscheinungen, so kann dies von zweierlei Standnkt geschehen, einem **objektiven** und einem **subjektiven.** Z. B. Objektiv: n Punkt O liegt im Kern-, bezw. Halbschatten oder im unbeschatteten Raum, nachdem infolge des Schattenwerfers von keinem, bezw. einigen oder allen ilen der Lichtquelle Strahlen nach O fallen können. Subjektiv wird dann ein O befindliches Auge keinen oder ein Teil der Lichtquelle oder die ganze

erblicken. (Spezielleres Beispiel: Befinde ich mich vor Sonnenaufgang auf der Ostseite eines Berges, so sehe ich den Morgenglanz vom Gipfel des Berges nach dem Fufs sich senken und kann die Sonne im selben Zeitpunkt erblicken, wo die Schattengrenze durch mein Auge geht.) Entsprechend z. B. objektive Darstellung von Spektren auf Schirmen, subjektiv in Spektralapparaten.

II. Reflexion des Lichtes.

§ 101. Reflexionsgesetz.

Vorversuch: Ein Lichtband falle auf einen ebenen Spiegel. Wir lassen a) das Band, b) den Spiegel seine Lage ändern und beobachten die Bewegung des reflektierten Bandes. Es ergibt sich das Reflexionsgesetz:

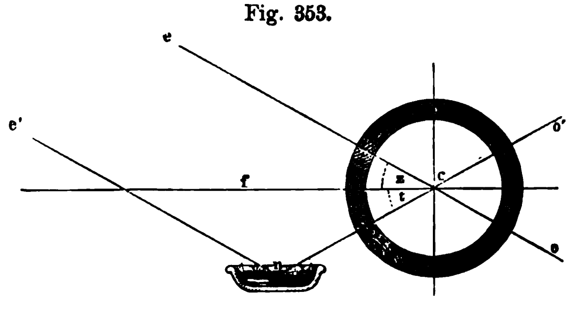
1. **Der reflektierte Strahl bleibt in der Einfallsebene;**
2. **der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel, $\varepsilon' = \varepsilon$.**

Häufig wird als „Reflexionsgesetz" nur der Satz 2 erwähnt; es ist aber klar, dafs durch 2. ohne 1. die Lage des reflektierten Strahles nicht bestimmt wäre, sondern irgend eine Seite des Kreiskegels sein könnte, dessen Achse das Einfallslot und dessen eine Seite der einfallende Strahl ist.

Da sich bei Versuchen, wie dem geschilderten, nur mit Lichtbändern experimentieren läfst, und auch die Lichtquelle selbst schon eine Ausdehnung hat, so kann auch das Reflexionsgesetz als eines über die Lichtstrahlen streng genommen nicht durch solche direkte Versuche erwiesen werden (Log. Anh., Nr 36). Der indirekte Beweis für die genaue Richtigkeit des Gesetzes liegt aber wieder darin, dafs alle Konstruktionen und Rechnungen über Spiegelbilder, wie sie sich aus dem zunächst hypothetisch angenommenen Gesetz ergeben, durch die Versuche bestätigt werden. — Ein vergleichsweise noch direkter Nachweis ist der folgende:

Anh. 36.

Fig. 353.



Man visiert durch ein „Diopter" (zwei einander gegenüberstehend fixierte Öffnungen mit „Fadenkreuzen" — bei einem Linsenfernrohr spielt schon das Brechungsgesetz mit) auf einen etwas tiefer stehenden Quecksilberhorizont (Fig. 353), in dem sich ein unendlich fern zu denkender Stern spiegelt. Richtet man dann das Diopter auf den Stern selbst, so zeigt sich der Winkel zwischen den beiden Fernrohrstellungen durch die Horizontale, d. i. eine zum Quecksilberspiegel Parallele, genau halbiert.

Die Lichtstärke des reflektierten Strahles ist wesentlich abhängig davon, ein wie grofser Anteil des auffallenden Lichtes in das neue Medium gebrochen wird. Daher geben die Oberflächen durchsichtiger Körper (Wasser, Fensterscheiben) keine lichtstarken Spiegelbilder. Die besten **Spiegel** sind die aus schwarzem Glas, aus Silber ..., ferner die auf totale Reflexion sich gründenden Reflexionsprismen (§ 106). Die gewöhnlich gebrauchten Spiegel bestehen aus Glas

mit Zinnamalgam belegt ist. Wegen der Doppelbilder sind sie für wissenftliche Zwecke wenig brauchbar. — Auch von dem Einfallswinkel allein n hängt bei demselben reflektierenden Stoffe die Lichtstärke des reflektierten hles ab. So zeigt auch schon eine mangelhaft polierte Tischplatte bei sehr hem Daraufsehen (d. h. unter grossem Einfallswinkel) recht deutliche, bei lem fast keine Spiegelbilder. Diese Unterschiede hängen zusammen mit der risation des Lichtes (§ 128), gehen also über die geometrische Optik hinaus.

Die **Diffusion** (oder sogen. unregelmäfsige Reflexion) des Lichtes, durch uns die Oberflächen der Körper sichtbar werden, ist kein reiner Reflexionsgang, wie sich schon daraus zeigt, dafs das von rotem, blauem Papier zurückrorfene Licht selbst rot, blau ist (genauer: gegenüberstehendes weifses Papier , blau erscheinen läfst). Daher Näheres über die Diffusion des Lichtes erst 16. Übrigens ist auch das z. B. von einem noch so glatt polierten Messingegel zurückgeworfene Licht gelblich.

Für die rein geometrischen Folgerungen aus dem Reflexionsgesetz, namenth für die Erklärung und Vorausbestimmung der Bilder an ebenen und Kugelgeln, ist sehr fruchtbar folgender allgemeine Satz:

Wegen der Gleichheit des Einfalls- und Reflexionswinkels ist s Reflexionsgesetz umkehrbar; d. h.: Ein Strahl, der in der chtung des vorher **reflektierten einfällt,** wird in der Richtung des her **einfallenden reflektiert.**

Daher kann unter anderm jede Zeichnung, die einen Reflexionsvorgang stellt, als für beiderlei Sinn der Ausbreitung des Lichtes längs der geometrien Geraden physikalisch giltig aufgefafst werden.

Geschichtliches. Das Reflexionsgesetz war schon den Alten wohl bekannt, wie entlich die (wenn auch übertreibenden) Erzählungen über ARCHIMEDES' Riesenlspiegel u. s. f. beweisen. Die arabische Physik des Mittelalters wufste sogar schon mlich schwierige Sätze über sphärische Abweichung an Hohlspiegeln u. dergl. htig aus dem Reflexionsgesetz abzuleiten.

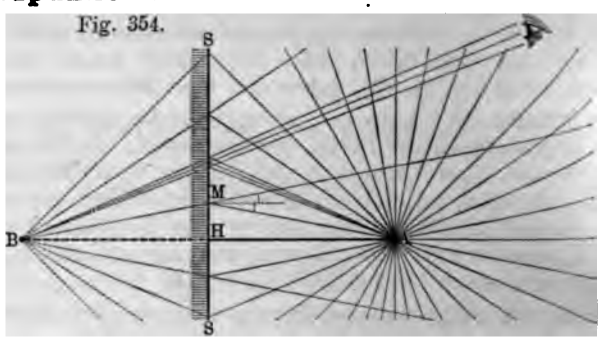
§ 102. Ebene Spiegel (Planspiegel).

a) Bilder eines einzelnen Punktes. Aufgabe: Man konstruiere beliebig vielen der von A (Fig. 354, a. f. S.) nach allen Seiten aushenden und den Planspiegel SS' treffenden Strahlen die reflektierten rahlen gemäfs dem Reflexionsgesetze und verlängere jeden dieser rahlen geradlinig hinter den Spiegel. Diese Rückwärtsverlängengen schneiden sich alle in demselben Punkte B: dieser ist o ein geometrisches Bild von A.

Die Lage von B in bezug auf A und SS ergibt sich aus dem Reflexionsetze so: Es sei der **Hauptstrahl** $AH \perp SS$ geradlinig hinter den Spiegel längert, desgleichen der einem beliebigen Strahl AM entsprechende reflektierte ahl; der Durchschnittspunkt beider Rückwärtsverlängerungen sei B. Da nun $\triangle\ AHM \cong BHM$ folgt: $AH = HB$, und zwar ganz unabhängig von Lage des Punktes M, so ist bewiesen, dafs alle Rückwärtsverlängerungen ch genau denselben Punkt B gehen. Somit:

Einem vor dem Planspiegel liegenden Gegenstandspunkt *A* en spricht ein auf dem Hauptstrahl gleich weit hinter dem Spieg liegender Bildpunkt *B*.

Fig. 354.



Es ist also die Spiegelebene *SS* die **Symmetrieebene zur Strecke *A*** hiernach die **kürzeste Konstruktion von *B* bei gegebenem *A* und ungeb** nur mittels des Strahles *AHB* (ohne *AM*, *MB*).

b) Bilder von Gegenständen. **Aufgabe: Man konstruiere für** größere Zahl von Punkten einer Geraden, eines **ganzen Körpers** Bildpunkte (Fig. 355). Allgemein ergibt sich:

Fig. 355.



Einem vor dem Planspiegel liegenden Gegenstande entsp ein zur Spiegelebene symmetrisch liegendes Bild; es liegt hinter dem Spiegel und ist **geometrisch, aufrecht, gleich g**

Vor einem Planspiegel kommen Bilder nur dann zu liegen, wenn a schon ein konvergentes Strahlenbüschel aufgefallen war (z. B. eines, d einem Punkte *A* mittels Sammelspiegel oder Sammellinse in einem hinte Planspiegel liegenden Punkte *A'* ein physisches Bild entworfen hätte); Anwend bei einzelnen Spiegelfernrohren (§ 112).

Aus der Symmetrie von Gegenstand und Bild in bezug auf die Spiege folgen zahlreiche speziellere Gesetze, namentlich für a) rein fortschreit b) rein drehende Bewegungen des Spiegels. Anwendung von b) beim **Sp sextanten** (Fig. 356), der zum Messen des Winkelabstandes α^0 zweier Lichtp

3. Sterne, in Bezug auf das Auge des Beobachters dient; um das Spiegelbild einen und das direkt gesehene Bild des anderen Lichtpunktes zur Deckung zu agen, ist eine Drehung des beweglichen Spiegels um $\frac{1}{2}\alpha^0$ erforderlich (LA 160). LA 160.
Über die **„Spiegelablesung“** als eine viel verwendete Methode feiner Winkelssungen vergl. math. Anh., Nr. 2. — Über das **Reflexionsgoniometer** (als Anh. 2.

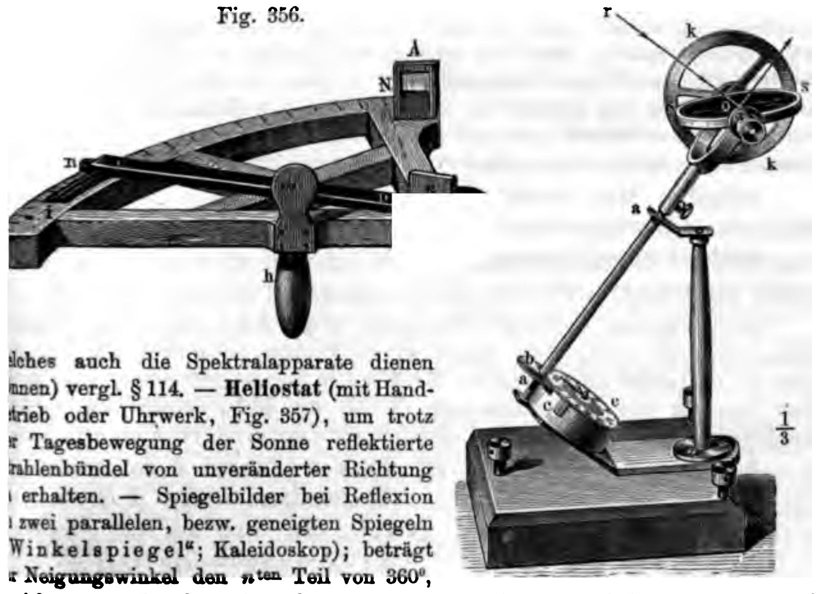


Fig. 356.

Fig. 357.

lches auch die Spektralapparate dienen nnen) vergl. § 114. — **Heliostat** (mit Handtrieb oder Uhrwerk, Fig. 357), um trotz r Tagesbewegung der Sonne reflektierte rahlenbündel von unveränderter Richtung i erhalten. — Spiegelbilder bei Reflexion i zwei parallelen, bezw. geneigten Spiegeln Winkelspiegel“; Kaleidoskop); beträgt r Neigungswinkel den n^{ten} Teil von 360°, sieht man nebst dem einen Gegenstande noch seine $n-1$ Spiegelbilder, hierbei ne passende Stellung des Auges vorausgesetzt. — Ferner LA 161, 162. LA 161, 162.

§ 103. Kugelspiegel (Sphärische Spiegel).

Sphärische Konkavspiegel (gewöhnlich kurz **Hohlspiegel** genannt) sind Teile von Kugeloberflächen, die an der konkaven Seite reflekren. — Der Mittelpunkt O der Kugel heifst **Krümmungsmittelpunkt** ath. Anh., Nr. 26), ihr Halbmesser von r cm Krümmungshalbmesser Anh. 26. s Spiegels. Ein Punkt liegt aufserhalb, in, bezw. innerhalb der ümmungsweite, je nachdem sein Abstand vom Spiegel $\gtreqless r$.

Gewöhnlich giebt man den Kugelspiegeln kreisförmige Ränder, also der gelfläche die Form von Kugelkappen; doch bilden auch Stückchen mit ebigen unregelmäfsigen Rändern noch Kugelspiegel und geben Spiegelbilder. Begriff einer „geometrischen Achse“, wie sie bei den Linsen durch die den Krümmungsmittelpunkte definiert ist, wird also bei den Kugelspiegeln esentlich, bezw. gegenstandslos. Dagegen nennt man die von einem beliebigen enstandspunkte A durch O gezogene Gerade „die zum Punkte A gehörige ıse des Spiegels“; in ihr liegt auch der **zu A gehörige Hauptstrahl.**

Vorversuche: Hält man das Gesicht in hinreichend kleinen Abstand von m Hohlspiegel, so sieht man hinter diesem ein aufrechtes, vergröfsertes

Bild des Gesichtes, bei hinreichend grofsem Abstande ein **umgekehrtes**, **verkleinertes**. (Dafs diese umgekehrten, verkleinerten Bilder des Gesichtes oder anderer Gegenstände der Umgebung **vor** dem Spiegel zu liegen kommen, widerspricht so sehr unseren in der überwiegenden Zahl der Fälle an Planspiegeln erworbenen Gewohnheiten hinsichtlich der Spiegelbilder, dafs wir uns zunächst einbilden, auch diese Bilder **hinter** dem Spiegel zu sehen. Treten wir aber einem solchen Bilde langsam näher und fixieren es dabei immer mit beiden Augen, so empfinden wir alsbald, dafs wir unter immer wachsender Anstrengung nach einwärts schielen müssen, indem wir wirklich auf eine Stelle **vor** dem Spiegel blicken. — **Hohlspiegelbild** eines Blumenstraufses in einer **wirklichen** Vase u. dergl.) Diese Bilder **vor** dem Spiegel sind auf einem Schirme auffangbar, also physisch, die **hinter** dem Spiegel nicht auffangbar, also geometrisch. — Die einzelnen Gesetze dieser Erscheinungen ergeben sich als besondere Fälle aus der allgemeinen

Aufgabe: Man konstruiere zu beliebig vielen der von einem Punkte A nach allen Seiten ausgehenden und den Hohlspiegel treffenden Strahlen die reflektierten Strahlen (ähnlich wie in Fig. 354, S. 330), wobei als Einfallslote die Krümmungshalbmesser dienen.

Die hinreichend genaue Ausführung der Konstruktion zeigt, dafs die reflektierten Strahlen **nicht mehr durch einen Punkt** gehen (LA 163), sondern eine **einhüllende Fläche** (Anh., Nr. 27) von der Gestalt geben, wie sie bei dem Versuche mit dem Fingerringe (§ 100) ersichtlich wurde. Die folgende Annäherungsrechnung liefert denn auch nur die Lage der **Spitze** dieser Lichtfigur.

LA 163. Anh. 27.

Aufgabe: Man berechne aus der dem Punkte A entsprechenden Gegenstandsweite $AH = a$ cm (Fig. 358, und aus der gegebenen Krümmungsweite $OH = r$ cm) die Bildweite $HB = b$ cm für die nahe bei dem Hauptstrahl auffallenden bezw. reflektierten Strahlen AM und MB.

Fig. 358.

AH=a, OH=r, BH=b

Nach dem Satze über die Teilung einer Dreiecksseite AB durch die Winkelhalbierende des gegenüberliegenden Eckpunktes M ist

$$AO : OB = AM : MB \neq AH : HB, \quad \text{also } (a - r) : (r - b) = a : b;$$

Anh. 10.

aus dieser „harmonischen Proportion“ (math. Anh., Nr. 10) folgt $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \cdots (1)$

Es empfiehlt sich (namentlich auch wegen der dadurch zu erzielenden Übereinstimmung mit der Linsenformel, § 107), in diese Gleichung statt des **Krümmungshalbmessers** r cm die **Brennweite** f cm des Hohlspiegels einzuführen. — Definiert ist die **Brennweite** als diejenige **spezielle Bildweite**, die zur **Gegenstandsweite** $a = \infty$ gehört. (Ihren Namen haben „**Brennpunkt**“ und „**Brennweite**“ daher, dafs die durch einen Hohlspiegel gesammelten „Wärmestrahlen“, § 119, die im oder nahe dem Brennpunkt befindlichen brennbaren Körper, wie Feuerschwamm, Holz, Schiefspulver . . ., entzünden.) Es wird daher $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = \frac{2}{r}$, und da $\frac{1}{\infty} = 0$, so ist $\frac{2}{r} = \frac{1}{f}$; somit ergibt sich als endgiltige

Hohlspiegelformel: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \cdots (2)$; in Worten!

In dieser Gleichung ist f als konstante, a als unabhängig, b als hängig veränderliche Gröfse zu denken. Man unterscheidet folgende echs Hohlspiegelfälle":

I. Fall: $a = \infty$; $b = f$; d. h. Strahlen, die aus unend-her Entfernung kommen (kurz: **Parallelstrahlen) schneiden sich** ı **Brennpunkte.**

II. Fall: $\infty > a > 2f$; $f < b < 2f$; in Worten: Wandert der Gegen-ndspunkt aus dem Unendlichen bis an die doppelte Brennweite, so wandert der ldpunkt aus der einfachen in die doppelte Brennweite.

III. Fall: $a = 2f$; $b = 2f$; d. h. **Strahlen, die aus dem rümmungsmittelpunkt kommen, schneiden sich wieder in diesem.**

IV. Fall: $2f > a > f$; $2f < b < \infty$; in Worten!

V. Fall: $a = f$; $b = \infty$; d. h. **Strahlen, die aus dem rennpunkt kommen, werden als Parallelstrahlen reflektiert.**

VI. Fall: $f > a > 0$; $b < 0$; d. h. Strahlen, die von einem Gegen-ndspunkt innerhalb der Brennweite ausgehen, werden nicht als konvergentes er Parallelstrahlenbüschel, sondern als divergentes reflektiert; ihre Rückwärts-rlängerungen gehen durch einen hinter dem Spiegel liegenden Punkt, der her ein **geometrisches** Bild darstellt.

Viel übersichtlicher als durch vorstehende arithmetische Diskussion der r für Gegenstands- und Bildpunkte geltenden Hohlspiegelformel ergeben sich die hs Hohlspiegelfälle durch die auch die Bilder ganzer Gegenstände liefernde

Bildkonstruktion (Fig. 359 a. f. S.): Eine Strecke AA' des Gegen-andes sei normal zu der dem Punkte A entsprechenden Achse $AOFH$ s Hohlspiegels. Der Parallelstrahl $A'P$ wird dann (laut I) durch n Brennpunkt F, der Hauptstrahl $A'O$ wird (laut III) in sich lbst reflektiert. Daher ist B' das Bild von A'. Der Fufs-nkt B der Normalen $B'B$ ist das Bild von A.

Dafs der Geraden AA' wieder eine Gerade BB' entspricht, ist nur nähernd richtig — es wäre genau richtig nur dann, wenn an Stelle des ugelspiegels eine zu AH normale Ebene träte, die gleichwohl alle Parallel-rahlen durch F reflektierte, wie dies auch in den Figg. 360 u. 361 fingiert ist.

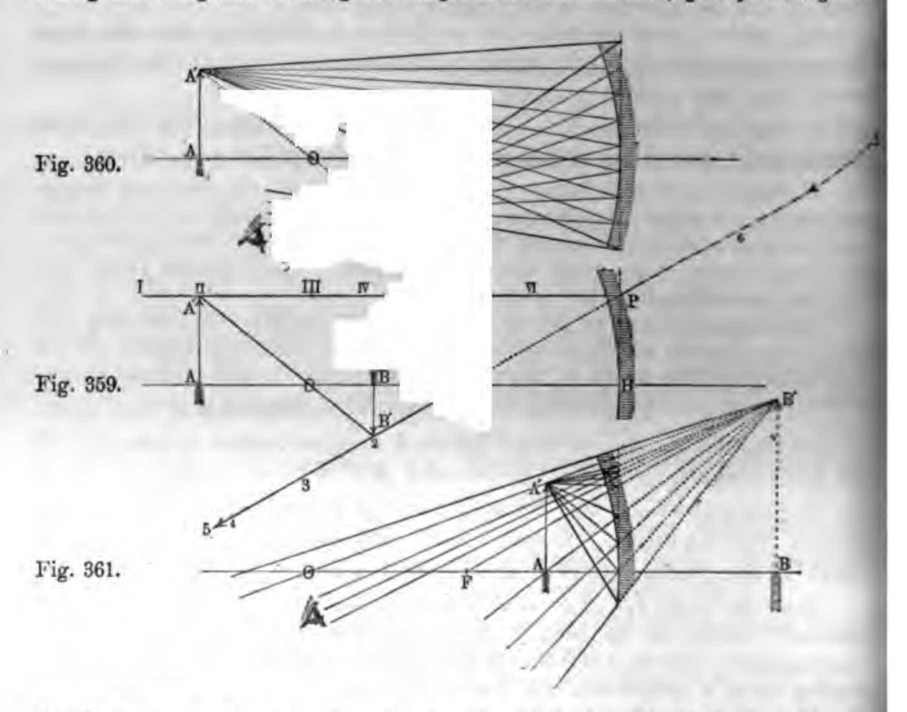
Denken wir uns denselben Gegenstand von unendlicher Entfernung her zum ohlspiegel hin wandernd, so wandert das Bild in den Fällen I bis V vom ohlspiegel weg, springt bei V aus $+\infty$ nach $-\infty$, d. h. hinter den Spiegel, d rückt bei weiterer Annäherung des Gegenstandes an den Spiegel innerhalb r Brennweite hinter dem Spiegel immer näher zum Hohlspiegel heran. Da i diesem Wandern des Gegenstandes der Punkt A' immer im selben Parallel-rahl I II III IV V VI wandert, so wandert der Bildpunkt B' längs der eraden 1 2 3 4 5 5' 6. — Behufs noch übersichtlicherer Veranschaulichung werden so ein für allemal der Parallelstrahl und der ihm zugehörige reflektierte Strahl 5 5' P vorgezeichnet und etwa ein Lineal um den Krümmungsmittelpunkt O ge-reht. Es sind dann unmittelbar aus der Fig. 359 die sechs Fälle abzulesen; z. B.:

II. Hohlspiegelfall: **Ist der Gegenstand aufserhalb der oppelten Brennweite, so ist das Bild zwischen der einfachen und oppelten Brennweite; es ist physisch, umgekehrt, verkleinert.**

III. [illegible]spiegelfall: **Ist der Gegenstand in der doppelten Brennwe[illegible]e, so ist das Bild ebenfalls in der doppelten Brennweite; es ist physisch, umgekehrt, gleich grofs.**

VI. Hohlspiegelfall: **Ist der Gegenstand innerhalb der einfachen [illegible]nweite, so ist das Bild hinter dem Spiegel; es ist geometrisch, aufrecht, vergröfsert.**

Man führe für jeden der sechs Fälle die Bildkonstruktion eigens aus (zweckmäfsig unter Gegenüberstellung der entsprechenden Linsenfälle, § 107) und ergänze



die Zeichnungen durch Eintragung der den Spiegel noch treffenden Grenzstrahlen und mehrerer dazwischen liegenden Strahlen, sowie des die Bilder sehenden Auges (wie z. B. in Figg. 360 und 361).

Warum ist die Bildkonstruktion auch anwendbar, wenn der Gegenstand beliebig gröfser ist als der Spiegel (wie z. B. bei Spiegelteleskopen)?

Parabolische Spiegel. Wird der den sphärischen Hohlspiegel darstellende Kreisbogen ersetzt durch diejenige Parabel, welche im Scheitel jenen Kreis zum Krümmungskreis hat (math. Anh., Nr. 26), so gelten für einen solchen Spiegel die Sätze I und V genau, nicht wie beim Kugelspiegel nur annähernd (LA 163). Solche Paraboloide, in deren Brennpunkt elektrisches Bogenlicht steht, dienen als Scheinwerfer; **sie halten die austretenden Strahlen als achsenparallelen Zylind[er] zusammen. Wird dieser durch einen ebensolchen Spiegel aufgefangen, so samme[lt] dieser die Strahlen wieder in seinem Brennpunkte (vergl. Fig. 416, S. 375). —**

Anh. 26.
LA 163.

...elt ein Ellipsoid an der Innenseite, so sammeln sich ebenfalls alle von ...n Brennpunkt ausgehenden Strahlen im anderen Brennpunkt. Analoge Sätze ...spiegelnde Hyperboloide. Beweise aus den Sätzen über Leitstrahlen und ...alen an Kegelschnitten (mathem. Anh., Nr. 23). — Über Konvexspiegel ...ihre Analogie zu Konkavlinsen vergl. § 107. Anh. 23.

III. Brechung des Lichtes.

§ 104. Das Brechungsgesetz.

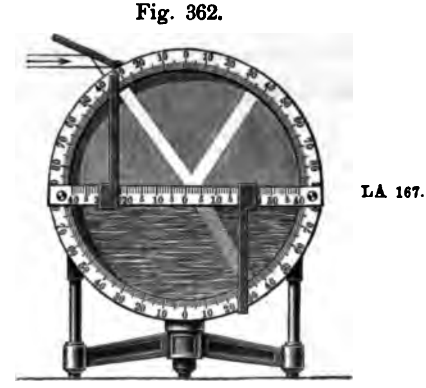
Geschichtliches. SNELLIUS fand (1626) die zwischen dem Einfallswinkel α und ...m Brechungswinkel β bestehende gesetzmäfsige Beziehung, der von DESCARTES die ...rm gegeben wurde: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ (LA 164). Diese im Vergleich zum Reflexions- LA 164. ...etz viel kompliziertere Beziehung macht es begreiflich, dafs man sie lange ver-...blich gesucht hat, obwohl schon PTOLEMÄUS methodisch ganz richtig Reihen ...n Einfallswinkeln und zugehörigen Brechungswinkeln gemessen hatte. Noch ...PLER hatte geglaubt, dafs $\frac{\alpha}{\beta} = n$ sei, was als erste Annäherung für kleine α ...d daher auch kleine β) giltig ist, auch z. B. für die Berechnung von Linsenbildern ...erster Annäherung ausreicht (§ 107; LA 165). LA 165.

Eine von goniometrischen Bezeichnungen ...e Form des Brechungsgesetzes ergibt sich bei ...suchen mit dem Apparat Fig. 362: Es geben ...lich die gleich langen Strecken Oa und Ob ...g. 363) die Projektionen $Om : On = 4:3$ ... den Übergang der Strahlen aus Luft in ...ser; desgl. für Luft und Glas 3:2. (Andere ...echungskonstruktionen vergl. LA 167.) LA 167. ...se planimetrische Konstruktion ist dem obigen ...niometrischen Ausdruck äquivalent; denn

$$= \frac{\frac{4}{r}}{\frac{3}{r}} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$ (In Fig. 363 ist

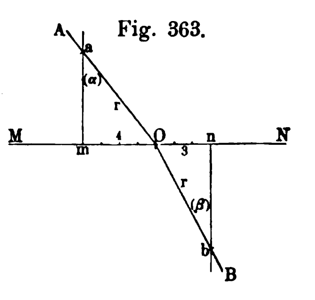
...s Einfallot nicht gezeichnet, da es bei dieser ...struktion nicht verwendet wird.)

Fig. 362.



Zur vollständigen Formulierung bedarf indes ...s Brechungsgesetz noch einer Ergänzung mit ...ksicht auf die Farbe des gebrochenen Strahles. ...s zeigen nämlich schon die Versuche mit dem ...parat Fig. 362 (und noch auffälliger alle Ver-...che mit Prismen, § 106), dafs einem eintreten-...n „Strahl weifsen Lichtes" nicht ein ge-...ochener Strahl, sondern ein ganzer Farben-...cher entspricht. Es gelten somit alle innerhalb ...r geometrischen Optik aufzustellenden Gesetze ...nächst nur für je eine als konstant vorauszu-...zende Farbe (über die Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Farbe und Brechungs-...onenten vergl. erst Abschnitt B, § 114 ff.). Sonach lautet das Brechungsgesetz:

Fig. 363.



1. Der gebrochene Strahl bleibt in der Einfallsebene.
2. **Zwischen den Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels besteht ein konstantes Verhältnis („Brechungsverhältnis“ mit dem Brechungsquotienten n) für je ein Paar von Medien (einschließlich des „leeren Raumes“) und für je einen Lichtstrahl von konstanter (einfacher) Farbe.** — Aus $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ ergibt sich zu jedem α das β (LA 164, 166).

Denkt man sich den aus dem ersten Medium kommenden Strahl geradlinig in das zweite verlängert und beachtet man, wie von dieser Verlängerung der gebrochene Strahl abzweigt, so erklärt sich die Ausdrucksweise, der Strahl werde zum, bezw. vom Einfallslot gebrochen, je nachdem der Brechungswinkel kleiner oder gröſser ist als der Einfallswinkel. Dasjenige Medium, dem der kleinere Winkel entspricht, heiſst das optisch dichtere. — Während dies Nominaldefinitionen sind, ist es eine physikalische Tatsache, daſs keineswegs immer der mechanisch dichtere Stoff auch optisch dichter ist. (Schon Newton fiel es auf, daſs brennbare Stoffe, z. B. Öle, Diamant . . ., verhältnismäſsig groſse Brechungsquotienten haben, ohne doch besonders groſse mechanische Dichten oder spezifische Gewichte zu haben.) Nur bei Körpern von gleicher chemischer Beschaffenheit, z. B. dichterer und dünnerer Luft, ist der mechanisch dichtere auch der optisch dichtere. — Über die physikalischen Methoden zur genauen Bestimmung der Brechungsquotienten vergl. § 106 und § 116. Dabei ist es üblich, alle Brechungsquotienten als unechte Brüche darzustellen; wenn also z. B. beim Übergange eines Strahles aus Wasser in Luft der Einfallswinkel α im Wasser, der Brechungswinkel $\beta > \alpha$ in der Luft zu liegen kommt, so ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{3}{4} = \frac{1}{n}$.

Totale Reflexion. Wendet man für den Übergang aus dem optisch dichteren in das dünnere Medium die Brechungskonstruktion an, so ergibt diese für kleine Einfallswinkel anstandslos die gröſseren Brechungswinkel; für einen bestimmten Grenzwinkel α_0 wird aber der Brechungswinkel $\beta = 90°$, und für Einfallswinkel $\alpha > \alpha_0$ gibt es überhaupt keinen Brechungswinkel mehr, wie sich beim Konstruieren darin zeigt, daſs die Hypotenuse kleiner wäre als die Kathete, und goniometrisch darin, daſs $\sin\beta > 1$ würde. — Während nun sonst beim Übergange eines Strahles aus einem Medium in ein anderes eine Spaltung des Strahles in einem reflektierten und gebrochenen Strahl stattfindet, ist aus diesen mathematischen Gründen für alle $\alpha > \alpha_0$ physikalisch zu erwarten, daſs alles Licht in das dichtere Medium reflektiert werde. In der Tat bestätigt der Versuch dieses Eintreten von **totaler Reflexion** (so z. B. an dem Apparat Fig. 362, wenn der Strahl unter Wasser eingetreten war und die Einlaſsöffnung mehr und mehr gehoben wird. Man beachte, daſs hierbei von dem austretenden Strahlenfächer zuerst die violetten, zuletzt die roten Strahlen nicht mehr in die Luft austreten. — Fig. 365, S. 337 zeigt die Lage des Grenzstrahles, von welchem ab es nur mehr totale Reflexion gibt. — Erklärung des Silberglanzes an einem „leeren“ ins Wasser getauchten Probiergläschen; ähnlich an der Bauchdecke von Wasserkäfern, wo zwischen den Härchen eine Schicht Luft adhäriert und also Lichtstrahlen von bestimmten Winkeln an nicht vom Wasser aus bis zur Bauchdecke gelangen. (Über Reflexionsprismen vergl. § 106.)

Wie das Reflexionsgesetz (§ 101), ist auch das Brechungsgesetz umkehrbar, d. h.: Ein Strahl, der in der Richtung des vorher **gebrochenen entfällt**, wird in der Richtung des vorher **einfallenden gebrochen.**

Zusatz: Dafs ein Strahl aus einem Medium in eine angrenzende Schicht des gleichen Mediums oder auch eines stofflich verschiedenen, aber von gleicher optischer Dichte **geradlinig** weitergeht, kann dadurch ausgedrückt werden, dafs für dieses Paar Medien der Brechungsquotient $n = +1$ ist. — Denken wir uns dann einen solchen Strahl aus dem zweiten in das erste Medium unter gleichem Winkel zurückgedreht, so nimmt er die Richtung des **reflektierten** Strahles an und wir können somit das Reflexionsgesetz als einen speziellen Fall des (entsprechend erweitert gedachten) Brechungsgesetzes, nämlich für den Brechungsquotienten $n = -1$ auffassen. Es erklären sich hieraus mancherlei Analogieen zwischen den Anwendungen des Reflexions- und des Brechungsgesetzes, z. B. dafs den Gesetzen für die Konkavspiegel die für die Konvexlinsen ganz analog sind.

Doppelbrechung. Alle bisher besprochenen Erscheinungen und Gesetze der Brechung haben stillschweigend vorausgesetzt, dafs es sich nicht um „Doppelbrechung" handle, wie sie z. B. beim Kalkspat, ja im ganzen sogar häufiger als die einfache Brechung stattfindet. Die genauere Beschreibung dieser Erscheinungen (§ 129) wird zeigen, dafs von den zwei je einem einfallenden Strahl entsprechenden gebrochenen Strahlen nur der eine den obigen Gesetzen folgt; er heifst deshalb der ordentliche (ordinäre) Strahl; auf den anderen, **aufserordentlichen** (extraordinären) Strahl findet nicht einmal der erste Teil des obigen Brechungsgesetzes Anwendung, indem dieser aufserordentliche Strahl im allgemeinen aus der Einfallsebene heraustritt. — Die im folgenden aus dem allgemeinen Brechungsgesetz abzuleitenden besonderen Gesetze setzen also überall einfache gebrochene Strahlen oder bei Doppelbrechung doch nur ordentliche Strahlen voraus.

§ 105. Bilder, erzeugt durch Brechung an einer ebenen Fläche.

Vorversuche: Ein Gefäfs, gegen dessen Boden wir in normaler oder schräger Richtung blicken, scheint weniger tief zu werden, wenn Wasser eingegossen wird. War eine auf dem Boden des leeren Gefäfses liegende Münze durch dessen Wand für unser Auge eben noch verdeckt gewesen, so wird sie am Grunde des gefüllten Gefäfses sichtbar (Fig. 365). — Ein schräg ins Wasser getauchter Stab erscheint geknickt; an welcher Stelle, nach welcher Richtung? (Fig. 364; LA 168.)

Fig. 365.

Fig. 364 a. Fig. 364 b.

LA 168.

Erklärung: Liegt ein leuchtender Punkt A (Fig. 365) in der Tiefe h cm unter dem Wasserspiegel und werden zu hinreichend vielen der von ihm ausgehenden Strahlen die in Luft vom Einfallslot gebrochenen Strahlen

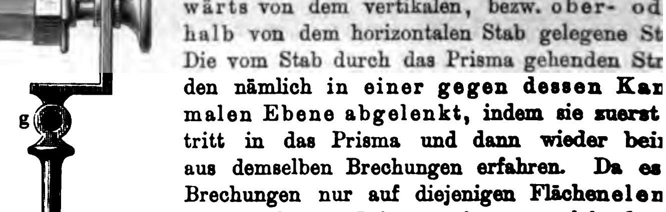
konstruiert und gegen das Wasser hinein rückwärts verlängert, so zeig struktion (und Rechnung), dafs niemals die Rückwärtsverlängerungen drei sich in demselben Punkte schneiden, sondern dafs alle diese Rückwär rungen eine einhüllende Fläche (math. Anh., Nr. 27) besitzen. reichend schmale Strahlenbüschel, wie sie in die Pupille des Auges stellen aber die Punkte B, B', B'', B''' die Bilder dar; ihre Lage ist wegs (auch nicht einmal annähernd) nur abhängig von der Lage des Punktes A in bezug auf den Wasserspiegel, sondern durchaus mit von der Stellung des Auges in bezug auf A und den Wasserspiegel. geben Konstruktion (und Rechnung), dafs speziell bei normalem Darauf der Tiefe unter dem Wasserspiegel $\frac{3}{4}h$ (allgemein $\frac{1}{n}h$ unter der ebenen fläche innerhalb des dichteren Mediums) liegt. — Daher erscheint auch eines Teiches bei sehr schiefer Daraufsicht viel mehr gehoben als schiefer; in einem wenig tiefen Wasser fahrend, glaubt ma Kahn einen Kanal in den Spannen tiefen Seegrund eingesenkt

Anh. 27.

§ 106. O[illegible]e Prismen und Platten.

Vorversuche: Hatte man f einen vertikalen, bezw. horizontale Fensterkreuzes durch die Luft g[illegible]blickt und hält man zwischen ihn und ein Glasprisma (Fig. 366), dessen Kanten dem Stabe parallel sind, so er den Stab nicht mehr, sondern sieht ein Stabes (mit starken Farbensäumen) erst da wenn das Auge durch das Prisma gegen eine wärts von dem vertikalen, bezw. ober- od halb von dem horizontalen Stab gelegene St Die vom Stab durch das Prisma gehenden Str den nämlich in einer **gegen dessen Kan malen Ebene abgelenkt**, **indem sie zuerst** tritt in das Prisma und **dann wieder bei** aus demselben Brechungen **erfahren. Da es** Brechungen nur auf **diejenigen Flächenelem** Seitenflächen des **Prismas ankommt, welche der** austretende Strahl durchsetzt (passiert), so wird der **geometrische** Prismas in der Optik folgendermafsen erweitert:

Fig. 366.

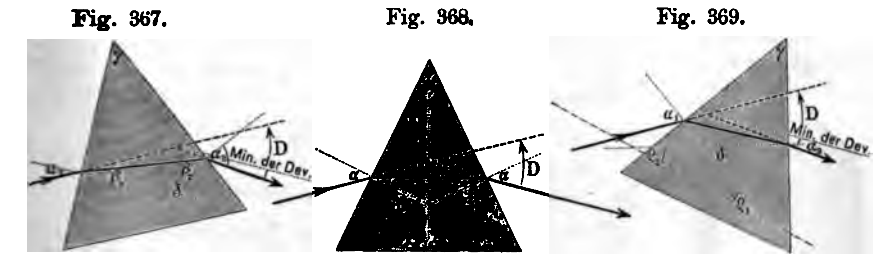


Als **Prisma** im optischen Sinne **wirkt jeder homogen** sichtige Körper, an welchem zwei gegeneinander **unter dem „ den Winkel“** geneigte Grenzebenen von **demselben Strahl d** werden. Die wirkliche oder durch **Erweiterung der Eb** gewinnende Durchschnittslinie dieser Ebenen **heifst die br Kante** des Prismas.

Aufgabe: Für ein Prisma vom **Brechungsquotienten** n brechenden Winkel γ zu je einem eintretenden **Strahle de** gehenden und austretenden Strahl zu konstruieren **und den** kungswinkel D (die **„Deviation“**) zu berechnen.

Von den Figuren 367, 368, 369 ist die mittlere so gezeichnet, dafs zuerst der symmetrisch durchgehende Strahl und zu ihm die nun ebenfalls symmetrisch liegenden aufserhalb des Prismas verlaufenden Strahlen, nämlich der einfallende

Fig. 367. Fig. 368. Fig. 369.



und der austretende Strahl, gemäfs der Brechungskonstruktion (Fig. 363) konstruiert worden sind. Sind dann in Fig. 367 und 369 die Einfallswinkel beliebig gröfser oder kleiner als der in Fig. 368, so zeigt die Messung und Vergleichung der drei Winkel D, dafs **dem symmetrischen Durchgang das Minimum der Ablenkung** entspricht. Dieses Ergebnis der Konstruktion (und Rechnung, LA 169, 170) wird bestätigt durch den LA 169, 170.

Versuch: Fällt ein horizontales Lichtband auf ein Prisma mit abwärts gerichteter brechender Kante, so entsteht auf einer gegenüber der Öffnung (Spalte) liegenden Wand oder an der Decke des Zimmers ein prächtig gefärbter Lichtfleck (**„Spektrum“**). Wird nun das Prisma in demselben Sinne (z. B. dem des Uhrzeigers) langsam immer weiter gedreht, so wandert im allgemeinen das Spektrum zuerst von der Seite des eintretenden Strahles weg, wird dann stationär und rückt dann wieder zur früheren Lage hin. (Aufser diesem Spektrum zeigen sich noch mehrere durch ein- und mehrmalige — darunter auch totale — Reflexion und durch Brechung entstehende, teils ebenfalls gefärbte, teils farblose Bilder, LA 169.) — Die dem Minimum der Ablenkung entsprechenden Strahlen werden vorwiegend bei der Entwerfung von Prismenbildern verwendet, da die einem asymmetrischen Durchgang entsprechenden Bilder nicht scharf sind. LA 169.

Allgemein gilt für die den Durchgang der Strahlen bestimmenden Winkel:

1. $\delta = \beta_1 + \beta_2$; und da $\delta = \gamma$ (entweder aus dem Vierecke mit den zwei rechten Winkeln, oder weil der Winkel zwischen den Prismenebenen gleich ist dem Winkel zwischen den Einfallsloten), so ist auch $\gamma = \beta_1 + \beta_2$.

Allgemeiner ist $\gamma = \varrho_1 + \varrho_2$, worin ϱ_1 und ϱ_2 die Winkel der Lote mit irgend einer sie schneidenden Geraden sind (Fig. 369). — Anschaulich: Man denke zuerst die Prismenflächen zusammengeklappt ($\gamma = 0$) und die Lote längs derselben Geraden, wobei $\varrho_1 + \varrho_2 = 0$; dann wachse allmählich γ und mit ihm $\varrho_1 + \varrho_2$.

2. $D = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)$; also $D = (\alpha_1 + \alpha_2) - \gamma$.

Spezielle Fälle: I. Symmetrischer Durchgang bei beliebig grofsem brechenden Winkel: $D = 2\alpha - \gamma$, $\gamma = 2\beta$; daher $\alpha = \frac{D+\gamma}{2}$, $\beta = \frac{\gamma}{2}$ (— auch unmittelbar ersichtlich aus Fig. 368).

Eine Anwendung von diesen Beziehungen wird gemacht bei der Ermittlung des Brechungsexponenten eines durchsichtigen Stoffes. Der Stoff

In Form eines Prismas gebracht (an Kristallen finden sich nat nenebenen, an anderen festen Stoffen werden solche angeschliffen; keiten werden in Hohlprismen aus Glasplatten mit parallelen Grenzebenen, Fig. 370, Gase in Röhr gegeneinander geneigten planparallelen Deckplatt bracht) und es werden dann gemessen der br Winkel γ und das Minimum der Ablenkung D.

Fig. 370.



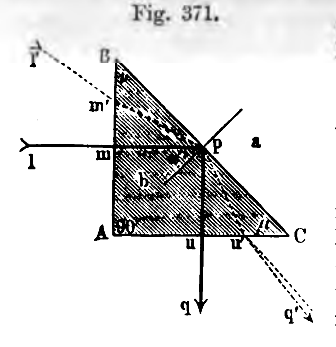
$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \text{ ist dann } n = \frac{\sin\frac{D+\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \ldots$$

Über die Durchführung solcher Versuche mit ein flexionsgoniometer unter Rücksicht auf die Größ n f[illegible] chiedene Farben (für bestimmte Frau sche [illegible] n) vergl. § 116.

II. Bel[illegible] iger [illegible] durch scharfkantige Prismen bei kleinem γ) für [illegible] fallswinkel: Wegen $\alpha \neq n\beta$ wird $D = n\beta_1 + n\beta_2 - \gamma = n$ [illegible] $+ \beta_2) - \gamma = n\gamma - \gamma$; $D = (n$ Ferner wegen $\gamma = \varrho_1 + \varrho_2$ [illegible] uch $D = (n - 1)(\varrho_1 + \varrho_2)$.

Es ist hier also die ebenfalls kleine Ablenkung D unabhäng Einfallswinkel (entsprechend dem Stationärwerden des austretenden St der Nähe des symmetrischen Durchganges). Für verschiedene Prismen ist jeweiligen brechenden Winkel proportional. (Anwendung folg. §

Fig. 371.



Reflexionsprismen. Bildet der Qu eines Prismas ein gleichschenkliges recht Dreieck (Fig. 371) und fällt auf die Kathe ein Lichtstrahl **normal auf, so dafs er** lenkung die Hypotenusenfläche unter einer von 45° trifft, so wird, da dieser Wink oberhalb des Grenzwinkels liegt, der Strah Hypotenusenfläche **total reflektiert** u **normal** zur anderen Kathetenfläche aus. Prismen wirken also als sehr vollkommene S da sie dem normal ein- und austretenden St wenig von seiner Lichtstärke nehmen. - malige totale Reflexion wird angewendet in STONS *Camera lucida.*

Planparallele Platten stellen den Grenzfall des Pris $\gamma = 0$ dar. In ihnen erfährt ein Strahl nur eine Parallelversch aber keine Änderung der Richtung.

Über atmosphärische Strahlenbrechung, Luftspiegelungen u. dergl. verg

§ 107. Sphärische Linsen.

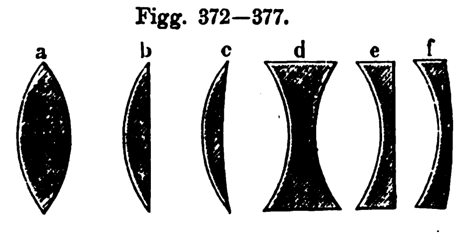
Sphärische Linsen im optischen Sinne sind durchsichtige die beiderseits von Kugelflächen begrenzt sind (ist eine der flächen eine Ebene, so kann sie als Grenzfall einer Kuge

nämlich für den Krümmungshalbmesser $r = \infty$ angesehen werden). Nach ihren geometrischen Eigenschaften nennt man (— nähere Beschreibung nach Figg. 372—377) die Linsen

a) bikonvex b) plankonvex c) konkavkonvex	**Konvexlinsen** (in der Mitte dicker) als am Rande),	d) bikonkav e) plankonkav f) konvexkonkav	**Konkavlinsen** (in der Mitte dünner als am Rande).

Die Mittelpunkte der die Linse begrenzenden Kugelflächen heifsen **Krümmungsmittelpunkte**, die Halbmesser der Kugeln **Krümmungsradien**, deren reziproke Werte messen die Krümmungen der Linsen (math. Anhang, Nr. 26). Die die beiden Krümmungsmittelpunkte verbindende Gerade heifst die **optische Achse** der Linse.

Figg. 372—377.



Anh 26.

Zählen wir die Krümmungsradien bei der bikonvexen Linse beide als positiv, so läfst sich die bikonkave Linse dadurch mathematisch beschreiben, dafs bei ihr beide Krümmungsradien als negativ bezeichnet werden. Bei der konkavkonvexen Linse ist der positive Krümmungsradius kleiner als der negative, daher die positive Krümmung gröfser als die negative. Ähnlich bei den übrigen Linsen. — Die bisher genannten Eigenschaften sind geometrische.

Die physikalischen Grundeigenschaften der beiden Hauptarten von Linsen ergeben sich durch folgende

Vorversuche: Hält man die Achsen verschiedener Linsen in die Richtung der Sonnenstrahlen, so zeigt die Licht-, bezw. Schattenerscheinung auf einem normal gegen die Achse gestellten Schirm, dafs die parallel einfallenden Strahlen durch die Konvexlinsen konvergent, durch die Konkavlinsen divergent gemacht, daher Licht- (und Wärme-)Strahlen **„gesammelt"**, bezw. **„zerstreut"** werden. Hiernach heifsen die Konvexlinsen **Sammellinsen**, die Konkavlinsen **Zerstreuungslinsen.**

Weitere *Vorversuche* über die durch die verschiedenen Arten von Linsen entworfenen Bilder für verschiedene Gegenstandsweiten. — Ihre physikalisch-mathematische Erklärung geht davon aus, dafs die in sie eintretenden Strahlen wie an einer Folge von scharfkantigen Prismen gebrochen werden. Die hierfür geltenden Gröfsenbeziehungen werden aus den Gesetzen für die Prismen abgeleitet nach folgender

Aufgabe: Für eine Linse, und zwar zunächst eine bikonvexe, Fig. 378 (a. f. S.), sind gegeben die Krümmungshalbmesser r_1 und r_2 cm und der Brechungsquotient n in Bezug auf das als zu beiden Seiten der Linse gleich vorausgesetzte Medium. Für einen Strahl, der von einem Punkte A der Achse in der Gegenstandsweite a cm ausgeht, die Bildweite b cm zu konstruieren und zu berechnen.

Wie beim Hohlspiegel zeigt die Konstruktion auch hier, dafs die von einem Punkte A ausgehenden Strahlen nicht in einem Punkte B sich sammeln;

vielmehr zeigt sich schon bei parallel auf die Linse fallenden Strahlen, dafs die von der Ac[illegible] weiter entfernten Strahlen nach dem Durchgang durch die Linse die Achse n[illegible]er bei der Linse schneiden („Längenabweichung"). Die nachfolgende annähernde Berechnung gilt also wieder 1. nur für achsennahe Strahlen, bezw. für die Spitze der einhüllenden Fläche. 2. Die Dicke der Linse wird vernachlässigt gegenüber der Gegenstands- und der Bildweite; wir dürfen daher a und b von einem beliebigen Punkte innerhalb der Linse oder von deren Scheiteln aus zählen, und zwar werden wir sie von dem Fufspunkte der „Höhen" h_1 und h_2 zählen. 3. Diese „Höhen", d. h. die Strecken, um welche die von einem Strahl durchsetzten Stellen der beiden Linsenflächen von deren Achse abstehen, sind als gleich anzunehmen. 4. Alle Winkel zwischen den Strahlen, bezw. Einfallsloten und der Achse so klein, dafs wir für sie nach Bedarf ihre Tangenten, bezw. Sinus einsetzen dürfen. (Über solche annähernde Rechnungen vergl. Anh., Nr. 21.)

Anh. 21.

Die verlangte Beziehung [illegible] und b ergibt sich dann daraus, dafs wir die Deviation D des aus [illegible]ommenden Strahles gegen den in sie eingetretenen einerseits durch Bild[illegible]egenstandsweite, anderseits durch den Brechungsquotienten und die [illegible]gsradien ausdrücken. Es ist dann

$$D = \alpha + \beta \qquad\qquad D = (n-1)(\varrho_1 + \varrho_2) \, .. \, (\S\, 106)$$

$$\alpha \doteq tg\,\alpha = \frac{h_1}{a}; \quad \beta \doteq \frac{h_2}{b} \qquad\qquad \varrho_1 \doteq sin\,\varrho = \frac{h_1}{r_1}; \quad \varrho_2 \doteq \frac{h_2}{r_2}$$

$$D = \frac{h_1}{a} + \frac{h_2}{b} \qquad\qquad D = (n-1)\left(\frac{h_1}{r} + \frac{h_2}{r_2}\right)$$

Da $h_1 \doteq h_2$ vorausgesetzt wurde, so ergibt sich durch Gleichsetzung der beiden Werte von D und Ausfallen von h_1 und h_2

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \cdots \cdots \cdots \quad (1)$$

Nur wenn $r_1 = r_2 = r$ und $n = \frac{3}{2}$, wird $(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\frac{2}{r} = \frac{1}{r}$.

Die Linsenformel (1) ist also zunächst mit der im § 103 entwickelten Hohlspiegelformel (1) nicht gleichlautend; sondern während bei den Hohlspiegeln die Brennweite gleich ist der **halben** Krümmungsweite, ist bei den symmetrischen Konvexlinsen mit dem Brechungsquotienten $^3/_2$ die Brennweite gleich der **ganzen** Krümmungsweite. — Volle Übereinstimmung aber tritt ein, wenn in Gleichung (1) statt der Gröfsen n, r_1, r_2 wieder die Brennweite f der Convexlinse eingeführt wird. Definiert ist die **Brennweite** als diejenige spezielle Bildweite, die zur Gegenstandsweite $a = \infty$ gehört. Es wird $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, und da $\frac{1}{\infty} = 0$, so ist $(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f}$; somit ergibt sich als endgiltige

LA 171.

Linsenformel $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \cdots (2)$; in Worten! — LA 171.

Diskussion dieser Gleichung nunmehr wörtlich gleichlautend der der Hohlspiegelformel; während aber bei dem Hohlspiegel die physischen Bilder auf **derselben Seite** des Spiegels, die geometrischen auf der entgegengesetzten Seite wie der Gegenstand liegen, ist es bei den Kon-

vexlinsen umgekehrt. — Auch die Bildkonstruktion für Konvexlinsen (Fig. 379) entspricht ganz der für Hohlspiegel. Indem die Linse verschwindend dünn angenommen war, dürfen wir sie ersetzt denken durch die ihre Ränder

Fig. 379. Fig. 381.

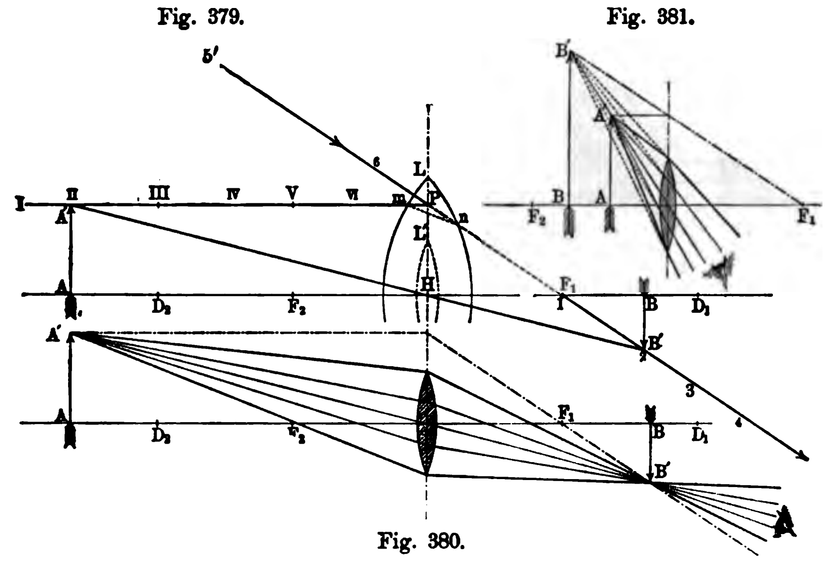


Fig. 380.

verbindende auf der Achse normale Gerade LH; bis zu dieser Geraden wird dann der Parallelstrahl $A'P$ gezogen, von hier gegen den Brennpunkt abgelenkt und nun erst die gerade Verbindungslinie mn von Ein- und Austrittsstelle des Strahls in die wirkliche Linse eingetragen. Diese zweimal geknickte Linie entspricht dann, wie genauere Rechnung lehrt, sehr gut dem wirklichen Gang des Strahls sowohl für symmetrische wie für asymmetrische Linsen. — Ergänzung der Konstruktion durch die Randstrahlen, Zwischenstrahlen und durch das Auge; z. B. Figg. 380, 381. —

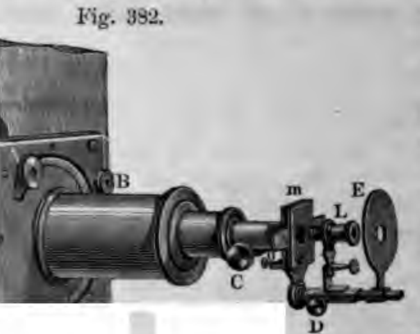
Alle sechs Linsenfälle finden die mannigfachste Anwendung in allen Arten optischer Instrumente. Im folgenden nebst der Formulierung der Linsenfälle auch sogleich je einige der einfachsten Anwendungen zu jedem Falle:

I. Linsenfall: Ist der Gegenstand in unendlichem Abstand, so ist das Bild in der einfachen Brennweite; es ist physisch, unendlich klein.

Wenn z. B. von der Sonne mittels einer Sammellinse ein Bildchen entworfen wird, so entsteht schon nicht mehr ein unendlich kleines Bildchen im Brennpunkt, sondern ein Scheibchen in der Brennebene. Es kann nämlich zwar, was die Gegenstandsweite betrifft, der Abstand Sonne—Erde = 20 000 000 Meilen als $a = \infty$ und daher $b = f$ angenommen werden. Da aber trotz dieses ungeheuren Abstandes die Sonne dank ihrer ungeheuren Gröfse sich als eine Scheibe von $\frac{1}{2}°$ „scheinbarem Durchmesser" darstellt, so bilden auch die von den entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes durch den Mittelpunkt der Linse gezogenen Hauptstrahlen miteinander diesen Winkel und es kommt auch dem Sonnenbildchen eben diese Winkelgröfse zu. — Erst bei Fixsternen hat die noch viel gröfsere Entfernung zur Folge, dafs sie wie Punkte erscheinen, und für sie ist dann auch das Bildchen in der Brennebene selbst ein Punkt; und zwar im Brennpunkt, wenn die

Achse der Linse a f den Fixstern gerichtet ist: Anwendung namentlich beim Objektiv aller **astronomischen** (dioptrischen) Fernrohre. — **Brenn-** und **Beleuchtungslinsen** (**Kondensorlinsen**); diese konzentrieren z. B. beim **Sonnenmikroskop** (Fig. 382) die parallel einfallenden Sonnenstrahlen auf das Objekt, welches jedoch etwas vor oder hinter die Brennweite gestellt wird, damit es durch die wärmende Wirkung der Strahlen nicht beschädigt werde. Ebenso bei den übrigen **Projektionsapparaten** siehe unten IV).

Fig. 382.



II. Linsenfall: **Ist der nd aufserhalb der doppelten Brennweite, so ist das chen der einfachen und der doppelten Brennweite; es sch, umgekehrt, verkleinert.**

Anwendung in der **Dunk t Linse** z. B. bei Visitkartenphotographieen (auch der Augapfel g rkleinerte Bilder, also gemäfs dem II. Linsenfall, § 108); es sei s e rkt, dafs bei Bildern **in oder über** Lebensgröfse der III. und IV. Linsenfall in Anwendung kommen. — Wirkung der Objektive bei **terrestrischen** Fernrohren. — Einem Wandern aus unendlicher Ferne bis an die doppelte Brennweite entspricht nur das geringe Wandern des LA 171. Bildes von der einfachen gegen die doppelte Brennweite hin, LA 171; gleichwohl erlauben **Distanzmesser** aus der Bild- auf die Gegenstandsweite zu schliefsen.

III. Linsenfall: **Ist der Gegenstand in der doppelten Brennweite, so ist das Bild ebenfalls in der doppelten Brennweite; es ist physisch, umgekehrt, gleich grofs.**

Anwendung bei Frauenhofers Dispersionsversuch (**§ 114**), **wenn von dem Spalt** ein gleich grofses Bild entworfen werden soll.

IV. Linsenfall: **Ist der Gegenstand zwischen der doppelten und der einfachen Brennweite, so ist das Bild aufserhalb der doppelten Brennweite; es ist physisch, umgekehrt, vergröfsert.**

Anwendung bei den **Projektionsapparaten** (*Laterna magica*, **Skioptikon**, Fig. 383, Sonnenmikroskop, Fig. 382); Objektiv des **zusammengesetzten Mikroskops** (§ 111).

V. Linsenfall: **Ist der Gegenstand in der einfachen Brennweite, so entsteht kein Bild (weder vor noch hinter der Linse); die vom Brennpunkt ausgehenden Strahlen kommen parallel aus der Linse.**

Anwendung bei der Blendlaterne, wenn aus ihr nur ein **Parallelstrahlenbüschel** austreten soll. — Kollimatorlinsen, die von einem in der **Brennebene**

liegenden Lichtpunkt oder Spalt ein **Parallelstrahlenbüschel** auf eine (z. B. bei Fizeaus Versuchen, § 122, sehr entfernte) mit gemeinschaftlicher Achse aufgestellte

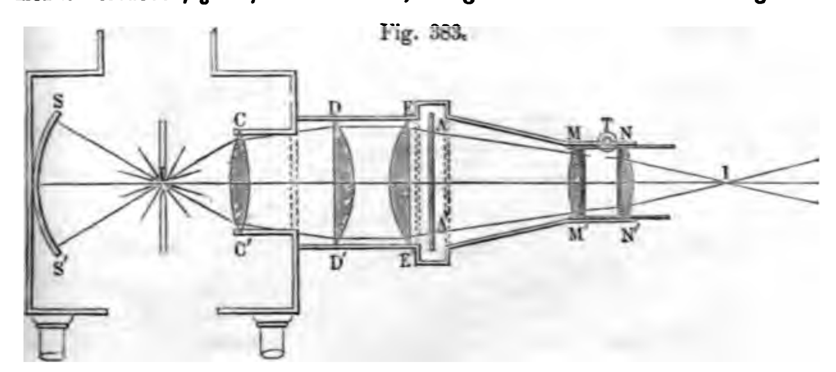


Fig. 383.

Linse senden; letztere sammelt dann die Strahlen wieder zu einem Lichtpunkt, bezw. einer Lichtlinie (gemäfs dem I. Linsenfall).

VI. Linsenfall: **Ist der Gegenstand innerhalb der einfachen Brennweite, so ist das Bild vor der Linse; es ist geometrisch, aufrecht, vergröfsert.**

Anwendung beim **einfachen Mikroskop** (Lupe), bei **Brillen** für Weitsichtige.

Die allgemeinere Theorie der Brechung des Lichtes an sphärischen Flächen hat die Aufgabe zu lösen: Die Mittelpunkte O_1, O_2, . . . O_k von Kugelflächen beliebiger Krümmungshalbmesser liegen auf einer Geraden und bilden die Trennungsflächen von optisch verschieden dichten Medien. Welchen Weg nimmt ein Strahl beim Durchgang durch alle diese Trennungsflächen und Medien? [Eine solche Mehrheit brechender Kugelflächen liegt vor in unserem Auge, desgleichen in jedem zusammengesetzten optischen Instrument, zunächst Mikroskopen und Fernrohren. Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich aber manchmal sehr schwierig, wenn, wie es diese Instrumente, ja sogar schon ein guter photographischer Apparat verlangt, noch bestimmte Nebenbedingungen dazukommen; so namentlich, dafs einer als Gegenstand gegebenen zur Linsenachse normalen **Ebene** wieder möglichst annähernd als Bild ebenfalls eine **Ebene** entsprechen solle (**aplanatische Linsen**; „Linsen bester Form"). Alle Abweichungen, die die Bilder von der einfachen geometrischen Ähnlichkeit mit dem Gegenstande infolge der Kugelflächen zeigen, werden zusammengefafst unter dem Namen **„sphärische Abweichung"** der Linse. — Viel mehr als durch diese sphärische wird die Schärfe der Linsenbilder geschädigt durch die **„chromatische Abweichung"**; über diese und über Achromasie vergl. § 116.]

Konkavlinsen. Fällt auf eine Konkavlinse (Fig. 385 a. f. S.) ein Strahlenbüschel parallel zur Achse, so tritt es divergierend so aus, wie wenn es von einem Punkte vor der Linse (dem „imaginären Brennpunkte" F) käme. — Umgekehrt (Fig. 388 a. f. S.): War auf die Linse ein konvergentes Strahlenbüschel gefallen, dessen Scheitel in F liegt, so tritt es parallel aus der Linse aus. — Daher Bildkonstruktion Fig. 384 (a. f. S.).

Für das Verständnis des Galileischen Fernrohres (§ 112, Fig. 400) ist die Vergleichung der Figuren 387, 388, 389 nützlich. Die **Konvergenz** des einfallenden

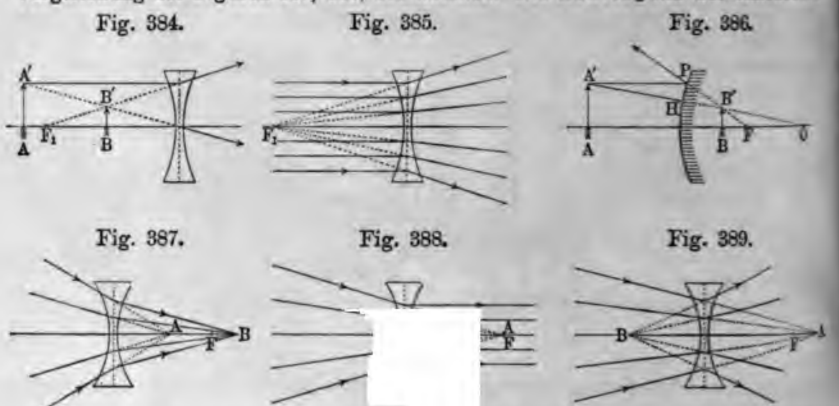


Fig. 384. Fig. 385. Fig. 386.

Fig. 387. Fig. 388. Fig. 389.

Büschels wird nämlich in Fig. ... ichere Konvergenz, in Fig. 388 Parallelismus, in Fig. 389 ... diesem dritten Falle erscheint daher statt eines physischen Bildes, ... ;ierende Büschel in A erzeugt hätte, für ein auf der Seite von A bem... e auf der anderen Seite der Linse ein **geometrisches** Bild B.

Rechnerisch ergeben sich ... ten für Zerstreuungslinsen aus der Formel für die Sammellinsen, indem si... positiven Krümmungsradien negativ gesetzt werden. Z. B. Für eine sym... ische Konkavlinse vom Brechungsexponenten $n = \frac{3}{2}$ wird $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{r}$; allgemein $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$.

Konvexspiegel. Fig. 386 zeigt, dafs und warum die Konvexspiegelbilder durchaus analog sind den Konkavlinsenbildern (— entsprechend den Analogieen von Konkavspiegelbildern und Konvexlinsenbildern). Zeige an Fig. 386, dafs und warum, wenn wir z. B. einer glänzenden Gartenkugel unser Gesicht bis auf kleine Abstände nähern, die Nase weniger verkleinert erscheint als Stirne und Kinn; daher Zerrbilder.

Für alle brechenden und spiegelnden Flächen von geometrisch definierter Gestalt (Kegel-, Zylinder . . .-Spiegel, Zylinderlinsen . . ., letztere anwendbar zum Entwerfen von Spaltenbildern u. dergl.) lassen sich von gegebenen wirklichen Gegenständen solche Zeichnungen (**Anamorphosen**) anfertigen, dafs die von ihnen durch jene reflektierenden und brechenden Körper entworfenen Bilder den wirklichen Gegenständen wieder geometrisch ähnlich werden.

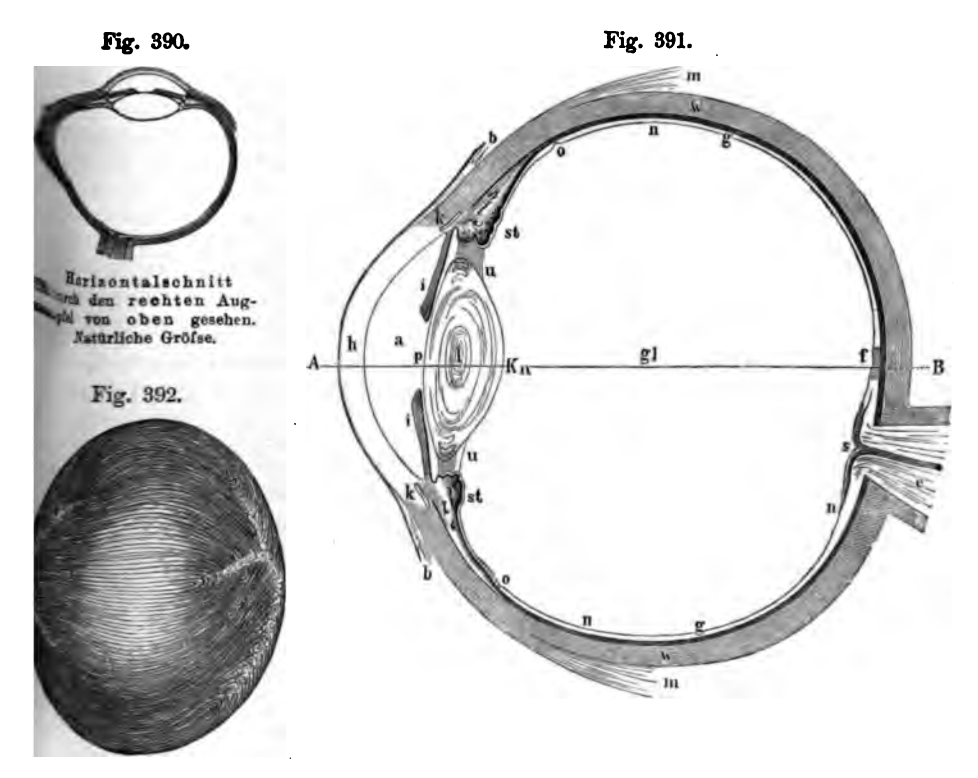
§ 108. Bau und physikalische Leistung des Auges.

Der annähernd kugelförmige **Augapfel** (Figg. 390, 391) besteht aus a) drei Systemen von Häuten, b) drei das Innere erfüllenden lichtbrechenden Medien; nämlich

a) 1. Aufsen die **Sehnenhaut** (weifse, harte Haut, *sclerotica*), welche nach vorn in die durchsichtige, stärker gekrümmte **Hornhaut** (*cornea*) übergeht.

2. An der Innenseite der Sehnenhaut die **Aderhaut** (*chorioidea*), welche nach vorn in die von dem Sehloch (Pupille) durchbrochene **Regenbogenhaut** (*iris*) übergeht; sie ist aufsen bei verschiedenen Personen verschieden gefärbt und innen wie die Aderhaut mit einem schwarzen Farbstoffe bedeckt.

3. Zu innerst die **Netzhaut** (*retina*), welche aus den Verzweigungen des Sehnerven (und vorgelagerten Organen, unter ihnen die „Stäbchen“



und „Zapfen“) gebildet wird und sich nach vorn nur bis gegen die Regenbogenhaut erstreckt; die hinterste Stelle ist der am meisten lichtempfindliche gelbe Fleck (in seiner Mitte die „Netzhautgrube“); die Eintrittsstelle des Sehnerven ist der für das Licht unempfindliche blinde Fleck [1]).

b) 1. Die **wässerige Flüssigkeit** (in der vorderen Augenkammer zwischen Hornhaut und Iris); 2. die hinter der Iris liegende

[1]) Zuerst bemerkt von MARIOTTE (1668); nachzuweisen durch mannigfaltige Versuche, z. B.: Schliefse das linke Auge, fixiere mit dem rechten eine Münze und lege 1 dm rechts von dieser eine zweite vor dich hin; letztere wird dir bei richtiger Entfernung des Kopfes (etwa 3 dm) unsichtbar. — „Einem den Kopf wegschauen.“ — Auf der Breite des blinden Fleckes haben 11 Vollmondbilder nebeneinander Platz.

e (Fig. 392 a. v. S.) und hinter dieser 3. der aus gallert- e bestehende **Glaskörper**, welcher die Hauptmasse des Augapfe rstellt.

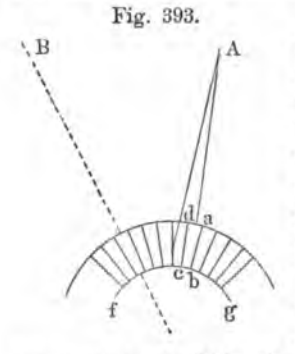
Die von dem Hornhautscheitel durch die Mitten der Pupille, der Linse und den gelben Fleck gehende Gerade heifst die Augenachse.

Der **Augapfel** ist in der mit weichem Zellgewebe ausgekleideten **Augenhöhle** eingebettet; er kann durch sechs **Muskeln** bewegt und vorn durch die **Augenlider** bedeckt werden. — Die Teile des Augapfels, welche man bei einem „offenen Auge" zwischen den Augenlidern sieht, sind: Ein Teil der Sehnenhaut („das Weiße des Auges") und die Hornhaut, sowie die Regenbogenhaut mit der Pupille. —

Erst KEPLER hat bestimmt erkannt, dafs der optische Vorgang im Auge der einer Bre ng sei (früher hatte man gemeint, dafs sich die äufseren Gegenstände i om Auge eine Art unsichtbarer Taststang en, gleichsam v chtstrahlen, mittels deren wir gleichsam rrisse der Körper htigere Anschauungen bei LIONARDO DA ., vergl. § 99). Sowc l. h. als Anwendung der allgemeinen o nen Gesetze auf den Ga ahlen in den brechenden Medien des Auges, wie direkt empiri htung des Netzhautbildchens in den Augen kürzlich getöteter Tier lurch den von HELMHOLTZ erfundenen Augenspiegel, steht gegenwärtig sikalische Leistung des Auges fest.

Das Auge wirkt wie ein linse, die mit einem Schirm (der Netzhaut) zum Auffangen der chen Bilder nach dem **I. und II. Linsenfall** verbunden ist. — vendige (nicht ausreichende) Bedingung zum scharfen Sehen eines genstandes ist, dafs alle Strahlen, die von je einem Punkte des sichtbaren Gegenstandes durch die Pupille gehen, sich in einem Punkte der Netzhaut sammeln.

Fig. 393.



Während diese Forderung im „dioptrischen" Auge des Menschen, der Säugetiere, Vögel, Reptilien, Amphibien und Fische durch die brechenden Häute und Medien verwirklicht ist, geschieht die Sonderung des von den Gegenständen ausgehenden Lichtes bei Insekten durch den ganz andersartigen optischen Apparat der Facettenaugen (manche auch mit je einer Linse vor jeder Facette); auch hier sind dann die lichtempfindlichen Teile auf dem Grunde je einer Facette den einzelnen Flächenteilen des Gegenstandes zugeordnet (Fig. 393).

Im dioptrischen Auge erfährt das eindringende Licht Brechungen beim Übergang aus der Luft in die Hornhaut, aus dieser in die wässerige Feuchtigkeit, aus dieser in die Linse (ja sogar hier noch in deren verschiedenen Schichten von etwas verschiedenen Brechungsquotienten), endlich beim Übergang von der Linse in den Glaskörper. Für dieses wirkliche Auge des Menschen läfst sich nach LISTING eine einzige sphärische brechende Fläche von gleicher Gesamtwirkung fingieren, deren Krümmungsmittelpunkt den **Kreuzungspunkt** des „reducierten Auges" darstellt; im wirklichen Auge kommt er innerhalb der Linse nahe deren hinterer Fläche, etwa 15 mm vor der Netzhaut zu liegen. In diesem Punkte kreuzen sich die den verschiedenen Punkten eines äufseren Gegenstandes

sprechenden Hauptstrahlen; man beachte aber, dafs nicht etwa nur diese, lern das ganze von je einem Gegenstandspunkte kommende Lichtbündel, soweit die Pupille Eintritt gewährt, zur Reizung eines Punktes auf der Netzhaut trage, der erst hierdurch Bildpunkt wird.

Für alle beschriebenen optischen Vorgänge kommt vom Standpunkte der tik nicht in Betracht, dafs das Auge mehr als eine leblose Dunkelkammer t Linse, sondern dafs es ein lebendiges Organ ist. Letztere Tatsache ist genstand der physiologischen und der psychologischen Optik (psychol. h., Nr. 44). Einiges über die chemischen Vorgänge der Netzhaut vergl. § 120. Anh. 44.

Noch wesentlich in die geometrische Optik fällt dagegen die Fähigkeit des ges, sich verschiedenen Gegenstandsweiten anzupassen, kurz „zu akkommoeren", durch welche Fähigkeit allein schon freilich wieder der lebendige Augel der leblosen Dunkelkammer unvergleichlich überlegen ist (zumal dieses kommodieren meistens ganz unwillkürlich geschieht; psychol. Anh., Nr. 44). Anh. 44.

§ 109. Akkommodation.

Wäre das Auge eine starre Verbindung der zusammen als Sammellinse rkenden brechenden Stoffe und der den Schirm darstellenden Netzhaut, so rden die von einem Gegenstande ausgehenden Strahlen nur bei einer einzigen genstandsweite ein scharfes Bild auf der Netzhaut geben. Bei kleineren genstandsweiten wäre der Ort des Bildes hinter, bei gröfseren vor der Netzt; in diesen beiden Fällen würden die von je einem leuchtenden Punkte mmenden Strahlen nicht wieder in einem Punkte gesammelt, sondern sie würden f der Netzhaut einen „Zerstreuungskreis" beleuchten (wobei die Kreisform r der Pupille entspricht). Tatsächlich nun vermögen wir aber **bei sehr verhiedenen Gegenstandsweiten scharf zu sehen;** ihnen mufs sich also das endige Auge anpassen können, und es entsteht hiermit die Frage nach dem chanismus der **Akkommodation.** Von vornherein wären folgende drei Möglichten denkbar: 1. Beim Heranrücken des Gegenstandes an das Auge rücke die tzhaut vom Kreuzungspunkte weg (wie bei der photographischen Dunkelkammer nahe Gegenstände die Platte nach rückwärts, d. i. vom Objektiv weg, choben wird); dies ist aber schon dadurch ausgeschlossen, dafs die Augenhöhle ein Zurückweichen der Hinterwand des Augapfels nicht Raum gewährt. Es könnten sich bei unveränderter Stellung der Netzhaut die brechenden dien nach vorn, d. i. zum Gegenstande hin, bewegen (wie bei der Dunkelnmer die Feineinstellung meist durch ein Verschieben nicht der Platte, sondern Objektivs geschieht); aber auch dieser Vorgang findet tatsächlich nicht statt, dern 3. **verschiedenen Gegenstandsweiten entsprechen verschiedene Krümngen der Linse,** wie Cramer und Helmholtz durch Messung der Spiegellchen, die sich durch Reflexion an der Krystalllinse erzeugen, direkt nachgewiesen en. — Gemäfs den Gesetzen über die Abhängigkeit der Bildweite von Gegendsweite und Brennweite gelten folgende Begriffe und Gesetze:

Ein **normalsichtiges** Auge ist, wenn die Akkommodationsmuskeln nz ruhen, auf unendlich grofse Gegenstandsweite eingestellt. Auch i Annäherungen auf einige Meter gibt sich die Muskeltätigkeit noch ht in merklichen Empfindungen und noch weniger in Ermüdungsfühlen kund. Wir pflegen die Gegenstände womöglich (z. B. das Buch im Lesen) bis auf die **„deutliche Sehweite"** von 30 bis 20 cm dem Auge

zu nähern. [illegible]ei fortgesetzter Annäherung empfinden wir immer gröfsere Akkommod[illegible]ionsanstrengung und bei Gegenstandsweiten von etwa 10 cm abwärts wird das deutliche Sehen mit freiem Auge unmöglich.

Ein der Akkommodation nach normales Auge wird strenger als „emmetropisch“ bezeichnet, da es in anderen Hinsichten immer noch abnorm sein kann.

Weitsichtige Augen sehen in die Ferne scharf, vermögen aber schon auf die deutliche Sehweite normaler Augen nicht mehr zu akkommodieren.

Da dies namentlich in höherem Alter eintritt (infolge geringerer Biegsamkeit der Gewebe), so heifsen solche weitsichtige Augen auch presbyopisch. — In einem weitsichtigen Auge schneiden sich die Strahlen von entfernteren Gegenständen auf der Netzhaut, somit würden sich die von näheren hinter der Netzhaut schneiden. Da somit für diese kleinen Gegenstandsweiten die Linse zu schwach gekrümmt ist, w[illegible] für Weitsichtige die Sammellinse benutzt. — Ist die beim „grau[illegible]üb gewordene Krystalllinse exstirpiert worden, so bedarf es zum deu[illegible] einer sehr stark konvexen „Starbrille“.

Kurzsichtige A[illegible]rf nur für Gegenstandsweiten, die kleiner sind als die [illegible]te normaler Augen.

Dieser Mangel ist man[illegible]ht durch eine zu starke Krümmung der brechenden Medien (Hornhau[illegible]ufiger durch einen zu grofsen Abstand der Netzhaut von der Linse. D[illegible]tigkeit kann angeboren sein und in späteren Jahren sich mindern [illegible]rmal- oder Weitsichtigkeit. Die Kurzsichtigkeit kann aber auch [illegible] sein, z. B. als Folge der schlechten Gewohnheit, in die Dämmerung [illegible] lesen, wobei unwillkürlich, um gröfsere Lichtstärke zu erzielen, das Auge der Schrift zu nahe gebracht und daher die Akkommodationsmuskulatur an eine zu kleine Gegenstandsweite gewöhnt wird. Kurzsichtige Augen heifsen auch myopisch (μύω, ich blinzle). — Als Brille für Kurzsichtige dient die **Zerstreuungslinse**; warum? Wird bei hochgradiger Kurzsichtigkeit der Gebrauch der Brille verabsäumt, so können infolge instinktiver Annäherung des Augenhintergrundes an die Linse Erkrankungen, sogar Netzhautablösungen eintreten.

§ 110. Sehwinkel. Gemeinschaftlicher Zweck der Mikroskope und Fernrohre.

Nach alltäglichen Erfahrungen sind für das freie Auge Gegenstände nicht mehr deutlich erkennbar, wenn sie a) zu klein, b) zu entfernt sind. Beides hat den gemeinschaftlichen Grund, dafs die verschiedenen Punkte des Gegenstandes dann nicht mehr auf hinreichend verschiedenen Punkten der Netzhaut ihre Bilder haben. Feine physiologische Messungen haben gezeigt, dafs in der Tat die Grenze der Unterscheidbarkeit je zweier Aufsenpunkte dann erreicht ist, wenn ihre Bilder nicht mehr auf verschiedene „raumempfindende Elementarorgane“ der Netzhaut (wahrscheinlich die Stäbchen), sondern nur mehr auf verschiedene Punkte desselben Organes fallen.

Die Beziehungen zwischen Gröfse, Abstand und deutlicher Sichtbarkeit eines Gegenstandes erfordern die Einführung des Begriffes „Sehwinkel“.

Sehwinkel (Gesichtswinkel), unter dem eine Strecke $AB = g$ cm erscheint, heifst der Winkel $AKB = \sigma^0$, den die vom Kreuzungspunkte

s Auges zu den Punkten A und B gezogenen Geraden einschliefsen.
Ist der senkrechte Abstand der Strecke vom Auge a cm, so ergeben
h die Beziehungen nach Figg. 394 und 395; ähnlich Fig. 396.

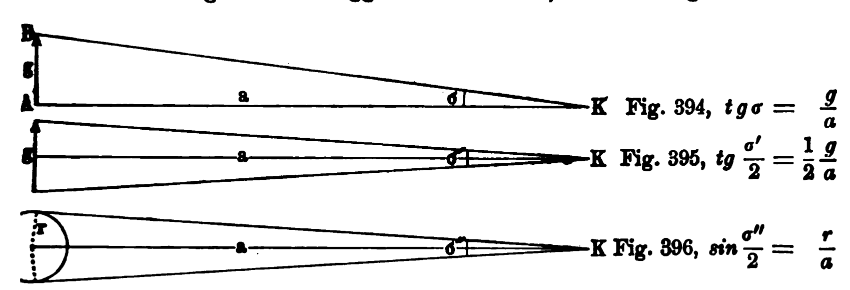


Fig. 394, $tg\,\sigma = \frac{g}{a}$

Fig. 395, $tg\,\frac{\sigma'}{2} = \frac{1}{2}\frac{g}{a}$

Fig. 396, $\sin\frac{\sigma''}{2} = \frac{r}{a}$

Diskussion dieser Gleichungen in Bezug auf jede der drei Gröfsen σ, a und g
a denen je eine konstant, eine unabhängig, die dritte abhängig veränderlich
lacht wird). — Speziell wird σ sehr klein, wenn bei konstantem a das g sehr
in, oder wenn bei konstantem g das a sehr grofs ist. **Mikroskope und
rnrohre** haben den gemeinschaftlichen Zweck, dafs sie den Gegenstand unter
em **gröfseren Sehwinkel** Σ zeigen. — Man beachte hier sogleich das Ungenaue
Ausdrucksweise: „Die Gegenstände werden durch das Mikroskop vergröfsert,
rch das Fernrohr näher gebracht"; es mufs natürlich heifsen: Mikroskop und
rnrohr zeigen hinreichend grofse und hinreichend nahe Bilder.

Im folgenden sollen nur die einfachsten Schemata der Wirkungsweise von
kroskopen und Fernrohren gegeben werden; namentlich sei bemerkt, dafs für
hier als einfache Linsen angenommenen Objektive und Okulare in Wirklichkeit
t ausnahmslos Linsenkombinationen (teils zur möglichsten Vermeidung der
härischen, viel mehr aber noch der chromatischen Abweichung) eintreten.
gemein gelten die Bezeichnungen:

Bei allen Mikroskopen (das einfache ausgenommen) und Fern-
hren heifst die dem Gegenstande zugekehrte Linse (Linsenkombi-
tion) das **Objektiv**, die dem Auge zugekehrte das **Okular**.

§ 111. Mikroskope.

I. Will der Nichtphysiker mittels einer „Lupe" z. B. die Fäden eines feinen
spinstes betrachten, so pflegt er das Glas meistens nahe an diesen Gegenstand
d das Auge viel entfernter zu halten. Der richtige Gebrauch der Lupe und
gleich die Einsicht in ihre Wirkungsweise entspricht dagegen folgendem

Versuch: Bringe den kleinen Gegenstand immer näher an dein
ge; er erscheint dann unter immer gröfserem Sehwinkel, also ver-
öfsert — aber auch verschwommen, da das Auge mit seiner
kkommodation nicht mehr zu folgen vermag. Schiebt man dann
rischen Gegenstand und Auge eine als **einfaches Mikroskop (Lupe)**
rkende Sammellinse, so dafs das Auge der Linse möglichst nahe
d der Gegenstand innerhalb der einfachen Brennweite der
nse ist, so sieht das Auge gemäfs dem VI. Linsenfalle ein geo-

metrisches, aufrechtes, vergröfsertes Bild (Fig. 381, S. 343); und zwar deutlich, wenn die **Bildweite gleich ist der deutlichen Sehweite.**

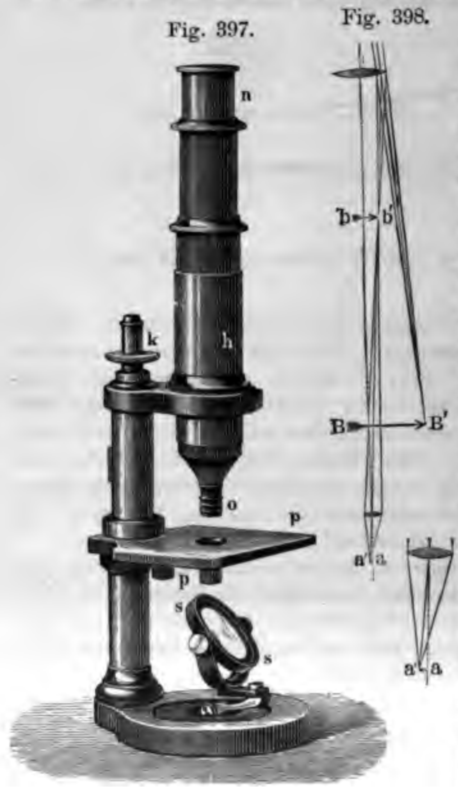


Fig. 397. Fig. 398.

Schon ein Wassertropfen, den man über ein mit einer Nadel in ein Stanniolblatt gestochenes Loch bringt, wirkt in dieser Weise stark vergröfsernd. Desgleichen die Glasstiftchen, die am einen Ende kugelig, am anderen (der zu jener einfach brechenden Fläche gehörigen Brennebene) eben geschliffen sind und hier Mikrophotographieen tragen. Auch wo mehrere Sammellinsen so nahe hintereinander angebracht sind, dafs jede folgende die Konvergenz des in die vorderste eingetretenen Strahlenbüschels noch steigert, wirken diese zusammen als **einfaches Mikroskop**. Doch läfst sich die Wirkung eines solchen nicht so steigern wie bei dem von Jansen 1590 erfundenen zusammengesetzten Mikroskop.

II. Beim **zusammengesetzten Mikroskop** ist das Objektiv eine Sammellinse von kleiner Brennweite. Es erzeugt von dem etwas aufserhalb dieser Brennweite befindlichen Gegenstande aa' das vergröfserte physische Bild bb' (nach dem IV. Linsenfalle); dieses Bild wird durch das als einfaches Mikroskop wirkende Okular betrachtet und erscheint als **nochmals** vergröfsert in BB'.

§ 112. Fernrohre.

I. Beim **Keplerschen Fernrohr** ist das Objektiv eine Sammellinse von grofser Brennweite; es erzeugt von dem **sehr weit entfernten** (und hinreichend grofsen) Gegenstande AA' (**bei astronomischen** Objekten entsprechend dem I., bei irdischen dem **II. Linsenfalle**) ein physisches, verkleinertes Bild bb' in, bezw. wenig **aufserhalb** der Brennweite des Objektivs. — Das Okular ist wie beim **zusammengesetzten** Mikroskop eine Sammellinse von kleiner **Brennweite**; durch diese wird bb' betrachtet und erscheint als BB' (Fig. 399).

Vom zusammengesetzten Mikroskop unterscheidet sich also **das Keplersche** Fernrohr nur dadurch, dafs für das Objektiv dort der IV., hier der **II. Linsenfall** in Anwendung kommt. — **Da das Bild** bb' **annähernd sowohl in der Brennweite**

des Objektivs wie des Okulars zu liegen kommt, so ist annähernd die Länge des Keplerschen Fernrohres gleich der **Summe** der Brennweiten vom Objektiv und Okular.

II. Das **Galileische Fernrohr** unterscheidet sich vom Keplerschen wesentlich dadurch, dafs als Okular statt einer Sammel- eine Zerstreuungslinse dient, die annähernd um ihre Brennweite näher dem Objektiv ist als das Bild bb', welches durch das Objekt allein

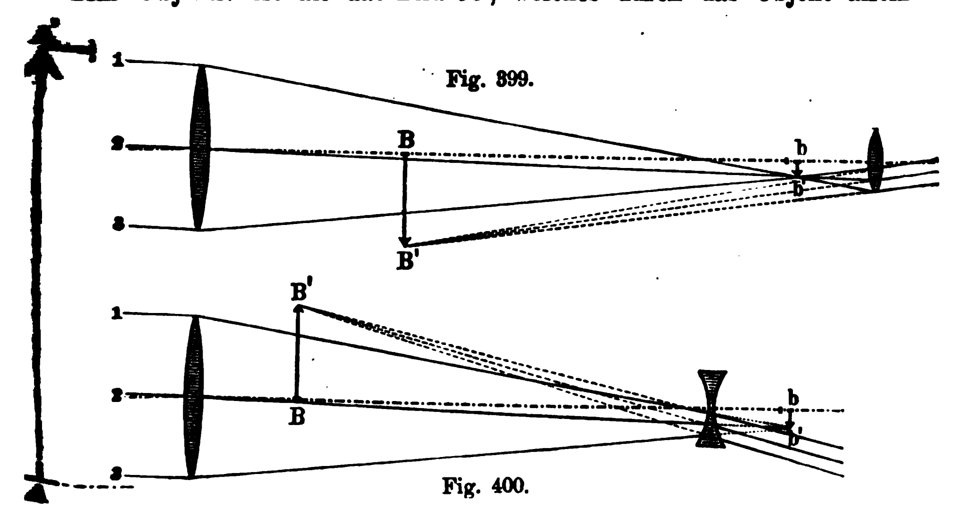


Fig. 399.

Fig. 400.

entworfen würde. Dieses konkave Okular entwirft von bb' ein umgekehrtes, also von dem Gegenstande ein aufrechtes Bild (Fig. 400).

Die Wirkungsweise des Okulars entspricht dabei dem in Fig. 389, S. 346 dargestellten Falle, d. h. bb' mufs etwas **aufserhalb** der (imaginären) Brennweite des konkaven Okulars zu liegen kommen. Somit ist annähernd die Länge des Galileischen Fernrohres gleich der **Differenz** der Brennweiten von Objektiv und Okular.

Aufrechte Bilder wie das Galileische Fernrohr zeigt auch ein Keplersches, dem man hinter der bei ihm als Okular dienenden Sammellinse noch eine Sammellinse so hinzugefügt hat, dafs diese das umgekehrte Bild nochmals umkehrt. Ein solches Fernrohr heifst vorzugsweise ein **terrestrisches**, wogegen das Keplersche ein astronomisches heifst, weil namentlich bei astronomischen (aber auch bei geodätischen) Beobachtungen das umgekehrte Bild nicht stört. (Eigentlich wäre hiernach auch das Galileische Fernrohr zu den „terrestrischen" zu zählen.) — Da das Galileische Okular die vom Objektiv kommenden Strahlen noch weiter von der Achse ablenkt, hat es ein kleineres Gesichtsfeld und geringere Lichtstärke als das astronomische. Das Galileische Fernrohr wird daher nur mehr bei Operngückern (und Feldstechern) praktisch verwendet, für die es sich durch seine Kürze empfiehlt.

Spiegelfernrohre. Als Objektiv läfst sich statt der Sammellinse auch ein Sammelspiegel anwenden, dessen Bilder dann wieder durch die gleichen Linsenokulare wie bei den Linsenfernrohren betrachtet werden.

Eine Unbequemlichkeit ist aber die, dafs der Hohlspiegel die Strahlen in der Richtung zum Gegenstande zurückwirft, so dafs der Beschauer dem Gegenstande selbst den Rücken zuwenden und überdies etwas seitwärts von den einfallenden Strahlen stehen müfste, damit er diese nicht abhält. Bei manchen Spiegelfernrohren sind diese Umstände durch Anbringung eines zweiten Spiegels vermieden worden, so beim **Newtonschen Teleskop** (Fig. 401) mittels eines Planspiegels, der direkt physische Bilder gibt (warum? — vergl. § 102); dagegen bei Fritsch' Brachyteleskop (Modell!) durch einen kleinen Konvexspiegel, vermöge dessen das Fern r kurz und kompendiös gebaut werden kann. — Der wesentlichste Vorzug de iegelfernrohre ist das Entfallen aller chromatischen Abweichungen (§ 116) Objektivs.

Fig. 401.

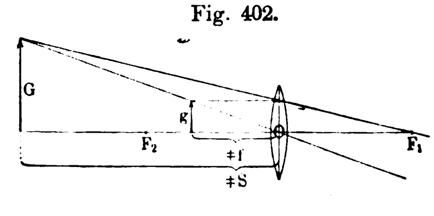


§ 113. Vergröfserung, Schärfe ichtstärke und Gesichtsfeld von Mikroskopen ıd Fernrohren.

Im folgenden ist unter **Vergröfse** immer die lineare verstanden, deren zweite Potenz dann das Mafs der Fläcn vergröfserung bildet. Erscheint z. B. bei einem Sonnen- (Zirkonlicht-) Mikroskop uas Bild eines Flohes von 1 mm Länge 2 m lang, so ist die lineare Vergröfserung 2000, die Flächenvergröfserung 4000000. — Bei den meisten optischen Instrumenten ergibt sich die Vergröfserung nicht so direkt wie bei den genannten Projektionsapparaten, wo das physische Bild auf einem Schirme aufgefangen und hier ebenso direkt gemessen werden kann wie der Gegenstand selbst. Experimentell wird z. B. beim Fernrohr die Vergröfserung bestimmt, indem man es etwa auf ein Ziegeldach richtet und mit beiden Augen schauend abzählt, wieviel der wirklichen Ziegel das Gesichtsfeld verdeckt und wieviel der vergröfserten in das Gesichtsfeld gehen. — Einige der einfachsten annähernden Berechnungen von Vergröfserungszahlen v sind folgende:

Ist beim **einfachen Mikroskop** die Länge des Gegenstandes g cm, die des Bildes G cm, so ist $v = G:g$. Denken wir uns das Auge nicht nur nahe an der Linse, sondern in ihrem Mittelpunkte O (Fig. 402) und den Gegenstand nicht etwas innerhalb, sondern in der Brennweite, so wird die lineare Vergröfserung $v = S:f$; in Worten!

Fig. 402.



Man kann also einer gegebenen Linse (Lupe) nicht für sich eine bestimmte Vergröfserung zuschreiben, sondern nur in Bezug auf ein Auge mit bestimmter Sehweite; d. h. ein Kurzsichtiger mufs von dem Gegenstande ein weniger entferntes, also auch weniger vergröfsertes Bild entstehen lassen (indem

er die Linse mit dem Auge näher an den Gegenstand hält). — Gleiches gilt auch für die Okulare der zusammengesetzten Mikroskope und der astronomischen Fernrohre, da diese Okulare eben als Lupen wirken.

Beim **zusammengesetzten Mikroskop** ist die Vergröfserung V definiert als das Produkt der Vergröfserungen v_1, die das Objektiv (als Projektionslinse), und v_2, die das Okular (als Lupe) liefert.

Beim **astronomischen Fernrohr** ist die Vergröfserung V zunächst definiert durch das Verhältnis der Sehwinkel $\Sigma : \sigma$, unter denen ein Objekt durch, bezw. ohne das Fernrohr erscheint. Infolge der verschwindenden Kleinheit der Fernrohrlänge gegenüber dem Abstande der Objekte ist es dann zulässig, dem Sehwinkel σ als Scheitel die Mitte des Objektivs, dem Winkel Σ die Mitte des Okulars zu erteilen. Ist γ die lineare Gröfse des durch das Objektiv entworfenen physischen Bildes, so ist $v = \frac{\Sigma}{\sigma} \neq \frac{tg\Sigma}{tg\sigma} = \frac{\gamma : f}{\gamma : F} = \frac{F}{f}$; in Worten! (LA 172.) LA 172.

Der Begriff der „Vergröfserung eines astronomischen Fernrohres" darf nicht dahin mifsverstanden werden, als sei das durch das Okular schliefslich gesehene Bild wirklich gröfser als der Gegenstand; schon wenn ich einen Kirchturm, geschweige den Mond ansehe, ist ja jenes Bild immer noch unvergleichlich kleiner (dafs namentlich bei bekannten Gegenständen, Menschen, Gebäuden, das Fernrohr überhaupt diese Dinge nicht gröfser, sondern näher erscheinen läfst, erklärt sich aus der Psychologie der „Tiefenwahrnehmung"; psychol. Anhang, Nr. 44). Anh. 44. Da das Objektiv für sich gemäfs dem I., höchstens II. Linsenfalle wirkt, so ist im Vergleich zum Gegenstande das Bild immer verkleinert. — Gleichwohl trägt auch das Objektiv zur Vergröfserung insofern bei, als es, je gröfser die Brennweite des Objektivs ist, die physischen Bilder bei unverändertem Sehwinkel immer gröfser entwirft: dies der eine Grund für die Anfertigung sehr langer astronomischer Fernrohre. Ist z. B. die Brennweite des Objektivs $F = 5$ m, so ist der Durchmesser des Bildes vom Vollmond (Sehwinkel $\frac{1}{2}^0$) $d = 4{,}6$ cm; ist dagegen $F' = 20$ m, so ist $d' = 18$ cm (LA 172). In eben diesen Gröfsen entsteht dann z. B. das Mondbild auf der photographischen Platte, wenn diese statt des Okulars mit dem Objektiv verbunden wird. LA 172.

Bei gegebener Fernrohrlänge ist sodann die Vergröfserung ausschliefslich vom Okular abhängig. Dabei wird nun aber keineswegs (wie der Unkundige meinen möchte) der Beobachter immer ein möglichst stark vergröfserndes Okular wählen. Denn namentlich bei trüber und infolge ungleicher Erwärmung von Schlieren durchzogener Luft erscheint bei starker Vergröfserung das Bild so undeutlich und unruhig, dafs häufig erst bei viel schwächerer Vergröfserung am besten zu beobachten ist. — Insbesondere aber ist ja die stärkere Vergröfserung im allgemeinen erkauft durch eine geringere

Lichtstärke. Wird eine beleuchtete Fläche von φ mm² durch ein einfaches oder zusammengesetztes Mikroskop gesehen, so dafs das Bild Φ mm² Fläche hat, so ist die vom Gegenstande ausgehende Lichtmenge über eine $(\Phi : \varphi)$ mal so grofse Fläche verbreitet und diese somit im Verhältnis $(G : g)^2 = v^2$ mal so schwach beleuchtet.

Hierbei ist vorausgesetzt, dafs alles Licht, welches von φ ausgegangen war, auch von Φ her durch die Pupille auf die Netzhaut gelangt (wobei, wie auch im

Eine Unbequem
der Richtung zum G
stande selbst den L
fallenden Strahlen
Spiegelfernrohren s

Konvexspieg
kann. — Da
chromatisc

§ 113. Ve

Im f
zweite Po
bei einem
2 m lang
— Bei
so direk
einem S
der Ge
gröfser
beiden
verdec
einfac

die

xion an den Gläsern u.
führt die Lichtstärke, di
men war, durch das Oku
roskopen nun kann der Gege
undurchsichtige Objekte vo
von unten her mittels Hohlspi
Fernrohren; sondern bei die
rch grofse Objektive. Dieses
n riesigen Fernrohren mit sehr
röffnung, deren Fläche z. B. 10⁴
em lichtschwachen Fixsterne komm
s einen die Pupille gerade ausfül
läfst, wird dann ein Punkt der Ne
beim Eindringen jener Strahlen in da
ichtschwache Fixsterne, welche wegen
ng auch bei stärkster Vergröfserung
Punkte (und zwar bei guten Fernrohren
kleiner als mit freiem Auge) erscheinen
sind. Dagegen erscheinen Planeten
zwar um so lichtschwächer, je stärk
durch ein lichtstarkes Fernrohr (ähnli
Tageslicht die Fixsterne erblicken kann, wi
der hell beleuchteten Luft nicht sieht,
htete Luft sozusagen vergröfsert, also viel
der Stern.

Fig. 399 der Winkel zwischen dem H
seiner Achse gröfser angenommen wo
l, welcher sich in b' gesammelt hatte
hin weitergeht, nicht mehr in diese
lb des Randes vorbeigehen. Mit einem O
itt ist also nur ein Gesichtsfeld von bestim
Da die Vergröfserung des Okulars verkehrt
weite, also auch annähernd seinem Krümm
n kleiner Krümmungshalbmesser auch
Linse verlangt (zumal wenn diese wegen
nicht zu dick genommen werden soll), so
Vergröfserung ein kleines Gesichts

Gröfsen: Vergröfserung, Schärfe, Lichtstärke und Ge
Art Antagonismus steht, z. B. die Vergröfserun
erkaufen ist u. s. f., so kann auch keine von ihne
twirkung eines Mikroskops oder Fernrohres ins
— Mikroskope können aus theoretischen Gr
ung) nie kleinere Objekte als etwa 0,00016 mm
tische Grenze ist (durch neueste „Immersionsm
Riesenfernrohre bringen noch immer Erweiteru
Objektivlinsen bis 40 Zoll ≑ 1 m Durchmesser).

…B. Leuchtende, wärmende, chemische und andere Strahlen.

…en der Stoffe beim Aussenden, Auffallen und Durchgehen …n Strahlen (Emission, Absorption; Diffusion, Dispersion).

… 114. Physikalisch einfache und zusammengesetzte Strahlung. — Farbenstrahlen.

In dem vorausgehenden Abschnitte A, „Geometrische Optik“, wurden nur zwei …r Eigenschaften eines Lichtstrahles, seine Geradlinigkeit und seine Richtung, in …etracht gezogen. Aufser diesen räumlichen Merkmalen schreiben wir aber …edem Lichtstrahle auch ein qualitatives Merkmal zu, nämlich eine bestimmte …Farbe, und sprechen so von roten, gelben, violetten … Strahlen. Allerdings …leckt sich diese Ausdrucksweise schon nicht mehr ganz mit der aufserwissen…chaftlichen Auffassung, welche nicht von „roten Strahlen“ spricht, sondern nur …on „roten Körpern“ (Ziegelsteinen, Rosen . . .), speziell auch von „roten …Flammen“ (z. B. bengalischem Feuer mit Strontiumsalzen), „roten Gläsern“ …undurchsichtigen, bezw. durchscheinenden, z. B. mit Kupferoxyd gefärbten, welche …beim Durchsehen eine ganze Landschaft nur in Abstufungen zwischen Rot und …Schwarz zeigt) u. dergl. Dafs wir aber streng genommen weder den Körpern …selbst, noch den Strahlen die Farbe in derselben Weise als Eigenschaft zu…schreiben dürfen, wie es die naive Auffassung von den Körpern denkt, zeigen folgende

Vorversuche. 1. Wenn durch eine Öffnung im Fensterladen ein Band von …Sonnenlicht, ein „Sonnenstrahl“ im vorwissenschaftlichen Sinne (§ 9b), einfällt und …wir halten ihm ein Blatt Zeichenpapier entgegen, so erscheinen die von dem Licht …getroffenen Teile des Papiers weifs (und die Umgebung grau). Wiewohl nun derselbe …„Strahl“ einen Ziegelstein, eine Rose, eine Kornblume . . . rot, blau . . . zeigt, …nennen wir nicht den Strahl bald weifs, bald rot, bald blau, sondern suchen die …Ursache der verschiedenen Färbung in dem Papier, in dem Stein, in der Blume. …Das Papier nennen wir ebenso weifs, wie den Ziegel rot, zählen aber das …Weifs nicht zu den Farben im engeren Sinne. — 2. Bedeckt man die Öffnung …im Fensterladen mit einem sogen. roten Glas, so geht durch dieses ein Lichtband, …in dem nun sowohl das früher weifse Papier, wie der Ziegelstein rot erscheint. — …3. Beleuchten wir Papier, Ziegelstein, Blume mit einer „Natriumflamme“ …(z. B. einer Weingeistlampe, deren Docht mit Kochsalz eingerieben ist), so …erscheinen im Lichte dieser „gelben Flamme“ das Papier gelb, Ziegel, Blume …graugelb. — Aus solchen Abänderungen der Bedingungen, unter welchen Körper …verschiedene Farben zeigen, folgt, dafs sowohl die Art der Strahlen, wie die …Art der Stoffe, auf welche die Strahlen treffen und von ihnen zurückgeworfen …werden, für die Qualität des Lichteindruckes, den wir beim Beschauen der Körper …erhalten, d. i. für die Farbe, bestimmend sind. Überdies lehren aber Physio…logie und Psychologie, dafs auch der Zustand der Netzhaut, welche durch …die von den Körpern ausgehenden oder zurückgeworfenen Strahlen gereizt wird …(sowie der Zustand des Sehnerven und seiner „zentralen“, d. i. im Gehirn liegenden …Fortsetzungen und Endigungen), für diese Qualität der Lichtempfindung ganz …wesentlich mitbestimmend ist. — Über die Beziehungen (zum Teil sogar …Gegensätze) zwischen physikalischer, physiologischer und psychologischer Farben…lehre vergl. Anhang, Nr. 44.

Anh. 44.

Indem die Physik ein Merkmal sucht, welches die verschiedenen **Strahlen als** solche charakterisiert, möglichst unabhängig von den physiologischen Bedingungen des Sehens, genügt als in der Regel ausreichendes charakteristisches Merkmal der **Brechungsquotient** je eines Strahles beim Übergang aus je einem bestimmten Stoff in je einen anderen, z. B. aus Luft in eine bestimmte Glassorte. (Ausnahmen: anomale Dispersion, § 116; eine ausnahmslos verwendbare physikalische Charakteristik bietet erst die **Schwingungszahl** der Ätherteilchen, oder, wenn ein bestimmtes Medium mit bestimmter Fortpflanzungsgeschwindigkeit gegeben ist, auch die **Wellenlänge;** doch hiervon erst im nächsten Abschnitte, § 124 ff.) — Auf Grund jenes ebenfalls wieder rein geometrischen Merkmales der verschiedenen Brechbarkeit definieren wir:

Physikalisch zusammengesetzt ist jeder Strahl, der sich durch Brechung (beim Durchgang durch ein Prisma) in Strahlen verschiedener Brechbarkeit z[illegible]en läfst; physikalisch einfach ist jeder Strahl, bei dem eine s[illegible] Zerlegung nicht stattfindet.

Hierbei ist das Weifs, welches [illegible]h Sonnenlicht z. B. an Schnee, Milch, ungefärbtem Papier u. dergl. erscheint, [illegible]fellos psychologisch einfach, wiewohl durch die im folgenden beschriebenen Spektralversuche ebenso zweifellos die sogen. „weifsen Sonnenstrahlen" p[illegible]ikalisch zusammengesetzt sind. Umgekehrt ist das physikalisch ein[illegible]e Licht z. B. im Orange des Sonnenspektrums psychologisch zusammengesetzt, nämlich für jeden unbefangen Sehenden ist Orange = Rotgelb; ebenso Violett = Blaurot. Im folgenden ist von „einfachen" und „zusammengesetzten" Strahlen nur im physikalischen Sinne die Rede, ohne Rücksicht auf Einfachheit oder Zusammengesetztheit der mittels solcher Strahlen zu sehenden Farben.

Indem NEWTON (Optik 1704) die folgenden Versuche über **Lichtzerstreuung** oder **Dispersion** (denen Beobachtungen über Farben an brechenden Gläsern schon durch SENECA 66 n. Chr., MARCUS MARCI 1648, GRIMALDI 1665 vorausgegangen waren) zum Ausgangspunkte seiner physikalischen Farbenlehre machte, gab er dieser die bis heute bewährte Grundlage.

Newtons Versuche gliedern sich in zwei Gruppen: solche, welche beweisen, dafs I. das „weifse" Sonnenlicht in farbige Lichter zerlegt, und dafs II. aus farbigen Lichtern wieder ein „weifses Licht" zusammengesetzt werden kann.

I. *Versuch* 1 (NEWTONS Grundversuch): **Durch eine kreisförmige Öffnung im Fensterladen tritt ein Lichtzylinder in einen verdunkelten Raum, geht durch ein Prisma und löst sich in diesem zu einem Lichtstreifen von länglichem Querschnitte auf. Wird diesem** nahe hinter dem Prisma ein weifser Schirm entgegengestellt, so zeigt sich auf dem Schirme ein länglicher beleuchteter Fleck, der in der Mitte weifs, an dem wenigst abgelenkten Ende **rot,** an dem meist abgelenkten **violett** ist. Wird der Schirm immer weiter vom Prisma entfernt, so wird die weifse Mitte schmaler und bei hinreichender Entfernung zeigt sich das „Sonnenspektrum" mit der Farbenfolge: **rot, orange, gelb, grün, blau, violett.** (Fig. 403.)

NEWTON nannte (einer vermeintlichen Analogie mit den sieben Tönen der Tonleiter zuliebe) sieben Farben, indem er das eine Blau in Hellblau und Dunkel-

lau (Indigo) unterschied. In Wahrheit besteht das Spektrum aus unendlich ielen allmählich übereinander gelagerten Lichtflecken (Sonnenbildern wie in der unkelkammer ohne Linse), welche in unmerklichem Übergange eine Anzahl von

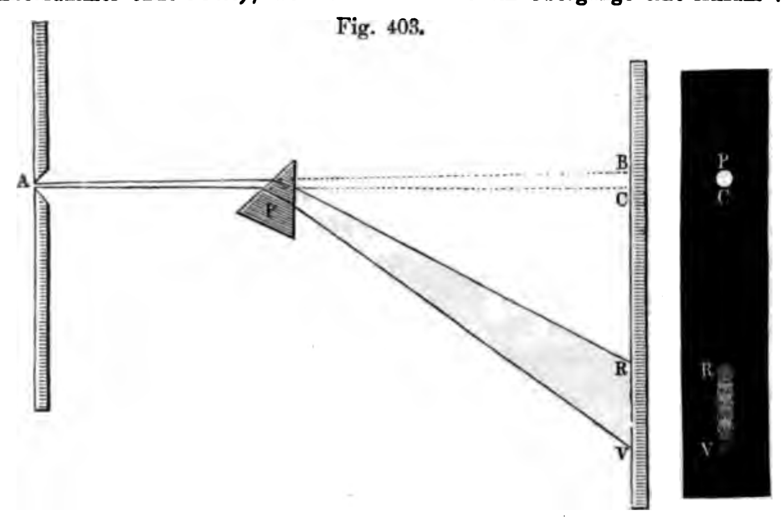


Fig. 403.

arbenabstufungen zeigen, die jedenfalls gröfser als sechs oder sieben, aber (wegen nserer begrenzten Unterscheidungsfähigkeit für Farben, psych. Anhang, Nr. 44) leiner als unendlich ist. Anh. 44.

Versuch 2 (NEWTONS *experimentum crucis*, log. Anhang, Nr. 33): Der das pektrum auffangende Schirm besitzt eine Öffnung, durch die ein einzelner der arbenstrahlen hindurchgeht und auf ein ein zweites Prisma fällt, dessen brechende ante der des ersten parallel ist. Durch Drehung des ersten Prismas um seine chse werden nacheinander die verschiedenen Farbenstrahlen in derselben Richung zum zweiten Prisma hin- und durch dieses abgelenkt. Es zeigt sich, dafs das weite Prisma die durchgehenden Strahlen a) in demselben Mafse verschieden ark ablenkt wie das erste, aber b) sie nicht noch einmal weiter zerlegt (Fig. 404). Anh. 33.

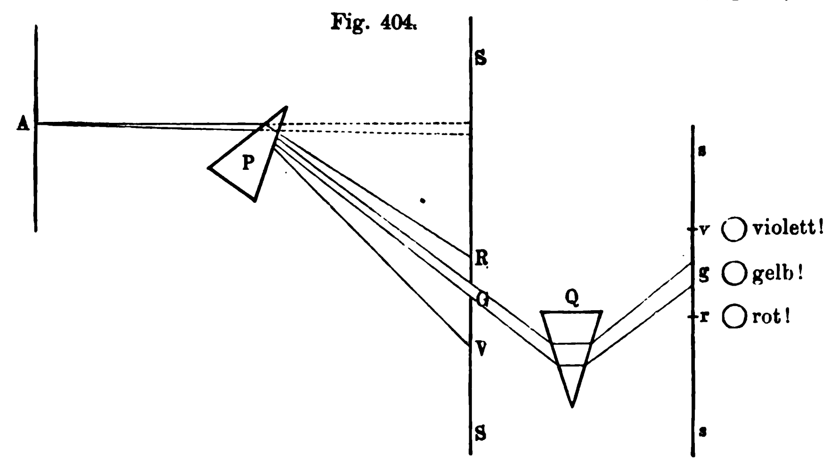


Fig. 404.

Die **Spektralfarben** sind also **nicht weiter durch Brechung zerlegbar** und also in diesem Sinne physikalisch „einfach" **(monochromatisch).**

Ebendies zeigte NEWTON noch durch verschiedene Abänderungen der Versuche; z. B. indem er den Farbenfächer des ersten Prismas auf ein zweites mit gekreuzter (zu der des ersteren normalstehender) brechender Kante fallen liefs; es zeigte sich ein Spektrum in Diagonalstellung, aber von gleicher Ausdehnung parallel den beiden Kanten wie nach Durchgang durch eines der Prismen; warum?

II. *Versuch* **3. Werden sämtliche der aus dem „weifsen" Sonnenlicht durch ein Prisma ausgeschiedenen Strahlen mittels Prismen oder Sammellinsen so abgelenkt, dafs sie sich auf einem Schirm wieder vereinigen, so geben sie hier wieder Weifs. — Überdies gibt es zu je einer Spektralfarbe eine zweite, ihr komplementäre, die ebenfalls mit ihr zusammen Weifs gibt. Komp[illegible]tär sind unter anderen: Rot und Blaugrün, Orange und Blau, Gelb [illegible] Violett. Ebendeshalb lassen sich auch alle Farben des Spektrums wi[illegible] zu weifs vereinigen (Fig. 405). —** *Versuche* **mit dem „Farbenkreisel[illegible] - Vergl. Tafel VI, Figg. 1 u. 2.**

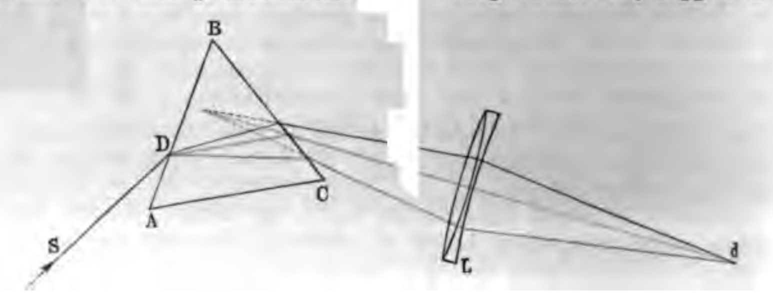
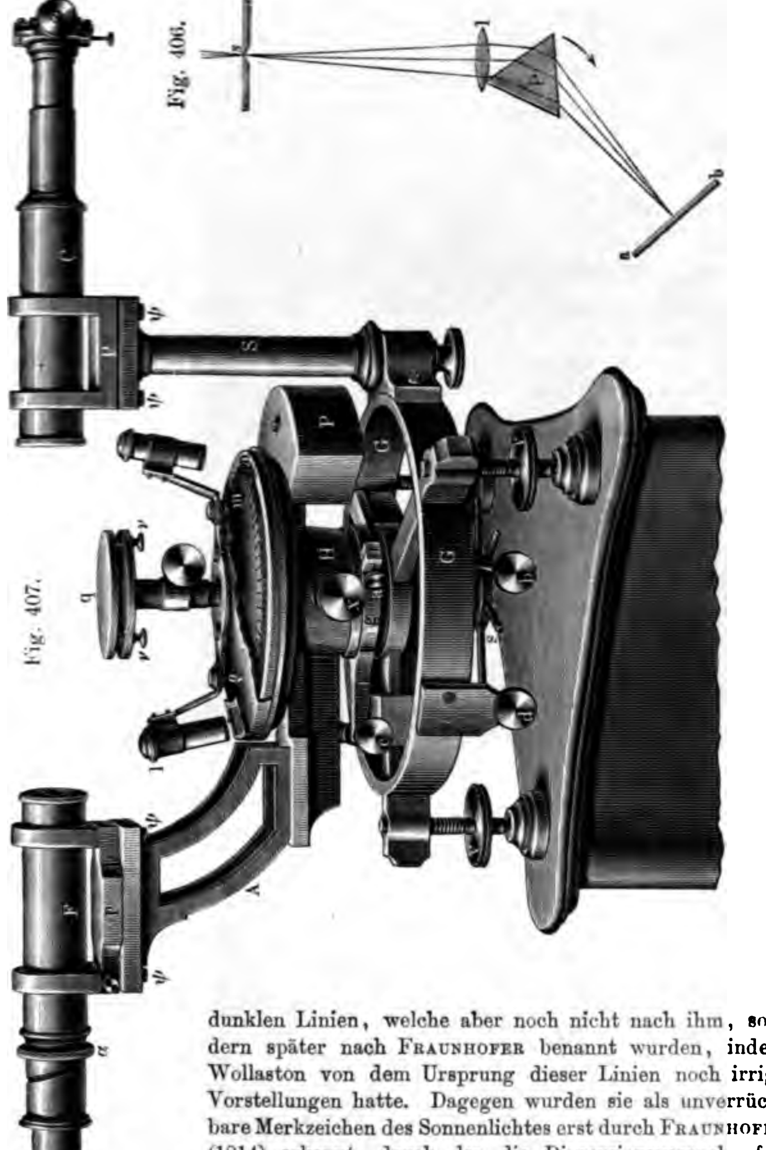


Fig. 405. Die Prismenfläche *AB* bis auf einen schmalen Streifen bei *D* abgeblendet. — *L* achromatische Linse.

Jene Farbenpaare stehen auch in mannigfaltigen anderen physiologischen und psychologischen Beziehungen, um derentwillen sie auch **als Kontrastfarben** und als **Gegenfarben** bezeichnet werden. (Psychol. Anhang, Nr. 44.) Anh. 44.

Bei der Vereinigung **nicht komplementärer Farbenpaare treten Mischfarben** auf, die sich von den durch die Mischung von Malerpigmenten zu gewinnenden mehrfach unterscheiden. So gibt spektrales Gelb und Blau eine weifsliche Mischfarbe, wogegen bekanntlich die Maler aus Gelb und Blau **Grün** herstellen. Diese Nichtübereinstimmung erklärt sich erst aus einem näheren Einblick in die Abhängigkeit der Körperfarben von der Absorption (§ 116). —

Den meisten Versuchen NEWTONS haftete die Unvollkommenheit an, dafs er sich kreisrunder Öffnungen bediente, die dann nicht zu klein genommen werden durften, um die Lichtstärke nicht zu sehr zu beeinträchtigen. Der Lichtstreifen aber, der durch solche breite Öffnungen geht, kann kein reines Spektrum, d. h. keine Sonderung der Strahlen verschiedener Brechbarkeit erzeugen, indem sich die einzelnen Farbenflecken grofsenteils dachziegelartig überdecken. Schon NEWTON hat vorübergehend statt der kreisrunden Öffnungen schmale Spalten verwendet; doch nicht mit wesentlichem Erfolg, da auch sie von der runden Sonnenscheibe noch immer Bildchen mit der Winkelbreite 0° 31′ entwerfen. WOLLASTON (1802) liefs das durch die schmale Spalte im Fensterladen gegangene Licht noch durch eine zweite parallele schmale Spalte gehen und sah nun schon einige derjenigen



Spektrometer nach Victor v. Lang. — C Spaltrohr; F Fernrohr; q Tischchen für das Prisma.

dunklen Linien, welche aber noch nicht nach ihm, sondern später nach FRAUNHOFER benannt wurden, indem Wollaston von dem Ursprung dieser Linien noch irrige Vorstellungen hatte. Dagegen wurden sie als unverrückbare Merkzeichen des Sonnenlichtes erst durch FRAUNHOFER (1814) erkannt, durch den die Dispersionsversuche folgende endgiltige Form erhielten:

4. FRAUNHOFERS *Versuch* (Fig. 406): Von dem schmalen Spalt *s* im Fensterladen wird mittels einer Sammellinse *l* von grofser Brennweite auf einem Schirm *ab* ein physisches Bild entworfen (und zwar meist ein gleich grofses, entsprechend dem III. Linsenfall, wobei Spalt und Schirm

beiderseits in den doppelten Brennweiten angebracht sind). Wird dann dem Lichtband unmittelbar vor dem Eintritt in die Linse oder nach dem Austritt aus ihr ein Prisma P in der Minimumstellung (§ 106) und dem austretenden Farbenfächer wieder der Schirm ab in annähernd dem früheren Abstande, aber normal zur mittleren neuen Strahlenrichtung entgegengestellt, so sind alle farbigen Spaltenbilder nebeneinander gesetzt und geben zusammen ein reines Spektrum; nämlich vom Sonnenlicht ein **reines Sonnenspektrum,** sonst das Spektrum des jeweiligen durch Spalte, Linse und Prisma gegangenen Lichtes.

Die Wirkung der vor oder hinter das Prisma gesetzten Linse wird noch vollkommener durch das Objektiv eines astronomischen Fernrohres erreicht, welches alle oder einen Teil [illegible] Prisma tretenden Strahlen auffängt. Der schmale Spalt wird hie[illegible]le eines dem Fernrohre entsprechend gegenübergestellten [illegible]rohres) angebracht. Nach diesem Prinzip konstruierte [illegible]**rate** (Fig. 407 a. v. S.), mittels deren er selbst gegen 600 [illegible]m beobachtete und ihre gegenseitige Lage bestimmte. N[illegible]ine Bezeichnungen der auffallendsten Linien, nämlich A i[illegible]im Grünlichblau u. s. f. gebräuchlich.

Die A[illegible]ommnung der Spektralapparate gab ihre viels[illegible]**lyse.** Dieses Wort kann in zweierlei Sinn ver[illegible]ische Analyse durch Spektralbeobachtu[illegible]andlungen von Kirchhoff und Bunsen 1860); zweiten[illegible]bst. In der Tat sind die Leistungen der Spektrala[illegible]thode der analytischen Chemie vielfach hinausgewachsen; z. B. für die [illegible]llung der Geschwindigkeiten von Gestirnen längs der Sehlinie nach Doppler[illegible]Prinzip (vergl. § 188, LA 157).

LA 157.

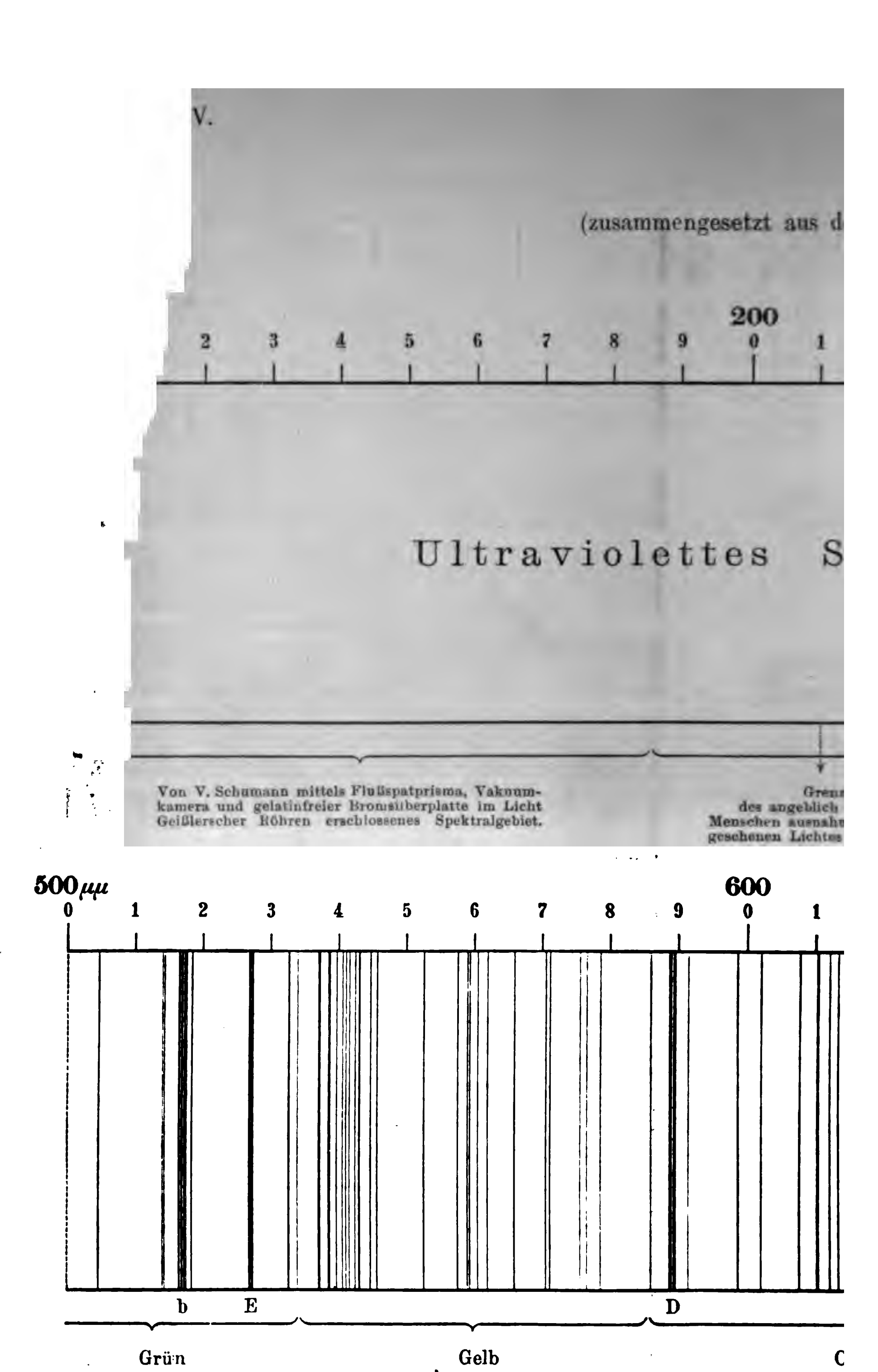
§ 115. Einteilungen der Spektra. — Spektralanalyse.

Untersuchen wir mittels der Fraunhoferschen Kombination von Prisma und Linse (in objektiver Darstellung) oder mittels eines Spektralapparates aufser dem Sonnenlicht auch das Licht von Kerzenflammen, elektrischen Glüh- und Bogenlampen, von lichtschwachen Weingeist- und Gasflammen (letztere im Bunsenbrenner, § 224), in welchen entweder reines Natrium-, Kalium-, Lithium- . . . . -Metall oder die Salze dieser und anderer Metalle verdampfen, ferner das Licht aller dieser Lichtquellen, nachdem es durch farbige Gläser, Blut, Karmin, durch Untersalpetrigsäuregas u. s. f. gegangen ist, u. s. f., so erhalten wir überaus mannigfaltige Arten von Spektren. Wir können sie zunächst ihrem unmittelbaren Aussehen nach rein beschreibend (1—5), und sodann nach der Art ihrer Entstehung (in Emissions- und Absorptionsspektren, Tafel III u. IV) folgendermafsen einteilen:

1. **Kontinuierliche Spektren** (alle Farben von Rot bis Violett, ohne dunkle oder vergleichsweise hellere Linien); so von der Kerzenflamme, der elektrischen Glüh- und Bogenlampe, allgemein: von weifsglühenden festen und flüssigen Stoffen (Platin-, Eisendraht, geschmolzenen Metallen).
2. Überwiegend helle Spektren mit vielen einzelnen **dunklen** Linien; so das Sonnenspektrum.

Absorptions-Spektra.

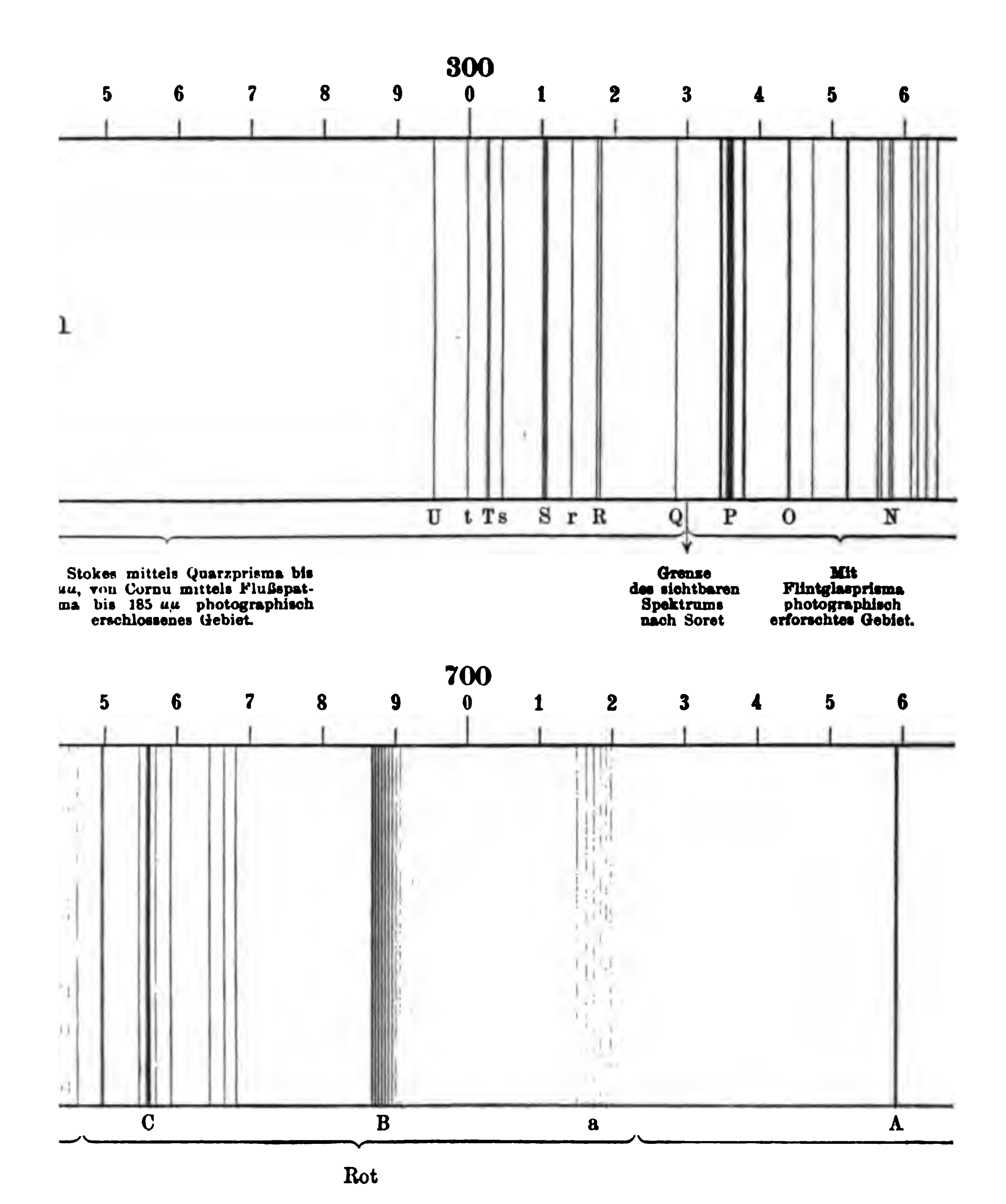
Sonne und Fixsterne II. Typus		1
Fixsterne I. Typus (α Lyrae)		2
Fixsterne III. Typus (α Orionis)		3
Salpetrige Säure		4
Jod		5
Saures chromsaures Kali		6
Chlorkupfer		7
Übermangansaures Kali		8
Salpetersaures Didym		9
Indigo		10
Chlorophyll		11
Kobaltglas		12
Kupferglas		13
Auf rotem Papier aufgefangenes Sonnenspektrum		14

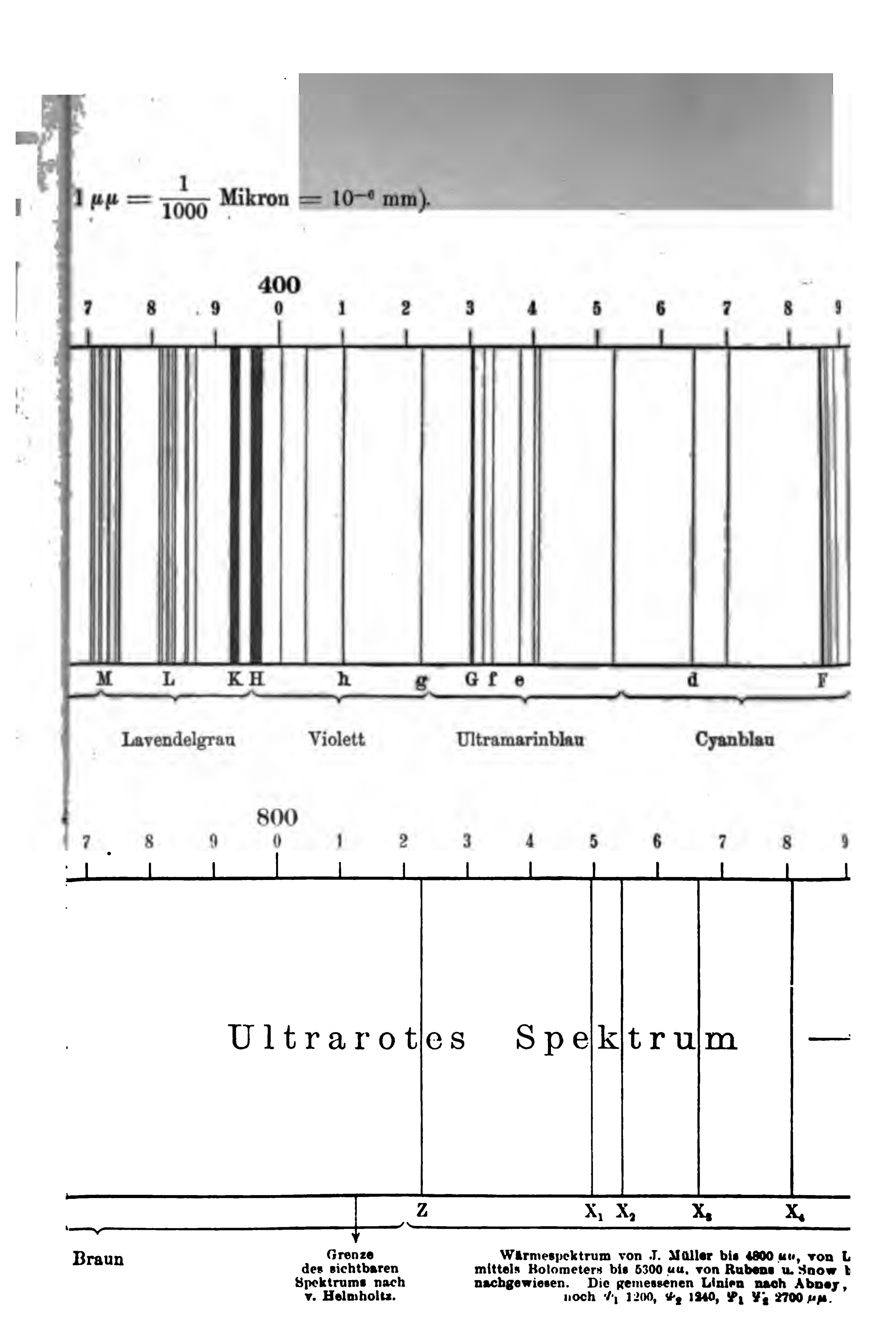


V.
(zusammengesetzt aus
200
2 3 4 5 6 7 8 9 0 1
Ultraviolettes
Von V. Schumann mittels Flußspatprisma, Vakuumkamera und gelatinfreier Bromsilberplatte im Licht Geißlerscher Röhren erschlossenes Spektralgebiet.
des angeblich
Menschen
500μμ
600
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1
b
E
D
Grün
Gelb

ollständiges Sonnenspektrum

iedener Prismen, bezogen auf gleichmäßig fortschreitende Wellenlängen. —





1 μμ = 1/1000 Mikron = 10⁻⁶ mm).
400
M
L
K H
h
g
G f
e
d
F
Lavendelgrau
Violett
Ultramarinblau
Cyanblau
800
Ultrarotes Spektrum
Z
X1 X2
X3
X4
Braun
Grenze des sichtbaren Spektrums nach v. Helmholtz.
Wärmespektrum von J. Müller bis 4800 μμ, von L
mittels Bolometers bis 5300 μμ, von Rubens u. Snow b
nachgewiesen. Die gemessenen Linien nach Abney,

3. **Bandspektren:** Einzelne breite farbige Felder durch mehr er minder lichtschwache oder dunkle Felder getrennt; so nach m Durchgang von Bogenlicht durch Blut, farbige Gläser u. s. w., aber ch bei manchen selbstleuchtenden Stoffen.

4. **Linienspektren:** Einzelne oder viele **helle** farbige Linien f übrigens dunklem Grunde: so von glühenden Gasen.

Eine Zwischenform der Band- und Linienspektren sind die

5. Säulenspektren: z. B. von Stickstoff in Geifslerschen Röhren, nämlich le nahe Linien, die das Spektrum im ganzen ähnlich den Lichtern und Schatten ıer kannellierten Säule (daher auch „kannellierte Spektren") erscheinen lassen.

Von diesen Spektren sind 1, 4 (zum Teil auch 3) **Emissionsspektra;** ıd zwar zeigt das kontinuierliche Spektrum z. B. eines weifsühenden Platindrahtes, dafs dieses Weifs aus Strahlen von allen raden der Brechbarkeit zusammengesetzt ist. — Dagegen zeigt s Linienspektrum z. B. des gelb leuchtenden Natriumdampfes, ıfs dieser nur Licht von einerlei Brechbarkeit (genauer: wie ırker wirkende Spektralapparate zeigen, zweierlei Strahlen von sehr ınig verschiedener Brechbarkeit) aussendet. Ebenso sendet Lithium ır eine Art roter und eine Art gelber Strahlen aus u. s. f. Ebenso tspricht **jedem Grundstoffe nur einerlei Spektrum,** und es sind her umgekehrt an den Spektren die Stoffe wieder zu erkennen ergl. die „Spektraltafeln"). Dies ist um so wertvoller, als (von wissen, übrigens selbst wohl untersuchten Ausnahmen hier abgesehen) h die **Emissionsspektra superponieren,** ohne einander zu stören.

Geschichtliches. Als ein Vorgänger der gegenwärtigen Spektralanalyse ist ı von Hüttenleuten und Mineralogen von altersher verwendete Lötrohrprobe zusehen. Bei ihr wird, wenn die Lötrohrflamme eine grüne Farbe annimmt, auf pfer, bei roter auf Strontium u. s. w. geschlossen. Ein Mangel dieser Methode er ist es, dafs, wenn man in die Lötrohrflamme nacheinander ein Strontium-, hium-, Rubidiumsalz bringt, das Rot der Flamme für das unbewaffnete Auge nen deutlichen Unterschied aufweist. Mittels des Spektralapparates betrachtet, gen sich jedoch die drei Emissionsspektren unverkennbar verschieden. — Übers lassen sich durch die gegenwärtigen vollkommenen Spectralapparate erstaunlich ine Mengen der Stoffe noch nachweisen, z. B. $^1/_{3000000}$ mg Natrium, $^1/_{9000000}$ mg hium. Die gelbe Natriumlinie pflegt deshalb in Flammenspektren fast nie zu len, da schon das in der Luft verstäubte Kochsalz hierfür genügt.

An jene Methoden der Lötrohrprobe anknüpfend, hatte Bunsen (nach seinem enen Bericht) schon einige Zeit die Flammenfärbungen durch verschiedene ze zu analytischen Zwecken untersucht. Um gleich gefärbte Flammen vonander zu unterscheiden, hatte er sich farbiger Gläser und Lösungen bedient. rchhoff machte ihn aufmerksam, dafs man den angestrebten Zweck viel vollnmener erreichen könne, wenn man das Licht der farbigen Flamme durch smen vollständig in seine Bestandteile sondert, und er war Bunsen bei der sführung dieses Gedankens behülflich. Den eigentlichen Anstofs zu allen iteren Entdeckungen aber gab eine von Kirchhoff gelegentlich dieser Arbeiten ällig beobachtete Erscheinung: Es war nämlich die in so vielen Flammen auf-

tretende gelbe Linie schon vor Bunsen als dem Natrium zugehörig erkannt worden, und es war auch schon bekannt, dafs diese helle gelbe Linie mit der dunklen D-Linie des Sonnenspektrums gleiche Lage hat. Als nun Kirchhoff zufällig eine mit Natrium gefärbte Alkoholflamme vor den Spalt des Spektralapparates brachte, so dafs in diesen Sonnenlicht durch die Natriumflamme hindurch einfiel, erschien die D-Linie auffallend dunkel und stark, während doch eher eine helle gelbe Linie an derselben Stelle zu erwarten gewesen wäre. Kirchhoff vermochte im Augenblick keine Erklärung zu geben, aber schon nach 24 Stunden hatte er denjenigen

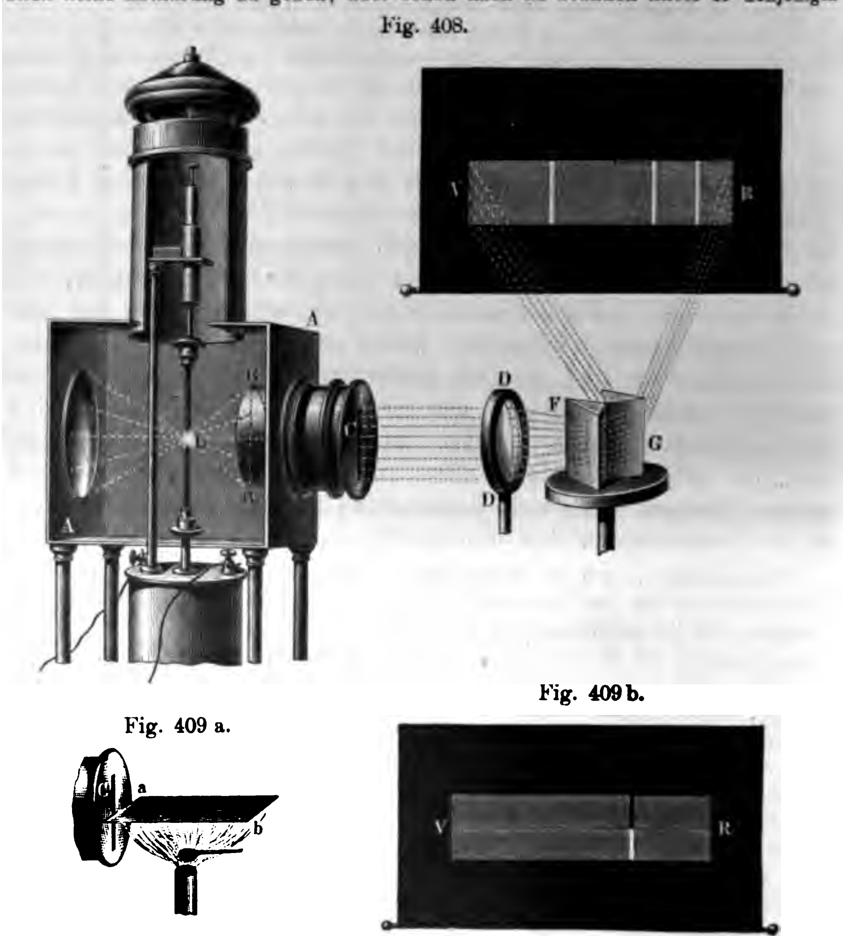


Fig. 408.

Fig. 409 a.

Fig. 409 b.

sehr allgemeinen Satz über das Verhältnis von Emission und Absorption gefunden, der seither als Kirchhoffs Prinzip bezeichnet wird. Seine allgemeine Formulierung vergl. § 117. Für jetzt genügt folgender spezielle Fall:

Ein glühendes Gas absorbiert aus dem weifsen Licht einer Lichtquelle von höherer Temperatur ebensolche Strahlen, wie sie das selbstleuchtende Gas aussendet.

Hiernach ist das Sonnenspektrum zu erklären als **Absorptionsspektrum**, nämlich: Das Sonnenlicht wird von einem weißglühenden festen oder flüssigen Kern emittiert, und aus diesem weißen Licht werden alle diejenigen Strahlenarten in der Atmosphäre der Sonne absorbiert, die von den diese Hülle zusammensetzenden glühenden Gasen (bei einer niedrigeren Temperatur als der des Kernes) emittiert werden. Dabei entspricht die D-Linie dem Natrium, die auffallende F-Linie im Grünblau dem Wasserstoff, etwa 2000 Linien in allen Teilen des Spektrums dem Eisen u. s. w. Über die chemische Zusammensetzung des Kernes dagegen gibt das Spektrum keinen Aufschluß.

So war nicht nur eine chemische Analyse der Gestirne möglich geworden (die noch wenige Jahrzehnte vorher Alexander v. Humboldt als für immer unmöglich erklärt hatte), sondern auch über Aggregats- und Druckverhältnisse, Temperaturen u. s. w., desgleichen über die Bewegungen der Gestirne zu der Erde hin und von ihr weg u. s. w. gibt die Spektralanalyse reichlich Aufschlüsse; einiges über diese astronomischen Anwendungen im § 188.

Zur Bestätigung jener Schlüsse über das Vorkommen von Natrium in der Sonnenatmosphäre läßt sich Kirchhoffs zufällige Beobachtung abändern in folgenden *Versuchen:* 1. Beim Fraunhoferschen Dispersionsversuch (siehe oben, S. 361) wird knapp vor das untere Ende der Spalte im Fensterladen in einem Platinlöffelchen ein Stück Natrium durch eine untergestellte Bunsenflamme zum Verdampfen gebracht. Sind die glühenden Dämpfe nicht sehr heiß, so zeigt sich die dunkle D-Linie im Sonnenspektrum sehr verstärkt. Flammt aber das Natrium stark auf, so zeigt sich im Spektrum ein heller gelber Streifen, entsprechend der Breite der gelben Flamme. — 2. Die Spalte wird vor das Skioptikon gesetzt und von ihr aus das Spektrum des elektrischen Bogenlichtes entworfen. Es ist kontinuierlich ohne helle oder dunkle Linien. Wird dann zwischen die Kohlenspitzen Kochsalz gebracht, so zeigt sich zuerst die helle gelbe Linie (Fig. 408); wird die Entwickelung der Natriumdämpfe eine reichliche, so daß sie aus dem Lichtbogen herausgedrängt werden und sich abkühlen, so tritt die dunkle D-Linie auf. (Bringt man ein Glasstäbchen zwischen die Kohlenspitzen, so erhält man das prachtvolle Calciumspektrum.) — 3. Wird in halbe Höhe des Spaltes des Skioptikons ein wagrechtes Blech gehalten (Fig. 409 a, b), so zeigt sich die helle und die dunkle Linie. — 4. Für subjektive Beobachtung: Ein horizontal in eine Bunsenflamme gehaltener Platindraht erscheint, durch ein Prisma mit horizontaler Kante gesehen, als kontinuierliches Spektrum. Eine Natriumflamme (an dem mit Kochsalz eingeriebenen Docht einer Weingeistlampe) erscheint, durch dasselbe Prisma betrachtet, nur ihrem Orte nach verschoben, der Gestalt nach aber nicht verändert, weil ihr Licht einfarbig ist. Werden nun Draht und Natriumflamme so gegen das Prisma und das Auge gestellt, daß das Flammengelb ins Gelb des Drahtspektrums zu liegen kommt, so erscheint dieses wieder von der dunklen Linie durchzogen.

Behufs Beobachtung der Spektra anderer Grundstoffe wird in Lösungen ihrer (Chlor-) Salze eine Platinöse getaucht und dann in eine Weingeist- oder Bunsenflamme gehalten, die sich vor dem Spalt eines Spektralapparates befindet. Es zeigen sich in dem lichtschwachen Spektrum, das der Helligkeit der lichtschwachen Flamme entspricht, die hellen Linien jener Metalle.

Durch hohe Vervollkommnung der Spektralapparate (Reihen von Prismen, Spektroskope mit gerader Durchsicht, folg. §, Beugungsgitter, § 124) und durch Heran-

ziehen der Wellentheorie des Lichtes hat sich die Zahl der theoretischen und praktischen Anwendungen der Spektralanalyse fast bis ins Unabsehbare vergröfsert. Hier nur wenige Beispiele: 1. Es wurden die früher unbekannten Stoffe **Thallium** (an einer schönen grünen Linie, durch CROOKES 1861), **Rubidium, Cäsium, Indium, Gallium** entdeckt. Einige Fraunhofersche Linien hatten nur nach einem auf der Erde nicht bekannten Grundstoff gedeutet werden können, der deshalb **Helium** genannt wurde und erst vor wenigen Jahren (zusammen mit dem Argon, § 220) auch als ein Bestandteil der irdischen Atmosphäre nachgewiesen wurde. — 2. Praktische Anwendungen: Der Gufsstahlfabrikant erkennt an den hellen Linien des glühenden Metalls den Augenblick, in dem der Bessemerprozefs zu beendigen ist (jahrelang Geübte hatten es an dem Licht auch mit freiem Auge erkannt). — An Absorptionsspektren wird Blut selbst in den geringsten Mengen erkannt; ebenso werden Verfälschungen von Nahrungsmitteln und Drogen festgestellt.

§ 116. Dispersio[...]nasie. — Absorption. Körpe[...] Diffusion.

Die Leistungen des Prism[...] von Strahlengemischen gründen sich darauf, dafs im allgemeinen St[...] einem Medium die gleiche Richtung gehabt hatten, beim Über[...]ues Medium verschiedene Richtungen annehmen. (I[...] Tatsache gibt erst die Wellentheorie durch die verschieden[...]vindigkeit dieser verschieden brechbaren Strahlen in demse[...]ı, § 123.) Noch unabhängig von der Wellentheorie gelten fol[...]d Tatsachen:

Dispersion nenn[...]legung von Strahlengemischen bei der Brechung. — Speziell ang[...]ndet auf **Lichtstrahlen** heifst die Dispersion auch **Farbenzerstreuung.**

Über Dispersion von **nichtleuchtenden** (Wärme- und anderen) Strahlen vergl. § 118. — Zunächst seien **vollkommen durchsichtige, farblose** (sogen. **wasserhelle**) Medien vorausgesetzt, welche **alle** zusammen eindringenden Lichtstrahlen, wenn auch unter verschiedenen Brechungswinkeln, hindurchlassen.

Erst durch die scharfe Charakterisierung der einzelnen Strahlenarten nach den Fraunhoferschen Linien, nächst welchen je eine bestimmte Farbe zu liegen kommt, wird die Angabe der **Brechungsquotienten** für **bestimmte Strahlen** und **Stoffe** möglich. — Dabei bildet der **Spektralapparat das bequemste und zugleich genaueste** Mittel sowohl zur Beobachtung des **Minimums der Ablenkung** D für je eine Fraunhofersche Linie, wie auch zur Messung des **brechenden Winkels** γ (wobei nämlich der Apparat als **Reflexionsgoniometer** dient); aus diesen Gröfsen wird dann n nach der im § 106 entwickelten Gl. (1) berechnet. Im folgenden einige Brechungsquotienten: Für die Linie

	B (rot)	D (gelb)	H (violett)
Wasser	1,330 935	1,333 577	1,344 177
Crownglas (Nr. 9)	1,525 839	1,529 587	1,546 566
Flintglas (Nr. 13)	1,627 749	1,635 036	1,671 062.

Auf Grund solcher genauen Messungen nun stellt sich heraus, dafs verschiedene Medien die Strahlen verschiedener Brechungsexponenten keineswegs in gleichem Verhältnis ablenken; mit anderen Worten: **Die durch verschiedene Stoffe entworfenen Dispersionsspektra sind einander nicht geometrisch ähnlich** (über das **Beugungsspektrum** als **Normalspektrum** vergl. § 124).

Auf dieses ungleichmäfsige Verhalten verschiedener Stoffe bei der Dispersion gründet sich unter anderem die

Achromasie. Seit Erfindung der Linsenfernrohre war es als deren stärkster Mangel bedauert worden, dafs die Richtungsänderung des Lichtes von Farbenzerstreuung begleitet ist (Fig. 410). Noch NEWTON hielt den Mangel für unvermeidlich; DOLLOND (1758) aber, durch EULER (1747) darauf aufmerksam gemacht, dafs ja unser Auge ein achromatischer Apparat sei, fand die Konstruktion von wenigstens annähernd achromatischen Prismen und Linsen auf Grund folgender Tatsache:

Es gibt Stoffe, die bei **gleicher durchschnittlicher Richtungsänderung ungleiche Farbenzerstreuung** liefern und umgekehrt. — So gibt ein Crownglasprisma von grofsem und ein Flintglasprisma von kleinerem Brechungswinkel mit entgegengesetzt gerichteten brechenden Kanten noch Ablenkung, aber nicht Farbenzerstreuung des durchgehenden Lichtes (*Versuch*). — Ebenso wirkt eine Sammellinse aus Crownglas und eine schwächere Zerstreuungslinse aus Flintglas noch als Sammellinse. Ähnlich bei Zerstreuungslinsen (*Versuche* mit den nichtachromatischen Teilen der Doppellinsen; Farbensäume auf

Fig. 410.

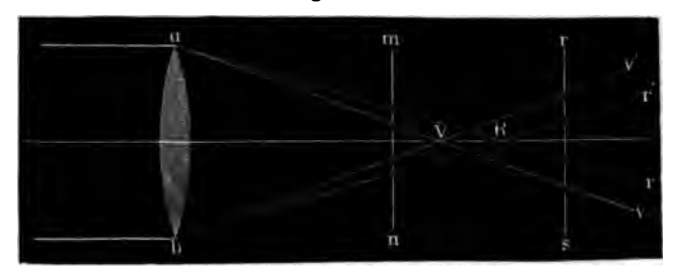


Fig. 411.

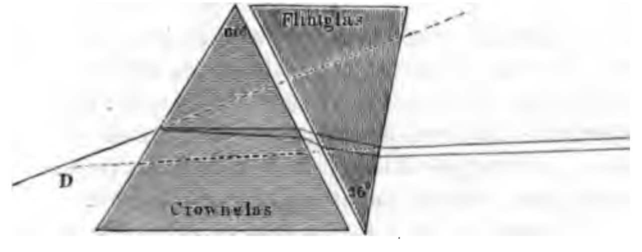
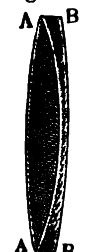


Fig. 412.



einem Schirm etwas vor und hinter der durchschnittlichen Brennweite der Sammellinse u. dergl. mehr, Fig. 410). Man nennt solche Doppelgläser **achromatische Prismen** (Fig. 411), bezw. **Linsen** (Fig. 412).

Letztere werden verwendet als Objektive und Okulare aller besseren optischen Instrumente. Wie die feinere Theorie der Achromasie zeigt, ist diese nie eine vollständige; auch die besten Achromate zeigen noch „sekundäre Spektra“ (z. B. gute Feldstecher noch grüne und violette Säume; sie lassen sich bei richtiger Durchsicht für einzelne Teile des Gesichtsfeldes unmerklich machen).

Die entgegengesetzte Anwendung wie bei Achromaten finden die geschilderten Beziehungen beim **Spektroskop mit gerader Durchsicht** (Fig. 413); hier haben das Crown- und Flintglasprisma solche brechende Winkel, dafs sich zwar die Ablenkung, nicht aber die Farbenzerstreuung aufhebt. —

Fig. 413.



Körperfarben. Im Gegensatz zu den farblosen (wasserhellen) Stoffen nennen wir **farbig** einerseits durchsichtige und durchscheinende Stoffe, wie rotes, gelbes ... Glas, Kupfervitriollösung, Chlor, Joddampf, anderseits undurchsichtige Stoffe, wie Zinnober, Gold ...

Dabei nennen wir z. B. m[illegible] gefärbtes Glas rot, weil, wenn wir durch das Glas hindurch [illegible]pier oder (durch hinreichend dickes und tief gefärbtes Glas) in di[illegible], von diesen „weifsen" Körpern nur rothes Licht in das Auge dri[illegible]r bemaltes Papier, Mohnblumen ... erscheinen uns, vom Sonnenl[illegible]ot, indem von den auf diese Körper fallenden Strahlen nur die [illegible], welche zusammen die Empfindung rot erregen) zurückgew[illegible] ins Auge gelangen.

Wie nun [illegible]en Untersuchung von Karminlösung und von Blut [illegible]n entstehen, so zeigt sich, dafs auch zwei rote Gläs[illegible]en den gleichen Eindruck des Rot hervorrufen, d[illegible]s Strahlenfächers durchlassen, bezw. auslöschen kön[illegible]erbei folgende: α) Es werden nur rote Strahlen hindu[illegible] alle Strahlen mit Ausnahme der grünen (nämlich der zu rot „kom[illegible]", § 114) durchgelassen. Im Falle β) kann man sich denken, dafs sich alle Paare komplementärer Farben (zu Weifs) aufheben und nur die den Eindruck des Rots erregenden Strahlen nicht aufgehoben werden. Zwischen beiden Grenzfällen die Fälle γ), wo z. B. Rot, Orange und Blau hindurchgehen, wobei wieder Orange und Blau **als komplementär sich aufheben** und nur Rot übrig bleibt. **Ebenso für andere Farben als Rot. — Allgemein:**

Läfst ein Stoff von **eindringendem weifsen Lichte, das aus Strahlen von allen Graden der Brechbarkeit gemischt ist, entweder** nur einfache Strahlen s_1 oder nur **Strahlengemische** $s_1 s_2 s_3 \ldots$ hindurch und **absorbiert alle übrigen, so erscheint, durch einen solchen Stoff hindurch gesehen, ein weifser Körper in der jenem einfachen oder zusammengesetzten Strahl entsprechenden Farbe.**

Auch die sogenannten **Körperfarben** im engeren Sinne, **nämlich die** Färbungen, welche die Körper im auffallenden **Licht zeigen, werden durch Absorption** erklärt, und zwar nach folgendem Schema: **Denken wir uns einen mit** Amalgam belegten Spiegel statt aus farblosem aus rotem **Glase (nach obigem** Grenzfall α). Hierbei wird Sonnenlicht, schon während es durch **das Glas bis zum** Amalgam kommt, und dann wieder, wenn es, vom **Amalgam reflektiert, den Weg** durch das Glas zurücknimmt, **aller Strahlen mit Ausnahme der roten beraubt.** Wir sehen also das Amalgam nicht silberweifs, sondern rot. **Ebenso dringt z. B.** in ein rotes Blumenblatt das Sonnenlicht nur bis zu geringer **Tiefe ein, wird an** den tiefer liegenden Schichten reflektiert und bei der **Rückkehr durch die oberen**

Schichten nochmals aller übrigen Strahlen (nach den Fällen α, β, γ) beraubt, so dafs nur rotes Licht von der Blume in unser Auge fällt. Dieses Schema ist in verschiedenen Stoffen nach den mannigfaltigsten Abstufungen verwirklicht.

Das Grün, das eine Mischung von gelbem und blauem Pigment zeigt, ist eine Subtraktionsfarbe: Von den sämtlichen Strahlen des weifsen Lichtes absorbiert nämlich das gelbe Pigment die roten, blauen, violetten; das blaue Pigment absorbiert die roten, gelben, violetten; so dafs nur die grünen Strahlen von beiden Pigmenten durchgelassen werden. — Dagegen ist die Additionsfarbe (eigentliche physikalische Mischfarbe) von Gelb und Blau nicht Grün, sondern Weifs (§ 114).

Auch wenn Körper in auffallendem Sonnenlichte rein weifs erscheinen, wie z. B. Schnee, ist aufser der Reflexion auch Brechung beteiligt. Nur werden hier die in den Eiskrystallen gebrochenen und in ihre Farbenbestandteile aufgelösten Strahlen infolge Reflexion der verschiedenfarbigen Strahlen nach allen Richtungen sich wieder zu Weifs ergänzen. — Auch die totale Reflexion trägt zum Weifs- und Weifslicherscheinen vieler Stoffe bei; z. B. bei den in Luft eingebetteten Schneekrystallen. Daher erscheint z. B. weifslicher Strafsenstaub nach der Benetzung grau und braun, indem hier die Luft durch das eingedrungene Wasser verdrängt wird. — Ähnlich die Erklärung, warum ein Fettfleck auf weifsem Papier im auffallenden Lichte dunkel, im durchgehenden hell erscheint (Anwendung bei Bunsens Photometer, folg. §).

Die Beispiele zeigen, dafs die Vorgänge beim Zustandekommen der Körperfarben, sowohl der durchscheinenden wie der undurchsichtigen Stoffe (entsprechend in der Malerei: Lasur-, Deckfarben), sehr mannigfach und verwickelt sind. Wir sind noch weit davon entfernt, erschöpfend angeben zu können, warum Zinnober rot, Indigo blau ist u. s. w. Seiner Lösung kommt dieses uralte Problem der Körperfarben am nächsten bei der Emission des Lichtes, wie in den Linienspektren und dementsprechend bei kannellierten Absorptionsspektren, wo die hellen, bezw. dunklen Linien auf gesetzmäfsige Beziehungen zwischen der chemischen Beschaffenheit des Stoffes, seiner Temperatur und dem emittierten, daher auch gemäfs Kirchhoffs Satz absorbierten Licht hinweisen. Am verwickeltesten dagegen sind diese Vorgänge jedenfalls bei der vermeintlich nächstliegenden Erscheinung, den farbigen Oberflächen undurchsichtiger Körper; doch sind als grundlegend aufser Zweifel die folgenden Bestimmungen:

Die Oberflächen undurchsichtiger Körper werden sichtbar infolge nicht vollkommener Glätte (die ja die Körper zu Spiegeln machen würde). An den kleinen Rauhheiten wird das Licht nach den verschiedensten Seiten reflektiert; indem es aber auch bis zu gewisser Tiefe eindringt und erst an tieferen Schichten reflektiert wird, nimmt es durch Absorption in den Oberflächenschichten verschiedene Färbungen an. Dieser zusammengesetzte Vorgang heifst **Diffusion des Lichtes.**

Wasserhelle Stoffe müfsten in nur auffallendem Licht völlig unsichtbar sein (einen völlig ruhigen Seespiegel erblicken wir nachts nicht, sondern nur die Spiegelbilder der über ihm stehenden Sterne). Wenn wir gleichwohl farbloses Glas, Wasser u. dergl. zu erblicken glauben, so sind es eigentlich die hinter ihnen liegenden Körper, welche das Dasein jener Stoffe verraten, indem sie das von den Körpern durch sie hindurchgehende Licht brechen und von den Körpern mehr

oder weni[illegible] verzerrte Bilder geben. Ein Stückchen Glas, umgeben von wasserheller Fl[illegible]keit des gleichen Brechungsquotienten bleibt auch wirklich in ihr völlig unu[illegible]scheidbar. Unsichtbarwerden der Trennungsfläche von Flüssigkeit und Gas bei der kritischen Temperatur, § 77.

Besc[illegible]e Erklärungen (aus **„anomaler Dispersion"**, bei der durch gewisse farbige S[illegible] Rot sogar mehr abgelenkt wird als Blau) erheischt der metallische Glanz an ge[illegible]rockneten Anilinfarben („Metalltinte"); ferner Fluoreszenz und Phosphoreszenz (§ 121). —

Die im bisherigen beschriebenen Grundtatsachen über Emission und Absorption des Lichtes gestatten nunmehr, die im § 97 vorläufig als ein blofs geometrisches Gesetz aufgestellte Abnahme der Lichtstärke mit dem Quadrate der Entfernung im folgenden § teils physikalisch zu bestätigen, teils in einigen Beziehungen einzuschränken.

§ 117. Messung [illegible]t und Beleuchtungsstärke.

Indem wir eine [illegible]pe „mehr Leuchtkraft" zuschreiben als einer Stearinke[illegible] [illegible]sache Ausdruck, dafs dieselbe lichtdiffundierende Fläche, [illegible] aus gleicher Entfernung seitens beider Lichtquellen beleuc[illegible] [illegible] hell erscheint. An diese Tatsache knüpft sich dann die [illegible] Bogenlicht im ganzen „mehr Licht", also eine gröfsere [illegible] [illegible]erselben Zeit) aussende als die Kerze. Was nun dieses „au[illegible] [illegible]ich sei, versuchen die Emissions- und Undulationstheorie in [illegible]er Weise zu beantworten (vergl. den folgenden Abschnitt); g[illegible] [illegible]ber dennoch, dafs das von den leuchtenden Körpern auf die beleu[illegible] übertragene Etwas — in moderner Sprache ausgedrückt —: eine Energie[illegible]rm sei. — Unabhängig von diesen Theorieen hat sich seit Mitte des XVIII. Jahrhunderts (Lambert) die **Photometrie** entwickelt; dies zum Teil in rein wissenschaftlicher Absicht (z. B. Vergleichung von „Sterngröfsen", d. h. der Lichtstärke der Sterne), vorwiegend aber nach den Bedürfnissen der rasch fortschreitenden Beleuchtungstechnik. — Bei den Bezeichnungen „Lichtstärke", „Lichtintensität" sind vor allem zu unterscheiden:

1. Die Intensität des Beleuchtetwerdens einer dunklen (nicht schwarzen) Fläche oder kürzer die **Beleuchtungsstärke;**
2. die Intensität des Leuchtens eines selbstleuchtenden Körpers oder kürzer seine **Leuchtkraft.**

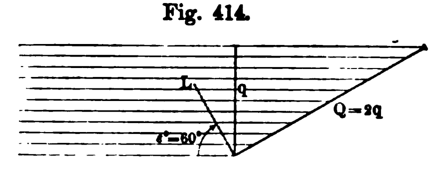
Zur Messung dieser beiden Lichtstärke-Gröfsen führt folgender Gedankengang:

Zu 1. Denken wir uns als Lichtquelle einen Punkt A (vergl. Fig. 343, S. 322) als Mittelpunkt einer Kugel einmal von 1 cm, ein andermal von r cm Halbmesser; beide Kugeln seien an der Innenseite mit dem gleichen Stoffe, z. B. weifsem Papier, belegt. Die von A ausgehende gesamte Lichtmenge verbreitet sich dann einmal über $f = 4\pi . 1^2 \text{ cm}^2$ Oberfläche, das andere Mal über $F = 4\pi r^2 \text{ cm}^2$. Kommt dann auf 1 cm² der Kugelfläche vom Radius 1 cm die Lichtmenge J_1, so kommt bei der zweiten Kugel auf 1 cm² die Lichtmenge $J_r = \frac{J_1}{r^2}$ (Abstandsformel; LA 178).

LA 178.

Bei dieser Betrachtung sind Kugelflächen vorausgesetzt worden, damit sie von allen Lichtstrahlen normal getroffen werden. — Denken wir uns nun weiter ein parallelstrahliges Lichtbündel von q cm² Querschnitt, dem ein Schirm so entgegengestellt ist, dafs einmal der Einfallswinkel $\varepsilon = 0^\circ$ (normaler Einfall),

Fig. 414.



ein andermal $\varepsilon = 60^0$ ist, so wird im zweiten Falle durch dieselbe Lichtmenge eine Fläche von $Q = 2\,q\,cm^2$ getroffen; auf je $q\,cm^2$ entfällt also jetzt nur die Hälfte der Lichtmenge des Bündels, und die Beleuchtungsintensität ist jetzt nur $J_{60} = {}^1/_2 J_{90}$. — Allgemeiner: Wenn die Beleuchtungsstärke bei normalem Einfall J ist, so ist sie bei einem Einfallswinkel von ε^0 nur $J_\varepsilon = J \cos \varepsilon$ (Einfallswinkelformel). —

Diese Formel vereinigt mit der Abstandsformel gibt allgemein die

$$\textbf{Beleuchtungsstärke } i = \frac{\cos \varepsilon}{r^2} \cdot J_1.$$

Indem hier J_1 eine „Lichtmenge" bedeutet, welche auf $1\,cm^2$ verteilt ist, bedarf es der Feststellung einer Lichtmengeneinheit oder kurz **Lichteinheit als** Grundlage der ganzen Photometrie. Die Feststellung einer solchen Einheit bereitet aber viel gröfsere Schwierigkeiten als die Feststellung der Einheiten in den meisten anderen Teilen der messenden Physik. Eine theoretische Einheit wäre die, dafs je $1\,cm^2$ von einer Lichtenergie 1 Erg per sec getroffen werde. Diese Einheit ist aber praktisch keineswegs unmittelbar zu brauchen, schon weil von der Energie der Strahlung nur ein Teil Lichtenergie, ein anderer (meistens beträchtlicher) Teil Energie strahlender Wärme, chemischer Strahlen u. s. f. (folgender Paragraph) darstellt und das Verhältnis dieser verschiedenen Strahlungen von Lichtquelle zu Lichtquelle veränderlich ist. Es wird daher ausgegangen von einer willkürlichen Einheit und zwar:

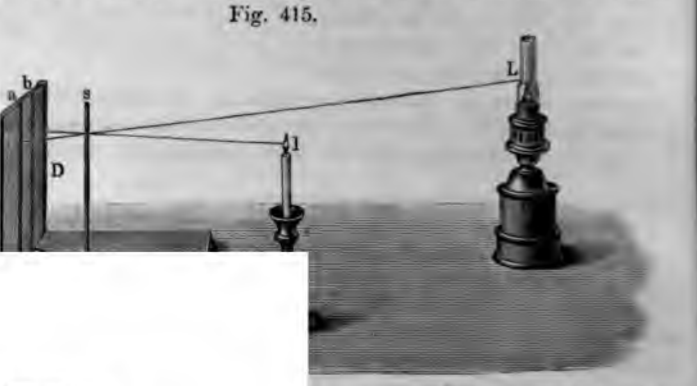
Eine ältere **Einheit der Lichtstärke** war die einer **Normalkerze** (**1 NK**) aus Paraffin von 2 cm Durchmesser bei einer Flammenhöhe von 50 mm. — Jetzt ist angenommen die **Hefnerkerze** (HK = 1,2 NK), d. i. die Stärke einer 4 cm hohen Amylacetatlampen-Flamme.

Als exaktere Einheit wurde auf dem Elektrikerkongrefs 1884 die Lichtstärke von $1\,cm^2$ weifsglühendem Platin bei der Erstarrungstemperatur festgesetzt. Hier bürgt die Konstanz der Erstarrungstemperatur und die chemisch einfache Beschaffenheit des Platins, das sich nicht mit Oxydhäutchen und dergleichen bedeckt, für die Konstanz der ausgesendeten Lichtmenge. Soweit bei den praktisch leichter zu handhabenden Normalkerzen (die nur eine auf etwa 10 Proz. genaue Einheit bilden) und der Amylacetatlampe solche Konstanz nicht verbürgt ist, bleiben auch alle photometrischen Messungen unsicher. Diese sind aber überdies auch durchaus abhängig von der Unterschiedsempfindlichkeit des Auges (psychol. Anhang, Nr. 40, 44), wie der Gebrauch der folgenden einfachsten **Photometer** zeigt: Anh. 40, 44.

1. **Rumfords Photometer.** Vor einem weifsen Schirm *CD* (Fig. 415 a. f. S.) stehen ein Stab *s* und die beiden Lichtquellen *L*, *l*, die auf den Schirm die Schlagschatten *a*, *b* werfen. In einem übrigens völlig lichtlosen Raum wären die Schatten von je einer Lichtquelle, gleichviel ob die Umgebung stark oder schwach beleuchtet ist, völlig schwarz, d. h. lichtlos; daher empfängt bei zwei Lichtquellen der Schatten *a* nur Licht von *L*, der Schatten *b* nur Licht von *l*. Werden daher die Lichtquellen in solche Abstände r_1 und r_2 vom Schirm gerückt, dafs dem die Lichtstärken vergleichenden Auge beide Schatten gleich hell erscheinen, so gilt für die Leuchtkräfte $J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2$. — Noch einfacher und zugleich exakter ist

2. [illegible]sens Photometer. Es besteht in einfachster Form und Verwen[illegible] in einem Papierschirm mit einem Fettfleck. Hinter dem Schirm [illegible] eine beliebige Lichtquelle; vor dem Schirm wird zuerst

Fig. 415.



längs eines Maſsstabes [illegible]ze so verschoben, daſs der Fettfleck weder hell[illegible] [illegible]eint als seine Umgebung. Dann wird die Normal[illegible] [illegible] mit ihr zu vergleichende Lichtquelle (Öl-, Glüh[illegible] [illegible]is zum Verschwinden des Fleckes verschoben. War z. [illegible] [illegible]om Schirm für die Normalkerze 1 m, der der Lichtquelle [illegible] [illegible]re Leuchtkraft r^2 N K.

Die beiden zu vergleichenden Lichtquellen zu beiden Seiten des Schirmes aufzustellen, ist minder einwurfsfrei, da hierbei auſser der Reflexion (Diffusion) an der einen Seite des Schirmes auch die Absorption im befetteten und unbefetteten Papier in Betracht käme. — Die verlangte Vergleichung der Helligkeit des Fleckes und seiner Umgebung gestaltet sich fast immer schwierig infolge der verschiedenen Färbung verschiedener Lichtquellen. Da z. B. eine Kerzenflamme verhältnismäſsig mehr rote Strahlen aussendet als elektrisches Bogenlicht, so wird, wenn man beide Lichtquellen ihr Licht einmal durch rotes, einmal durch grünes Glas auf den Schirm entsenden läſst, sich die Lichtstärke der Bogenlampe für Rot kleiner ergeben als für Grün. Die Stärke verschiedenfarbiger Lichter läſst sich hiernach ermitteln, indem man aus den für Rot und Grün gefundenen Zahlen das arithmetische Mittel nimmt. — Webers, Kauers Photometer.

Auf Grund der Messung von Leuchtstärken ergibt sich nun schlieſslich auch:

Die **Einheit der Beleuchtungsstärke** ist 1 **Lux** (Lx), d. i. die Beleuchtung einer möglichst weiſsen (das auffallende Licht vollkommen diffundierenden) Fläche, wenn sie aus 1 m Abstand normal getroffen wird von den Strahlen einer Hefnerkerze (1 HK).

Diese Beleuchtungsstärke ist es, welche in der Praxis schlieſslich wieder allein in Betracht kommt, indem z. B. in einem Konzertsaal möglichst annähernd an allen Stellen die Beleuchtungsstärke die gleiche sein soll. Für die Lichtquelle ist praktisch ausschlaggebend, daſs die Kosten für gleiche Beleuchtungsstärken binnen gegebener Beleuchtungsdauer sich möglichst gering stellen. Nebenbedingungen aber hierfür sind, daſs neben der erwünschten Lichtstrahlung nicht eine

grofse unerwünschte Wärmestrahlung eintrete; ferner wird dem elektrischen ;enlicht trotz seiner grofsen Lichtstärke und der brillanten Weifse für andere ecke doch wieder elektrisches Glühlicht, ja Kerzenlicht vorgezogen.

Von den theoretischen Grundlagen aller Beleuchtungstechnik, auf die auch noch § 121 zurückzukommen ist, seien schon hier folgende zwei Gesetze angeführt:

1. Das Kosinusgesetz der Lichtemission: **Von einer leuchten-n (selbstleuchtenden, ähnlich auch von einer beleuchteten) Fläche hen unter den kleinsten (von der Flächennormale [dem Einfallslote] s gezählten) Ausstrahlungswinkeln die stärksten Strahlen weg; ihre tensität nimmt ab mit dem Kosinus des Ausstrahlungswinkels.**

Eine gleichmäfsig glühende Kugel (annähernd auch: eine hinreichend dicke mpenkugel aus Milchglas, die beleuchtete Mondscheibe . . .) erscheint aus iiger Entfernung als eine gleichmäfsig helle Scheibe. Ginge nun nach allen chtungen von der Kugel gleich viel Licht weg, so müfsten die Ränder heller er-heinen, weil sich dort die lichtaussendenden Flächenteile dem Auge in kürzerer rojektion darstellen. Daher folgt umgekehrt aus der gleichmäfsigen Helligkeit, ıfs die unter gröfserem Winkel gegen die Flächennormale (das Einfallslot) aus-etenden Strahlen in dem angegebenen Mafse minder hell sein müssen.

2. Kirchhoffs Satz: **Das Verhältnis $E:A$ von Emission nd Absorption ist für je eine bestimmte Strahlengattung bei leicher Temperatur für alle Körper gleich,** unabhängig von deren hemischer Beschaffenheit, dem Aggregatzustand, Druck u. s. f.

Von diesem Satz war der im § 115 angeführte Satz über die Absorption in lühenden Gasen nur ein sehr spezieller Fall; die folgenden Beispiele sollen en allgemeineren Satz in solchen Anwendungen erläutern, die die verschiedenen euchtkräfte verschiedener Stoffe begreiflich machen:

Versuche: 1. Wir halten in eine schwach leuchtende Weingeist- oder Bunsen-amme zwei gleich grofse Körperchen eines undurchsichtigen und eines durch-chtigen Stoffes, z. B. Platin und Glas. Da nun (zunächst bei Zimmertemperatur) em Platin grofse, dem Glas kleine Absorption zukommt und in der gemein-:haftlichen Flamme beide Körper auch gleiche hohe Temperatur erlangen, so erlangt Kirchhoffs Satz, dafs das Platin stark, das Glas schwach selbst-euchtend werde (emittiere); der Anblick beider glühender Körper bestätigt as. — 2. Schwarzgebeiztes Platinblech sendet bei gleicher Temperatur viel mehr icht aus, als blankes. — 3. Da über dem Zylinder einer Petroleumlampe ein iner Draht deutlich glüht, so müssen auch die aufsteigenden Gase hier die Glüh-mperatur haben. Dafs man sie gleichwohl nicht selbstleuchten sieht, d. h. ihre :mission sehr gering ist, fällt wieder unter Kirchhoffs Satz, indem sie ja uch (bei niederen wie hohen Temperaturen) viel geringere Absorption haben.

Die Versuche 1. und 3. sind vorbildlich für den Unterschied des Schwach-, ezw. Stärkerleuchtens einer Bunsenflamme und einer gewöhnlichen Gasflamme, ı der feste Kohlenteilchen glühen; im Auerbrenner werden die ein noch öheres Emissionsvermögen aufweisenden „seltenen Erden" ins Glühen versetzt.

In Bezug auf das Beleuchtetwerden weisen die verschiedenen Stoffe sehr erschiedene „Weifse" (*albedo*) auf, was auf ihr Diffusionsvermögen zurückführt. lierin ein Teil der Erklärung der Flecken am Mond (§ 187).

§ 18. Unsichtbare Strahlen (Vorbegriffe).

Die im Abschnitt A, Geometrische Optik, und in den bisherigen Paragraphen des Abschnittes B behandelten Strahlen waren durchwegs **sichtbar**, d. h. sie sind im stande, nach dem Gang durch die lichtbrechenden Medien des Auges die Netzhaut zu Lichtempfindungen zu erregen. Wir wissen aber heute, dafs es noch sehr mannigfache Arten von Strahlen gibt, die ihr Dasein nicht durch Lichtempfindungen, sondern durch Wärmeerscheinungen an den von ihnen getroffenen Körpern, durch chemische, elektrische Wirkungen verraten, und phosphoreszierende und fluoreszierende Stoffe auch selbst wieder zur Aussendung von Licht, aber eines anderen als des eingestrahlten, anregen. Man spricht insofern auch kurz von **Wärmestrahlen, chemischen Strahlen** u. s. w.

Für die Sonderung dieser verschiedenen Gattungen von Strahlen ist, wie für
die verschiedenen Arten [illegible], wieder das bequemste Mittel das
Prisma. Sowie aber z. [illegible] aus rotem Glas vorwiegend die roten
Strahlen hindurchgingen [illegible]ntworfene Spektrum somit kein voll-
ständiges wäre, so eignen [illegible]ie Untersuchung der Wärmestrahlen
nicht ohne weiteres Glasp[illegible] aus den im folgenden Paragraphen
näher zu entwickelnden Grün[illegible] Untersuchung eines Wärmespektrums
Steinsalzprismen erford[illegible] chemische Strahlen Quarzprismen).

Indem nun an dem d[illegible]isma entworfenen Spektrum Wärme-
wirkungen auch im sic[illegible]s Spektrums nachzuweisen sind —
wenn auch nicht so stark [illegible]er das rote Ende hinausliegenden
Raum —, entsteht die Frage, [illegible]beneinander (zu vergleichen einer
aus verschiedenfarbigen Fäden gen[illegible]hnur) besondere „Lichtstrahlen“
und „Wärmestrahlen“ vorhanden seien, oder ob es **derselbe Strahl** sei, der in der Netzhaut Lichtempfindung, in der Leibeshaut Wärmeempfindung erregt.

Anh. 39, 44. Die Frage wurde nach langen Streitigkeiten (psychol. Anh., Nr. 39, 44) durchaus im letzteren Sinne entschieden.

Ähnlich treten chemische Wirkungen, z. B. die **Schwärzung photographischen Papiers**, sowohl im sichtbaren Spektrum wie **in dem über das violette Ende hinausliegenden Raum** auf, und zwar hier **sogar stärker als dort**. Gegen das rote Ende des Spektrums werden diese chemischen Wirkungen schwächer, erstrecken sich aber sogar noch über das rote Ende hinaus, so dafs also auch die unsichtbaren Wärmestrahlen noch chemische Wirkungen haben. (Abney ist es gelungen, im Finstern einen durch siedendes Wasser erhitzten, also weder beleuchteten noch selbstleuchtenden Topf zu photographieren.) — Die hier in einem Vorblick geschilderten Tatsachen liegen den folgenden Begriffen zu Grunde:

Strahlen, die noch geringere, bezw. gröfsere Brechbarkeit haben als die roten und violetten, heifsen **ultrarote, bezw. ultraviolette** Strahlen. — Derselbe Strahl kann je nach dem Stoffe, den er trifft, mehrerlei Wirkungen haben; und zwar haben die kräftigsten Wärmewirkungen die ultraroten, unter den Lichtstrahlen die kräftigsten Lichtwirkungen die gelben, die kräftigsten chemischen Wirkungen die ultravioletten Strahlen. — **Hierzu die Tafel V.**

Wenden wir auf alle diese Arten von Strahlen die Energiebegriffe an, so stellt sich auch hier wieder die Wärme als das „schliefsliche Grab aller Energieformen“ (§ 84) heraus. Indem nämlich z. B. irgend ein Lichtstrahl von irgend

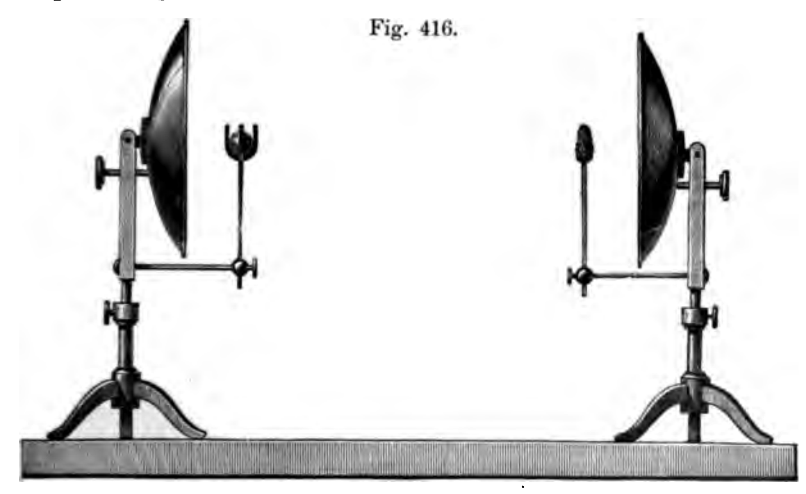
einem Stoffe absorbiert wird, er also als Lichtstrahl zu existieren aufhört, mufs eine andere Form der Energie an seiner Stelle aufgetreten sein: dies ist zunächst bei einem schwarzen undurchsichtigen Körper sogleich die Wärme. Indem dagegen ein ultravioletter Strahl photographisches Papier schwärzt oder Petroleum zum Aussenden bläulichen (Fluoreszenz-) Lichtes anregt, hat die Energie der Strahlung, bevor schliefslich auch sie sich in Wärme umsetzt, die Form chemischer Energie oder andersartiger Lichtenergie angenommen. Dabei kann die entstandene chemische Energie eine potentielle sein, so im gröfsten Mafse bei den chemischen Wirkungen des Sonnenlichtes, denen wir die in den Kohlenlagern aufgespeicherte Energie verdanken (§ 225); dagegen ist sie eine aktuelle, wenn die chemische Wirkung des Lichtstrahles z. B. sich in der Explosion von Chlorknallgas (§ 216) kundgibt. — Eine Erweiterung dieser Betrachtung auf alle elektrische Strahlung vergl. im § 157.

In den drei folgenden §§ werden die besonderen Gesetze einiger solcher Arten von Strahlung, sowie der allgemeinste Begriff der „Ätherstrahlung", etwas eingehender besprochen.

§ 119. Wärmestrahlung.

Für die Wärmestrahlen, gleichviel ob sie zugleich sichtbar sind oder nicht, gelten alle Gesetze der Lichtstrahlen, das Reflexions-, das Brechungsgesetz u. s. w. Dies zeigen im folgenden je einige Versuche, sowie Erscheinungen, in denen sich namentlich die dunklen Wärmestrahlen schon für die gewöhnliche Erfahrung kundgeben, indem sie vielfach auch im Haushalte der Natur eine wichtige Rolle spielen.

Fig. 416.



1. Reflexion. *Versuch*: Zwei grofse Hohlspiegel werden einander zugekehrt und in dem Brennpunkt des einen zunächst ein leuchtender Körper aufgestellt, von dem sich dann im Brennpunkt des anderen ein Bild zeigt (zugleich das beste Mittel, die richtige Aufstellung der Spiegel zu prüfen). Wird dann der leuchtende Körper

durch einen heifsen nichtleuchtenden (z. B. eine in siedendem Wasser erhitzte Metallkugel) ersetzt, so zeigt ein berufstes Thermometer (oder die Entzündung von Phosphor . . .) hier kräftige Wärmewirkungen auch dann noch, wenn der Abstand der Spiegel mehrere Meter beträgt und wenn eine direkte Zustrahlung vom heifsen Körper durch einen kleinen Schirm abgehalten wird.

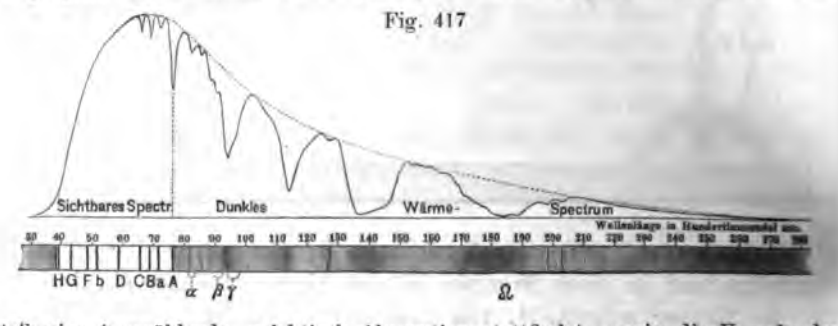
Versuch (nach Mach): In eine Blechkapsel, wie sie zum Flaschenverschlufs dienen, hält man den Finger so, dafs er das Metall nirgends berührt. Die überraschend starke Wärme rührt vom Finger selbst her, indem sie von ihm gegen das Metall aus- und von diesem auf ihn zurückgestrahlt wird. Hält man den nackten Arm in den Cylinder einer Gasmaschine, so wird die Wärme noch auffälliger; in beiden Versuchen kann das Metall selbst kühl sein. — Noch einfacher zeigen Ähnliches die einander (oder der Wange) auf etwa 1 cm genäherten Handflächen. — Die Versuche sind vorbildlich für die von der Erde ausgestrahlte und von einer Wolkendecke zurückgestrahlte Wärme; die meteorologische Wichtigkeit dieser Erscheinung, namentlich z. B. für die Taubildung, vergl. § 194.

2. **Brechung.** Versuch mit dem Steinsalzprisma (vergl. vorigen §). — Als „Brennglas“ wirkt auch eine Linse aus schwarzem undurchsichtigen Glas, da dieses zwar nicht die sichtbaren Lichtstrahlen, wohl aber dunkle Wärmestrahlen hindurchläfst.

Dem Begriffe der Durchsichtigkeit (Diaphanie) ist nachgebildet der der **Diathermanität,** d. i. der Durchlässigkeit für Wärmestrahlen; den undurchsichtigen (adiaphanen) Stoffen entsprechen die **athermanen** (= adiathermanen). So ist das schwarze Glas adiaphan, aber diatherman; dagegen eine **Alaunlösung** (die man deshalb vor wärmeempfindliche Objekte im Skioptikon und Sonnenmikroskop bringt) ist diaphan, aber annähernd atherman. — Auch eine Eislinse wirkt als Brennglas, da sie Licht- und Wärmestrahlen ziemlich vollständig durchläfst. — Wie nun die Energie der nicht durchgelassenen Lichtstrahlen sich im undurchsichtigen Körper in Wärme umsetzt, die sich durch Steigerung seines Wärmegrades kundgibt, so auch die nicht durchgelassenen dunklen Wärmestrahlen. Man sagt auch von ihnen, sie seien a b s o r b i e r t (siehe unten).

Wie verschiedene Lichtstrahlen nicht nur verschieden stark gebrochen, also dispergiert werden, sondern beim Durchgang durch nicht wasserhelle Stoffe eine

Fig. 417



teilweise (auswählende, selektive) Absorption stattfindet, worin die Ursache der Farbigkeit der Stoffe liegt, so gibt es auch eine **Dispersion der Wärmestrahlen** und **Thermochrose** („Wärmefärbung“). So haben sich auch im ultraroten

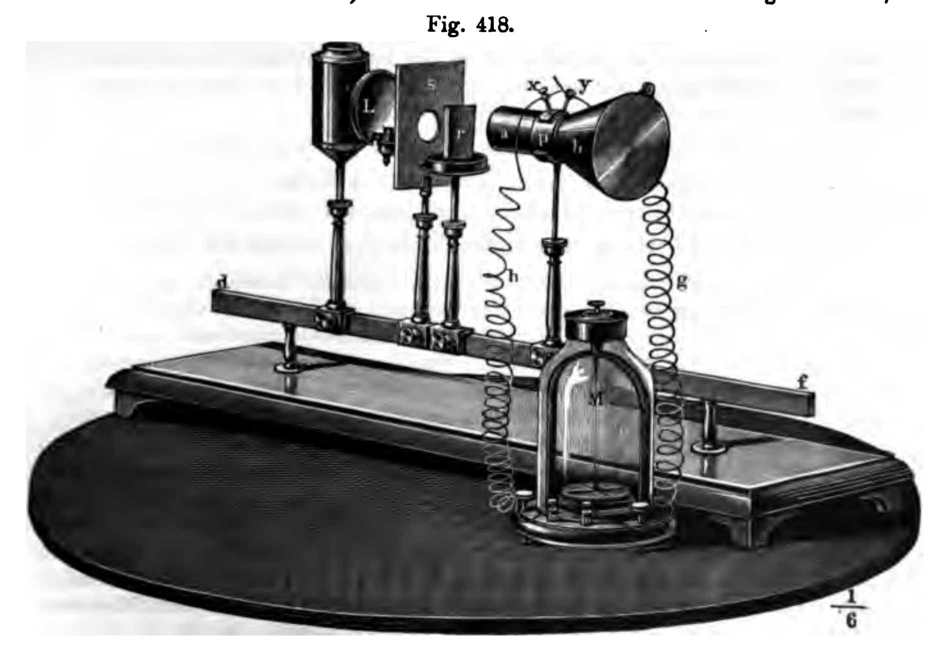
Teil des Spektrums Fraunhofersche Linien nachweisen lassen (durch schmalkantige Thermosäulen, noch schärfer mittels „Bolometerdrähten", die parallel zur Richtung dieser Linien dem Spektrum entlang geführt werden). Ähnlich entstehen breite wärmelose Bänder im ultraroten Teil des Spektrums nach dem Durchgang durch Prismen aus verschiedenen Stoffen, auch schon durch Absorption in der Atmosphäre (Fig. 417). — Diese Absorption wird für die Erwärmung der Erde durch die Sonne überaus wichtig, indem die Atmosphäre zwar die leuchtenden Sonnenstrahlen einläfst, nicht mehr aber die vom erwärmten Erdboden zurückgestrahlten dunklen Strahlen ebenso vollständig durchgehen läfst; Näheres vergl. Meteorologie § 196. — Allgemein stehen auch für Wärmestrahlen im nahen Zusammenhang miteinander

3. **Emission und Absorption.** Alle Körper senden schon weit unter der Glühtemperatur (die nach Draper für alle Stoffe bei etwa 535° C liegt) Wärme, also dunkle Wärmestrahlen aus. Für je eine Temperatur gilt auch hier Kirchhoffs Satz, dafs der Körper diejenigen Strahlenarten am stärksten aussendet, die er am stärksten absorbiert.

In der Nähe eines tönernen, eines eisernen Ofens kann es unerträglich heifs werden, auch schon ehe er glüht. Ein zwischengestellter Schirm hält die Wärmestrahlen dann und nur dann ab, wenn er atherman ist, sowie wir auch als Lichtschirm nicht etwa eine Glastafel benutzen.

Zu Drapers Satz sei bemerkt, dafs nach neueren Beobachtungen ein dunkeladaptiertes Auge (d. h. nach mehrstündigem Verweilen in lichtlosem Raum) Körper auch schon unter 535° C schwach selbstleuchten sieht, und zwar im graulichen Licht (was seine Erklärung in dem feineren Bau der lichtempfindenden Elemente der Netzhaut findet). Gleichwohl bleibt es eine merkwürdige Tatsache,

Fig. 418.



dafs bei allen festen und flüssigen Stoffen das intensivere Glühen mit dem Aussenden roter Strahlen beginnt, dem sich bei höherer Temperatur die gelben und bei noch höherer Temperatur die aller Strahlen zugesellt, so dafs Weifsglühen für ein Zeichen höherer Temperatur genommen wird als Gelb- oder Rotglühen.

Versuche über die einzelnen Gesetze der Wärmestrahlung mittels Melloni's Apparat (Fig. 418 a. v. S.). —

Viele Erscheinungen, die den bisher beschriebenen ganz analog sind, scheinen es nahezulegen, aufser einer Wärme- auch eine „Kältestrahlung" anzunehmen; z. B. beim obigen Versuch mit den zwei Hohlspiegeln bringt ein Stück Eis im Brennpunkt des einen Abkühlung im Brennpunkt des anderen hervor. Gleichwohl genügt es hierbei, sich vorzustellen, dafs das wärmere Thermometer dem kälteren Eis mehr Wärme zustrahlt, als es von ihm empfängt. Sogar von zwei gleich warmen Körpern, die einander keine Wärme zuzustrahlen scheinen, nahm Prevost (1809) an, dafs nur jeder dem anderen so viel Wärme zustrahlt, als er von ihm empfängt (**bewegliches Gleichgewicht der Wärme**; einfachstes Beispiel: die einander zugekehrten gleichwarmen Hände). Nach Kirchhoff mufs dieses bewegliche Gleichgewicht dann für jede besondere Strahlenart einzeln gelten, und in dem Unverändertbleiben der Temperatur beider Körper liegt umgekehrt ein Beweis für Kirchhoffs Satz.

§ 120. Chemische Strahlung. Photographie.

Auch für die chemischen Strahlen gibt es eine **auswählende Absorption**, indem z. B. Quarz noch stärker gebrochene ultraviolette Strahlen durchläfst als das Glas. Soll daher ein möglichst vollständiges Dispersionsspektrum photographiert werden, so mufs es durch ein Quarz-, nicht durch ein Glasprisma entworfen sein. Eine solche Photographie zeigt unmittelbar zugleich zahlreiche Fraunhofersche Linien im Sonnenlicht und helle Linien für verschiedene Grundstoffe. — Aus dem Hinzukommen der chemischen Strahlen zu den Lichtstrahlen erklärt es sich auch, warum z. B. Himmelsphotographieen von Nebelflecken, Kometen und dergleichen vielfach von den besten Zeichnungen abweichen.

Die „chemischen Wirkungen des Lichtes" sind sehr mannigfach. Auf Chlorknallgas (§ 216) wirkt das Licht zur Verbindung anregend; Chlorsilber wird dagegen durch das Licht dissoziiert und schwärzt sich infolge des ausgeschiedenen fein verteilten Silbers.

Im Bromsilber ruft das Licht zwar auch chemische Veränderung, aber nicht sogleich Schwärzung hervor, sondern diese tritt erst nach der chemischen Einwirkung anderer Stoffe auf. Von diesen Tatsachen macht Gebrauch die

Photographie: 1. Die photographische Kammer ist eine Dunkelkammer mit Objektivlinsen (auch die Lochkamera ohne Linse wird manchmal verwendet), die das physische Bild eines Menschen, einer Landschaft... auf einer meist mit Bromsilber präparierten Glasplatte entwirft (Exposition der Platte). 2. Die von den chemisch wirksamsten Strahlen getroffenen Stellen werden nach Behandlung im Entwickelungsbade (bei rotem oder gelbem Licht) am dunkelsten und stellen so ein **negatives** Bild dar. 3. Die noch unzersetzten Teile des Silbersalzes werden im Fixierbad entfernt, um die Platte gegen weitere Lichteinwirkung unempfindlich zu machen. 4. Die Platte mit dem negativen Bild dient als **Matrize**, indem man sie im Kopierrahmen mit der Bildseite auf gleichfalls (meist mit Chlorsilber) präpariertes Papier legt und dieses dem Tageslicht aussetzt. Das Papier wird

in in ein Bad gebracht, das das **positive** Bild **fixiert** und ihm den gewünschten ·benton gibt. — Warum sehen auf Photographieen violette Kleider heller, rote ider, blonde Haare dunkler aus als in Wirklichkeit?

Die ersten Lichtbilder erzeugte DAGUERRE (1830); gegenwärtig bringt noch es Jahr neue wichtige Verbesserungen der Photographie.

§ 121. Fluoreszenz, Phosphoreszenz. — Lumineszenz, Kaloreszenz. — Ätherstrahlung.

Nach dem im Dunkeln ohne Glühen und Brennen leuchtenden Phosphor d die Erscheinungen der **Phosphoreszenz**, nach solchen am Flufsspat (Fluorcium) die der **Fluoreszenz** benannt:

I. **Fluoreszenz.** *Versuch*: Einige Spänchen von Rofskastaniende erteilen reinem Wasser (in einer Glaswanne) sehr bald in seiner nzen Masse gelbliche Färbung; nahe der Oberfläche des Wassers er zeigt sich in dem sich lösenden Äskulin ein zart blauer himmer. Wird mittels einer Sammellinse durch die freie Oberfläche r Lösung ein Lichtkegel geleitet, so wird die blaue Färbung sehr ensiv, besonders bei elektrischem Bogenlicht.

Wird ein Wännchen (Küvette) mit solcher Äskulinlösung durch die veriedenen Teile eines Spektrums geschoben, so tritt das blaue „Fluoreszenzht" am stärksten im ultravioletten Teile auf. Wird dieses blaue Licht bst mittels des Prismas analysiert, so erweist es sich als aus blauen, grünen, lben, roten Strahlen zusammengesetzt. Der fluoreszierende Stoff ist also durch gebrochenen sichtbaren und durch die unsichtbaren ultravioletten Strahlen n **Selbstleuchten,** und zwar zum Aussenden von sichtbaren, minder brechren Strahlen angeregt worden.

Gleiches Verhalten zeigen sehr viele andere Stoffe; z. B. wenig gereinigtes roleum, das bei durchgängig gelblicher Färbung ebenfalls oft sehr stark blau oresziert; Chlorophylllösung (am besten gewonnen durch Auslaugen von ckenem Pfefferminzkraut in Äther), die bei intensiv grüner Färbung an der erfläche rot fluoresziert; Uranglas; Baryumplatincyanür (besonders stark durch ntgenstrahlen zur Fluoreszenz erregbar). — Seltener sind Körper, bei denen das ioreszenzlicht stärker brechbar ist als das erregende. Immer aber findet ioreszenz während der Beleuchtung statt. — Dagegen:

II. **Phosphoreszenz** ist das seit langem bekannte Nachleuchten s Bologneser Leuchtsteines, der aus Schwerspat gewonnen wird, hlreicher Verbindungen wie CaS, SrS, BaS; Balmains Leuchtfarben, igewendet in den selbstleuchtenden Feuerzeugen, Uhrzifferblättern u. s. f. - Verschiedenartige Stoffe leuchten nach Beleuchtung durch gleiches icht in verschiedenfarbigem Lichte.

Fluoreszenz und Phosphoreszenz werden zusammengefafst unter dem Namen Photolumineszenz", weil sich die Energie des eingestrahlten Lichtes umsetzt , bezw. fortsetzt als Energie ausgestrahlten Lichtes. — „Chemilumineszenz" id diejenigen weit unter der sonstigen Glühtemperatur eintretenden Lichtscheinungen, bei denen sich ein Teil der bei chemischen Vorgängen (wie bei iulnis von Holz und tierischen Stoffen, beim langsamen Oxydieren des Phosphors,

dessen Leu[illegible] also nicht mehr unter den obigen Begriff von Phosphoreszenz fällt, ohne [illegible] man darum auf diesen Namen verzichtet hätte) auftretenden aktuellen En[illegible] als Lichtenergie zeigt. — Sehr verbreitet und mannigfaltig sind die Erscheinungen der „Elektrolumineszenz“ (§ 156).

Ein Gegenstück zu allen diesen Formen der **Lumineszenz** stellt die **Kaloreszenz** dar, bei der durch unsichtbare Wärmestrahlen ein Körper ins Glühen, also Leuchten versetzt werden kann; somit ein Vorgang analog dem der Fluoreszenz, wenn minder brechbare Strahlen die Aussendung von stärker brechbaren veranlassen.

Dieses Ineinandergreifen verschiedener Strahlenarten ist von technischer Bedeutung bei der Frage nach der besten Verwendung verfügbarer Energie zu Beleuchtungszwecken (§ 117). Denn da z. B. verbrennendes Leuchtgas die aus der potentiellen chemischen Energie sich entwickelnde aktuelle bis zu etwa 92 % sogleich in Form von W[illegible]rst als Lichtstrahlung liefert, so ist das einfache Verbrenn[illegible] Auerbrenner und dergleichen) weit mehr ein Heiz- als ein [illegible]ls die vollkommensten Beleuchtungstechniker haben sich inso[illegible] erwiesen, indem sich auf die von ihnen ausgestrahlte Lichtene[illegible]en aus dem Chemismus ihres Lebensprozesses) kein meſsbarer A[illegible]trahlung hat nachweisen lassen. —

Theoretisch führen [illegible]ativen Verschiedenheiten der Licht-, Wärme-, chemischen, e[illegible]nd ihre mehr oder minder mittelbaren Umwandlungen [illegible]rage: Was geht physikalisch in allen diesen „Strahlen“ v[illegible]Abschnitt wird gezeigt werden, daß diese Strahlen **Wellenstra**[illegible]tzt sei unabhängig von der Wellentheorie als Tatsache festgehalten, [illegible] iese Strahlungen von der wägbaren Materie mehr oder minder unabhängig sich zeigen, wie uns vor allem an der Lichtstrahlung durch den sogen. „leeren Weltraum“ hindurch auffällt. Auch einen Rezipienten können wir durch noch so weit gehendes Auspumpen der Luft nicht undurchsichtig oder auch nur irgendwie minder durchsichtig machen (— im Gegensatz zum Versuche über Schallleitung § 92). — Da man sich aber anderseits eine Übertragung von Energie unabhängig von irgendwelcher Materie nicht vorzustellen getraut, so denken wir uns auch jenen leeren Weltraum erfüllt von einem zunächst ganz hypothetischen Stoff, **Lichtäther** genannt. Gleichwohl hat zunächst die Wellenlehre des Lichtes und haben neuestens die elektrischen Erscheinungen dazu geführt, unsere Annahmen über die dem Lichtäther beizulegenden Eigenschaften schon sehr bis ins einzelne auszugestalten. Unter Heranziehung dieses Begriffes bietet sich denn als zusammenfassender Name für alle in diesem Abschnitt betrachteten (und im § 158 noch zu vervollständigenden) besonderen Arten von Strahlen als allgemeinster Name der einer **Ätherstrahlung** dar.

C. Erklärung der einfachsten Lichterscheinungen aus der Wellenlehre.

Vorbemerkung: Im I. Abschnitte „Geometrische Optik“ wurden an den „Strahlen“ nur geometrische Eigenschaften der Richtung, nämlich Geradlinigkeit, bezw. Ablenkung nach dem Reflexionsgesetze $\varrho = \varepsilon$ und dem Brechungs-

gesetze $\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \varepsilon$ betrachtet. Auch im II. Abschnitte wurden die sonstigen physikalischen Verschiedenheiten der Strahlen ausschliefslich „zurückgeführt" auf das (ebenfalls geometrische) Merkmal der verschiedenen Brechbarkeit, nach der es sich dann richtet, ob durch je eine Strahlenart das Auge zu verschiedenen Farbenempfindungen, die Haut zu Wärmeempfindungen, bezw. die Thermosäule zu Thermoströmen, die photographische Platte zu chemischen Vorgängen, Äskulin zu Fluorescenz u. s. f. erregt wird. — Es drängt sich die weitere Frage auf: Durch welche physikalischen Eigenschaften unterscheiden sich die einzelnen Strahlenarten voneinander? Denn ein Strahl, der z. B. wenig brechbar ist und Rotempfindung erregt, mufs in sich irgendwie anders beschaffen sein als ein mehr brechbarer, der Violettempfindung erregt. — Die **Wellentheorie des Lichtes** antwortet: Die Licht-, Wärmestrahlen sind Wellenstrahlen des „Lichtäthers", und zwar haben die weniger brechbaren (sogen. roten) Strahlen längere Wellen als violette; ähnlich wie tieferen Tönen längere Luftwellen entsprechen als höheren. — Die experimentellen Beweise für die Wellentheorie des Lichtes liegen namentlich a) in der Ausbreitungsgeschwindigkeit verschiedener Lichtarten in verschieden brechenden Lichtmedien, b) in den Erscheinungen der Interferenz des Lichtes, die als Begleiterscheinung zahlreicher optischer Vorgänge (u. a. der Beugung) auftritt.

§ 122. Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes.

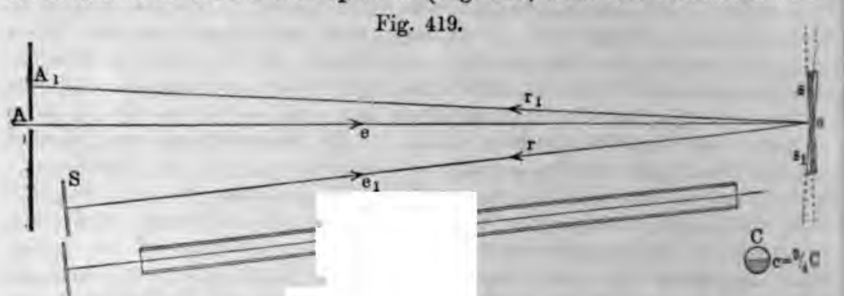
Alle kunstlosen Wahrnehmungen und Beobachtungen zeigen, dafs die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes, wenn nicht unendlich, so doch sehr grofs sein mufs. Denn es ist nicht nur die Zeit unmerklich klein z. B. zwischen dem Öffnen eines Fensterladens und der Erhellung des Zimmers, sondern auch die weiteste Ebene scheint ganz plötzlich und überall gleichzeitig durch einen Blitz erhellt zu werden. Den ersten *Versuch*, um für den Fall, dafs die Geschwindigkeit eine endliche sei, ihre Gröfse zu ermitteln, hat Galilei vorgeschlagen: Zwei Personen A und B befinden sich in möglichst grofsem Abstande voneinander. A führt eine Bewegung aus (Abdecken einer Laterne bei Nacht), B ahmt sie nach, sobald er sie sieht, und A beobachtet, um wieviel später ihm diese nachahmende Bewegung sichtbar wird, als er die seinige ausgeführt hat. — Nun hat sich zwar mit so einfachen Mitteln eine endliche Dauer des Hin- und Herganges des Lichtes von A nach B und von da zu A zurück nicht nachweisen lassen; immerhin aber können die terrestrischen Methoden von Fizeau und Foucault (siehe unten) als Vervollkommnungen dieses Grundgedankens bezeichnet werden. Die Entscheidung der Frage konnte nur entweder durch Zugrundelegung sehr grofser Wegstrecken — so in den beiden astronomischen Methoden von Olaf Römer und Bradley (§ 186) — oder durch Messung sehr kleiner Zeitstrecken gewonnen werden. Letzteres in den beiden terrestrischen Methoden (wobei nur die einfachsten Schemata angegeben werden, wogegen bei der wirklichen Ausführung die Anwendung von Sammellinsen und -spiegeln behufs sorgfältigster Konzentration der zum Teil auf weite Entfernungen sich ausbreitenden Strahlen notwendig war):

Fizeau (1849) liefs Licht durch die Lücken eines Zahnrades A auf einen im Abstande etwa einer Meile normal gegen die Strahlen gestellten Spiegel B fallen. Bei bestimmter Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades trafen dann die durch je eine Lücke ausgegangenen Strahlen beim Zurückkehren auf den nächsten Zahn,

und ein d[illegible] Zähne auf den Spiegel blickendes Auge sah also diesen dunkel. Bei doppe[illegible] [illegible]drehungsgeschwindigkeit wurde dann das Gesichtsfeld wieder hell, indem d[illegible] Strahlen durch die nächste Lücke zurückgingen, bei dreifacher wieder dunkel u. s. f.

Foucault (1854) gelang es, im Zimmer die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen. Durch den Spalt A (Fig. 419) fällt ein Lichtstrahl e auf

Fig. 419.



den Spiegel s und wird [illegible] gs r auf den Spiegel S reflektiert, der normal zu r steht u[illegible] so längs e_1 auf s zurücksendet. Wäre s in Ruhe, so würde er [illegible] nach A zurücksenden; es macht aber s um eine zu A [illegible] o etwa 800 Umdrehungen in 1 sec (diese Zahl erschlos[illegible] bei der Drehung hörbar werdenden Ton). Daher findet [illegible] nde Strahl e_1 den Spiegel in einer etwas anderen Stellung [illegible] wird also längs r_1 nach A_1 reflektiert. Aus dem Winkel AoA_1 ergibt sich der Drehungswinkel des Spiegels und hieraus die Zeit, die das Licht zur Strecke oS und zurück brauchte. — Indem Foucault überdies längs oS eine zur Hälfte mit Wasser, zur Hälfte mit Luft gefüllte Röhre anwendete, fand er:

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ist für Luft rund

$$C = 300000 \text{ km sec}^{-1} \text{ (= 40000 Meilen per sec), für Wasser } c = \frac{3}{4}C.$$

Die genaueren Werte nach verschiedenen Methoden und zwar teils nach den ursprünglichen, teils nach neueren verfeinerten Wiederholungen sind: Römer 315000 (später 297100), Bradley 298200 (wegen der höchstens auf $^1/_2$ Proc. genau bekannten Sonnenparallaxe im gleichen Verhältnis unsicher); Fizeau 313274 (später 299950, 310300), Foucault 298000 (später 299850, 299860), letzterer Mittelwert ist auf beinahe $^1/_{100}$ Proc. genau; da er um $^1/_{100}$ gröfser ist als der auf astronomischem Wege gefundene Mittelwert, wurde er sogar ein Anzeichen, dafs den beiden astronomischen Methoden ein zu kleiner Abstand Sonne — Erde zu Grunde gelegt war. — Die terrestrischen Methoden liefern die etwas kleinere Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft, die astronomischen (da gegenüber den durchmessenen Wegstrecken die Dicke der Atmosphäre verschwindend ist) im leeren Raume.

§ 123. Emissions- und Undulationstheorie des Lichtes.

Geschichtliches. Huygens hat, gleich seinem jüngeren Zeitgenossen Newton, durch ebenso grundlegende Entdeckungen wie die Mechanik auch die Optik

əfördert: Huygens „Abhandlung über das Licht“ (*Traité de la lumière*, 1690) ibt einerseits bewundernswert exakte Beschreibungen namentlich von den Tatıchen der Doppelbrechung, anderseits bietet sie eine ganz allgemeine rklärung der Lichterscheinungen aus der Wellenlehre (Undulations-, ibrationstheorie) des Lichtes.

Newton hatte etwas später (Optik, 1704) eine ebenso umfassende Erklärung er ihm bekannten optischen Erscheinungen aus einer „Korpuskulartheorie“ oder ;missionstheorie des Lichtes versucht. Mehr als ein Jahrhundert lang schien iese Emissionstheorie siegreich; das XIX. Jahrhundert entschied aber endgiltig u Gunsten der Wellentheorie (— vorbehaltlich ihrer näheren Ausgestaltung entreder als Elasticitätstheorie oder als elektromagnetischer Theorie, siehe unten). —

Im folgenden sollen zunächst die drei Erscheinungsgruppen der geometrichen Optik: I. geradlinige Ausbreitung, II. Reflexion, III. Brechung nach jeder er beiden Theorieen erklärt und die Gründe der Überlegenheit der Wellenlehre ntwickelt werden.

I. Die **geradlinige Ausbreitung des Lichtes** ist nach der Emissionsheorie eine notwendige Folge des Trägheitsgesetzes, sobald angenommen wird, afs die von dem leuchtenden Körper ausgesandten Lichtteilchen auf ihrem Wege ein Hindernis, wie Reibung oder Widerstand des Mittels, vorfinden. Die ƚeschwindigkeit, mit welcher die Teilchen sich geradlinig bewegen, wäre die urch die Beobachtungen (zunächst Römers, kurz vor Newtons Optik) gefundene on. 300000 (km, sec^{-1}). Diese Geschwindigkeit als „grofs erster Ordnung“ enommen, führt freilich auf eine kinetische Energie der Lichtteilchen, welche weil in $\frac{1}{2}mc^2$ das c in zweiter Potenz vorkommt) „grofs zweiter Ordnung“ ist: ufser wenn wir annehmen, dafs dafür die Masse der Teilchen aufserordentlich lein (zweiter Ordnung) ist. — Ohnedies müfsten aber diese Lichtteilchen schon eshalb als gegen alle mefsbaren (wägbaren) Massen verschwindend klein gedacht rerden, weil sonst z. B. die in ein Auge eingedrungenen Teilchen sich irgendwann urch eine Anhäufung auf der Netzhaut oder dergl. bemerkbar machen müfsten. — ⱡiese Schwierigkeit entfällt für die

Undulationstheorie: Diese nimmt, um die Übertragung eines ʟichtvorganges von einer Stelle des Raumes an eine andere begreiflich u machen, überhaupt gar nicht an, dafs sich Massen (wägbare oder ınwägbare) von der ersten Stelle zur zweiten begeben; sondern: Um peziell die Geradlinigkeit der Ausbreitung zu erklären, ist nach ; 67 die Bedingung notwendig und ausreichend, dafs für das Medium, n welchem sich die Wellen ausbreiten, das Verhältnis $e:d$ überall constant ist. Und zwar geschieht die Ausbreitung in einem homo-ȝenen, isotropen Medium in Kugelwellen, was selbst wieder entweder durch die „primitive Auffassung“ (§ 68, Vergröfserung des Kugelradius proportional der Zeit) oder nach der Huygensschen Auffassung (sekundäre Wellen von jedem Punkte einer einmal erregten Kugelwelle) vorstellbar ist. — In ebenen Wellen breitet sich Licht ıus, das von fernen Lichtquellen kommt.

II. Die **Reflexion des Lichtes** erklärt sich aus der Emissionstheorie ungezwungen, wenn wir uns denken, dafs die Lichtteilchen von glatten Flächen ·eflektiert werden, wie elastische Kugeln. Allerdings reicht diese Annahme für

sich nicht [illegible] zu erklären, warum nicht alles Licht reflektiert wird, sondern warum ei[illegible] ein neues Medium eindringt; davon unter III.

Die U[illegible]lationstheorie erklärt die Reflexion mittels des Huygenssche[illegible] Prinzips (§ 69, Fig. 264 für ebene Wellen, Fig. 265 für Kugelw[illegible]n), wobei sie nur anzunehmen hat, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in den beiden aneinander grenzenden Medien verschieden ist (ob aber z. B. im Wasser kleiner oder gröfser als in Luft, bleibt für die Erklärung der Reflexion gleichgiltig).

III. Damit die **Brechung des Lichtes** mit der Emissionstheorie in Einklang sei, müfste für eine Brechung zum Einfallslot angenommen werden, dafs die Geschwindigkeit der Lichtteilchen im optisch dichteren Medium gröfser sei als im dünneren. Zwar ist diese Annahme schon von vornherein unplausibel; nehmen wir aber gleichw[illegible] [illegible]teilchen nur an der Trennungsfläche (etwa infolge stärkerer Anzi[illegible] dichteren Stoff) eine Vergröfserung der Geschwindigkeit erfahre[illegible] [illegible]schwindigkeit innerhalb des Mediums dann unverändert ble[illegible] [illegible]ar das Sinusgesetz nach der in LA 133 für Beweg[illegible] Widerständen entwickelten Formel. Es müfste also da[illegible] [illegible]s z. B. für den Übergang des Lichtes aus Luft in Wasser, wo erf[illegible] $= \frac{4}{3}$, das Verhältnis $\frac{c_l}{C_w} = \frac{3}{4}$ gelte, wo c_l die Geschwindigkeit i[illegible] [illegible]e im Wasser ist.

LA 133.

Die Undulationstn[illegible] [illegible]hne weitere Hülfshypothese das Sinusgesetz der Brechung, [illegible]nommen wird, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der [illegible]tquellen im optisch dichteren Medium kleiner sei als im dünneren; und zwar ist z. B. für den Übergang von Luft in Wasser gefordert $\frac{C_l}{c_w} = \frac{4}{3}$. Da nun dieses Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes für Luft und Wasser nach Foucaults Versuchen wirklich besteht (nicht das durch die Emissionstheorie geforderte reciproke $^3/_4$), so ist durch diese Versuche die Undulationstheorie bestätigt (verifiziert), die Emissionstheorie ausgeschlossen (exkludiert). — Log. Anh., Nr. 36.

Anh. 36.

Durch diesen endgiltigen Sieg der Wellenlehre des Lichtes, der um die Mitte des XIX. Jahrhunderts erfolgte, ist aber noch nichts darüber entschieden, ob die Lichtwellen mechanische (elastische) Wellen (§ 60) oder ob es elektrische (oder sonst welche) seien. Ersteres hatte die jetzt speziell als „Elastizitätstheorie des Lichtes" bezeichnete Lehre stillschweigend oder ausdrücklich angenommen; seit einigen Jahrzehnten verliert sie mehr und mehr an Wahrscheinlichkeit gegenüber Maxwells elektromagnetischer Theorie des Lichtes; über diese einiges im § 157. — Sowie aber Huygens' Satz von den Elementarwellen und die Folgerungen aus ihm für alle Arten von Wellen gelten, bleibt auch jener Sieg der Wellentheorie als solcher unberührt von deren künftigen näheren Ausgestaltungen (log. Anh., Nr. 36). Diese stehen also nicht auf einer Stufe mit Hülfshypothesen, wie es z. B. die von Newton gewesen war, dafs die Lichtteilchen an der Trennungsfläche der beiden Medien „Anwandlungen" *(accessus)* erfahren, vermöge deren einige Teilchen ins alte Medium reflektiert, andere in das

Anh. 36.

neue Medium gebrochen werden. Vielmehr gilt HUYGENS' Konstruktion und Berechnung der reflektierten und gebrochenen Wellen bezw. Strahlen sogar noch dann, wenn wir nicht einmal annehmen, dafs diese Wellen periodische seien (§ 63). Es können daher auch die bisherigen Erklärungen der geradlinigen Ausbreitung, Reflexion und Brechung uns noch keine näheren Aufschlüsse darüber geben, ob die durch diese Vorgänge geforderten Lichtwellen periodische oder aperiodische — und falls ersteres, welches die Wellenlängen und die Schwingungszahlen seien. Diese Ausgestaltung empfängt aber die Wellenlehre des Lichtes, wenn wir die von ihr ebenfalls ohne alle weitere Hülfshypothese geforderten Erscheinungen der Beugung mit heranziehen.

124. Beugung des Lichtes. — Wellenlängen und Schwingungszahlen der physikalisch einfachen Lichtstrahlen.

Durch HUYGENS' Theorie der Wellenausbreitung ist gefordert, dafs, wenn die allseitige Ausbreitung in bestimmter Weise gestört ist, Beugungserscheinungen (§ 69) auftreten. Daraus, dafs man „nicht um die Ecke sehen" kann, wie man „um die Ecke hört", folgt schon, dafs die Wellenlängen des Lichtes bei weitem kleiner sein müssen als die Längen der Schallwellen (§ 93). Wenn es aber auch in der geometrischen Optik für sehr viele Zwecke zulässig ist, von den Beugungserscheinungen des Lichtes abzusehen, so lassen sich solche doch bei sehr kleinen lichteinlassenden Öffnungen (sehr schmalen Spalten und Spaltensystemen, Gittern) und verhältnismäfsig schmalen schattenwerfenden Drähten sehr auffallend machen. — Da nun bei diesen Erscheinungen überdies periodische Wechsel von Hell und Dunkel sich zeigen, so liegt es nahe, diese Erscheinungen als **Interferenzen des gebeugten Lichtes** zu deuten; und diese Interferenzerscheinungen (sowie zahlreiche andere, vergl. nächsten Abschnitt, § 126, 127 gestatten, die Wellenlängen des Lichtes mit grofser Genauigkeit mittelbar zu messen. Aus den Wellenlängen zusammen mit der bekannten Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ergeben sich schliefslich die Schwingungszahlen der Ätherteilchen in den verschiedenen Lichtstrahlen. — Hier nur einige der einfachsten solcher Erscheinungen und ihre Erklärung.

1. Beugung des Lichtes an einem schmalen Spalt. *Versuche*: Vor das Objektiv eines auf Unendlich eingestellten Fernrohres (durch dessen Objektiv also einfallende parallele Strahlen in der Brennebene gesammelt werden) bringt man eine Blechblende mit einem schmalen Spalt und hält diesen parallel zu einem anderen schmalen Spalt (wir werden die durch die Längssymmetralen beider Spalten bestimmte Ebene kurz die Symmetrale der ganzen Erscheinung nennen). — a) Wenn monochromatisches (z. B. Natrium-) Licht einfällt, so sieht man gemäfs den Gesetzen der geometrischen Optik in der Richtung beider Spalten den näheren Spalt als einen hellen Streifen (aber nicht mit scharfen Rändern, da eben das Fernrohr nicht auf den endlichen, kleinen Abstand der Spalte eingestellt ist). Parallel zu diesem hellen Streifen sieht man aber überdies auf beiden Seiten noch andere helle Streifen, welche je nach ihrem Abstande von der Mitte immer lichtschwächer sind. Je zwei derselben sind durch einen dunklen

Zwischenraum getrennt (Fig. 420) und zwar so, dafs die Übergänge von Hell zu Dunkel und umgekehrt allmählich erfolgen. Wir werden den mittleren hellen Streifen als „Nullmaximum“, den ersten, zweiten ... dunklen Streifen als „erstes, zweites ... Minimum“, die anderen hellen Streifen als „erstes, zweites ... Maximum“ bezeichnen. Während bei einer Natriumflamme der beschriebene Wechsel von Hell und Dunkel ein solcher von Gelb und Schwarz ist, tritt bei einem durch ein rotes Glas bedeckten Spalte des Fensterladens Wechsel von Rot und Schwarz auf. — b) War das einfallende Licht nicht monochromatisch, sondern fiel durch den Spalt z. B. Sonnenlicht ein, so zeigen sich statt der bloſsen Intensitätswechsel überdies noch solche von Farben. Und zwar ist der mittlere helle Streifen rötlich eingesäumt, in den äuſsersten hellen Streifen wechseln rosarote und grüne Farbentöne.

Fig. 421.

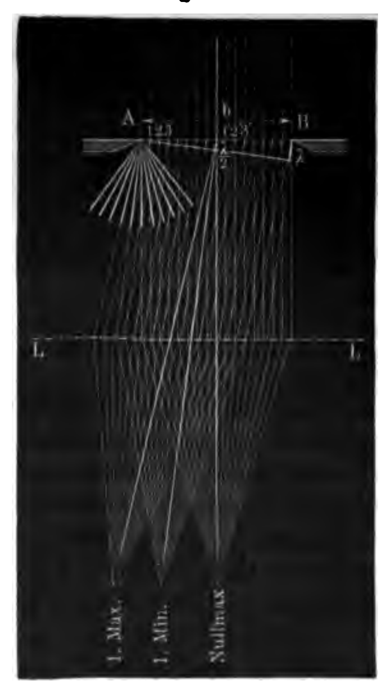


Fig. 422.





Fig. 420.

Zur Erklärung: Auf einen Spalt AB (Figg. 421, 422) von b mm Breite falle Licht normal zur Ebene des Spaltes, also längs deren Symmetrale. Angenommen (über die Verwirklichung dieser Annahme durch „kohärentes Licht“, § 126), dafs alle Punkte in der Ebene des Spaltes Schwingungen der nämlichen Phase ausführen, so wird jeder dieser Punkte, z. B. A, nach Huygens' Auffassung ein sekundäres Erregungszentrum für Wellen, welche von ihm nach allen Richtungen

ehen. Denken wir uns von allen diesen Strahlen diejenigen herausgehoben, he mit der Symmetrale einen solchen Winkel α einschliefsen, dafs $b \sin \alpha = \lambda$, die Wellenlänge dieser Wellen, so lassen sich diese parallelen Strahlenbüschel zwei gleiche Teile teilen, so dafs je ein Strahl 1, 2, 3 ... der einen Hälfte n einen ihm zugeordneten 1', 2', 3' ... der zweiten Hälfte um $\frac{\lambda}{2}$ verschoben ist. l nun dieses Parallelstrahlenbüschel durch eine Linse LL gesammelt, so en sich in deren Brennebene die sämtlichen Wellen des Büschels durch Interz aufheben. Wir werden also das **erste Minimum** der obigen Erscheinung liejenige Stelle erklären, an welcher alles in ihr sich sammelnde Licht der ndären Wellen **durch Interferenz sich auslöscht**. Durch Drehung des rohres (Einstellung des Fadenkreuzes zuerst auf das Nullmaximum, dann auf erste Minimum) ergibt sich der Winkel α und somit auch λ.

Der beschriebene Versuch für subjektive Beobachtung läfst sich auch in einen ktiven abändern, indem in möglichst grofsem Abstande vom Spalt parallel iner Ebene ein Schirm aufgestellt wird. Statt des zu erwartenden Dunkelnerbildes der Sonne (in der Längsrichtung des Spaltes verschwommener als al dazu) erhalten wir dann ebenfalls ein Nullmaximum, erstes Minimum, erstes imum u. s. f. Denn wegen der grofsen Entfernung des Schirmes sind die von hiedenen Punkten des Spaltes zu verschiedenen Punkten des Schirmes nahe Symmetrale anlangenden Strahlen auch ohne Linsenwirkung schon nahezu llel. Hier ergibt sich dann der Winkel α aus dem Abstande D mm von Spalt Schirm und dem Abstande d mm von Nullmaximum und erstem Minimum; $\frac{d}{D} = tg\alpha \doteq \sin\alpha = \frac{\lambda}{b}$ ist $\lambda = \frac{d}{D} b$ oder $\lambda = \frac{b}{D} d$. — Die exakte Messung [illegible]breite b geschieht mittels einer Mikrometerschraube (math. Anh., Nr. 3), Anh. 3. [illegible] kann behufs Messung der Abstände d ein Milchglasstreifen mit [illegible]lung dienen. Ist z. B. $D = 1\frac{1}{2}$ m $= 1500$ mm, $b = 0{,}5$ mm, also Konstante dieser Versuchsanordnung $\frac{b}{D} = \frac{0{,}5}{1500} = \frac{1}{3000}$, so ergibt sich

ür rotes Licht $d_r = 2$ mm und $\lambda_r = \frac{2}{3000}$ mm $= 0{,}000\,667$ mm

ür blaues Licht $d_v = 1{,}4$ mm und $\lambda_b = \frac{1{,}4}{3000}$ mm $= 0{,}000\,466$ mm. — Somit:

Verschiedenen Farbentönen entsprechen verschiedene **Wellen**[illegible] **der** Lichtstrahlen; u. zw. unter den Spektralfarben dem am igsten brechbaren Rot die gröfsten Wellenlängen von rund 0,0007 mm, am stärksten brechbaren Violett von rund 0,0004 mm. (Die genauen rte für verschiedene Frauenhofersche Linien gibt die Tafel V an.)

Weil also die Wellenlängen des Lichtes von mäfsiger Kleinheit sind, seine Austungsgeschwindigkeit aber von ungeheurer Gröfse ist, müssen wir uns ein lichtendendes Teilchen in jeder Sekunde eine fast unglaublich grofse Anzahl Schwingen ausführend denken, damit die Strecke von 300 000 km $= 3.10^{11}$ mm durch die von Wellen zu je 0,0007 mm $= 7.10^{-4}$ mm ausgefüllt werde, und damit so oft z. B. unsere Netzhaut in periodisch veränderten Zustand versetzt werde. — In Tat ergibt sich durch Anwendung der Gleichung $n = c : \lambda$ der allgemeinen Wellen- (§ 64, S. 238) z. B. für rotes Licht $n = 3.10^{11} : 7.10^{-4} \doteq 430{,}10^{12}$; Allgemeiner:

Verschiedenen **Farbentönen** entsprechen verschiedene **Schwingszahlen** der das Licht aussendenden und übertragenden Äther-

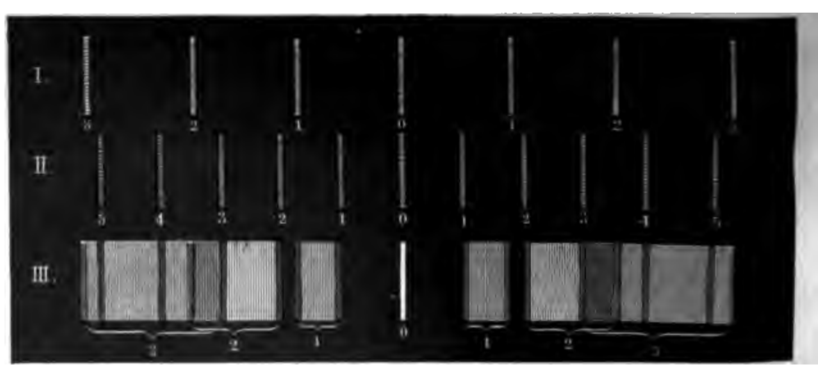
teilchen; u. zw. dem Rot über 400 Billionen, dem Violett bis ge 800 Billionen Schwingungen in der Sekunde.

Zum (physiologisch-psychologischen) Merkmal der **Farbe** steht das (phy- kalische) Merkmal der **Schwingungszahl** in noch engerer Beziehung, als das (falls physikalische) Merkmal der **Wellenlänge**; denn die Wellenlänge z. B. roten Strahles ist in Wasser nur $\frac{3}{4}$ von der in Luft (wegen $c = \frac{3}{4} C$), die **Schwingungszahl bleibt unverändert** (— wie es ja auch die fun- mentalste Erfahrungstatsache der Newtonschen Farbenlehre ist, dafs der „ein Strahl durch Brechung wohl seine Richtung, nicht aber seine Farbe ändert) —

Nachdem durch die Verschiedenheit der Wellenlängen verschiedener Fa erklärt ist, warum z. B. für rotes Licht die Maxima weiter auseinander liegen für grünes, bezw. für violettes (Fig. 420), erklären sich nun die Farben Beugungserscheinungen ganz ebenso aus der Übereinanderlagerung verschied Strahlen, wie sie sich bei gebrochenem Licht erklärt hatten. In der Symmetr der Erscheinung fallen wieder alle Farben übereinander und beleuchten den Schi weifs. Da ferner nach der Seite hin zuerst Violett wegfällt, so wird dieser wei Streifen rotgelb eingesäumt sein.

Näheres über die durch die Gesetze der Farbenmischung geforderten Färbunge von Interferenzstreifen überhaupt vergl. § 127 nach Fig. 428.

Fig. 423.



Die bisher behandelten Erscheinungen an **einem** Spalt lassen sich zu bei weitem brillanteren Erscheinungen steigern durch Anwendung von **Spaltensystemen** oder **Beugungsgittern**. Rowlands Gitter besitzen auf die Breite von je 1 mm bis zu 1700 Strichen. Hier erfolgt dann die Nebeneinanderlagerung der einzelnen einfachen Farben (Fig. 423) so vollkommen, dafs **Beugungsspektra** auftreten, in welchen sich

Fig. 424.



Fraunhoferschen Linien noch deutlicher zeigen als in Dispersionsspektren. rdies bildet das Beugungsspektrum das natürliche **Normalspektrum** (Fig. 424), fern in ihnen die gegenseitigen Abstände der Farben den Unterschieden Wellenlängen einfach direkt proportional sind, wogegen bei den ›ersionsspektren je nach der Verschiedenheit der brechenden Stoffe verschiedene dehnung der einzelnen Farben eintritt, wovon das stärkste Beispiel die anomale persion ist.

2. Beugung an dünnen Stäben. Wird bei obigem Versuch zur objektiven stellung des an einem Spalt gebeugten Lichtes etwa in halbem Abstande von lt und Schirm eine Stricknadel (besser ein nicht glänzender, angelassener mer Eisendraht) gestellt, so zeigt sich 1. der Schatten derselben viel breiter, es nach den Gesetzen der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes zu erwarten , und 2. zeigen sich wieder sowohl innerhalb wie aufserhalb des hattens Wechsel von Hell und Dunkel parallel der Ausdehnung der Nadel, w. des Drahtes, bei Sonnenlicht farbige Säume. Die mathematische Bedlung dieser Erscheinungen gestaltet sich ähnlich wie bei der Spalte (LA 174), LA 174. ugstens in ersten Annäherungen.

Auch bei völlig kunstloser Beobachtung treten häufig mehr oder minder aufnde Interferenzerscheinungen gebeugten Lichtes auf. So schon, wenn wir bei geschlossenen Augen zwischen den Wimpern hindurch auf eine entfernte e Lichtquelle blicken. Schauen wir durch einen seidenen Regenschirm auf entfernte Gasflamme so, dafs das Auge nicht für Fäden des Schirmes akkomert, sondern auf die Flamme, also annähernd auf Unendlich eingestellt ist, igen sich parallel den gekreuzten Fäden der Seide lange Lichtstreifen. Schon a einem Haar, das nahe vor dem Auge eine vertikale Stellung hat, und an wobei wir auf eine uns die schmale Seite zukehrende Gasflamme blicken, r wir sehr schöne farbige Beugungsstreifen. Ähnliche Erscheinungen an einem rbart, an betauten Fensterscheiben u. dergl.

§ 125. Erklärung der Emission und Absorption, hosphoreszenz und Fluoreszenz aus der Wellenlehre.

Nachdem uns die Erscheinungen der Beugung, genauer der Interferenz gebeugten Lichtes, das einfachste Mittel geboten haben, Wellenlängen Schwingungszahlen der sichtbaren Strahlen kennen zu lernen, sollen nun . einige der im II. Abschnitt beschriebenen Lichterscheinungen aus der Wellen-e erklärt werden.

I. **Emission des Lichtes.** — Wie z. B. die Wand einer Glocke 435 Schwingen in der Sekunde ausführen mufs, damit unser in irgend einer (nicht allzu sen) Entfernung befindliches Trommelfell ebenfalls zu 435 Schwingungen in der nde erregt werde und wir den Ton a^1 hören, schliefsen wir nunmehr auch, der zwischen die Atome je eines Moleküls glühenden Natriumdampfes gebettete täther 500 Billionen Schwingungen per Sekunde ausführen müsse, damit ein rm oder Auge von ebenso vielen Wellen in der Sekunde getroffen werde. Auch iefsen wir, dafs an jedem Punkte zwischen dem glühenden Natriumdampfe und Schirme eine ebenso grofse Zahl periodischer Wechsel stattgefunden haben se (wobei wieder zunächst gemäfs § 123 unentschieden bleiben kann, ob auch elastische Schwingungen des Äthers oder vielmehr elektromagnetische Ände-

rungen seien; nur der größeren Anschaulichkeit halber werden die nächsten Erklärungen überall in der Sprache der Elastizitätstheorie des Lichtes gegeben).

Im einzelnen erklären sich dann die Verschiedenheiten der Emissionsspektra so: Ein glühendes Gas, dem nur eine helle Linie entspräche, wäre zu vergleichen z. B. mit einer Stimmgabel, die nur einen einfachen Ton von bestimmter Tonhöhe hören läßt, indem die Stimmgabelzinken nur einfache Sinusschwingungen ausführen. Ein Gas, dessen Emissionsspektrum aus zwei hellen Linien besteht, entspräche einem Klangerreger, der zwei Partialtöne gibt u. s. w. — ein weißglühender fester oder flüssiger Körper dagegen einem Klangerreger, der gleichzeitig Partialtöne aller möglichen Schwingungszahlen aussendet (etwa wie wenn z. B. sämtliche Tasten des Klaviers gleichzeitig angeschlagen würden). — Wir können überdies nunmehr die Tatsache, daß den farbig leuchtenden Gasen nur einzelne, den weißglühenden festen und flüssigen Stoffen alle Farben gleichzeitig entsprechen, uns dadurch verständlich machen, daß in den Gasen die einzelnen Moleküle frei schwingen, in festen und flüssigen Stoffen aber sich gegenseitig behindern und es also nicht zu einfachen Schwingungen bringen. — Daß alle Körper zuerst rotglühend, später gelb- und erst bei den verhältnismäßig höchsten Temperaturen weißglühend werden, wird verständlich, wenn die Moleküle anfangs noch verhältnismäßig langsamere, später neben diesen auch noch schnellere Wärmeschwingungen ausführen (damit zu vergleichen, daß an jenem Klavier zuerst nur die Saiten für die tiefsten und dann neben diesen auch immer höhere Töne erregt werden; oder: Eine längere Lippenpfeife gibt bei schwachem Anblasen nur die tiefsten, bei stärkerem immer höhere Partialtöne und zwar zum Teil auch zugleich mit den tieferen; desgleichen „klirrt“ eine Stimmgabel nur bei hinreichend starkem Anschlagen).

II. Auch die Tatsachen der Absorption des Lichtes lassen nun Vergleiche in mechanischen, speziell akustischen Wellenvorgängen zu: z. B. Wasserwellen, die vom freien Wasserspiegel in Röhricht geraten, werden hier bald gedämpft und verschwinden als Wellen; ähnlich, wenn die Drahtspirale, an der Seilwellen erzeugt werden, auf einem langen, mehr oder minder glatten Tisch liegt: wird das eine Ende durch die hin und her bewegte Hand zu Wellen erregt, so pflanzen sich diese infolge der Reibung des Seiles an der Tischplatte nur auf kurze Strecken fort. So also auch, wenn Lichtwellen in undurchsichtige Stoffe eindringen, wo sie schon in den obersten Schichten aufhören Licht zu sein; in durchscheinenden und durchsichtigen Stoffen findet dieses Aufzehren erst auf längeren Strecken statt. Im allgemeinen wird sich dabei die Energie der Lichtbewegung umsetzen in Wärme, und zwar ohne Zwischenglieder anderer Energieformen. — Ausnahmen hiervon sind dann Phosphoreszenz und Fluoreszenz (siehe unten). Von solchen Ausnahmen einstweilen abgesehen, wird nun Kirchhoffs Satz über das Verhältnis von Absorption und Emission begreiflich; und zwar wieder zunächst derjenige spezielle Fall, welcher für die Spektralanalyse in Betracht kommt: Ein Gas, das nur Wellen von einerlei Schwingungszahl aussendet (als Emissionsspektrum also eine einzige helle Linie hat), ist gleichsam auf eine bestimmte Schwingungszahl abgestimmt wie eine Stimmgabel. Würde nun über diese eine Stimmgabel ein Gemisch von Schallwellen der verschiedensten Wellenlängen und Schwingungszahlen geleitet, so gerät die Gabel nur durch die Wellen gleicher Schwingungszahl ins Mittönen; eben diese Wellen geben aber hierdurch ihre Energie an die Gabel ab, d. h. sie werden in ihrer Intensität geschwächt, während alle übrigen Wellen die Gabel ungehindert passieren. So nun ist auch die Umkehrung der hellen Linien in dunkle allgemein als eine Art Resonanz, nämlich genauer (da hier die Glei-

it der Schwingungszahl wesentlich **ist**, § 94) als **Mitschwingen** zu deuten. — ıd weiter gewinnen wir unter diesem Bilde auch Einsicht in Kirchhoffs Satz von m konstanten Verhältnis zwischen Emission und Absorption, der zunächst nur e alle Stoffe umfassende Erfahrung aussprach.

Bisher war nur auf die gewöhnlichste Art des **Selbstleuchtens**, nämlich der glühenden Körper Rücksicht genommen worden. Bei ihnen steht es ız im Einklange mit der kinetischen Wärmehypothese, dafs die Körpermoleküle rächtliche kinetische Energie, also bei ihrer gegebenen Masse auch grofse schwindigkeiten haben und infolge dieser die umgebenden Ätherteilchen zu ıwingungen mit erregen. Für die übrigen Erscheinungen der **Lumineszenz** 121) aber bedarf es anderer Vorstellungen:

III. Bei der **Phosphoreszenz** z. B. eines Leuchtsteines haben wir anzunehmen, ſs während der Besonnung die Moleküle in Schwingungen versetzt worden sind, dann von den Molekülen noch fortgesetzt werden, wenn ihnen seitens der ınenstrahlung keine Energie mehr zugeführt wird; dies also zu vergleichen mit m Nachklingen einer Glocke nach dem letzten Anschlagen des Schwengels.

IV. Bei der **Fluoreszenz** werden die von unsichtbaren ultravioletten, also ır kurzwelligen Strahlen getroffenen Teile z. B. eines Baryumplatincyanür-ıirmes für das Auge sichtbar, müssen also minder kurzwellige Strahlen ısenden; dies ist damit zu vergleichen, dafs eine auf einen tieferen Ton gestimmte mmgabel statt durch einen Schlägel in die ihr gemäfsen Schwingungen dadurch rsetzt wird, dafs man sie mit einer auf einen höheren Ton gestimmten und iftig schwingenden Gabel berührt *(Versuch)*.

Da also in solchen Fällen die dem phosphoreszierenden, bezw. fluoreszierenden irper zugeführte Energie nicht unmittelbar in Wärme umgesetzt, nämlich ht sogleich absorbiert, d. h. als Licht verschwinden gemacht wird, so gilt für lche Körper auch Kirchhoffs Satz nicht. —

Die in vorstehendem III. Abschnitt gegebenen Erklärungen einiger der im und I. Abschnitt beschriebenen grundlegenden optischen Erscheinungen sollen ır Proben davon geben, in wie mannigfacher Weise sich die Wellentheorie des chtes den optischen Tatsachen anzupassen vermag. Im folgenden IV. Abschnitt ɜrden einige minder gewöhnliche optische Erscheinungen zusammen mit ihren :klärungen aus der Wellenlehre behandelt.

). Einige weitere Erscheinungen der Interferenz. Polarisation, Doppelbrechung.

§ 126. Interferenzspiegel und -Prisma.

Sobald erkannt ist, dafs ein lichtaussendender Punkt Erregungscentrum von 'ellenbewegungen ist, so könnte man Interferenzerscheinungen überall dort warten, wo ein Schirm von den Wellen zweier gleichartiger Lichtquellen zugleich leuchtet wird; z. B. von zwei Spalten im Fensterladen oder zwei glühenden atindrähten, die untereinander und zum Schirm parallel sind. Es erweist sich er für das Auftreten von Lichtinterferenz noch die Bedingung als wesentlich, ſs die beiden Lichtquellen nicht voneinander unabhängig seien, sondern dafs es **sammengehöriges** („kohärentes") **Licht** sei, wie es z. B. hergestellt wird durch

Fresnels Interferenzspiegel. Zwei Spiegel aus Metall oder schwarzem Glas stofsen längs einer geraden Kante aneinander und bilden einen sehr stumpfen Winkel (nur wenige Minuten unter 180°, Fig. 425). Dieses Spiegelpaar wird so in das durch eine schmale Spalte im Fensterladen eintretende Sonnenlicht gestellt, dafs es beide Spiegelebenen streift (unter grofsem Einfallswinkel trifft). Ist die Kante dem Spalt parallel, so erblickt man bei passender Stellung des Auges zwei einander nahe parallele **Bilder** des Spaltes. Wird an Stelle des Auges ein Schirm so gestellt, dafs seine Ebene parallel ist der durch beide Spaltbilder gehenden Ebene, so zeigen sich auf dem Schirm abwechselnd helle und dunkle Linien, ähnlich wie bei der Beugung des Lichtes an einem schmalen Spalt, und zwar so, dafs in der Symmetrieebene der beiden Spaltbilder ein **heller** Streifen als Nullmaximum zu liegen kommt und dem ersten Minimum ein Unterschied der Abstände von den beiden Spaltbildern $D_2 - D_1 = \frac{\lambda}{2}$ entspricht (LA 175). — Dieser Versuch ist viel schwieriger rein durchzuführen als die Beugungsversuche (§ 124); auch ist diese Interferenz durch Spiegelung doch auch wieder von Beugungserscheinungen begleitet, was ihre vollständige Theorie sehr verwickelt macht.

Fig. 425.



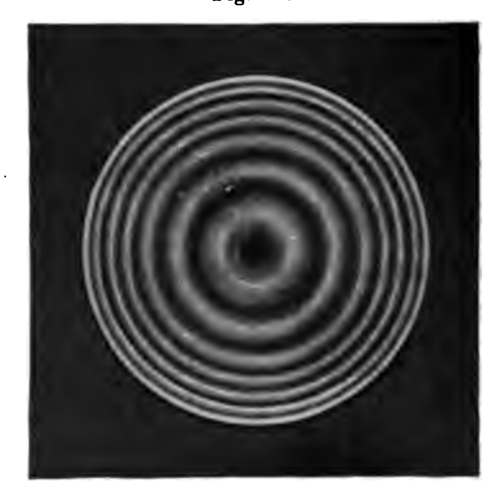
LA 175.

Auch ein **Prisma** von sehr grofsem brechenden Winkel, dessen brechende Kante parallel zur lichteinlassenden Spalte gestellt wird, zeigt von dieser ein Doppelbild, und die aus beiden Prismenflächen austretenden kohärenten Lichtmengen gelangen wieder zur Interferenz. Hier ist aber die Erscheinung wieder kompliziert durch die prismatischen Dispersionsfarben.

§ 127. Farben dünner Plättchen.

Die oft brillanten Farben an Seifenblasen sind schon von Newton sorgfältig untersucht und merkwürdigerweise auch quantitativ richtig erklärt worden, wiewohl er statt der periodischen Zustände der Lichtwellen eben solche periodische Wechsel in den „*accessus*“ (vergl. § 123) der Lichtteilchen angenommen hatte. Um Luftschichten von leicht indirekt zu messender Dicke (LA 176) zu gewinnen, legte er auf eine ebene Glasplatte eine plankonvexe Linse von grofsem Krümmungshalbmesser; an einem solchen Newtonschen Farbenglas zeigt sich an der Berührungsstelle von Platte

Fig. 426.

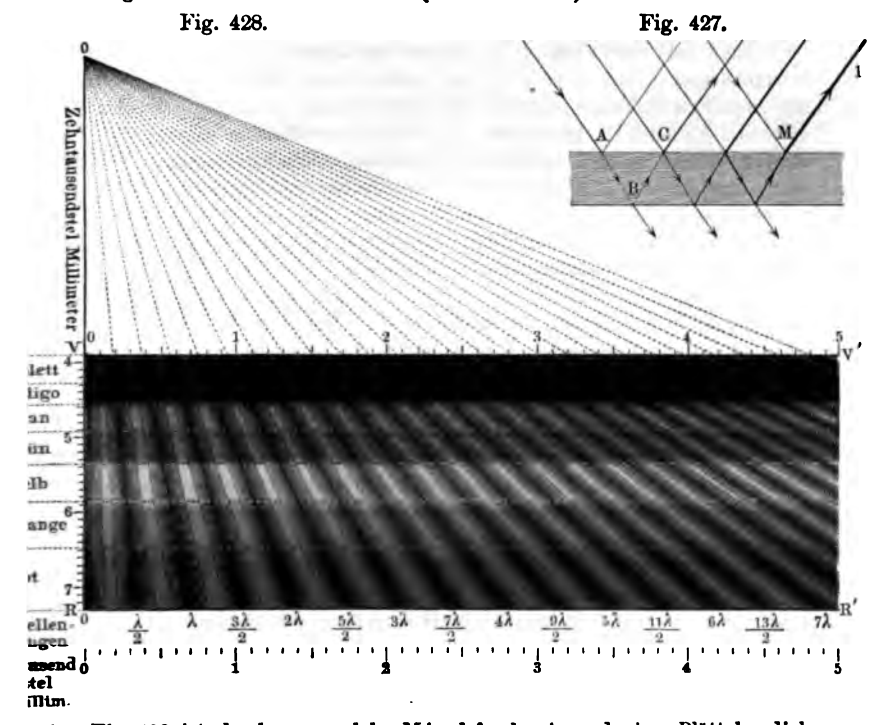


LA 176.

Linse ein dunkler Fleck, rings um ihn bei monochromatischer Be-
:htung ein Wechsel von hellen und dunklen Kreisen (Fig. 426),
bei weifsem Licht farbig sind.

Im folgenden die Erklärung nur für den einfachsten Fall planparalleler
tchen (z. B. aus Wasser) mit beiderseits gleichem Medium (Luft): Ein Licht-
l wird bei A (Fig. 427) gespalten in einen reflektierten und einen ge-
.enen Teil, der gebrochene bei B wieder so gespalten, dafs aus dem Plättchen
,ı ein dem reflektierten paralleler Strahl austritt u. s. f. Von je einer Stelle M
.eren Grenzfläche des Plättchens gehen also aus: 1. der direkt reflektierte
b und 2. eine Summe von gebrochenen Strahlen, die nach ein-, zwei-,
. . maligem Hin- und Hergehen innerhalb des Plättchens bei M austreten.
.e Dicke des Plättchens sehr klein, nämlich von derselben Gröfsenordnung
die Wellenlängen des Lichtes, so wird der Strahl 1 und die Strahlensumme
r Interferenz gelangen. War monochromatisches, z. B. (gelbes) Licht
efallen, so werden für einen bestimmten Einfallswinkel die von der Platte
etenden Strahlen einander auslöschen und trotz des reflektierten Lichtes
Plättchen dunkel erscheinen lassen. Für monochromatisches Licht kürzerer
enlänge wird bei steilerer Draufsicht das Plättchen dunkel erscheinen. War
uffallende Licht weifs, so wird das Plättchen in der jeweiligen Komplementär-
: des ausgelöschten einfachen Lichtes (also z. B. blau) erscheinen. —

Fig. 428. Fig. 427.



Aus Fig. 428 ist abzulesen, welche Mischfarbe irgend einer Plättchendicke
richt: Legen wir nämlich ein Lineal parallel zur Geraden $R\,V$ z. B. bei 0,2 (der
en und oberen Teilung) an, so zeigt sich, dafs hier Rot (1. Max.) zur Wir-
kommt, Violett aber fehlt (1. Min.); demnach wird bei einer Plättchendicke

von 0,2 Tausendstel Millimeter eine rötliche Mischfarbe zu erwarten sein. [Di Farbenschema ist für **Interferenzstreifen** aller Art grundlegend.] Die w Übereinstimmung der Theorie mit der Beobachtung der auftretenden F speziell bei **Reflexion** (des auf dünne Plättchen **auffallenden** Lichtes — komplementären zeigen sich im **durchgehenden** Licht) tritt erst ein bei Rü auf folgenden Nebenumstand: Dafs nämlich z. B. an Newtons Farbenglas die mi Stelle, wo die Dicke des Lufthäutchens Null ist, nicht hell, sondern dunkel scheint, erklärte THOMAS YOUNG (1802) richtig, indem er hinwies auf die U **kehrung der Phase** der Wellen (§ 66) bei der Reflexion des Lichtes an **optisch dichteren** Medium. — Die durch Messungen an Newtons Farbeng mittelten Wellenlängen stimmen genau überein mit den aus allen übrigen ferenzerscheinungen sich ergebenden.

Dafs Seifenblasen fortwährend ihre Farbe wechseln, erklärt sich aus Abdunsten der Wasserschicht (und Sinken von Teilchen infolge der Schwere). — Ähnliche Erscheinungen zeigen **irisierende** und **opalisierende** Mineralien, b denen in feinen Rissen und Spalten Luft eingeschlossen ist; ferner Gläser, Oberfläche verwittert ist (z. B. Fenster an Ställen), oder künstlich chemisch ve ändert wurde (bei manchen Ziergläsern); Terpentinhäutchen auf Wasser u. s.

§ 128. Polarisiertes und unpolarisiertes Licht.

Auch mit der Feststellung der Wellenlängen (und Schwingungszahlen) der verschiedenen Arten sichtbarer und unsichtbarer Strahlen sind noch nicht alle Eigenschaften erschöpft, welche die Beschreibung eines Lichtstrahles vollständig machen. Namentlich ist durch alle bisher betrachteten, mannigfaltigen Erscheinungen, welche aufser Zweifel setzen, dafs den Lichterscheinungen Wellenvorgänge zu Grunde liegen, noch gar nichts darüber entschieden, ob diese Wellen **transversal** oder **longitudinal** seien (— diese Alternative zunächst wieder unter dem Bilde der **mechanischen**, speziell **elastischen** Wellen gedacht). Hierüber entscheiden folgende Erwägungen und Versuche:

Falls die Lichtwellen **longitudinal** wären, dürfte es keinerlei Unterschied machen, wenn der Strahl um seine eigene Längsrichtung um 90° gedreht wird oder wenn wir umgekehrt den Strahl z. B. an einer ihm unter schiefen Einfallswinkeln entgegengestellten Ebene reflektiert oder gebrochen werden lassen und diese Ebene um den Strahl als Achse drehen (vergl. unten Fig. 431). Der als longitudinaler Wellenzug gedachte Strahl wäre dann etwa zu versinnlichen durch eine cylindrische Röhre, zu der wir einen Bogen Papier zusammengerollt haben: diese Röhre zeigt keinerlei Änderungen, wenn wir sie um ihre Längsachse drehen. Streifen wir dagegen diese Röhre zu einem flachen Bande aus und drehen dieses um seine Längsachse, so weist es eine bestimmte „**Seitlichkeit**“ auf. Sind also die Lichtwellen **transversal**, so ist zu erwarten, dafs sich Erscheinungen werden beobachten lassen, bei welchen jene Drehung von 90° um die Längsrichtung der Strahlen durch verschiedenes Verhalten des Strahles sich kundgibt.

Das Licht der meisten Lichtquellen weist zwar keine „Seitlichkeit“ auf, nimmt aber eine solche an, nachdem es bestimmte Vorgänge der Reflexion, Brechung, Absorption u. s. w. durchgemacht hat. Man nennt es dann **polarisiertes Licht.** Die Körper, die, nachdem unpolarisiertes Licht auf sie gefallen, polarisiertes entsenden, heifsen allgemein

arisierer (Polarisatoren, Polariseure); die Körper, die zeigen, dafs in welcher „Polarisationsebene" (siehe unten) das Licht polarisiert heifsen **Analysierer** (Analysatoren, Analyseure).

Ein in Einrichtung und Handhabung besonders einfaches Beispiel eines solchen larisationsapparates" gibt die

Fig. 429. Fig. 430 a, b, c, d.

Turmalinzange (Fig. 429). Aus je einem Turmalinkristalle sind planparallele viereckige Plättchen (parallel der Hauptachse AX des Kristalles) geschnitten. Eine solche Turmalinplatte läfst grünlichbraunes Licht durch. Die Plättchen sind in Korkscheiben und diese in Drahtklammern befestigt. Stehen beide Kristallachsen $A_1 X_1$ und $A_2 X_2$ (Fig. 430) parallel (a) oder sind sie um 180° verdreht (c), so ist das Gesichtsfeld hell; sind dagegen die Achsen um 90° (b) oder 270° (d) gegeneinander verstellt, so ist das Gesichtsfeld (bei sehr guten Plättchen ganz, bei anderen annähernd) dunkel.

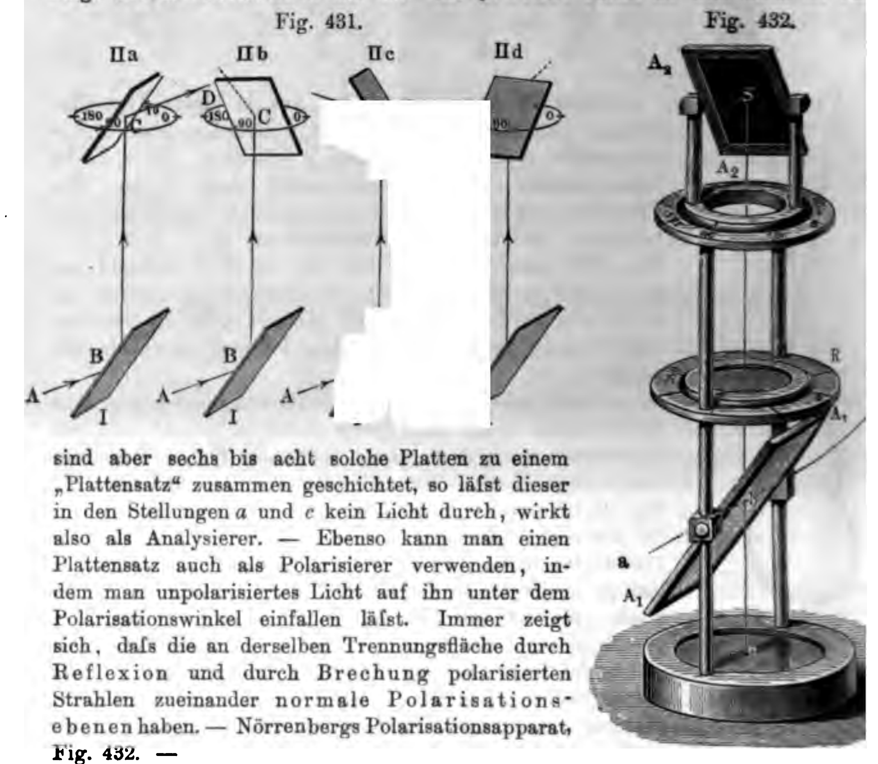
Hierbei müssen wir also zunächst dem Lichte zwischen den Plättchen I und II die oben als „Polarisation" definierte Eigenschaft zuschreiben. Denn indem die Platte II nur um den Lichtstrahl als Achse gedreht worden ist, und diese für ihn bei bestimmten Stellungen durchlässig ist, bei den um 90° verdrehten Stellungen nicht, so kann dies nur in einer bestimmten Seitlichkeit des Strahles seinen Grund haben, da sich ja an der Platte selbst aufser ihrer Stellung im Raume nichts geändert hat. Da ferner einem nicht durch I gegenen Lichtstrahl gegenüber die Platte II kein solches auswählendes Verhalten t, so schliefsen wir, dafs das Licht vor dem Eintritt in die der Platte II ganz hartige Platte I unpolarisiert gewesen sei. Es ist also hier I der Polarisierer, ler Analysierer. (Versinnlichung: Zwei Roste, deren Spalten einmal parallel, ial gekreuzt sind und durch die man gefaltete Papierbänder nach obigem hnis zu stecken sucht.)

Polarisation bei Reflexion und einfacher Brechung. Zwei che planparallele durchsichtige Glasplatten sind zuerst parallel ellt nach Fig. 431 (a. f. S.). — Auf I fällt ein Strahl gewöhnlichen polarisierten) Lichtes so, dafs der Einfallswinkel p = der ingung $tg p = n$ entspricht (wo $n = \frac{3}{2}$ der Brechungsquotient Luft in Glas ist). Um den reflektierten Strahl BC wird dann II Azimut", § 175) um 90°, 180°, 270°, 360° gedreht. Bei den Stellungen d c wird der Strahl BC ungehindert nach CD, bezw. CD' reflek-

tiert, und d sieht ein in der Richtung des erwarteten reflek tierten St les gegen II blickendes Auge ein dunkles Gesichtsfel Hier war also der Strahl BC polarisiert, I war der Polarisierer II der Analysierer. — Die bei a und c den beiden Spiegeln gemein same Einfallsebene heifst die **Polarisationsebene** des Strahles B(

Da mit der Reflexion in der Regel auch Brechung verbunden ist (an totale Reflexion hier nicht vorliegt, weil der Winkel p noch unter dem Gren winkel liegt), so würde man erwarten, dafs beim Durchblicken durch die Platte I längs CB das Gesichtsfeld hell sei. Bei je einer Platte ist dies auch der Fall

Fig. 431. Fig. 432.



sind aber sechs bis acht solche Platten zu einem „Plattensatz" zusammen geschichtet, so läfst dieser in den Stellungen a und c kein Licht durch, wirkt also als Analysierer. — Ebenso kann man einen Plattensatz auch als Polarisierer verwenden, indem man unpolarisiertes Licht auf ihn unter dem Polarisationswinkel einfallen läfst. Immer zeigt sich, dafs die an derselben Trennungsfläche durch Reflexion und durch Brechung polarisierten Strahlen zueinander normale Polarisationsebenen haben. — Nörrenbergs Polarisationsapparat, Fig. 432. —

Hier also gewinnen wir schon etwas tieferen Einblick in die Art, wie Spiegel I aus unpolarisiertem Licht polarisiertes macht: Das einfallende unpola sierte Licht empfängt nicht eigentlich erst die Seitlichkeit durch den Vorga der Reflexion (und Brechung), sondern es wird nur aus dem auffallenden nat lichen Licht, in welchem noch keine Seite ausgezeichnet war, beim Auffal solches Licht ausgesondert und blofs solches durchgelassen, das eine stimmte Lage zur Einfallsebene des Spiegels hat. (Ähnlich bei der Turmal platte; ferner beim Nicolschen Prisma, folgender Paragraph.)

Stellt man sich also noch anschaulicher vor, der Zustand des Polarisiertse eines Strahles bestehe darin, dafs die längs des Lichtstrahles angeordneten Äth teilchen **transversal**, d. h. normal zur Reihe der Ätherteilchen, und d sie alle in derselben Schwingungsebene sich bewegen (Fig. 433), und stel

wir uns den Schwingungszustand in einem unpolarisierten Strahle so vor, dafs die Ätherteilchen zwar ebenfalls normal zur Schwingungsrichtung, aber nicht in einer ausgezeichneten Schwingungsebene sich bewegen, so erklärt sich der Vorgang des Polarisierens und Analysierens bei der Reflexion durch folgende

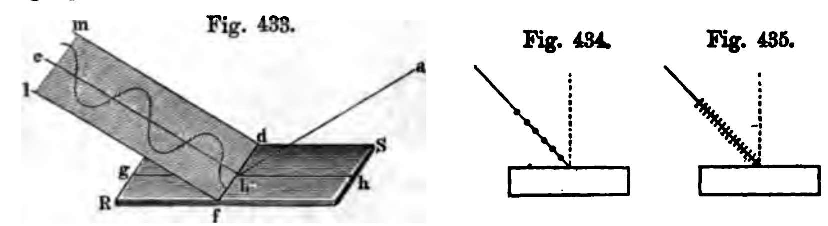


Fig. 433. Fig. 434. Fig. 435.

weitere Hypothese (von Fresnel): Ist die Schwingungsebene normal zur Polarisationsebene, d. i. der Einfallsebene, so haben die Teilchen des von B aus einfallenden polarisierten Lichtes beim Auftreffen auf die reflektierenden Spiegelebenen IIa und IIc nur längs dieser hin- und her zu gleiten, werden also in der Bewegung nicht gehindert (Fig. 434). Bei IIb und IId dagegen hätten die Teilchen in die reflektierenden Ebenen hineinzustofsen (Fig. 435), und es werden also diese Schwingungskomponenten durch den Reflexionsvorgang geschwächt, bezw. zerstört. (Die nähere mathematische Ausbildung dieser Theorie hat in der Tat verlangt, dafs die Zerstörung eine vollständige nur sei, wenn $tg\,p = n$ ist, wie es die Erfahrung auch zeigt.)

Geschichtliches. Obwohl wir heute gewohnt sind, alle Polarisationserscheinungen sogleich unter dem Gesichtspunkte der Hypothese von den transversalen Lichtwellen aufzufassen, hat doch schon Newton, wiewohl er nicht an die Wellenlehre des Lichtes glaubte, die Frage aufgeworfen, „*annon lumini sint latera*" (ob nicht dem Licht Seitlichkeit zukomme)". Huygens dagegen, der seine Wellenlehre des Lichts auf Grund des anschaulichen Vorbildes der Erscheinungen der Schallwellen ausgebildet hatte, dachte sich die Lichtwellen longitudinal, hätte also durch diese besondere Zutat zu seiner Hypothese in der Auffassung der wirklichen Tatsachen von Polarisation nur gehindert, nicht gefördert werden können. Das Auslöschen je eines oder zweier aus einem doppeltbrechenden Kristall tretenden Strahlen durch einen zweiten solchen Kristall bei bestimmten Stellungen (folgender Paragraph) blieb ihm also rätselhaft.

Malus (sprich: Malü) beobachtete 1810 ganz zufällig das von einem Dachfenster reflektierte Licht der untergehenden Sonne durch einen doppeltbrechenden Kalkspat und bemerkte hierbei die verschiedene Lichtintensität der beiden Bilder je nach der Stellung des Kristalls zum Strahl (— den Namen „Polarisation" wählte Malus auf Grund einer besonderen Ausgestaltung der Korpuskularhypothese). Namentlich auf diese Beobachtungen hin bildete nun Fresnel die von ihm schon früher durch wichtige Entdeckungen experimenteller und rechnerischer Art mächtig geförderte Wellenlehre dahin aus, dafs die Lichtwellen transversal seien. Von da an bildeten sich die Vorstellungen, auf welche mannigfaltige Arten eine Wellenbewegung transversal sein kann (z. B. nicht nur, indem alle Teilchen in derselben Ebene schwingen, sondern auch z. B. in Kreisen, Ellipsen, deren Ebenen normal zur Fortpflanzungsrichtung sind, Fig. 436, I — V), selbst erst noch weiter aus, und diese Vermannigfaltigung und Verfeinerung der mechanischen Vorstellungen bildete den Leitfaden bei der Entdeckung auch immer neuer Tatsachen optischen Inhaltes. Diese Vorstellungen haben sich auch als fähig erwiesen, aus der Sprache der

Elastizitätsthe e des Lichtes in die der elektromagnetischen Theorie übersetzt zu werden: in d er gewinnt namentlich die Tatsache der **Seitlichkeit** (Transvers ngezwungenes, direkt empirisches Vorbild darin, dafs z. B. sogleich

Fig. 436.



bei Örsteds Versuch (§ 147) die Pole der Nadel **normal** zur Stromrichtung angetrieben werden. Über die Verbindung solcher **Transversalität** magnetischer und elektrischer Wellen mit der **Periodizität** vergl. § 157, namentlich Fig. 577.

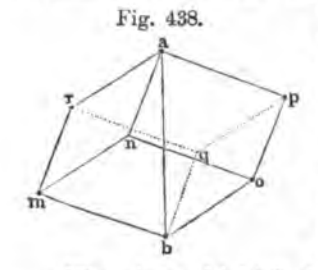
§ 129. rechung.

Vorversuch: Legt man ei tkristall mit einer der natürlichen Begrenzungsebenen auf ein bed t, so zeigt er die Schrift doppelt (Fig. 437); dreht man ihn um ei rebene normale Gerade, so kreist das



eine Bild je eines Buchstabens um das andere. Um in diesen Bewegungen eine Gesetzmäfsigkeit aufzufinden, hat man sich zuerst aus dem natürlichen Kristall, der meistens die Gestalt ungleichseitiger Parallelepipede zeigt, die **rhomboedrische** Grundform herausgehoben zu denken, der eine Hauptachse ab und drei zu ihr normale, einander unter je 60° schneidende Nebenachsen zukommen (Fig. 438). An den Enden der Hauptachse liegen die drei stumpfen Winkel von je 105° 5′ der kongruenten Rhomben. Jede zur **kristallographischen Hauptachse** parallele Gerade (also die **Richtung** der Geraden ab, nicht etwa nur diese Gerade selbst) heifst die **optische Hauptachse**, jede zu ab parallele Ebene ein **Hauptschnitt**.

Fig. 438.



Für einen Lichtstrahl, der entweder auf eine der natürlichen Kristallebenen des Kalkspates (oder irgend eines nicht im regulären Systeme kristallisierenden Stoffes) oder auf künstlich angeschliffene Ebenen fällt, gibt es solche Einfallsebenen und Einfallswinkel, wo der gebrochene Strahl die Richtung der „**optischen Achse**" annimmt: nur in diesem Falle tritt nicht **Doppelbrechung**, sondern einfache

echung ein. Bei allen anderen Einfallswinkeln und Einfallsebenen altet sich der Strahl nach dem Eintritt in einen **ordentlich** und einen **fserordentlich gebrochenen Strahl** (§ 104). Dabei zeigt der aufser-dentliche Strahl überhaupt nicht mehr einen konstanten Brechungs-iotienten, ja er tritt im allgemeinen sogar aus der Einfallsebene ıraus (er verbleibt in ihr nur dann, wenn die Einfallsebene ein Haupt-hnitt oder eine zur optischen Achse normale Ebene gewesen war).

Alle diese so sehr verwickelten Erscheinungen vermochte Huygens einheit-h zu beschreiben, indem er erkannte, dafs, wenn wir uns von einem Punkte Innern des Kristalls Licht ausgehend denken, dieses sich nicht, wie in homo-nen isotropen Medien, nur in Kugelwellen ausbreite, sondern in zwei Wellen-ichen, nämlich erstens einer kugeligen Wellenfläche, die dem ordentlichen ·ahl entspricht, und zweitens einer ellipsoidischen Wellenfläche, die dem [serordentlichen Strahl entspricht. Dieses Ellipsoid ist beim Kalkspat ein ndrehungsellipsoid mit kurzer Hauptachse. Ihm ist die kugelige Wellenfläche r ordentlichen Strahlen so eingeschrieben, dafs sich beide Flächen an den Enden r kurzen Achse berühren. — Denkt man sich n dieses Ellipsoid halbiert durch eine Ebene, : weder die Rotationsachse enthält, noch zu · normal ist (Fig. 439), und denkt man sich i Huygens Erklärung der Brechung (Fig. 264, 249) statt der Halbkugel im neuen Medium che Halbellipsoide konstruiert, so wird ersicht-h, dafs die alle diese Wellenflächen tangierende ıhüllende Ebene keine so einfache Lage mehr ben wird, wie die die Kugelflächen tangierende ıhüllende Ebene; insbesondere wird im all-meinen ein Heraustreten des auf dieser ein-llenden Ebene immer noch normalen Wellen-ahles aus der erweiterten Einfallsebene zu warten sein. Mit Huygens allseitiger mathe-.tischer Ableitung der möglichen Lagen so konstruierter gebrochener Strahlen gten sich seine ebenso sorgfältigen Messungen an den wirklichen Kristallen in ıönster Übereinstimmung. — Noch kompliziertere geometrische Aufgaben bieten : Kristalle, welche nicht, wie die des rhombischen und des hexagonalen Systems eine tische Hauptachse, sondern deren zwei haben (einachsige, zweiachsige Kristalle).

Fig. 439.



Polarisation bei Doppelbrechung. Untersucht man die iden bei Doppelbrechung austretenden Strahlen, so findet man sie ımer in zwei zueinander normalen Ebenen polarisiert.

Auch diesen Umstand erklärt ungezwungen die Theorie der ellipsoidischen ellenflächen und zwar nach Analogie von Fig. 247 a (S. 232), wo in einem elastischen ıbe von rechteckigem Querschnitte transversale Schwingungen verschiedene rtpflanzungsgeschwindigkeit haben, je nachdem die Schwingungsebene parallel r kurzen oder längeren Rechtecksseite ist. Denn der Stab zeigt gröfsere ɛgungselastizität, wenn er parallel der langen, als wenn er parallel der kurzen nte verbogen wird. — Stellen wir uns daher vor, dafs auch der Lichtäther inner-lb eines Kristalles nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizität habe

und zwar die kleinste nach der Richtung der Hauptachse des oben beschriebenen HUYGHENSschen Ellipsoides für Kalkspat), so wird ein ins Innere des Kristalls eingeleiteter Schwingungsvorgang sich in zwei zueinander normale Schwingungen spalten, die sich nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Geschwindigkeit als transversale Wellen durch den Kristall fortpflanzen. Dagegen wird eine solche Spaltung unterbleiben, wenn die Richtung des Strahles z. B. die der Rotationsachse des Ellipsoides ist.

Umgekehrt läfst sich die Doppelbrechung auch wieder zum Polarisieren und Analysieren verwenden; so namentlich in **Nicols Prisma** (Figg. 440, 441). An ein natürliches Kalkspatrhomboeder $AB'DC'$ (Fig. 440) sind statt der natürlichen Flächen AC' und $B'D$ (die mit den Kanten AB' und $C'D$ Winkel von 71° bilden) neue Ebenen AC und DB angeschliffen, die mit jenen Kanten nur Winkel von 68° bilden. Dieses Prisma ist dann längs einer Ebene HH' zersägt, und die beiden Stücke sind nach dem Polieren mittels Kanadabalsam wieder zusammengekittet. Ein Lichtstrahl ab, der in der Richtung von AB auffällt, wird in zwei polarisierte Strahlen zerlegt, von denen der ordentliche Strahl bc in der Balsamschichte totale Reflexion nach d erleidet und dort in der undurchsichtigen Fassung des Prismas absorbiert wird. Daher tritt längs $c'd'e$ nur der aufserordentliche Strahl aus. —

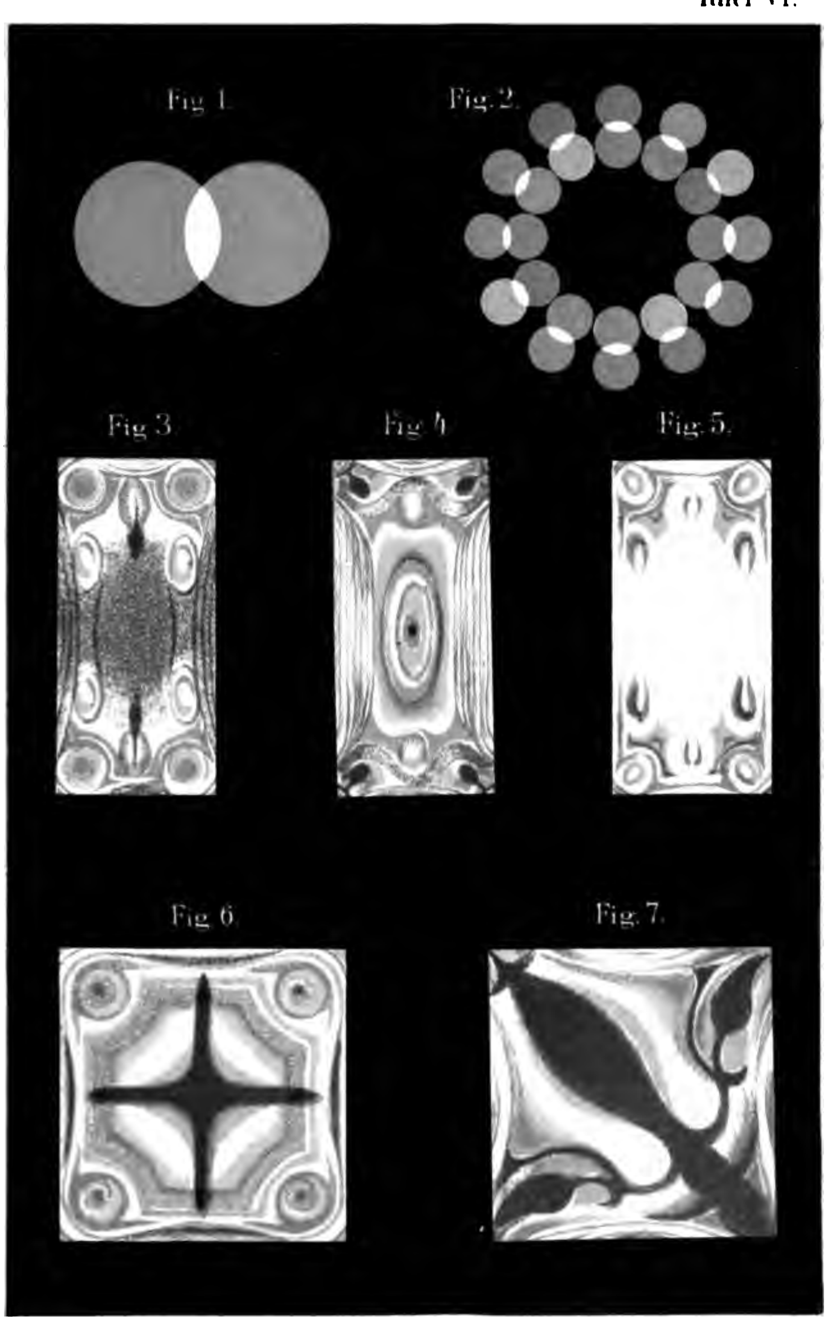


Fig. 440.

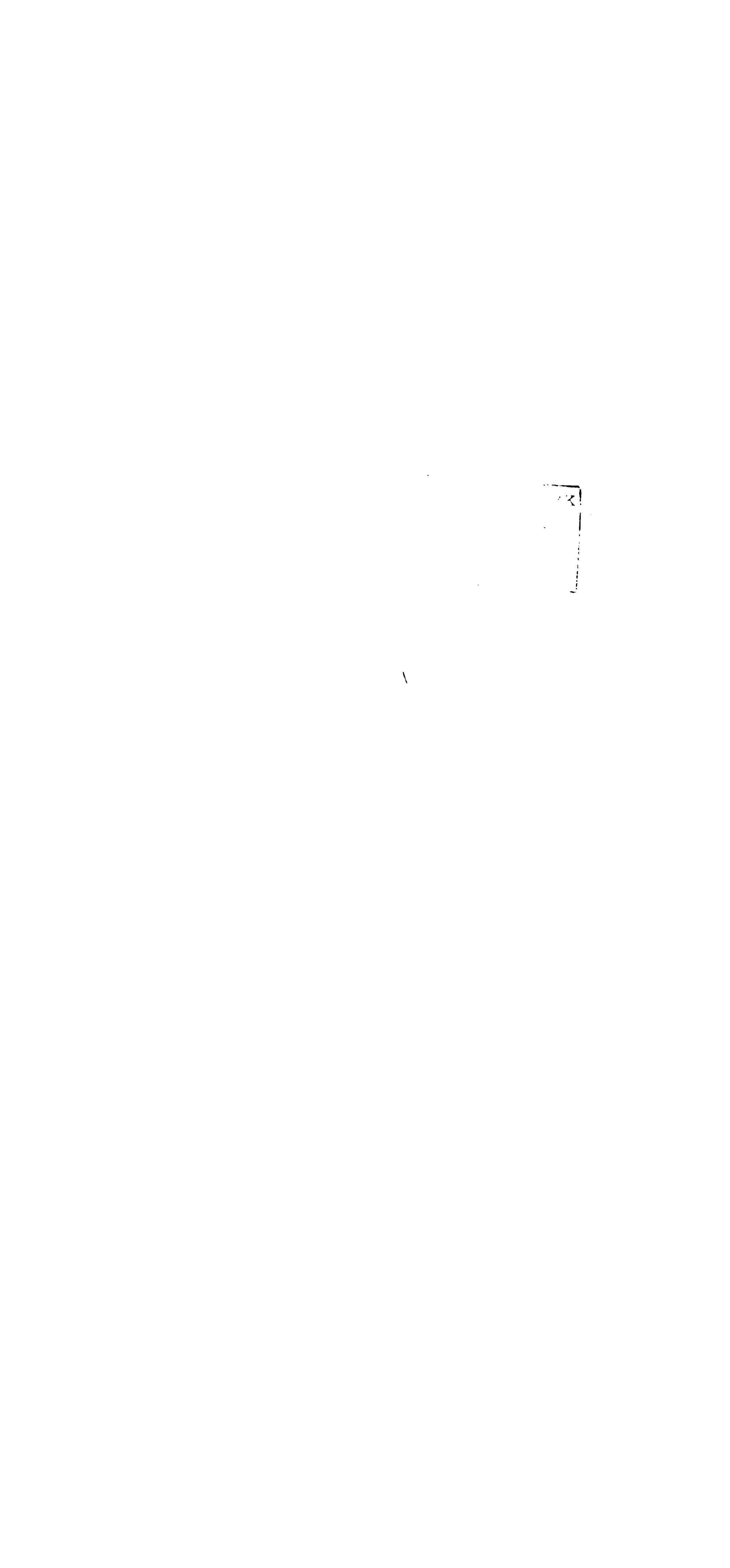
Fig. 141.

Werden Glimmerplättchen (teils nach den natürlichen Spaltungsflächen, teils keilförmig zugeschliffen), ferner Plättchen verschiedener Kristalle nach verschiedenen Lagen in Bezug auf die kristallographischen Achsen, auch rasch gekühlte Gläser, Glaswürfel, die mittels Schrauben an verschiedenen Stellen unter ungleiche mechanische Spannung versetzt sind u. s. f., zwischen einen Analysierer und Polarisierer gebracht, so zeigen sie überaus mannigfaltige Farbenerscheinungen (vergl. Tafel VI), die sich alle aus der Interferenz des polarisierten Lichtes mathematisch vollständig haben erklären lassen, worauf hier nicht eingegangen werden soll. —

In Quarzplatten findet eine **Drehung der Polarisationsebene** statt; d. h. wenn in eine entsprechend geschliffene planparallele Quarzplatte ein polarisierter Strahl eintritt, dessen Polarisationsebene die Vorderfläche der Platte längs einer Geraden AB schneidet, so zeigt der Strahl nach dem Austritt aus der Hinterfläche der Platte eine Polarisationsebene, die mit AB einen bestimmten Winkel bildet; dieser wird um so gröfser, je dicker die Platte ist. — Auch Zuckerlösungen (Rübensaft . . .) erteilen einem durch sie hindurchgehenden Lichtstrahl eine um so stärkere Drehung der Polarisationsebene, je dicker die durchsetzte Flüssigkeitsschicht und je stärker die Konzentration der Zuckerlösung ist. Daher kann diese Konzentration durch das **Saccharimeter** bestimmt werden, dessen wesentliche Bestandteile ein Polarisierer und ein Analysierer an den Enden einer mit der Zuckerlösung zu füllenden Röhre sind.



Farbenerscheinungen bei der Interferenz polarisierten Lichtes (*chromatische Polarisation*) - Figg. 1 und 2: Polarisiertes Licht wird nach dem Durchgang durch ein Gypsblättchen analysiert durch ein doppeltbrechendes Prisma - Figg. 3-7: Doppelbrechung an Gläsern bei mechanischer Spannung.



Dritter Teil:

Elektrische und magnetische Erscheinungen.

leitung: Geschichtliches; Grunderscheinungen und vorläufige Hilfsvorstellungen.

10. Elektrische und magnetische Körper. — Gut- und Schlechtleiter. Positive und negative Ladungen.

Die Wörter **elektrisch, elektrische Ladung, elektrischer Strom** u. s. f. durch die nachgerade zahllos gewordenen elektrotechnischen Anwendungen rofsen und kleinen (elektrische Telegraphie und Telephonie, elektrische Eisen-, elektrisches Licht, vergl. V. Abschn. § 160 ff.) auch dem Nichtphysiker völlig ıfig geworden. — Im Vergleiche zu den künstlich eingeleiteten elektrischen ängen sind die spontan in der Natur sich abspielenden (Gewitter, Nordlicht, lektrischen Schläge des Zitteraales . . .) in verschwindender Minderzahl; erst ls feiner Mefsapparate (Galvanometer) zeigt sich z. B. auch jede Muskelkeit von elektrischen Strömen begleitet.

Es pflegt ferner allgemein bekannt zu sein, dafs an zahlreichen elektrischen raten, z. B. den elektrischen Telegraphen, den elektrischen Klingeln, den ımomaschinen u. s. f., einen ebenso wesentlichen Bestandteil, wie die elekıen Drähte, die **Magnete** bilden. Auch für die magnetischen Erscheinungen die natürlichen Magnete (Magneteisensteine) und ihre Eigenschaften im leich zu den künstlichen, speziell den **Elektromagneten,** belanglos geworden.

Geben wir uns nun Rechenschaft, um welcher sinnlich wahrnehmbaren Ernungen willen wir einen bestimmten Eisen- oder Stahlstab magnetisch, einen ren unmagnetisch, und ebenso eine Siegellackstange zunächst unelektrisch, dem Reiben mit Wolle elektrisch, nach einiger Zeit wieder unelektrisch en, so haben wir vor allem festzuhalten, dafs eine magnetisierte Stricknadel ıt anders als eine unmagnetische, eine elektrische Siegellackstange nicht rs als eine unelektrische aussieht, oder einen anderen Gewichtsdruck auf die e ausübt u. dergl. m.; so wenig wie ein Eisenstab von 100° C oder 50° C in diesen Beziehungen von einem von 0° unterscheidet. Während wir aber rschiede im Wärmegrade eines Körpers unmittelbar durch die verschiedene neempfindung auffassen, welche die Eisenstange in uns erregt, besitzen wir

keinen dem Wärmesinne (Gehörs-, Gesichtssinn) analogen „Elektrizitäts-, bezw. Magnetismussinn". Wir schliefsen vielmehr auf elektrische und magnetische Zustände zunächst nur aus den sogenannten Wirkungen auf andere Körper. Speziell sind wir in den Fällen, wo genaue quantitative Erfahrungen nötig sind (ganz wie bei den Messungen des Wärmegrades oder bei extremen Wärmegraden), auch bei den elektrischen und magnetischen Erscheinungen auf die Anwendung von Instrumenten angewiesen, die auf indirekte Weise über den elektrischen, bezw. magnetischen Zustand des untersuchten Körpers Aufschlufs geben; und zwar sind den Thermoskopen und Thermometern hier die Elektroskope, Elektrometer und Galvanometer, bezw. die Magnetnadeln als Magnetoskope und die Magnetometer analog.

Als solche „Wirkungen" elektrischer und magnetischer Körper treten sämtliche Klassen physikalischer und chemischer Erscheinungen auf. Zu vorläufiger Übersicht seien als Beispiele zu den einzelnen Erscheinungsklassen aufgezählt:

1. **Mechanisch:** Die Anziehung und Abstofsung leichter Körper durch elektrische Körper, die Anziehung von Eisenfeilspänen, Nickelmünzen . . . durch Magnete.

2. **Wärme:** Die elektrischen Glüh- und Bogenlampen, zündende Blitzschläge. Teilweise als Begleiterscheinungen dieser Wärmewirkungen:

3. **Licht:** Vom Fünkchen bis zum Blitz; Geifslersche Röhren.

4. **Schall:** Vom Knistern der Funken bis zum Donner.

5. **Physiologisch:** Die Empfindung und die Muskelzuckung beim elektrischen Schlag einer Leydener Flasche. Elektrotherapie.

6. **Chemisch:** Die Bildung von Ozon in der Nähe einer im Gang befindlichen Elektrisiermaschine; Elektrolyse, Galvanoplastik.

7. **Magnetisch:** Die Bewegung von Magneten und stromdurchflossenen Spulen durch Ströme, die Erregung von Magneten durch Ströme (Elektromagnete). — Schliefslich selbst wieder

8. **Elektrisch:** Erzeugung von Induktionsströmen durch benachbarte bewegte Stromleiter.

Ebenso grofs wie die Mannigfaltigkeit a) dieser Wirkungen ist auch die b) der Ursachen („Quellen"), aus welchen sich elektrische und magnetische Erscheinungen ergeben. Wir kennen **mechanische** Erregung elektrischer Ladungen durch Reibung und solche ohne wesentliche Mitbeteiligung der Reibung beim Betriebe der Influenzmaschinen. Durch passende **Erwärmung** oder **Abkühlung** der Lötstellen an einem Thermoelemente (§ 153) entstehen Thermoströme. **Chemische** Vorgänge bilden die Stromquelle bei den galvanischen Elementen und Akkumulatoren. Während der **physiologischen** Vorgänge in den Muskeln und Nerven entstehen elektrische Ströme. Durch Bewegung von Drahtspulen im Kraftfelde der **Magnete** entstehen die Ströme der Gleich- und Wechselstrommaschinen u. s. f.

Zu dieser Mannigfaltigkeit a) der durch die elektrischen Zustände bewirkten, b) der sie verursachenden Vorgänge kommt c) die Mannigfaltigkeit der Körper, welche elektrisch und magnetisch werden können. Wiewohl nämlich die längste Zeit hindurch beide Zustände nur wie Curiosa an geriebenem Bernstein und an einigen Eisenerzen bekannt waren, wissen wir heute, dafs alle Stoffe

elektrisierbar und (bei Einwirkung hinreichend kräftiger magnetischer Apparate auf para- und diamagnetische Stoffe, § 145) auch **alle Stoffe magnetisierbar** sind, so dafs Elektrisierbarkeit und Magnetisierbarkeit geradezu unter den „allgemeinen Eigenschaften der Körper" aufgezählt werden könnten. —

Die Mannigfaltigkeit und Gesetzmäfsigkeit der elektrischen und magnetischen Erscheinungen haben alsbald auch das Bedürfnis nach theoretischen Ansichten über „das Wesen der Elektrizität und des Magnetismus" rege gemacht. Es gibt aber bis heute keine einzige Theorie, welche ein alle einzelnen Erscheinungen umfassendes und doch zugleich ein bis in alle Einzelheiten anschauliches Bild der den elektrischen und magnetischen Erscheinungen zu Grunde liegenden Vorgänge zu geben vermöchte, wie ein solches Bild für die Wärmeerscheinungen die kinetische Theorie (§ 83), für die Lichterscheinungen die Wellentheorie (§ 123 ff.) ist. Zwar erweist sich heute noch die Hilfsvorstellung zweier elektrischer Fluida (**dualistische Theorie**) oder eines Fluidums (**unitarische Theorie**) als nützlich: aber namentlich seitdem die Stofftheorie der Wärme durch die mechanische Wärmetheorie überwunden ist, sind auch jene elektrischen Fluida nur als bequeme wissenschaftliche Fiktionen anzusehen (log. Anh., Nr. 36). Anh. 36.

Gleichwohl gibt es einen umfassenden theoretischen Gesichtspunkt, unter den bisher sämtliche elektrischen und magnetischen Erscheinungen sich gefügt haben: den der **Energetik**. Es entspricht ganz dem durch das Gesetz der Verwandlung und Erhaltung der Energieen hergestellten Zusammenhange zwischen den verschiedensten physikalischen und chemischen Erscheinungsgebieten, auch die ganze Mannigfaltigkeit der Wirkungen wie der Ursachen elektrischer Zustände als Veränderungen des Energiezustandes der Körper aufzufassen; z. B. das Elektrisieren durch Reibung als Erteilung potentieller Energie (durch Umlagerungen in den Molekeln des geriebenen Körpers oder dem zwischen ihnen befindlichen Äther), dagegen die an einem solchen Körper auftretenden Fünkchen als Umsatz jener potentiellen in aktuelle Energie (in Form von Wärme und Licht).

Unbeschadet der grofsartigen Einheitlichkeit, welche in die Elektrizitätslehre durch die Energetik gebracht worden ist, müssen wir uns aber doch gestehen, dafs die elektrischen Erscheinungen nicht etwa aus den energetischen Begriffen und Sätzen restlos ableitbar sind (log. Anh., Nr. 37). So ist es z. B. bis zum heutigen Anh. 37. Tage nicht erklärt, warum eine Glasstange kräftigere elektrische Wirkungen zeigt, wenn sie mit einem Seidenlappen, als wenn sie mit einem nicht amalgamierten Lederlappen gerieben wird; desgleichen warum Eisen und Nickel, aber bei weitem nicht in demselben Mafse die übrigen Stoffe magnetisierbar sind. Es weist uns das darauf hin, dafs die besondere Art der Elektrisierbarkeit und Magnetisierbarkeit eines Körpers aufs innigste mit seiner molekularen Struktur (und wahrscheinlich der von dieser abhängigen Lagerung des intramolekularen Äthers) zusammenhängt; aber eben diese Struktur bietet schon in den viel einfacheren Erscheinungskreisen der Molekularmechanik und um so mehr in der Dispersion, Emission, Absorption des Lichtes u. s. f. noch viel Unerforschtes. Immerhin läfst sich von derjenigen besonderen Form der Energie, welche wir als elektrische bezeichnen, im Vergleich zur Energie der Wärme sagen, dafs sie labiler (wandlungsfähiger, gleichsam höher organisiert, LA 75) sein müsse. Denn wie zwar schon mechanische Energie LA 75. sich ganz in thermische umwandeln läfst, die umgekehrte Wandlung einer bestimmten Wärmemenge aber nur möglich ist, wenn ein Teil dieser Menge vom höheren auf einen niedrigeren Grad sinkt (§ 84), so läfst sich zwar auch elektrische Energie

unmittelbar oder nach Durchgang durch mancherlei Zwischenformen (Licht, Schall, Chemismus . . .) schließlich ganz in Wärme verwandeln — aber bei weitem nicht so vollständig Wärme in Elektrizität. —

Blicken wir von der **gegenwärtigen** Entwickelungsstufe unserer theoretischen Erkenntnis der elektrischen und magnetischen Erscheinungen und der eingangs erwähnten Rolle der Elektrotechnik im modernen Leben zurück auf die Anfänge dieser Entwickelung, so ist denkwürdig einerseits der überaus enge Kreis von Erscheinungen, welche bis vor kaum einem Jahrhundert überhaupt bemerkt worden waren, anderseits die Schwierigkeit, die wirklich beobachteten Tatsachen von mehr oder minder zufälligen hypothetischen Vorstellungen, die nur zu oft mit der reinen Beschreibung der Erscheinungen vermengt wurden, streng gesondert zu erhalten.

Das Folgende gibt zunächst eine wiederholende Übersicht der in der älteren Elektrizitätslehre, teilweise bloß aus historischen Gründen, für grundlegend gehaltenen Erscheinungen und Hülfsvorstellungen; von ihnen im vorliegenden Paragraph noch so viel, als namentlich für den Gebrauch des **Elektroskops** ausreichend ist. Von § 135 an werden dann zum Teil dieselben Erscheinungen im Sinne der neueren Elektrizitätslehre, namentlich nach ihrer quantitativen Seite hin, exakter dargestellt.

Geschichtliches. Um die Zeit des THALES VON MILET (600 v. Chr.) waren die **Anziehungserscheinungen** des geriebenen **Bernsteins** (*Versuch* 1), sowie die des **Magneteisensteins** bekannt. — Einige Kenntnisse über Magnete besaßen die Chinesen schon lange vor Anfang unserer Zeitrechnung und verwendeten schwimmende Magnete zur Orientierung; von europäischen Schiffern wurde der Kompaß um 1200 n. Chr. angewendet. (*Versuch* 2: Eine Magnetnadel, auf einem Uhrglase liegend, das auf Wasser oder Vaselinöl schwimmt.)

Erst GILBERT (*De magnete* 1600) beobachtete die vom Bernstein (ἤλεκτρον) her bekannten Erscheinungen der Anziehung auch an einigen **anderen Stoffen** (an Glas, Schwefel, Harzen, Edelsteinen . . .); von ihm rühren die Namen „**elektrische** Kraft“ (Bernsteinkraft), „elektrische Körper“ u. dergl. her.

OTTO v. GUERICKE (1663) bemerkte, daß der leicht bewegliche Körper nach Berührung mit dem elektrischen **abgestoßen** werde (*Versuch* 3 an einem **elektrischen Pendel**). Überdies scheint GUERICKE schon bemerkt zu haben, daß dann der berührte und abgestoßene Körper einen dritten anzuziehen und von sich abzustoßen vermag, also ebenfalls elektrisch geworden ist (*Versuch* 4 mit einem zweiten elektrischen Pendel). Man nennt diese Erscheinung bis heute **Elektrisierung durch Mitteilung**, wiewohl die Vorstellung einer Mitteilung (etwa ähnlich der Wärmeleitung) durch **Zurückführung auf „Elektrisierung durch Verteilung“** (§ 132) entbehrlich geworden ist. — GUERICKE war auch der erste, der stärkere elektrische Wirkungen erzielte mittels einer **Elektrisiermaschine**, nämlich einer durch eine Kurbel gedrehten Schwefelkugel, die mit der Hand gerieben wurde. Auch die noch überall verbreitete **Wintersche Reibungselektrisiermaschine** unterscheidet sich von jenen älteren Maschinen wesentlich nur durch Anbringung des **Reiber- und Reibzeugkonduktors**, sowie durch die Anwendung der **Saugwirkung von Spitzen** (§ 133); gegenwärtig hat sie aber kaum mehr ein anderes als historisches Interesse, da sie durch die viel handsameren **Influenzmaschinen** (§ 134) mit Recht verdrängt wird.

GRAY (1729) unterschied **Leiter** (Gutleiter, Konduktoren: **Metalle**, feuchte Schnüre, der menschliche Leib . . .), **Halbleiter** (trockene Schnüre, Holz . . .) und **Nichtleiter** (Schlechtleiter, Isolatoren, Dielektrika: die meisten Glassorten, Harz, Fette, Schwefel, **Seide**; Glimmer, Guttapercha, Hartgummi oder Ebonit; Öle [Paraffin-, Vaselinöl]; neuestens sind die Isolationsmittel Fiber, Stabilit . . . für den Bau elektrischer Maschinen wichtig geworden). — *Versuch* 5: Ein Doppelpendelelektroskop ist durch eine mehrere Meter lange Schnur (oder mittels der in Fig. 472, S. 438 dargestellten Holzstäbe) mit einer auf isolierendem Glasfuſs stehenden Sammelkugel verbunden. Je nachdem die Schnur trocken oder feucht oder mit Metallfäden durchzogen ist, zeigt sich nach Elektrisierung der Kugel das Elektroskop teils gar nicht, teils nach längerer Zeit, teils sofort elektrisch. Umgekehrt: Ein geladenes Elektroskop wird entladen durch Berührung mit Gutleitern, nicht durch Berührung mit Schlechtleitern.

Schon GRAY gelang es, durch Metalldrähte und Hanffäden Körper bis auf 200 m Distanz zu elektrisieren (eine Art Vorversuch zur elektrischen Telegraphie). Auch erfand GRAY (1732) den Isolierschemel, auf welchem ein Mensch elektrisch geladen werden konnte; ferner entdeckte er, daſs auch ein isoliert gehaltener Metallkörper durch Reiben oder durch Mitteilung elektrisch werden und bleiben kann. — Isoliertische, Entlader u. dergl.

Vergl. schärfere Begriffsbestimmungen für „Gut- und Schlechtleiter“ durch die Messung des „elektrischen Leitungswiderstandes“, § 149 ff.; die Unterscheidung von Leitern erster und zweiter Ordnung, § 153.

DUFAY (1733) bemerkte die Verschiedenheit im Verhalten geriebener Glas- und Harzstäbe, für die er zuerst die Bezeichnung „Glas- und Harzelektrizität“ und für die später FRANKLIN (1747) die Namen **positive** und **negative Elektrizität** einführte. (*Versuch* 6: Ein Pendel wird nach der Elektrisierung mittels eines geriebenen Glasstabes von diesem abgestoſsen, von einem geriebenen Harzstabe angezogen; ähnlich nach Elektrisierung durch einen Harzstab. Unmittelbarer zeigt das gegensätzliche Verhalten *Versuch* 7, indem von zwei geriebenen Glas- und Harzstäben $A_1 A_2$ $B_1 B_2$ je einer leicht drehbar aufgehängt, der andere ihm mit der Hand genähert wird.)

Durch die bis heute in Gebrauch gebliebenen Namen „**positiv**“, „**negativ elektrisch**“ soll zunächst nur folgenden Tatsachen Ausdruck gegeben werden: 1. Das beschriebene gegensätzliche Verhalten beim Anziehen und Abstoſsen. 2. Eine Glasstange vermag ein Doppelpendel zu ebenso groſser Divergenz zu bringen wie eine entsprechend genäherte Harzstange, und die beiden hierbei eingetretenen Zustände des Doppelpendels weisen zunächst keine direkt wahrnehmbare Verschiedenheit auf. Es wäre also ganz wohl denkbar, daſs beide Stäbe, gleichzeitig dem Doppelpendel genähert, einander in der Wirkung verstärken; tatsächlich aber heben sich diese Wirkungen gegenseitig auf; und es verhalten sich daher die dem Pendel durch beide Stäbe erteilten Zustände bei gleicher Divergenz

wie zwei Gröfsen $+a$ und $-a$, die dem absoluten Werte nach gleich, den Vorzeichen nach entgegengesetzt sind.

Diese Tatsache kleidete Franklin ein in das Bild seiner unitarischen Theorie (1755), Symmer hingegen in das der dualistischen Theorie (1759). Beide Theorieen haben gemeinsam, dafs sie den elektrischen Erscheinungen Fluida (Imponderabilien) unterlegen. Ihr Unterschied liegt darin, dafs sich die dualistische Theorie in einem als unelektrisch sich darstellenden Körper die beiden Fluida in gleicher (und zwar um der ins Unbegrenzte zu wiederholenden Elektrisierbarkeit willen in unendlicher) Menge gleichsam vorrätig denkt; positiv geladen erscheint ein Körper, wenn er einen Überschufs des positiven, negativ, wenn er einen Überschufs des negativen Fluidums besitzt. Die unitarische Theorie kommt dagegen gleichsam durch Verlegung des Nullpunktes mit einem Fluidum aus, indem bei einer gewissen Menge des Fluidums der Körper sich unelektrisch zeigt, bei einem Überschufs des Fluidums positiv, bei einem Defizit negativ. — Bei beiden Theorieen war es physikalisch ganz willkürlich, den elektrischen Zustand des Glases durch die Bezeichnung positiv gleichsam auszuzeichnen vor dem des Harzes. Lange Zeit schienen beiderlei Ladungen überhaupt keinen qualitativen Unterschied aufzuweisen; ein solcher schien dann erst in dem Unterschiede der Lichtenbergschen Figuren (*Versuch* 8) beim Bestäuben einer von einem „positiven“ und einer von einem „negativen“ Funken getroffenen Harzscheibe entdeckt. Doch erklärt sich das strahlige Aussehen der positiven, das manchmal wolkige der negativen Figur selbst wieder daraus, dafs die durch

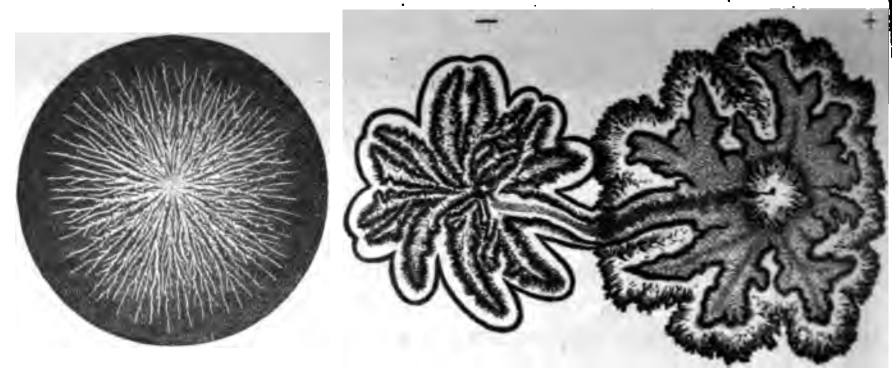


Fig. 442. Positive Lichtenbergsche Figur. Fig. 443. Negative und positive Lichtenbergsche Figur.

Reibung am Staubbeutel selbst geladenen Pulver (Bärlappsamen, Mennige, Schwefel . . .) gleichnamig, bezw. ungleichnamig sind mit der Ladung der Platte. — Erst die neuesten Erfahrungen z. B. über die mechanische Wirkungsfähigkeit der Kathodenstrahlen haben es wahrscheinlich gemacht, dafs vielmehr den sogenannten „negativen“ Ladungen ein sachlicher Vorrang vor den sogenannten positiven ähnlich zukomme wie der verdichteten Luft gegenüber einem Vacuum (§ 44), der Wärme gegenüber der Kälte (§ 72), dem Sauerstoff gegenüber dem Phlogiston (§ 214). Unabhängig von diesen physikalischen Einsichten (und auch von der dualistischen oder unitarischen Hypothese) haben sich aber die Bezeichnungen **positive** und **negative** Ladung bis heute auch als die mathematisch handlichsten erhalten. (Dagegen soll das Wort „Elektrizität“ möglichst vermieden werden, namentlich wo der Begriff der „Ladungsmenge“, § 135, eine feste Mafsgröfse an Stelle der fiktiven Fluida setzt; desgleichen „Magnetismus“.)

§ 131. Elektroskope und Elektrometer.

Vie für die Untersuchung aller Wärmeerscheinungen Thermoskope und
nometer grundlegend sind, so für die der elektrischen Erscheinungen
oskope und **Elektrometer**. Noch OHM (1827) hat diejenige Gröfse an elek-
n Körpern, welche unmittelbar durch das Elektroskop angegeben wird, als
·oskopischen Zustand dieses Körpers bezeichnet; wir werden vorläufig
e Gröfse als **Ladungsgrad** bezeichnen, insofern schon das einfachste aller
oskope, ein **elektrisches Pendel**, den Gedanken nahe legt, dafs es, je nach-
s mehr oder weniger aus der Lotlage (also der Schwere entgegen) nach
rührung mit dem elektrischen Körper abgelenkt bleibt, hierdurch einen
en oder niedrigeren **Grad** seines eigenen elektrischen Zustandes
ittelbar auch einen solchen des mit ihm verbundenen elektrischen Körpers
; (bei guten Leitern ohne Einschränkung, bei schlechten zunächst nur für
rührte Stelle, analog dem Thermometer bei Berührung mit guten und
ten Wärmeleitern). — In § 136 wird sich dann die weitgehende — wenn
icht durchgängige — Analogie folgender Begriffe und Termini ergeben:

troskopischer Zustand = Ladungsgrad = **elektrisches Potential;**
rmoskopischer Zustand = Wärmegrad = **Temperatur.** —

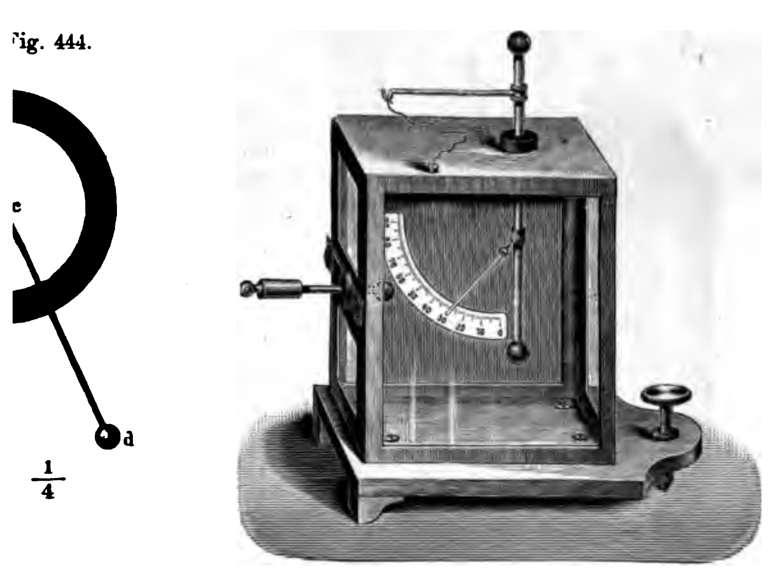


Fig. 445. Kolbes Elektrometer.

m folgenden sollen nur einige der gebräuchlichsten Elektroskope und
rometer beschrieben und ihre Verwendungsweisen geschildert werden; die
re Theorie aller hierbei ins Spiel kommenden Vorgänge umfafst selbst schon
beträchtlichen Teil der später zu entwickelnden Gesetze elektrischer Er-
ungen (wie die Theorie des Thermometers zahlreiche Gesetze der Wärme-
inungen, vergl. § 71). — Dabei stellen a) und b) zwei voneinander im all-
ien unabhängige Einteilungsgründe dar:

a) Elektroskope (bezw. Elektrometer): Mit nur einem beweglichen Körper und zwar el. Pendel (so in Henleys Elektroskop zur Elektrisiermaschine, Fig. 444 a. v. S.; Gold- oder Aluminiumblättchen in Kolben

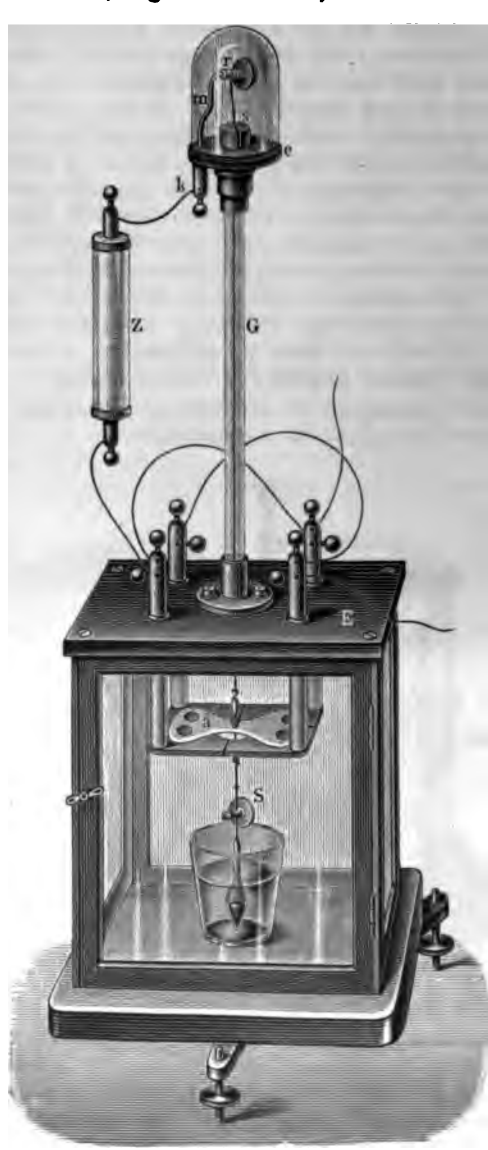


Fig. 446. Thomsons Quadrantenelektrometer nach Victor v. Lang. — a Aluminium-„Biskuit", drehbar über vier gegeneinander isolierten Messingquadranten, die mit den zu messenden elektrischen Körpern verbunden werden. — *S* Hohlspiegelchen. — *Z* Zambonische Säule.



Fig. 447. Brauns Elektrometer.

Elektrometer, Fig. 445 (a. v. S.); el. Fähnchen); Fechners Elektroskop in Verbindung mit Zambonis Säule (§ 155); in wagerechter Ebene drehbar (el. Nadel; Coulombs Drehwage, Thomsons Quadrantenelektrometer, Fig. 446; in lotrechter Ebene als Hebel drehbar (Brauns Elektrometer, Fig. 447, Harrys Wageelektrometer). Mit zwei beweglichen einander abstofsenden Körpern (das Doppelpendel-Elektroskop nach Bennet, Beetz u. a.; Exners transportables Elektrometer, Fig. 448, namentlich für die Beobachtung des elektrischen Zustandes der Atmosphäre, § 200).

b) Elektroskope (bezw. Elektrometer) ohne leitende Schutzhülle oder mit solcher: so ist das Aluminiumblättchen im Kolbeschen Elektrometer in ein Kästchen aus Blech mit zwei parallelen Wänden

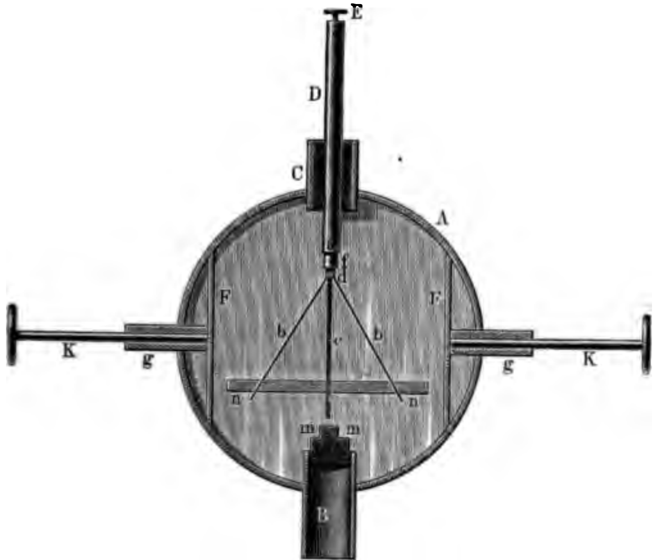


Fig. 448. Exners transportables Elektrometer (namentlich für Luftelektrizität).

aus möglichst gut leitendem Glas (für Projektion) eingeschlossen und gegen diese Leiter durch einen Ebonitpfropf isoliert.

Für die folgenden Versuche 1—4 sei das verbreitete Gold- (oder Aluminium-) blattelektroskop vorausgesetzt, dessen Knopf oder Platte (Fig. 450 a. f. S.) der „Sammler" heiße.

Verwendungsweisen: 1. Der auf seinen Ladungsgrad zu prüfende Körper K wird mit dem Sammler des Elektroskops in Berührung gebracht. Durch „Mitteilung" ladet sich dann der Sammler und durch Leitung laden sich die Blättchen gleichnamig mit K. — 2. Wird K dem Sammler des Elektroskops nur genähert, so sind die Blättchen (infolge der Elektrisierung durch „Verteilung") mit K gleichnamig elektrisch, solange K in der Nähe ist. — 3. Wird der Sammler, während (wie bei 2) K genähert ist, mit dem Finger ableitend berührt, hierauf der Finger und zuletzt K entfernt, so bleiben die Blättchen ungleichnamig gegen K geladen. — 4. In der Nähe des Sammlers des Elektroskops wird ein geladener Körper bekannten Zeichens (z. B. eine Harzstange in Stativ) fest aufgestellt, so daſs die Blättchen (wie bei 2) eine bestimmte Divergenz aufweisen. Macht dann der zu untersuchende Körper bei Annäherung die Divergenz der Blättchen gröſser, bezw. kleiner, so ist er gleichnamig, bezw. ungleichnamig mit dem fest aufgestellten Körper geladen.

Bei den Verwendungsweisen 2, 3, 4 ruft derselbe Körper *K* verschiedene Divergenz der Blättchen hervor, je nach seinem **Abstande** vom Sammler; bei Verwendungsweise 1 gibt er nur einen **Teil** seiner Ladung an das Elektroskop ab (bei 2, 3, 4 gar nichts).

Um stark geladene Körper zu untersuchen, müssen diese entweder in so grofsem Abstande belassen werden, dafs die Blättchen nicht allzu sehr divergieren oder gar abreifsen; oder der Körper wird mit einem an hinreichend langem isolierenden Stiele sitzenden metallischen **Probekügelchen (Probescheibchen** von $^1/_2$ bis 1 cm Durchmesser) berührt, welches sich hierbei durch Mitteilung ladet, und dieser Probekörper *K* nach 1 bis 4 untersucht.

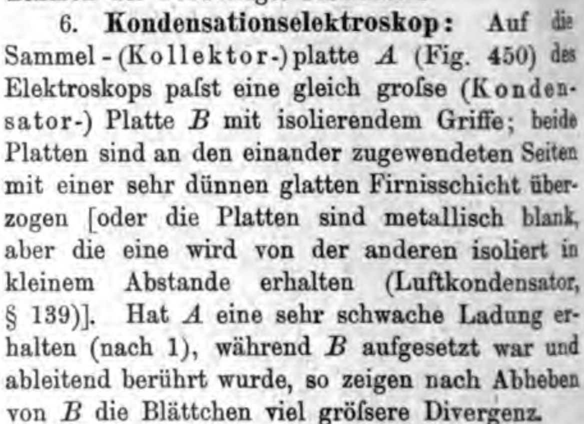
Fig. 449.



5. **Becherelektroskop:** Steht auf der Platte eines Elektroskops ein metallener Hohlkörper mit Öffnung [Fig. 449, z. B. eine offene leere Kakaobüchse, Faradays Eiseimer (1843), § 132] und wird eine geladene Probekugel an verschiedene Stellen seines Innern gebracht, so zeigen die Blättchen bestimmte Divergenz **unabhängig von der Lage der Kugel.** — War dabei Berührung der Becherwände mit der Kugel erfolgt, so zeigt sich die Kugel nach Herausnahme ganz unelektrisch, hat also beim Berühren ihre **ganze** Ladung an das Elektroskop abgegeben, weshalb die Blättchen auch jetzt ihre Divergenz behalten; war keine Berührung erfolgt, so besitzt die Probekugel noch ihre ganze Ladung, die Blättchen fallen nach dem Herausnehmen der Probekugel zusammen.

Fig. 450.





6. **Kondensationselektroskop:** Auf die Sammel-(Kollektor-)platte *A* (Fig. 450) des Elektroskops pafst eine gleich grofse (Kondensator-) Platte *B* mit isolierendem Griffe; beide Platten sind an den einander zugewendeten Seiten mit einer sehr dünnen glatten Firnisschicht überzogen [oder die Platten sind metallisch blank, aber die eine wird von der anderen isoliert in kleinem Abstande erhalten (Luftkondensator, § 139)]. Hat *A* eine sehr schwache Ladung erhalten (nach 1), während *B* aufgesetzt war und ableitend berührt wurde, so zeigen nach Abheben von *B* die Blättchen viel gröfsere Divergenz.

Zu einem **Elektrometer** wird das Elektroskop durch Verbindung mit einer **Skala**, ähnlich wie ein Thermoskop zu einem Thermometer. Während aber für die Wärmegrade infolge der Konstanz von Schmelz- und Siedetemperatur je eines bestimmten Stoffes, z. B. des Wassers, sich leicht zwei Fundamentalpunkte und durch die Unterteilung des Fundamentalabstandes noch beliebig viele weitere Punkte gewinnen lassen, gibt es für die Elektrizitätsgrade nur **einen** natürlichen

:t: den elektrischen Zustand der Erde (der deshalb als „Potential
ıgenommen wird, § 136). Über die Eichung der Elektrometer vergl. § 136.
e man bei den Thermometern als thermometrische Substanz das Queck-
vorzugt, weil es eine sehr kleine spezifische Wärme und daher das Ther-
als Ganzes nur geringe „Wärmekapazität" hat, so dafs das Thermometer
untersuchenden Körper eine nur unbeträchtliche Wärmemenge entzieht,
itteilt, so soll auch ein Elektroskop, bezw. ein Elektrometer keine zu
„Kapazität" (§ 139) haben; es gibt nämlich z. B. ein Elektroskop mit
Sammelkugel bei Berührung mit dem gleichen Körper eine geringere
ız als ein sonst gleiches Elektroskop mit kleinerer Sammelkugel. — Nach
Kapazität" sowie nach der Beweglichkeit der Blättchen u. dergl. bestimmt
Empfindlichkeit der Elektroskope und Elektrometer. (NERNST steigerte
adrantenelektrometer durch die Empfindlichkeit bis 10^{-5} Volt, vergl. § 136.
zeigen die gewöhnlichen Elektroskope, wie in Fig. 450 ohne Condensator,
etwa 100 bis 200 Volt einen Ausschlag.)

§ 132. Elektrisierung durch Verteilung.

TON (1754) bemerkte, dafs die Blättchen eines Elektroskops schon diver-
wenn ein elektrischer Körper noch in beträchtlichem Abstande von ihm
ndet, dafs sie aber wieder zusammenfallen, wenn der Körper selbst oder
dung (durch Entladen) wieder entfernt wird. (Voriger Paragraph, Verwen-
ise 2). — WILKE (1757) wufste, dafs das Elektroskop geladen bleibt, wenn
genwart des elektrischen Körpers ableitend berührt und dann der ladende
Verwendungsweise 3) entfernt wird. — Die innere Zusammengehörigkeit
nd zahlreicher äufserlich verschiedener Erscheinungen wurde aber erst
ARADAY (1839) erkannt, welcher sagt: „Unter den Wirkungen verschiedener
welche man die Elektrizität einteilt, gibt es meiner Meinung nach keine,
ichtigkeit diejenige überträfe oder ihr nur vergleichbar wäre, welche wir
on nennen. Diese hat den ausgedehntesten Einflufs auf die elektrischen
ungen, da es scheint, dafs sie an allem teilnimmt, und sie hat ganz den
r eines Grundprinzips."
ser den Elektroskopen eignen sich zur Vorführung dieser Erscheinungen
ncherlei Apparate; unter anderen der in Figg. 451—453 dargestellte:

ei gleiche Metallzylinder *A*, *B* sind auf der einen Seite durch
Halbkugel, auf der anderen durch eine ebene Platte abgegrenzt
f isolierenden Glasfüfsen aufgestellt; mittels Metallringen lassen
ppelpendel an verschiedenen Stellen der Zylinder anbringen. —
rsuche gliedern sich in drei Hauptgruppen a) b) c):

rsuche a): Die Zylinder werden mit den ebenen Seiten anein-
;estellt. 1. Nähert man dem einen Ende einen positiv geladenen
K, z. B. einen geriebenen Glasstab (den Deckel des Elektro-
oder die eine Polkugel der Influenzmaschine), so zeigen die
(genauer: Probescheibchen und Elektroskop) an diesem Ende
, am anderen positive, in der Mitte keine Ladung an. Bringe
n Stab und Zylinder eine Glas-, Hartgummi- (eine Metall-)
an! — 2. Entfernt man den Stab mehr und mehr, ohne die

Zylinder berührt zu haben, so nimmt die Divergenz der Pend
und hört endlich ganz auf. — Man sagt:

Fig. 451.



I. Ein Gutleiter wird i Nähe eines (von ihm durch Schlechtleiter getrennten) **el schen Körpers „durch Ve lung (Influenz, elektrosta Induktion)“ elektrisch,** und an der diesem Körper **zug deten Seite ungleichnam der abgewendeten Seite gleichnamig.** Die „indifferente liegt um so näher an K, je näher K dem Gutleiter ist. Der vert Körper (Prüfung am Elektroskop!) verliert nichts von seiner L

Wiederholung der Versuche mit stärker und schwächer geladenen Gl Harzstäben, Metallkugeln u. s. f. — Auch Schlechtleiter können du teilung schwach elektrisch gemacht werden; sie brauchen hierzu länger behalten aber die Ladungen auch nach Entfernung des verteilenden Kö

Versuch b): Die beiden Zylinder werden, solange der vert Körper K noch in der Nä auseinander gerückt (Fig. 4 bleibt dann A überall p B überall negativ gelade dies auch dann noch, wenn der **K entfernt worden ist.**

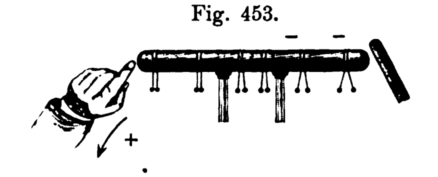
Fig. 452.



Werden A und B einander **wieder genähert, so entla** sich, und zwar bei hinreichendem Ladungsgrad des verteilenden unter Bildung eines elektrischen Funkens. —

Versuch c): Wird der Doppelzylinder, solange der ver Körper K in der Nähe ist, an einer Stelle mit der Hand abl berührt (Fig. 453), hierauf d und zuletzt der Körper K e so zeigt sich der ganze negativ geladen. — Man sag

Fig. 453.



II. Die Ladung, welche der des verteilenden Körpers g namig ist, ist ableitbar („frei“), die ungleichnamig ableitbar („gebunden“).

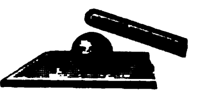
Auch von der „gebundenen“ Ladung nächst K lassen sich mittels ein scheibchens wiederholt Teile fortnehmen (warum?) und am Elektrosko

Diese Bezeichnungen „freie Ladung“, „gebundene Ladung“, wie a haupt „Elektrisierung durch Verteilung“ sind gebildet im Sinne der dua Hypothese. Da nämlich bei Versuch a) die Elektrisierung von A und



eintritt, während von einer „Mitteilung“ (etwa unter Erscheinung eines „von“ der Glasstange „zu“ den Zylindern „überspringenden“ Funkens) nichts zu bemerken ist, so liegt die Vorstellung nahe, es seien die beiden Fluida vor der Annäherung der Stange gemischt, durch diese Annäherung aber entmischt, „verteilt“ worden. Bei Versuch c) würde dann seitens der Stange nur das eine Fluidum aus dem abgewendeten Ende noch weiter weggedrängt, so dafs es durch den berührenden Finger, den Arm u. s. f. bis in die Erde flieht; das andere ungleichnamige Fluidum aber würde in dem dem erregenden Körper K zugewendeten Ende festgehalten, sogar wenn ihm der berührende Finger Gelegenheit gäbe, zu entfliehen. — Gerade hier aber tut es dieser Hypothese schon Eintrag, dafs auch, wenn wir das der Stange zugewendete Ende berühren, doch nicht die hier, sondern ebenfalls die am entgegengesetzten Ende sitzende Ladung abgeleitet wird; weshalb wir uns vorstellen müfsten, dafs sich jene „freie“ Ladung den Weg durch die „gebundene“ bahnt. Diese mehr oder minder plausiblen Ausgestaltungen der Hypothese von den zwei Fluiden wurden erst wieder auf ihren tatsächlichen Kern zurückgeführt durch die festen Gröfsenbestimmungen der Potentiallehre (§ 138). Für jetzt aber noch einige Anwendungen dieser Hülfsvorstellungen:

Nachdem wir die Erscheinungen der Verteilung kennen gelernt haben, werden wir 1. nicht mehr sagen dürfen, dafs ein elektrischer Körper einen „unelektrischen“ anziehe: denn letzterer wird ja bei der Annäherung des ersteren doch elektrisch (erkläre Fig. 454!). Warum wird ein Schellackkügelchen anfänglich fast gar nicht angezogen? Warum gelingt das elektrische Anziehen leichter Körperchen besser, wenn sie auf einer Metallplatte, als wenn sie auf einer Glasplatte oder einem lackierten Tische liegen? — 2. Die Elektrisierung eines Körpers durch sogenannte „Mitteilung“ (§ 130) läfst sich folgendermafsen auf Verteilung zurückführen: Betragen die Ladungen auf dem Stabe (in einem einstweilen willkürlichen und erst in § 135 festzusetzenden Mafse) + 100 Ladungseinheiten, die durch Verteilung in der Kugel hervorgerufenen Ladungen + 10 und — 10 solche Einheiten, und wird der Stab der Kugel hinreichend (bis zur Berührung oder wenigstens bis zum Überspringen eines Funkens) genähert, so heben sich — 10 gegen + 10 von den + 100 des Stabes auf. Da also auf dem Stabe nur mehr + 90, auf der Kugel + 10 vorhanden sind, so hat es den Anschein, als hätte der Stab von seinen + 100 diese + 10 Ladungseinheiten der Kugel „mitgeteilt“. — 3. Beschreibe ausführlich, was geschieht, wenn du α) mittels eines isolierten Leiters, β) mittels eines mit der Erde ableitend verbundenen Leiters (z. B. mit dem Knöchel) „aus einem elektrischen Körper einen Funken zieht“. Geht nur Ladung aus jenem Körper z. B. in deinen Knöchel; ist also jener Ausdruck ganz richtig? — Im Falle α) zeigt sich der Leiter elektrisch; im Falle β), obgleich der Funke hierbei häufig stärker ist, unelektrisch; warum?


Fig. 454.

4. **Erklärung der Erscheinungen am Becherelektroskop** (§ 131, 5): **Ein geladenes Probekügelchen, isoliert in die Höhlung des Bechers gebracht, zieht die ungleichnamige natürliche Ladung des Bechers gegen die Innenfläche und treibt die gleichnamige in die Aufsenfläche und die mit ihr leitend verbundenen Elektroskopblättchen.** Wird das **Kügelchen herausgenommen**, nachdem es den Becher nicht berührt **hat, so hört gemäfs** Versuch a, 2) alle Divergenz der Blättchen auf. Hat

dagegen das Kügelchen den Becher an irgend einer Stelle der In-
fläche berührt, so heben die ganze Ladung des Kügelchens und
entgegengesetzte der Innenfläche einander auf und es wird an
Aufsenfläche eine der ganzen Ladung des Kügelchens gleiche
gleichnamige frei; es ist daher so, wie wenn die ganze Ladung
Kügelchens durch Vermittelung des Bechers dem Elektroskop „m
geteilt" worden wäre (während bei Berührung ohne Becher nur
Teil der Ladung dem Elektroskop mitgeteilt wird; daher ist auch
Bechermethode die vollkommenste zur Eichung von Elektroskopen, §1

Warum die hohle Form des Sammlers (des „Bechers", „Eimers") d
solchen Unterschied für das Abgeben der Ladung bedingt, erklärt sich aus
folgenden Paragraphen, genauer aus §§ 137, 138.

§ 133. Sitz der Ladung und ihre Ausbreitung an der Oberfläche von Leitern.

Gray und Lemonnier (1746) bemerkten, dafs es keiner grö
Ladungsmenge bedürfe, um einen massiven Körper aus leiten
Stoff bis zu bestimmtem Ladungsgrad zu elektrisieren, als ein
hohlen von gleicher äufserer Gestalt und Gröfse (*Versuch* 1).
schlossen daraus: **An einem guten Leiter „sitzt" die Ladung**
an der Oberfläche.

Eine genauere Fassung dieses Satzes wird sich uns im § 137 ergeben als
elektrostatische Grundbedingung. — Zunächst noch einige Versuche über das
Tatsächliche der Erscheinungen: 1. Faraday liefs einen grofsen mit Stanniol über-
zogenen Kasten anfertigen und an Seiden-
schnüren isoliert aufhängen. Dann begab er
sich mit den empfindlichsten Elektroskopen
versehen in das Innere des Kastens und liefs
nun diesen von aufsen sehr stark elektri-
sieren; es zeigte sich dennoch im Innern
keine Spur von Ladungen. — Als dagegen
Faraday im Innern elektrische Ladungen
hervorrief, zeigten diese ihre Wirkung nicht
innen, sondern nur an der Aufsenfläche, wo
sie sich durch elektrische Pendel u. dergl.
nachweisen liefsen. Ähnliches zeigt im kleinen
der *Versuch* 2: Auf einer metallischen Unter-
lage (dem Elektrophordeckel) stehen kleine
Elektroskope (elektrische Fähnchen). Wenn
sie kräftig elektrisiert und wird über sie ein
Drahtkorb gestülpt, so verlieren sie ihre
Divergenz, und diese wird gleichsam über-
nommen von einem aufsen am Drahtkorb be-
festigten Pendelchen. Nach Abheben des
Korbes zeigen sich die Elektroskope wieder
geladen. Ebenso bei Versuchen nach Fig. 455.

Fig. 455.



ots Halbkugeln. 4. Machs Elektroskop (bis zur oberen Metallfassung mit ier umgeben, der Knopf mit einem Drahtkörbchen zu bedecken). 5. In den er des Becherelektroskops ist an einem isolierenden Seidenfaden ein etwas erer Becher oder ein eingerollter Streifen unechten Silberpapiers (noch besser Metallkette) zu versenken. War dann das Elektroskop bis zu bestimmter rgenz geladen, so wird diese kleiner, wenn durch teilweises Herausheben leitenden Kör- lie Oberfläche des nlers vergrößert . 6. Ein Säck- aus metalldurch- tenem Gewebe 456) zeigt La- gen nur auf der exen, nicht auf konkaven Seite; Sitz der Ladung sselt sofort beim maligen Umstül- des Säckchens ls eines isolieren- Fadens. 7. Eine nblase an einem lektrischen Fähnchen versehenen leitenden Röhrchen wird geladen. Je nach- der Durchmesser mehr oder minder vergrößert wird, zeigen die Fähnchen eren oder größeren Ladungsgrad bei unveränderter Ladungsmenge (Fig. 457).

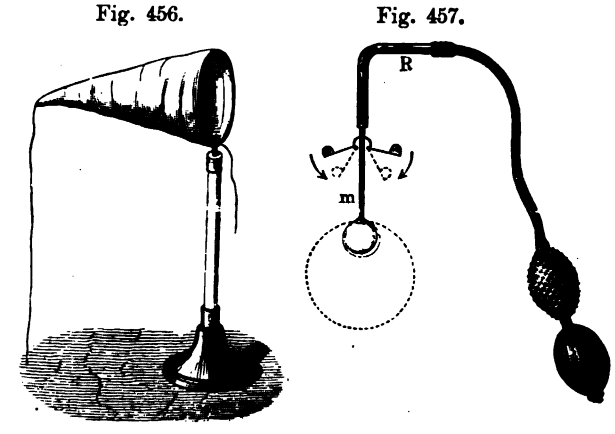


Fig. 456. Fig. 457.

Elektrische Spannung. Elektrische Dichte. *Versuch*: Die fläche einer isolierend aufgestellten Metallkugel wird mit Blatt- oder Bärlappsamen bedeckt. Ist die Kugel hinreichend elektri- , so fliegen die leichten Körperchen von der Oberfläche weg etische Wirkung der Ladung auf Teile der Oberfläche des ers). Sind jene Körperchen (z. B. durch zu starke Adhäsions- e) an der Bewegung gehindert, so erfahren sie doch einen vom rn gegen das Äußsere der Kugel hin gerichteten **Druck** tische Wirkung): Es herrscht an der Oberfläche jedes geladenen ers **elektrische Spannung.** — LA 182. LA 182.

Hinsichtlich der Art, wie sich eine gegebene Ladungsmenge über die Ober- eines Leiters ausbreitet, werden wir bei der Kugel von vornherein erwarten können es mittels (konkaver) Probescheibchen bestätigen, daſs dies gleich- ig geschehe, d. h. daſs auf gleiche Teile der Oberfläche auch gleiche ngsmengen entfallen oder kürzer: daſs auf einer geladenen Kugel die **elek- ie Dichte** konstant sei (vorausgesetzt, daſs nicht nahe Leiter infolge Elek- rung durch Verteilung ein anderes elektrisches Gleichgewicht herbeiführen). die elektrische Dichte bei nicht kugeligen Leitern gibt Aufschluſs folgender

Versuch: Ein länglicher Leiter (z. B. einer der beiden Zylinder Fig. 451, S. 412) wird geladen und mittels eines kleinen Probe- bchens Ladung von mehr und von weniger gekrümmten Teilen

nacheinander auf dasselbe Elektroskop gebracht. Es zeigt sich: Die **elektrische Dichte** (gemessen durch die auf gleich grofse Oberflächenteile entfallenden Ladungsmengen) ist an den stärkst gekrümmten Teilen eines Leiters am gröfsten.

Wiederholende *Versuche* an einem hohlen Würfel von etwa 30 cm Seitenlänge, der aufsen und innen mit unechtem Silberpapier überzogen ist; dasselbe Probescheibchen nimmt an den Ecken der Aufsenseite die gröfste, an den Kanten kleinere, in den Mitten der Seitenflächen die kleinste, im Innern (gleichviel ob an Ecken, Kanten oder Seiten) gar keine Ladung an. — Ganz andere Erscheinungen treten ein, wenn statt wiederholten Berührens mit einem Probescheibchen ein Probekügelchen an hinreichend langem isolierenden Stiel, das durch einen etwa 2 m langen Draht mit einem entfernten Elektroskop verbunden ist, an der Aufsen- und Innenfläche des Würfels entlang geführt wird. Hier zeigt nämlich das Elektroskop für das Innere und Äufsere, für die Ebenen, die Kanten und die Ecken des Würfels allenthalben denselben Ladungsgrad an. Hieraus ist ersichtlich, dafs die Begriffe Ladungsgrad und Ladungsdichte sorgfältig zu unterscheiden sind; Näheres § 137.

Spitzenwirkung. Setzen wir auf eine isolierte Kugel eine Spitze (einen Reifsnagel u. dergl.), so zeigt sich, dafs auch eine kräftige Ladung alsbald „durch die Spitze ausströmt". Desgleichen scheint die Spitze eines Messers, das wir an der Klinge ableitend mit den Fingern halten, bei Annäherung an die Kugel aus dieser „die Ladung zu saugen". Auch die Staubteilchen an der Oberfläche eines Leiters, desgl. die Spitze einer ihm (oder auch einem geladenen Nichtleiter) genäherten Kerzenflamme wirken ähnlich entladend.

An Stelle der allzu handgreiflichen Vorstellung, dafs elektrisches Fluidum aus der Spitze ströme, haben wir anzunehmen, dafs infolge der an der Spitze sehr grofsen elektrischen Dichte auch die angrenzenden Luftteilchen verhältnismäfsig starke Ladungen in sich aufnehmen (ähnlich einem berührenden Probekügelchen) und von der gleichnamigen Ladung des Körpers abgestofsen werden. Daher ist es auch bei den Erscheinungen des „elektrischen Windes", der sogar eine Kerzenflamme ausblasen kann, nicht etwa ein Elektrizitäts-, sondern der Luftstrom, der diese mechanische Wirkung hat; ähnlich beim „elektrischen Rückstofs" (am Flugrädchen).

§ 134. Leydener Flasche; Kondensatoren. — Elektrophor; Influenzmaschine.

Geschichtliches. Kleist zu Cammin in Pommern (1745) wollte einen eisernen Nagel elektrisieren, indem er ihn in ein Glasgefäfs steckte und so an den Konduktor der Elektrisiermaschine brachte. Als er den Nagel mit der einen Hand herausziehen wollte, während er das Gefäfs mit der anderen Hand hielt, empfand er einen kräftigen elektrischen Schlag. Wenige Monate später (1746) wollte Cunaeus in Leyden Wasser in einem Gläschen mittels eintauchenden Nagels elektrisieren und machte so, unabhängig von Kleist, eine ähnliche Beobachtung.

Wesentlich für die **Leydener Flasche** (Fig. 458), die **Franklinsche Tafel** (Fig. 459), sowie für die übrigen (Luft-, Glas-, Schwefel-, Paraffin-, Glimmer- . . .)

toren sind zwei leitende Platten zu beiden Seiten einer nicht-
- Die ältere Elektrizitätslehre beachtete dabei vorwiegend die gegen-
kung der leitenden Platten nach den Gesetzen der Elektrisierung
eilung; über die wesentliche Mitwirkung der nichtleitenden
Dielektrikums) vergl. § 139. — Einen ersten Einblick in die
e der Kondensatoren geben die

ıe mit einer zerlegbaren Franklinschen Tafel (Fig. 460):
:te A (ohne dafs B
ɜ ist), mehrmals mit
risierenden Körper K
ımmer wieder neu ge-
ektrophordeckel) be-
; sich bald unfähig,
ʒen zu „fassen"; wenn
A eine so grofse
ıge ist, dafs der La-
ıuf ihr gröfser wäre
elektrisierenden Kör-
› würde ja Ladung
K zurückfliefsen. —
A und B bis an die
geschoben, so kann
ınd B ableitend be-
ı, der Platte A viel
adungen zuführen. —
nan nun die Platten
.nander, so zeigen A
tige entgegengesetzte
lie an den genäherten
wach divergierenden,
eringen Ladungsgrad
Pendel zeigen an den
ʒeschobenen Platten
Ladungsgrad an). —
ın beide Platten an der Glastafel und berührt sie gleich-
en Händen, so empfindet man einen kräftigen Entladungs-

Fig. 458.

Fig. 459.

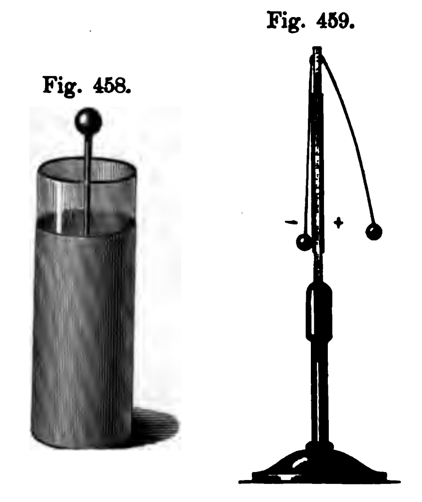
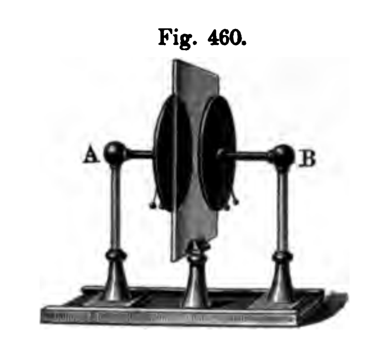


Fig. 460.



lärung: Die Ladung in A wirkt verteilend auf B, die gleich-
ʒ fliefst zur Erde ab und die ungleichnamige gebundene **wirkt**
ıd zurück, deshalb kann A wiederholt neue Ladungen aufnehmen.
ɜr: A hat gröfsere **„Kapazität"**, wenn B dem A nahe, aber von
. Dielektrikum getrennt, als wenn B fern ist.
131 beschriebene Einrichtung und Verwendung des **Kondensations-**
erklärt sich nunmehr nach obigen Versuchen 2 und 4.

Ve[illegible]che mit einzelnen und mit Batterien von Leydener F (Schalt[illegible] nebeneinander: alle äufseren Belege untereinander leitend ve desgl. inneren; Schaltung hintereinander: der äufsere Beleg der er dem inneren der zweiten leitend verbunden, der äufsere der zweiten inneren der dritten u. s. f.). — Wird der äufsere Beleg mit dem einen K Ausladers berührt und der andere Knopf dem mit dem inneren Beleg leit bundenen Knopf der Leydener Flasche allmählich genähert, so tritt Entlad einer bestimmten „Schlagweite" ein. Schon vor anderweitigen Mafsbestim wird man geneigt sein, aus gröfserer Schlagweite auf gröfsere La mengen (nämlich auf gröfsere Ladungsgrade bei gegebener „Kapacit Flasche, § 139) zu schliefsen. Hieraufgründet sich Einrichtung und Gebr

Fig. 461.

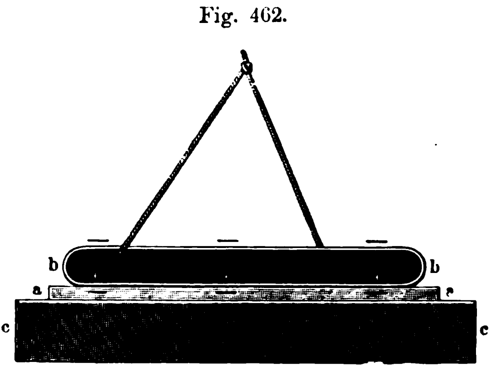
Mafsflasche (Fig. 461, nach Lan dem äufseren Belege leitend verbunden [illegible], die (mittels eines als Mikr[illegible]e wirkenden Gewindes) von de[illegible] Kugel *d* des inneren Beleges [illegible]iefsbare Abstände entfernt werd[illegible]l dann dem inneren Belege sei[illegible]enden Elektrizitätsquelle (z. [illegible]äfsig gedrehten Elektrisiern[illegible] zugeführt, während der äufse[illegible]le leitend verbunden ist, so bi[illegible] zu derselben Zeit desto mehr entladungen der Flasche stattfinden, je mehr Ladung inneren Beleg gebracht wurde. (LA 183.)

LA 183.

Die bisher betrachteten Erscheinungen der elektrischen Konde[illegible] sind auch mitbeteiligt beim

Elektrophor (Fig. 462, erfunden von Volta 1775): [illegible] seiner einfachsten Form eine nichtleitende Platte *aa* („Har[illegible] Hartgummi) mit [illegible] liert aufsetzbaren [illegible] den Platte *bb* [illegible] an Seidenschnüren [illegible] — *Versuche:* 1. [illegible] Harz mit Pelzwerk z. B. mit einem [illegible] schwanz gepeitscht [illegible] sich (wie?) das Harz elektrisch. 2. Setzt [illegible] Deckel auf das [illegible] hebt ihn wieder [illegible] ihn berührt zu h[illegible] zeigt er sich unelektrisch. 3. Berührt man den Deckel vor [illegible] heben ableitend, so zeigt er sich nach dem Abheben positiv

Fig. 462.



4. Der Versuch 3 kann wiederholt angestellt werden, ohne daſs man neuerdings zu peitschen braucht.

Erklärung des Versuches 3: Die negative Ladung des Harzes wirkt verteilend auf den Deckel. Durch die den aufgelegten Deckel berührende Hand wird die negative Ladung des Deckels abgeleitet und die positive Ladung verbreitet sich nach dem Aufheben über den ganzen Deckel. — Man wird erwarten, daſs die negative Ladung des Harzes auf den Deckel durch Leitung übergehen müsse, da Kuchen und Deckel in unmittelbarer Berührung stehen. Dies mag auch wirklich mit der Ladung einer obersten Harzschicht geschehen; jedenfalls wirken durch eine Schicht des Isolators, in der die Ladungen schwer beweglich sind, die tieferen negativ geladenen Schichten auf den Deckel ähnlich wie die Kollektorplatte durch die Isolierschicht hindurch auf die Kondensatorplatte.

Meistens befindet sich der Harzkuchen in einer Metallfassung, dem „Teller“ *cc* (bezw. die Hartgummiplatte trägt an der unteren Seite einen Stanniolbeleg). Daſs dieser Fassung seitens des Kuchens ebenfalls Ladungen erteilt werden, zeigt sich besonders auffällig, wenn man den Daumen an die Fassung legt und, nachdem der Deckel wie bei Versuch 3 gehoben ist, mit einem Finger derselben Hand den Deckel berührt. Man empfindet dann einen viel stärkeren elektrischen Schlag, als wenn man nur aus dem Deckel mit der freien Hand „einen Funken zieht“. — Die Erklärung dieser Mitwirkung der Fassung ist aber nicht mehr ganz einfach; denn da der gehobene Deckel jedenfalls positiv ist, muſs zur Erklärung des starken Schlages eine negative Ladung in der Fassung angenommen werden; und diese kann aus der negativen Ladung des Kuchens nur durch weitere Verteilung und Kondensatorwirkungen erklärt werden. Wir beschränken uns daher im weiteren wieder auf die einfachsten Erscheinungen 1 bis 4.

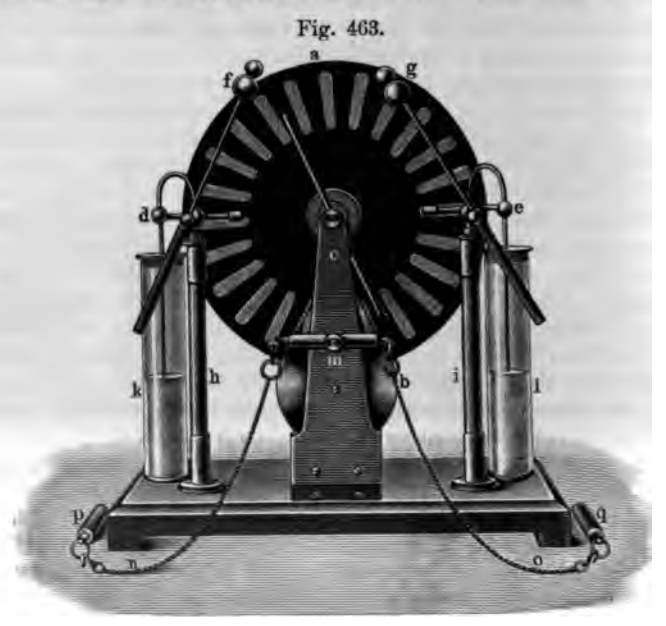
Der Elektrophor scheint eine unerschöpfliche Quelle von Arbeit (ein elektrisches *perpetuum mobile*) zu sein; denn nachdem der Kuchen durch einmaliges Peitschen (Aufwand einer gewissen endlichen Menge mechanischer Arbeit) elektrisch geworden ist, kann man durch wiederholtes Aufheben des Deckels eine unbegrenzte Zahl Funken gewinnen (unendlich viel Arbeit in Form von Wärme und Licht verrichten lassen. — Von der allmählichen Schwächung der Ladung des Kuchens durch Verlust an die Luft ist hier abgesehen). — Diese Fähigkeit des Elektrophors verstöſst aber nicht gegen das Gesetz der Erhaltung der Arbeit; denn da die negative Ladung des Kuchens auf die positive des Deckels anziehend wirkt, ist beim Heben des Deckels entgegen dem Widerstand dieser anziehenden Kraft eine mechanische Arbeit seitens der Muskeln der den Deckel hebenden Hand zu verrichten. Im Lichte dieser Betrachtung bildet Versuch 4 am Elektrophor sogar das einfachste, durchsichtigste Beispiel dafür, daſs die in zwei räumlich getrennten entgegengesetzten Ladungen liegende potentielle Energie hervorgegangen ist aus derjenigen mechanischen (thermischen, chemischen . . .) Arbeit, die die beiden Ladungen aus ihrer ursprünglichen Vereinigung in jenen räumlichen Abstand gebracht hatte. — Eben diese energetische Betrachtung enthält auch die wesentlichste Aufklärung über die Leistungen der

Influenzmaschinen. Die sehr mannigfachen Formen solcher Elektrisiermaschinen haben gemeinsam, daſs zwei (ebene oder zylindrische) Platten aus isolierendem Stoff (Hartgummi, Glas mit Lack überzogen) in relativer Bewegung gegeneinander erhalten werden. Eine einmalige schwache Erregung einzelner Stellen der einen Platte bringt

dann durch Verteilung entgegengesetzte Ladungen auf der a
Platte und diese bringen auf der ersten Platte verstärkte Lad
hervor, die dann durch Saugkämme den Polkugeln zugeleitet

Die ersten leistungsfähigen Influenzmaschinen sind von Töpler un
(1865) konstruiert worden (nachdem schon durch Bennet 1787 das diesen Mas
LA 181. Grunde liegende Prinzip der **„Duplizierung"** angegeben worden war; LA
Gegenwärtig haben die meiste Verbreitung die sogenannten Wimshurst-M
von denen eine der einfacheren Formen in Fig. 463 dargestellt ist. An de

Fig. 463.



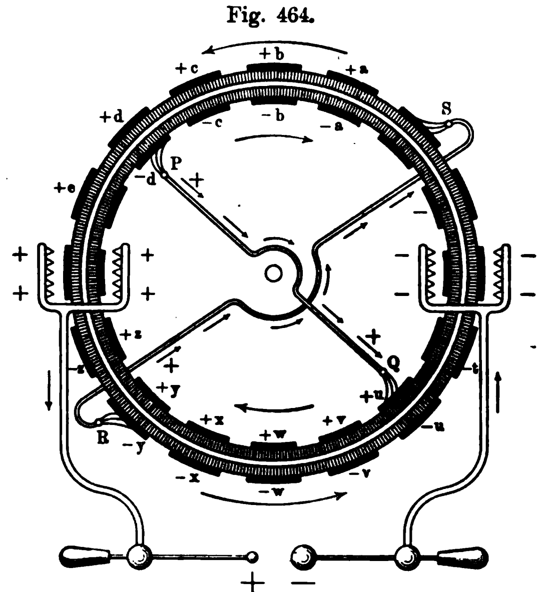
seiten zweier gleicher Scheiben sind radial gestellte Stanniolstreifen
wülsten in gleichen Abständen angeordnet. Vor jeder Scheibe steht,
45° gegen die Vertikale nach entgegengesetzten Seiten geneigt, je ein
„Durchmesserstab" (der „diametrale Konduktor"), an den Enden mit
Metallfäden, die bei der Drehung der Scheiben unter leichter Reibu
Wülsten schleifen. Die Saugkämme sind in der horizontalen Mitt
Maschine auf isolierenden Füſsen angebracht; mit ihnen in direkter le
bindung stehen die Polkugeln, die mittels isolierender Handgriffe in v
Abstände voneinander gebracht werden können. — In Tätigkeit geset
Maschine mittels einer Kurbel, von der durch je einen gekreuzten
„offenen" (ungekreuzten) Schnurlauf die beiden Scheiben in entgeg
Drehungen erhalten werden.

Diese Maschine ist eine „selbsterregende" (wogegen den älteren
von auſsen her die ersten Ladungen zugeführt werden muſsten, b
selbst wieder durch eine kleine Reibungselektrisiermaschine). Für d
erregung gibt es mehrere Erklärungsgründe (die einander nicht a
Anh. 36. log. Anh., Nr. 36); nämlich: *α*) Schon Cavallo (1787) hatte bemerkt, d



Metallplatten stets „von selbst" schwache Ladungen besitzen; β) an den verschiedenen Punkten des Experimentierraumes herrschen im allgemeinen nicht gleiche elektrische Zustände [genauer in der Sprache der Potentiallehre: die elektrischen Niveauflächen werden im allgemeinen nicht parallel dem Fuſsboden und der Decke des Zimmers gehen und daher auch der Maschine asymmetrische elektrische Zustände erteilen; dies mag auch die Erklärung der Beobachtung α) bilden]. γ) Die Pinsel erregen durch Reibung an den auf der isolierenden Scheibe angebrachten Metallwülsten schwache Ladungen. — Behufs Schilderung der weiteren Vorgänge denken wir uns die Scheibenmaschine durch eine Zylindermaschine ersetzt, da sich an dem Querschnitt einer solchen in der Zeichnung (Fig. 464) die einzelnen Belege nicht verdecken. Es hätten z. B. die Belege $+a$, $+b$, $+c$, $+d$ anfänglich schwache positive Ladungen. Dann wirkt der Beleg $+d$ durch die Doppelplatte und die Luftschicht hindurch auf den Leiter PQ verteilend; die bei Q **freie** positive Ladung wird durch Leitung im Pinsel auf den Beleg $+u$ geleitet, der alsbald in die Lagen $+v$, $+w$, $+x$, $+y$, $+z$, fortbewegt wird. Nunmehr wirkt $+y$ ebenso auf den Leiter RS verteilend, wobei wieder die **freie** positive Ladung durch Leitung aus S auf den hier schleifenden Beleg gelangt und von da als **verstärkte Ladung** in die Stellungen $+a$, $+b$ u. s. f. weitergeht. (Auch aus dem Pinsel P geht die seitens $+d$ **gebundene** negative Ladung in den Beleg $-d$; wahrscheinlich teils durch **Spitzenwirkung** seitens **nicht berührender** Pinselfäden, teils durch die den Beleg $-d$ **berührenden** Pinselfäden, ähnlich wie mittels eines Probescheibchens auch ein Teil der gebundenen Ladung von einem Leiter abgenommen werden kann. Diese von $-d$ in die Lagen $-c$, $-b$ u. s. w. gelangenden negativen Ladungen bringen dann ganz analoge Wirkungen hervor wie die ursprünglichen Ladungen $+a$, $+b$ u. s. w.) Der Saugkamm $++$ leitet dann sowohl die an ihn im Drehungssinn $+d$, $+e$, wie die von $+y$, $+z$ herkommenden Ladungen gegen die Polkugel $+$ ab (und wieder analog der Saugkamm $--$).

Fig. 464.



Die der Influenzmaschine durch die Kurbeldrehung **zugeführte mechanische Arbeit** hat zwar auch hier zum Teil Reibungswiderstände zu überwinden; zum gröſseren Teile aber wird sie verbraucht, um die **einander gegenüberstehenden, entgegengesetzt geladenen Belege voneinander zu entfernen.** — Daſs diese Belege einander wirklich anziehen und dem Weiterdrehen der Scheiben

beständig Widerstand entgegensetzen, zeigt der einfache *Versuch*, daß wenn man eine Maschine auslaufen läßt, während sie noch Ladungen liefert, die Scheiben viel weniger Umdrehungen infolge der Beharrung bis zum Stillstand ausführen, als wenn die Maschine schon entladen war. — Ähnlich zeigt sich beim Angehen der Maschine, daß sie merklich schwerer zu drehen ist, sobald sich an dem summenden Geräusch das Auftreten von Ladungen zeigt. Dieser Mehraufwand von mechanischer Arbeit ist (von Rosetti, Mach) gemessen und der gewonnenen elektrischen Energie gleich befunden worden.

Bei den beschriebenen Wimshurst- und einigen anderen Influenzmaschinen müssen im Anfang die Polkugeln getrennt, bei anderen wieder müssen sie in Berührung sein. — Maschinen mit mehr als einem Plattenpaar. — Häufig sind mit den Polkugeln Leydener Flaschen verbunden, und es erfolgen dann die Entladungen in kräftigen (klatschenden, knallenden) hellen Funken. Werden die Leydener Flaschen weggenommen, so ist die Funkenstrecke von rasch aufeinander folgenden minder hellen Funken erfüllt. Nähere Beschreibung dieser und anderer Lichterscheinungen bei disruptiven Entladungen durch Dielektrika, § 156. —

Wiederholende Beschreibung und Erklärung der mit Elektrisiermaschinen durchzuführenden einzelnen Versuche. (**Mechanische:** elektrisches Glockenspiel als typisch für sukzessive Entladungen durch „Konvektion", Puppentanz, Lichtenbergs Figuren u. s. f. **Thermische:** Entzündung von Knallgas in der elektrischen Pistole, Minenzündern u. dergl.; man beachte hierbei die Art der Leitungen der in ihnen offen gelassenen Funkenstrecken. Ferner **Licht-, Schall-, physiologische, chemische, magnetische Wirkungen.**)

I. Mechanische Erscheinungen an elektrischen Körpern und an elektrischen Ladungen.

---

§ 135. Coulombs Gesetz für elektrische Kräfte. — Maß der elektrischen Ladungsmenge.

Nach dem Vorbilde des Gravitationsgesetzes von Newton (1686, § 21) mutete Coulomb (1785), daß auch zwei Körperchen, welche — in erst noch zustellenden Maßeinheiten — die Ladungsmengen ε_1 und ε_2 haben, einander in dem Abstande von r cm mit einer Kraft $f = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2}$ anziehen, bezw. abs

Er bestätigte diese Vermutung zunächst für die Abstofsung zweier
ıiger elektrischer Kügelchen durch mühsame Versuche an der Drehwage
21, VI), sodann für die Anziehung ungleichnamiger elektrischer Kugeln
:h schwierigere Schwingungsversuche. Gute Annäherungen liefert folgender
ıuch (nach Odstrčil): An eine leichte Pendelkugel P, z. B. eine ver-
ɔrkkugel, werde eine gleiche, isoliert
te Standkugel S bis zur Be-
ıerangerückt und beide gleichnamig
Durch die Abstofsung wird P um
der Lotlage abgelenkt, wobei s um
ist, je kleiner der Abstand r beider
t; und zwar ist $sr^2 = Konst.$, wo-
hst das Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$
ist (LA 178).

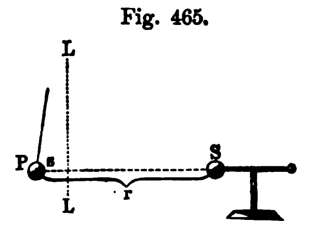


Fig. 465.

LA 178.

ſst man Pendel und Standkugel einige Zeit, so wird die Ablenkung
ıt" kleiner, da sich die Kugeln allmählich an die Umgebung entladen.
also die Kraft f auch von den Ladungsmengen der Kugeln ab. —
aber bei der Aufstellung des Massengesetzes (§ 21, II) in Newtons
nsgesetz die Gröſse der einander anziehenden „Stoffmengen" oder
ıchon vor der Messung der anziehenden Kräfte, ja schon vor der Beob-
laſs es überhaupt eine allgemeine Massenanziehung gebe, definiert waren
nach der Gröſse des Beharrungswiderstandes der Massen gegen-
ːbigen, nicht bloſs Anziehungskräften), wird der Begriff der „elektri-
ıdungsmenge" selbst erst auf Grund der Erscheinungen der elektri-
:iehung und Abstoſsung (also tatsächlich: auf Grund der Beschleuni-
ınd mechanischen Spannungen an geladenen Körpern) definiert und
folgt:

**heit der elektrischen Ladungsmenge (absolute elektro-
Ladungseinheit, st. LE) ist diejenige Ladung, welche auf
gleiche in 1 cm Abstand mit der Kraft von 1 Dyn abstoſsend
- Übt auf einen mit 1 st. LE versehenen Punkt ein anderer
ı 1 cm Abstand eine Abstoſsung von ε_1 Dyn aus, so schreiben
ːm eine Ladung von ε_1 st. LE zu. (LA 177.)**

LA 177.

i bildet es eine grundlegende Erfahrungstatsache, daſs sich n Ladungs-
die durch die gleiche Abstoſsung (oder Anziehung) auf demselben
Körper als gleich definiert sind, zu einer n-fachen Ladung super-
, falls man die n einfachen Ladungen nacheinander alle auf einen und
Körper bringt. (Direkt experimentell ist dies nur mittelst des Becher-
pes zu verwirklichen, wie es im folg. § bei der Eichung des Elektro-
1, 2, 3 . . . n-fache Ladungsgrade oder Potentiale geschieht. Praktisch
meistens umgekehrt aus 2, 3 . . . n-fachen Ladungsgraden auf die
ı fachen Ladungsmengen zurückgeschlossen.)

Bezeichnung „elektrostatisch" weist auf den Unterschied zwischen
ktrischem Gleichgewicht (§ 137) stehenden Ladungen gegen die als
l gedachten Ladungen hin; vergl. § 140.

ie st. LE gründet sich das erste von den drei gegenwärtig gebräuch-
aſssystemen der Elektrizitätslehre, nämlich das **elektrostatische**

Mafssystem [illegible]er das **elektromagnetische** Mafssystem vergl. § 148 ff. Im elektrotechnischen Mafssystem ist **1 Coulomb = 3.10⁹ st. LE.**

LA 177. Veranschaulichungen dieser elektrischen Mengeneinheiten vergl. LA 177. Über die praktische Vergleichung mittels der Mafsflasche und die theoretischen Berechnungen mittels der Kondensatoren vergl. § 139.

Ist ein zweiter Punkt mit einer Ladungsmenge ε_2 (gemäfs obiger Definition von ε_1 aus der Abstofsung auf einen Ladungspunkt mit 1 st. LE) versehen, so werden zwei Punkte $+\varepsilon_1$ und $+\varepsilon_2$ einander mit einer $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ mal so grofsen Kraft abstofsen, als zwei Punkte $+1$ und $+1$ bei gleichem Abstande. — Durch Zusammenfassung dieses Mengengesetzes mit obigem Abstandsgesetz ergibt sich somit das vollständige

$$\text{Coulombsche Gesetz für \textbf{elektrische Kräfte}: } f = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2} \text{ Dyn} \cdots (1)$$

Die bisherigen Definitionen sowie Gl. 1 nehmen zunächst nur auf die absolute Gröfse der Kräfte und der hier[illegible]en Ladungen Rücksicht. Es läfst sich aber in die Gl. 1 auch der [illegible] anziehenden und abstofsenden Kräften und der hiernach geh[illegible]leichbezeichneter und entgegengesetzt bezeichneter Ladun[illegible] Da nämlich einerseits die Erfahrung (§ 130) gezeigt hat, dafs die [illegible]gen Körpern (z. B. zwei Glasstangen oder zwei mit derselben Stange [illegible]hen Kügelchen) auftretenden Ladungen Abstofsung hervorrufen, und [illegible] arithmetisch zwei gleichbezeichnete Faktoren $+\varepsilon_1$ und $+\varepsilon_2$, bezw. [illegible] ε_2 ein positives Produkt geben, so empfiehlt es sich (da der Nen[illegible]r positiv ist), die **Abstofsungen als positive** Kräfte (die den Abstan[illegible]öfsern streben) und daher die Anziehungen als negative in die [illegible]n einzustellen. [Dagegen war in der Gravitationslehre, da dort überha[illegible]iehungen vorkommen und daher eine Unterscheidung von Vorzeichen der Kräfte unnötig ist, die Anziehung nur als absolute (wie eine positive) Gröfse betrachtet worden, vergl. § 24, Bemerkung S. 111.] Auch dafs, wenn der eine der beiden Faktoren ε_1 oder ε_2 Null wird, die Kraft $f = 0$ wird, ist in der Gleichung als ein Grenzfall enthalten (welcher sich übrigens nie rein verwirklichen läfst, da, wenn auch nur der eine Körper geladen ist, der andere eine Ladung durch Verteilung zeigt).

In Coulombs Gesetz ist nichts vorausgesetzt über die besondere stoffliche Beschaffenheit der geladenen Körper. Dafs dagegen die Beschaffenheit des zwischen den Körpern befindlichen Stoffes (des **„Dielektrikums“**) auf die Gröfse der Anziehung und Abstofsung wesentlichen Einflufs hat, zeigt sich zwar noch nicht merklich bei den einfachen Versuchen, welche das Coulombsche Gesetz direkt zu bestätigen bestimmt sind (auch wenn bei obigem Versuch die umgebende Luft ausgepumpt würde, ergäbe sich kein merklich anderer Wert für $s \cdot r^2 =$ Konst.), wohl aber um so auffallender bei der Wirkung der Kondensatoren (§ 139). Mit Rücksicht auf das Dielektrikum müfste aber schon die Definition der elektrostatischen Ladungseinheit vollständig so lauten: **Die Menge +1 ist die Menge, die auf eine ihr gleiche im Abstande 1 cm durch den leeren Raum hindurch eine Abstofsung von 1 Dyn ausübt.**

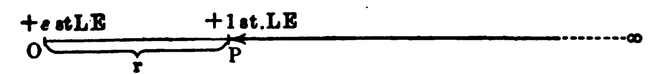
Insofern in dem Coulombschen Gesetze der „Abstand“ r vorkommt, der zwei Endpunkte voraussetzt, ist es (wie das Newtonsche Gesetz, wie das für Lichtintensitäten u. s. f.) ein Elementen-Gesetz, nämlich zunächst nur für je ein Paar „elektrischer Punkte“ oder „Ladungspunkte“ giltig, welche sich als solche nie für sich herstellen und beobachten lassen. Da ferner geladene Körper anein-

[...]der schon durch Verteilung Veränderungen in der Ausbreitung der Ladung an [...] Oberfläche hervorbringen, so lassen sich die Ladungspunkte auch nicht völlig [...] direkte Versuche mit zwei gutleitenden Kugeln (wie die obige Pendel- und [...]kugel) ersetzen. Gleichwohl gibt es eine völlig strenge indirekte Bestätigung des Coulombschen Gesetzes, nämlich auf Grund des Satzes über die gleichmäßige Verbreitung der Ladung an der Oberfläche einer gutleitenden Kugel (§ 133) und über die Resultierende Null im Innern dieses kugelförmigen (wie jedes anders gestalteten) Leiters (§ 137).

§ 136. Arbeit und Potential im elektrischen Felde. — Das Potential als Maß des elektrischen Ladungsgrades.

Aufgabe: Einem mit $+\varepsilon$ st. LE geladenen Punkte in O (Fig. 466) wird ein mit $+1$ st. LE geladener Punkt aus unendlichem Abstand

Fig. 466.



bis auf den Abstand $OP = r$ cm genähert. Welche Arbeit V entgegen der Abstoßung der beiden Ladungen muß hierbei geleistet werden? — Antw.: Wie $V = \varkappa \frac{M}{r}$ Erg per Gramm das Gravitationspotential (§ 24) ist, das solche Arbeiten im Gravitationsfelde einer Masse von M g mißt, so ist das mechanische Maß des Potentiales im elektrischen Felde, oder kurz das

$$\text{elektrische Potential } V = \frac{\varepsilon}{r} \text{ Erg per 1 st. LE.} \quad \cdots \quad (1)$$

Sitzt in O eine negative Ladung $-\varepsilon$ st. LE, so herrscht in P auch ein negatives Potential $V = -\frac{\varepsilon}{r}$.

Ist der Punkt O ganz entladen, so daß $\varepsilon = 0$, so entspricht jedem Punkt um O das Potential $V = 0$. — Diskussion der Gl. (1) für stetig zu- und abnehmende ε und r (vergl. § 24).

In der Aufgabe war nichts darüber gesagt, auf welchem Wege (ob in gerader oder in irgend einer krummen Linie) die Ladung 1 an den Punkt P herangebracht werden soll. In der Tat ist auch diese Arbeitsgröße aus den beim Gravitationspotential entwickelten Gründen von der Form der Bahn unabhängig; oder: Auch das im Punkte P herrschende elektrische Potential ist eine richtungslose Größe (keine Vektor-, sondern eine Skalengröße). Daher lassen sich (wie die in den zusammengesetzten Kraftfeldern mehrerer Massenpunkte herrschenden Gravitationspotentiale) auch die von mehreren Ladungspunkten $O_1\, O_2 \ldots O_n$ oder von ganzen geladenen Körpern $K_1 K_2 \ldots$ herrührenden elektrischen Potentiale an je einem Punkte des zusammengesetzten Kraftfeldes unmittelbar algebraisch addieren oder **superponieren**; allgemein herrscht im Punkte P des zusammengesetzten elektrischen Kraftfeldes das Potential $V = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{r_n} = \sum \frac{\varepsilon}{r}$.

Die so sich ergebenden Konstruktions- und Rechenaufgaben sind nur insofern noch mannigfaltiger als die für Massenanziehungs-Felder, als darauf Rücksicht zu nehmen ist, dafs aufser gleichnamigen **auch ungleichnamige** Potentiale vorkommen können. So stellten die Figg. *a—d*, Tafel I auch das zusammengesetzte Kraftfeld **zweier gleich stark gleichnamig** geladener Punkte oder Sammelkugeln, dagegen die Figg. *a—d*, Tafel II das **zweier gleich stark ungleichnamig** geladener Polkugeln (z. B. einer Influenzmaschine) dar.

Wie schon die Bezeichnung der Ladung z. B. einer geriebenen Glasstange als „positiv", die der Harzstange als „negativ" willkürlich war, so auch die der positiven und negativen Potentiale. — Wie ferner die dualistische und unitarische Theorie sich nur durch den angenommenen Nullpunkt der durch sie umfafsten Tatsachen unterscheiden, so ist auch die **Wahl des Nullpunktes** für die **elektrischen Potentiale an sich willkürlich.** Wir werden zwar z. B. geneigt sein, der Erde, uns selbst un... ...n Körpern, welche mit der Erde in leitender Verbindung stehen, das... ...ull zuzuschreiben, da wir aus keinem dieser Körper Funken ziehen kön... ...keiner ohne weiteres leichte Körper anzieht oder abstöfst, auf ein Ele... ...inwirkt u. s. w. Genauer betrachtet, beweist aber dies nicht, dafs etw... ...Körper ein absolutes Potential Null, sondern nur, dafs sie, einschliefslic... ...selbst, **alle das gleiche Potential** haben. Die im § 200 besprochene... ...der atmosphärischen Ladungen fand es sogar wahrscheinlich, d... ...örper samt den Meeren im Vergleich zum umgebenden Weltraum... ...tential von -7.10^8 Volt (siehe unten) habe. Nichtsdestoweniger ... ..., **das Potential der Erde als willkürlichen Nullpunkt der ...te... festzuhalten.** Mit Rücksicht hierauf kann namentlich auch schon in der ... ...m Begriffe des elektrischen Potentiales führenden Aufgabe vorausgesetzt werden, dafs die Ladungsmenge $+1$ nicht „aus unendlicher Ferne", sondern **von der Erdoberfläche oder einem mit der Erde leitend verbundenen Teil des Experimentiertisches** bis an den Punkt P herangebracht wird. — Diese Willkürlichkeit des Nullpunktes rechtfertigt sich um so mehr, als fast alle im folgenden zu beschreibenden Erscheinungen es bestätigen werden, dafs sie nicht vom absoluten Potentialwerte, sondern nur von **Potentialdifferenzen** abhängen. Daher schliefst sich zweckmäfsig an obige Definition des Potentials auch sogleich die folgende Feststellung:

Die **Einheit der Potentialdifferenz** (st. PE) kommt zwei Stellen P_1 und P_2 eines elektrischen Feldes zu, wenn die Verschiebung von **1 st. LE** von einem zum anderen eine Arbeit von **1 Erg** erfordert. Elektrotechnische Einheit der Potentialdifferenz ist **1 Volt** (V).

Da das **Potential** als **Arbeit per Ladungseinheit** definiert ist, so ist **1 Volt** $= \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Coulomb}} = \frac{10^7 \text{ Erg}}{3.10^9 \text{ st. LE}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{300}}$ **st. PE.** (Über den Zusammenhang von Coulomb und Volt [mit Farad] vergl. auch § 139. — Über die Zahl 3.10^9 vergl. § 157.)

Zur vorläufigen Veranschaulichung der wichtigen Mafsgröfse 1 Volt halte man fest, dafs an den Polen eines Daniellschen Elementes (§ 155) eine Potentialdifferenz von etwa 1,1 Volt, eines Kupfer-Zink-Elementes mit Kochsalzlösung nahe 1 V, eines Chromsäure-Elementes nahe 2 V besteht. — Über die der populären Auffassung am stärksten sich aufdrängende Beurteilung von Potentialen und Potentialdifferenzen aus den „**Schlagweiten**" (Funkenlängen) vergl. § 156. —

Bisher wurden die Begriffe elektrisches Potential und elektrische Potentialdifferenz rein mechanisch, d. h. nach den mechanischen Arbeiten, welche die Überwindung von Abstoſsungen seitens geladener Körper kostet, definiert. Es war nun der wichtigste Schritt zum theoretischen Verständnisse aller elektrischen Erscheinungen, daſs, was noch Ohm den elektroskopischen Zustand (vergl. § 131) genannt hatte und was wir Ladungs-Grad nannten, gerade in dem elektrischen Potential sein mechanisches Maſs besitze (Kirchhoff 1846). Dies erhellt aus der folgenden Überlegung:

Ein Elektroskop von bestimmter Gröſse und Form (und daher auch bestimmter Kapazität, deren Maſszahl C aber für das folgende noch nicht bekannt zu sein braucht, § 139) werde durch einen elektrischen Körper K_1 bis zu einer Divergenz vom Winkel α_1^0, durch einen anderen Körper K_2 bis zu α_2^0 geladen (und zwar am einfachsten durch „Mitteilung" nach Verwendungsweise 1 des Elektroskops, § 131). Ist hier die Divergenz α_2^0 gröſser als α_1^0, so zeigt dies unmittelbar stärkere abstoſsende Kräfte zwischen den beweglichen, untereinander gleichnamig geladenen Teilen des Elektroskops selbst an — hiermit aber auch gröſsere Kräfte zwischen dem Elektroskop und geladenen äuſseren Körpern. Sind nach Berührung mit K_2 in dem das Elektroskop umgebenden Feld an je einem Punkte P diese äuſseren Kräfte $n$mal so groſs als nach Berührung mit K_1 (wobei im allgemeinen nicht auch $\alpha_2^0 = n\alpha_1^0$ sein wird), so ist auch die gesamte Arbeit, welche beim Heranbringen des Körpers K_2 aus unendlichem Abstande an das bis zu einem bestimmten Grade geladene Elektroskop zu leisten wäre und die (per Ladungs-Einheit des Körpers K_2 berechnet) das Potential des geladenen Elektroskops angibt, $n$mal so groſs als die beim Heranbringen von K_1. — Da nun das Elektroskop beim Berühren mit dem auf seinen Ladungsgrad zu prüfenden Körper K das gleiche Potential wie K annimmt (gemäſs der elektrostatischen Grundbedingung, folgender §), so zeigt dasselbe Elektroskop, einmal auf das Potential v, ein andermal auf nv geladen, durch die diesen Potentialen entsprechenden Divergenzen α_1 und α_2 an, daſs auch die zu prüfenden Körper K_1 und K_2 Potentiale $V_1 = v$, bezw. $V_2 = nv$ gehabt haben (genauer: sie vom Zeitpunkte der Berührung mit dem Elektroskope haben).

Eichung des Elektroskops. Um nun an einer Skala diejenige Reihe von Divergenzwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots$ zu verzeichnen, welche bei einem bestimmten Elektroskop der Reihe von Potentialen v, $2v$, $3v$, $4v$ ... entsprechen, gehen wir von der Überlegung aus, daſs das Elektroskop (da es eine unveränderliche Kapazität hat) sich auf diese Potentiale laden werde, wenn wir ihm die Ladungsmengen ε, 2ε, 3ε, 4ε ... zuführen. Um uns solche untereinander gleiche Ladungsmengen zu verschaffen, ist das bequemste Mittel eine möglichst groſse Leydener Flasche, die aber nur so stark geladen ist, daſs sie während der Zeit des Versuches keine merklichen Ladungsverluste an die Umgebung erfährt. Hiervon überzeugen wir uns durch einen Vorversuch: Wenn wir durch Berührung mit einem Probe-

kügelchen z. B. ...0mal nacheinander der Kugel des inneren Beleges der Leydener flasche Lad...n entnehmen und jedesmal auf das Elektroskop übertragen (es vor jeder n... Berührung immer wieder entladend), und es tritt bei der 20. Berührung noch keine merklich kleinere Divergenz als bei der ersten Berührung ein, so zeigt dies, dafs die Kapazität der Leydenerflasche sozusagen unendlich grofs sei gegen die der Probekugel. Wird dann mittels der Probekugel dem Elektroskop (am vollständigsten durch Aufsetzen des Faradayschen Bechers) die Ladungsmenge ε zugeführt und die Divergenz α_1 an der Skala angemerkt, sodann noch einmal ε, im ganzen also 2ε zugeführt und wieder die Divergenz α_2 angemerkt, desgleichen für 3ε die Divergenz α_3 u. s. f., so ist das Elektroskop für die Reihe der Mengen ε, 2ε, 3ε ... und somit auch für die Reihe der Ladungs**grade** oder Potentiale v, $2v$, $3v$ . . . **geeicht.** — Damit diese Skala überdies speziell die Reihe 1, 2, 3 . . . Volt anzeige (vorausgesetzt, dafs es hierfür empfindlich genug ist — sonst kann es z. B. auf die Reihe 10, 20, 30 . . . Volt oder 100, 200, 300 Volt . . ., vergl. Fig. 447, S. 409, geeicht ... genügt es, für einen jener Skalenteile den Wert in Volt durch Berüh... nem durch anderweitige theoretische oder praktische Methode ... geprüften Körper zu bestimmen; es gehen dann die Mafsza... nach der provisorischen Einheit 1 v angefertigten Skalenbeze... nal. — Wo nicht hohe Genauigkeit verlangt ist, genügt es, s... („offenen") Batterie aus Kupfer, Zink und destilliertem Wasser (§ ... t äufserst empfindliche Elektroskope unter Zwischenschaltung eines ... zu bedienen und dabei zuerst 1, dann hintereinander geschaltet 2, 3, ... an das Elektroskop anzuschliefsen. —

Die Arbeitsvorgänge im ... es geladenen Körpers, ähnlich denen beim Laden des Elektroskops, ... ein untersucht in folgender

Aufgabe: Eine wie grofse Arbeit kostet es, einen Leiter K mittels der Ladungsmenge E auf das Potential V zu laden? — Antw.: Ist K anfangs ungeladen und wird ihm aus unendlichem Abstand (oder von sonst einer Stelle mit dem Potential Null) ein sehr kleiner Teil ε jener Menge E zugeführt, so dafs K sich auf das kleine Potential v ladet, so kostet das Heranbringen eines nächsten gleichen Ladungsteiles ε **schon Arbeit entgegen der Abstofsung; das Heranbringen eines weiteren Teiles noch gröfsere Arbeit u. s. f. Die Summe** h. 10. **aller solchen Arbeiten ist das arithmetische Mittel (Anh., Nr. 10) aus der anfänglichen Arbeit** 0 **und der schliefslichen Arbeit** VE, **somit im ganzen** $A = \frac{1}{2} VE$ **Erg.**

Durch die bei diesem Laden aufgewendete Arbeit A **hat der Körper** K **eine** potentielle Energie von ebenfalls $A = \frac{1}{2} VE$ Erg **erhalten, vermöge deren** er nun wieder ebenso grofse mechanische Arbeiten (in Form von **Anziehung und** Abstofsung entgegen der Schwere oder **anderen mechanischen Kräften u. dergl.**) oder beim Entladen äquivalente thermische, optische **Arbeiten (in Form von** Funken u. dergl.) leisten kann. — Vergleich zwischen dem **elektrischen und dem** Gravitationspotential in ihrer Beziehung zur potentiellen **Energie; daraus** Deutung des gemeinschaftlichen Namens Potential. — **Nähere Prüfung der in** § 131 angedeuteten Analogie zwischen den Begriffen

thermoskopischer Zustand — Wärmegrad — **Temperatur,**
elektroskopischer Zustand — Ladungsgrad — **elektrisches Potential:**

icher Unterschied zwischen Temperatur und elektrischem Potential , dafs nicht schon das Heranbringen eines Körpers von bestimmter an einen von gleicher oder verschiedener Temperatur Arbeit es nach obiger Aufgabe bei der Annäherung zweier gleichnamig geper der Fall ist. — Warum es nicht ein dem „mechanischen Wärmeanaloges „mechanisches Elektrizitätsäquivalent" gibt, vergl. LA 179. — lungsfreien Stellen in Kraftfeldern zwar ein Potential, aber kein rad zukommt, vgl. S. 431.

LA 179.

undlegende Wichtigkeit des Begriffes Potential für alle elektrischen mmungen soll in den folgenden vier §§ durch schärfere quantitative der in den §§ 130—134 geschilderten Erscheinungen ersichtlich werden.

Potential und elektrostatische Grundbedingung.

›hl wir niemals elektrische Ladungen für sich, sondern immer nur geladene Körper wahrnehmen und speziell auch die mechanischen gen der „Bewegung" und „Spannung" nur an geladenen Körpermassen ried von ungeladenen beobachten können, so verlangen doch zahlreiche gen, dafs wir die elektrischen Ladungen von den mechanischen Massen unterscheiden und uns die elektrischen Ladungen in und an den beweglich denken (vergl. im § 60 die Gegenüberstellung von Massen- und Wellenbewegungen). Solche Erscheinungen sind zunächst die ng durch Mitteilung, bei welcher wir uns (vor der Zurückführung ng) vorstellen, dafs z. B. von der Ladung $+e$ eines elektrischen Pendels rührung mit einem zweiten gleichen von dem einen $\frac{1}{2}e$ auf das andere en sei. Namentlich aber bei der Elektrisierung durch Verteilung uns die ursprünglich gemischten ungleichnamigen Ladungen durch nden Körper im Leiter nach entgegengesetzten Seiten getrieben. — sius heifsen die in solchem Sinne angenommenen Verschiebungen von **lektromotorische**, wenn der geladene Körper hierbei in Ruhe bleibt, **nderomotorische**, wenn er selbst hierbei in Bewegung kommt (wobei ier im Sinne nicht von „Gewicht", sondern von wägbarer Masse ge- ;, § 16, S. 59, im Gegensatz zur unwägbaren elektrischen Ladung). ıs Bildliche, das in dieser Vorstellung verschiebbarer Ladungen liegt, ı elektrischen Körpern wahrnehmbaren Tatsachen zu sondern, stellen lde der zwei entgegengesetzten „Fluida" noch andere Bilder (und zwar ; wieder hypothetischer Art, sondern) aus bestimmten physikalischen gskreisen an die Seite:

dromechanisches Bild: Die Schenkel eines Kommunikationsrohres mit derselben Flüssigkeit gefüllt gewesen, und diese habe unter dem Schwerkraft in beiden Schenkeln gleich hoch gestanden. Wird dann n Schenkel ein Kolben gedrückt (ähnlich: Hineinblasen oder Ansaugen), ie Flüssigkeit infolge der Leichtverschiebbarkeit ihrer Teilchen sogleich steigt in dem anderen Schenkel um ebenso viel. Verschwände nun r Kolben und der auf ihn lastende Druck, so bestände an den Wasserbeiden Schenkeln infolge der verschiedenen Höhenlage ihrer Ober- Unterschied ihrer potentiellen Energieen in Bezug auf die die säulen anziehende Schwerkraft, und dieser Unterschied würde sich folge der Leichtverschiebbarkeit schliefslich ausgleichen, wobei die aus ellen Energie sich ergebende kinetische Energie mancherlei Arbeiten

diesem Wärmezustande. Ist aber der Körper auf der einen Seite er
anderen abgekühlt worden, so herrscht in dem Körper kein therm
gewicht; vielmehr sucht sich dieses, nämlich jener Anfangszustan
konstanter Temperatur, „von selbst" herzustellen (wobei dieses „vo
der kinetischen Wärmetheorie die im § 83 gegebene weitere Erklär

Heben wir nun aus den beiden Bildern I und II das *tertium*
mit der Störung und Wiederherstellung eines elektrischen Gleichgew
heraus, so bleibt nur das folgende übrig: Wie in einem Kommu
nur dann kein Flüssigkeitsstrom, in einem Wärmeleiter nur dann
strom stattfindet, wenn keine Niveau-, bezw. Temperaturd
handen ist, so gilt auch für alle elektrischen Gutleiter die folgende

Elektrostatische Grundbedingung: **An e**
erfahren elektrische Ladungen nur dann keine Ver
(oder: es gibt in ihm kein elektrisches Strömen, **vergl.**
das Potential an allen Stellen der Oberfläche und
die gleiche Gröſse hat. — Hierbei besagt speziell d
der **Konstanz des Potentials im Innern** des ga
(gleichviel ob er massiv oder hohl ist), daſs auf ein
befindliche (wirkliche oder gedachte) Ladung die an de
gemäſs jener Grundbedingung gelagerten Ladungen mit
Null wirken (genauer: mit Kräften von solchen Rich
Gröſsen, daſs ihre Resultierende für jeden inneren Pun

Diese elektrostatische Grundbedingung ist selbst nur ein andere
die Erscheinungstatsache, daſs sich im Innern guter Leiter, und
massiver, keine Ladungen zeigen. Zur weiteren Erklärung dieser
man sich darauf berufen, daſs, wenn gleichnamige, also einander
Ladungen an einem inneren Leiterteile vorhanden wären und die an
fenden Kräfte nicht Null zur Resultierenden gäben, sie gegen di
hin getrieben würden.

:he, und nur eine solche, auf einen Massenpunkt an was immer für er Stelle des Innern mit Kräften wirkt, deren Resultierende Null (§ 21, III), so müssen auch die gleichmäſsig dichten elektrischen ɜungen an einer Leiterkugel einen irgendwo im Innern der Kugel denkenden gleich- oder ungleichnamigen Ladungspunkt nach dem setz $\frac{C}{r^2}$ **abstoſsen**, bezw. **anziehen**. Denn bei jedem anderen Ab- ndsgesetze wäre die elektrische Kraft im Innern der Kugel nicht ll, und es müſsten also neue Ladungen im Innern durch Verteilung :wickelt und an die Oberfläche getrieben werden.

Auch die ungleichmäſsige Dichte auf allen nichtkugeligen Leiterober- :hen erfährt nun daraus ihre Erklärung, daſs an stärker gekrümmten, also im :emeinen auch mehr von der Hauptmasse des Körpers wegragenden Teilen ſsere Ladungsmengen auf gleiche Flächen seitens der übrigen Ladung gedrängt rden müssen, wenn diese entfernteren Ladungsmengen auf irgend einen ıkt im Innern mit gleich starken Kräften wirken sollen, wie die Mengen ı näheren Oberflächenpunkten. — Genauere quantitative Bestimmungen über ktrische Dichten vergl. LA 182.

LA 182

Oberflächenpotentiale. Hat sich an einem Gutleiter die samte Ladung an der Oberfläche gemäſs der elektrostatischen Grund- dingung ins Gleichgewicht gesetzt, so stellt diese **Oberfläche selbst** ıe Fläche gleichen Potentials oder **eine Niveaufläche** dar.

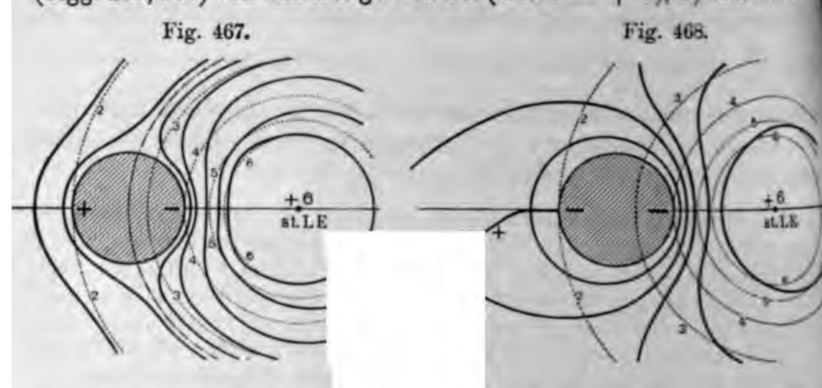
Diese Niveaufläche wird auſserhalb des Körpers von Niveauflächen niedrigeren tentials umschlossen, deren Gestalten, je näher sie dem Körper liegen, sich auch ı so mehr der Gestalt der Oberfläche anähneln werden. Da das Heranbringen ıes gleichnamigen Ladungspunktes aus unendlicher Entfernung oder von einer elle des Experimentiertisches, die das Potential 0 hat, immer gröſseren abstoſsenden :äften entgegenzuarbeiten hat, ins Innere des Körpers eingedrungen aber keine :itere Arbeit erfordert (vergl. § 24, S. 108 das Erklimmen eines Berges und das eiterschreiten auf dem Plateau), so stellt das an der Oberfläche und im Innern s Körpers herrschende Potential den gröſsten in seinem Kraftfelde überhaupt :rrschenden Potentialwert dar. Dieses **Oberflächenpotential** also ist es auch, ıs meistens kurz als das **Potential des Körpers selbst** bezeichnet wird — im egensatze zu den verschiedenen, an mehr oder minder weit vom Körper abstehen- n Stellen seines äuſseren Kraftfeldes herrschenden Potentialen. Indem an sogar den ladungsfreien Stellen in der Umgebung eines geladenen Körpers n Potential zuschreibt, ist festzuhalten, daſs solche Stellen zwar ein Potential ı bezug auf den geladenen Körper), aber (für sich) keinen Ladungsgrad ıben.

Bisher war nur auf das Kraftfeld je eines in sich zusammenhängenden ıtleiters (und zwar entweder eines massiven oder höchstens eines teilweise, bezw. nz ausgehöhlten, wie Faradays Becher, oder wie hohle Sammelkugeln) Rücksicht nommen worden. — Sobald einander zwei oder mehrere Gutleiter gegenüber hen, treten die Erscheinungen der Verteilung ein.

§ 138. Potential und Elektrisierung durch Verteilung.

Aufgaben: In das elektrische Feld a) eines Ladungspunktes (Figg. 467, 468) von der Menge ε st. LE (z. B. $\varepsilon = +6$), b) eines leiten-

Fig. 467. Fig. 468.



den Körpers, wird ein Leit ... metrisch einfacher Gestalt (Kugel, durch einen dünnen Draht ... Kugelpaar, Zylinder mit halbkugeligen Enden u. dergl.) g ... ie Ladungen müssen diese Leiter annehmen und wie müsse ... eauflächen des Feldes umformen, damit auf den Leitern elek. ... eichgewicht herrsche, wenn sie

LA 180. α) isoliert (Fig. 467), β) zur Erde abgeleitet (Fig. 468) sind? (LA 180.)

Zu a). Wird in die kugelförmigen Niveauflächen der punktuellen Ladung $+\varepsilon$ der Leiter L gebracht, so kommen seine dem Ladungspunkte zugewendeten Teile an Stellen höheren, die abgewendeten Teile an Stellen niedrigeren Potentials zu liegen: es ist also der elektrostatischen Grundbedingung zunächst nicht entsprochen. Erst wenn das zugewendete Ende eine negative und wenn, falls α) der ganze Leiter isoliert ist, das abgewendete Ende eine positive Ladung angenommen hat, tritt wieder Gleichgewicht auf diesem Leiter ein, dessen Bedingung sich aus folgender Konstruktion ergibt: Den induzierten Ladungen entsprechen selbst wieder Potentiale und Niveauflächen; indem für jeden Punkt des zusammengesetzten Kraftfeldes die Potentiale für den influenzierenden Punkt und für die beiden influenzierten Ladungen algebraisch addiert werden, müssen sich diese influenzierten Ladungen so lange verschieben, bis die **Oberfläche des Leiters wieder eine Fläche konstanten Potentiales (Niveaufläche des zusammengesetzten Feldes)** wird. — Wird β) der Leiter mit der Erde ableitend verbunden, so hat dies die aus Fig. 468 ersichtliche Umformung der Niveaufläche zur Folge.

Inwiefern unbeschadet dieser Zurückführung der Verteilung auf die elektrostatische Grundbedingung FARADAYS Wort (§ 132, S. 411), der Verteilung komme

Anh. 37. der „Charakter eines Grundprinzips“ zu, in Kraft bleibt, vergl. log. Anh., Nr. 37.

Zu b). War die influenzierende Ladung selbst z. B. auf einer gut leitenden Kugel ausgebreitet, so waren die Niveauflächen ebenfalls [wie beim Punkt in a)] kugelförmig. Durch Heranbringen des Gutleiters L aber wird dann nicht nur dieser influenziert, sondern er wirkt auch auf die Kugel influenzierend zurück.

Verfolgen wir in diesem Falle (und allgemeiner in allen Fällen, wo beliebig gestaltete und beliebig geladene gute Leiter einander gegenüber stehen und durch Influenz diese Ladungen so lange verstärken, schwächen und verschieben, bis elektrisches Gleichgewicht eingetreten ist) nebst den bisher betrachteten Niveauflächen auch den Verlauf der Kraftlinien, so gilt die Beziehung, dafs je ein von einem geschlossenen Oberflächenstückchen des einen Leiters zum anderen Leiter hinüber gehendes System von Kraftlinien („Kraftröhre") auf dem anderen Leiter ein Flächenstückchen herausschneidet, das eine gleich grofse, aber entgegengesetzte Ladung wie das andere enthält.

§ 139. Potential und Kapazität. — Elektrische Kondensatoren.

Auch die schon im § 134 angeregte Vorstellung, dafs eine kleine Sammelkugel weniger Ladung „fasse" als eine grofse Kugel, und wieder die zwei voneinander weit abstehenden Platten einer zerlegbaren Franklinschen Tafel viel weniger „fassen", als wenn sie einander genähert sind, gewinnt quantitative Bestimmtheit erst durch die Feststellung, dafs von elektrischer **Kapazität** eines Leiters die Rede sein soll nur mit Beziehung auf das Potential, das er bei Zuführung einer bestimmten Ladungsmenge annimmt. — Dabei ist der Begriff der „Kapazität" den viel allgemeineren Vorstellungen entnommen, dafs z. B. ein grofser Saal mehr Menschen „fafst" als ein kleiner; wobei hinzugedacht ist, dafs beide Säle schliefslich gleich „dicht" besetzt sein sollen. (Ähnlich: Die Wärmekapazität eines Körpers, § 73, die ihn gleichsam erfüllende Wärmemenge und die so an ihm erzielte Temperatur.) Dieser Vorstellung entsprachen auch die Beziehungen zwischen dem Volumen (das wir hier, um Verwechslungen mit dem für das Potential vorbehaltenen Buchstaben V zu vermeiden, als Rauminhalt R bezeichnen), in dem eine Masse M mit der Dichte D untergebracht ist (§ 41, Ende). Es entsprechen dann einander die Beziehungen für

$$\text{Rauminhalt (Volumen) } R = \frac{M}{D}, \text{ daher } M = RD,\ D = \frac{M}{R},$$

$$\textbf{elektrische Kapazität } C = \frac{E}{V}, \text{ daher } E = CV,\ V = \frac{E}{C}.$$

Einheit der elektrischen Kapazität (elektrostatische Kapazitäts-Einheit, **1 st. CE**) ist hierbei die Kapazität eines Leiters, der durch Zuführung von **1 st. LE** (statische Ladungseinheit, § 135) eine Steigerung seines Potentials um **1 st. PE** (statische Potentialeinheit § 136) erfährt.

Im elektrotechnischen Mafssystem ist Kapazitäts-Einheit **1 Farad**, d. i. die Kapazität eines Leiters, der durch die Ladungsmenge **1 Coulomb** eine Steigerung seines Potentials um **1 Volt** erfährt, wobei **1 Farad** $= 10^6$ Mikrofarad $=$ **9** $. 10^{11}$ **st. CE.**

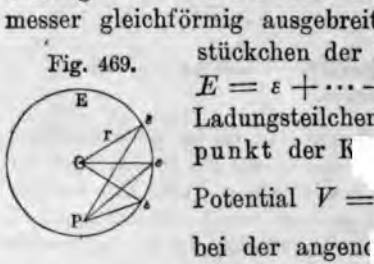
Wie ein Rauminhalt für sich allein noch nichts darüber vorschreibt, eine wie grofse Masse in ihm unterzubringen ist, indem der Stoff ja bis zu geringerer oder gröfserer Dichte hineingeprefst werden kann (wobei dann für die uns bekannten Stoffe allerdings eine Grenze dadurch gegeben ist, dafs Gase sich kondensieren und unter den Flüssigkeiten und festen Stoffen relative Dichten, bezw. spezifische Gewichte über 22 nicht vorkommen), so können auch in einer Sammelkugel unbeschadet ihrer durch ihre Gestalt und Gröfse allein schon gegebenen Kapazität

sehr verschieden grofse Ladungsmengen untergebracht werden (was wieder durch seine Grenze findet, dafs bei zu hohen Potentialen Selbstentladung an umgebende Luft oder an sonstige, wenn auch noch so gute Isolatoren eintre…

Ganz allgemein wird erst durch den Zusammenhang der drei Gröfsen Ladungsmenge, Potential und Kapazität die Lösung der meisten elektrostatischen Aufg… in nicht blofs relativen Mafsen möglich; hier nur einige der einfachsten:

Potential und Kapazität einer Leiterkugel. a) Es sei … Ladung von E st. LE über die Oberfläche der Kugel von r cm … messer gleichförmig ausgebreitet, so dafs auf gleiche Oberfläc… stückchen der Kugel je ε LE, auf alle zusammen $E = \varepsilon + \cdots + \varepsilon$ zu liegen kommen. Jedes … Ladungsteilchen wirkt dann zunächst auf den Mi… punkt der K… mit solchen Kräften, dafs hie… Potential $V = \frac{\varepsilon}{r} + \cdots + \frac{\varepsilon}{r} = \frac{E}{r}$ herrscht. Da… bei der angen… ienen gleichförmigen Ausbr… auf der Kugel … ächst jedenfalls für die Obe… die elektrostatische Grundbe… g erfüllt ist und nach dies… Potential im Innern und a… erfläche jedes Leiters für alle … konstant ist, so gilt, wie … Mittelpunkt, auch für alle P… bis einschliefslich für die der … eloberfläche das kurz soge…

Fig. 469.



Potential einer Kugel $V = \frac{E}{r}$ (vergl. $V = \frac{\varepsilon}{r}$ für den Punkt, …

b) Wird nunmehr die Kapazität dieser Kugel gemäfs der allgemeinen Gleichung $C = E : V$ berechnet, so ergibt sich …

$$\textbf{Kapazität einer Kugel } C = E : \frac{E}{r} = r.$$

Es hat also die Kapazität einer Kugel — und, da alle Kapazitäten … benannt sind, auch jede elektrostatische Kapazität überhaupt … Dimension einer Länge; natürlich ist sie darum aber nicht eine … (mathem. Anh., Nr. 7). — Eine Kugel von 1, 2, 3 . . . r cm Halbmesser … also 1, 2, 3 . . . r CE (nicht 1, 4, 9 . . . r^2 CE, proportional den Kugelober… Man beachte auch die verschiedene Ladungsdichte verschieden grofser … bei gleichem Potential, LA 182).

Anh. 7. LA 182.

Eine Kugel vom Radius 1 cm und somit von 1 CE nimmt bei Ladu…

$$1 \text{ st. LE ein Potential } \frac{1 \text{ st. LE}}{1 \text{ st. CE}} = 1 \text{ st. PE},$$

$$1 \text{ Coulomb ein Potential } \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Farad}} = \frac{3 . 10^9 \text{ st. LE}}{9 . 10^{11} \text{ st. CE}} = \frac{1}{300} \text{ st. PE} = 1 …$$

Dafs wirklich die Kapazität, zunächst einer Kugel, nur von ihrer … und Gröfse, dagegen gar nicht von ihrem Stoffe und auch nicht da… hängig ist, ob sie massiv oder hohl sei (gemäfs Lemonniers erste … achtung, § 133, S. 414), wird mit grofser Schärfe bestätigt durch folgende …

Versuch: Auf drei kleinen Ständern aus Hartgummi liegen Kug… je 1 cm Radius, aus Eisen massiv, Kupfer massiv, Kupfer hohl. Sie we…

grofsen, schwach geladenen Leydener Flasche (vergl. § 136) auf das
›tential geladen und dann in den Becher auf dem Elektroskop geworfen,
re ganze Ladung abgeben; das Elektroskop als Körper von selbst gleicher
zeigt für alle drei Kugeln den gleichen Ausschlag. — Ähnlich für gleiche
dergl.

ı die Kapazität des Elektroskops, bezw. Elektrometers (vergl.
:r das Eichen des Elektroskopes) kann nunmehr numerisch ausgedrückt
enn beobachtet wird, welchen Ausschlag an der vorhin in willkürlichen
geeichten Skala ein Körper von vorher bestimmter Kapazität und
ıenge hervorbringt (ähnlich wie man ein für allemal den Wasserwert
rmometers bestimmt).

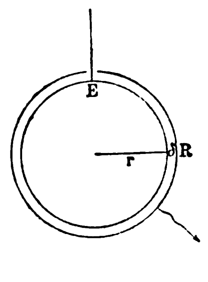
rt man in die Gleichung $A = \frac{1}{2} E V$ (§ 136) die Kapazität gemäfs den
leichungen $E = C V$ und $V = E : C$ ein, so ergeben sich weiter die
en $A = \frac{1}{2}\frac{E^2}{C}$ und $A = \frac{1}{2} C V^2$ für die Arbeiten, die beim Laden,
tladen eines beliebig gestalteten Körpers von der Kapazität C mit der
und dem Potential V verbraucht, bezw. gewonnen werden. Speziell für
ergibt sich so $A = \frac{1}{2}\frac{E^2}{r} = \frac{1}{2} V^2 . r$ (numerische Beispiele LA 182). — LA 182.

·lick in den Grund der um so viel höheren Kapazität der **Kondensatoren**
:ich zu den bisher vorausgesetzten einfachen Leitern gibt folgende

'gabe: Zwei koncentrische Kugeln von den Halbmessern R
ı seien durch eine Luftschicht von der Dicke $R - r = \delta$ cm
.der getrennt. Der inneren Kugel sei eine Ladung E (mittels
urch eine kleine Öffnung der äufseren Kugel hindurch
ı dünnen Drahtes) zugeführt. Zu zeigen, dafs dieser inneren
zufolge der durch die äufsere, abgeleitete Kugel ausgeübten
zwirkung, die **Kapazität** $C = \frac{R}{\delta} r$ cm $\left(\text{oder } C = \frac{R}{\delta} \cdot c\right)$
.eich zur Kapazität c der nicht umschlossenen Kugel zukommt.

›is: Wäre die äufsere Kugel nicht vorhanden, so wäre das Potential im
kte und also auch in jedem anderen inneren Punkte der inneren Kugel
ılich ihrer Oberfläche $V = \frac{E}{r}$. Durch die La-
immt aber infolge Influenz auch die äufsere Kugel
ng E' an, so dafs das Potential im ganzen Innern
ren Kugel und somit auch an der Oberfläche
en Kugel um $\frac{E'}{R}$ vermehrt wird; also daselbst
$+ \frac{E'}{R}$. Hierbei gilt für E' überdies noch die Be-
dafs $E' = 0$, wenn die äufsere Kugel nicht zur
eleitet wäre, denn es werden im ganzen durch
nz gleich grofse positive und negative Ladungen

Fig. 470.



Väre dagegen der äufseren Kugel, solange sie noch nicht zur Erde ab-
ıt, unabhängig von der inneren eine Ladung E' erteilt, so wäre das
der äufseren Kugel $\frac{E + E'}{R}$ (nämlich zunächst für die innere Kugel

durch Superposition von $\frac{E}{R}$ und $\frac{E'}{R}$, weshalb nach der elektrostatischen Grundbedingung auch für die ganze äufsere Kugel das gleiche Potential gilt). Sobald daher die äufsere Kugel zur Erde abgeleitet und also $V' = 0$ ist, wird $E' = -E$. Dann ist für die innere Kugel

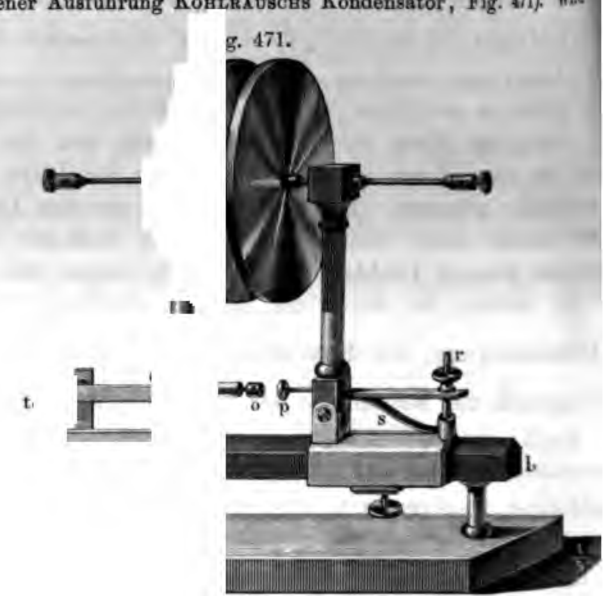
das Potential $V = \frac{E}{r} - \frac{E}{R} = E\frac{R-r}{Rr} = E\frac{\delta}{Rr}$, die Kapazität $C = \frac{E}{V} = \frac{Rr}{\delta}$

Bei gegebenem r nimmt also die Kapazität rasch ab mit wachsendem δ (Zahlenbeispiele LA 182). Immerhin aber hat z. B. der Konduktor einer Elektrisiermaschine in einem Zimmer noch etwas gröfsere Kapazität als im Freien, indem Wände, Boden und Decke wie eine äufsere Belegung, die trockene Luft des Zimmers als isolierende Schicht wirkt.

LA 182.

Der in der Aufgabe vorausgesetzte **Luft-Kugelkondensator** ist der einfachste Typus einer **Leydener Flasche.** … Rechnung ist schwieriger, die direkte Messung bei veränderlicher Isola… δ aber leichter an einem **Plattenkondensator** (ähnlich der in Fig. … dargestellten zerlegbaren Franklinschen Tafel, in vollkommener Ausführung KOHLRAUSCHS Kondensator, Fig. 471). Wird

…g. 471.



hier die eine Platte leitend verbunden mit einem Elektroskop und samt die… auf ein bestimmtes Potential geladen, während die andere Platte entfernt ist, wird der Ausschlag am Elektroskop sofort kleiner, wenn die andere Pl… während sie ableitend berührt ist, der ersteren Platte näher gebracht wird … lange nicht zwischen beiden Platten ein Funke überspringt).

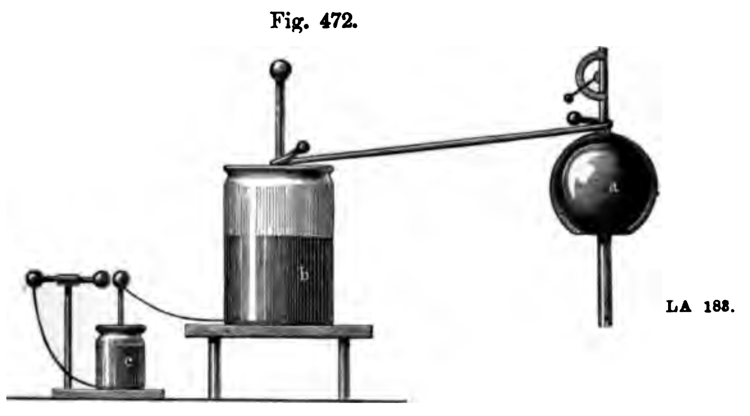
Dielektrika. Waren beim Luftkondensator die Platten bis … einen gewissen Abstand genähert, und zeigte das Elektroskop ei… bestimmten, ziemlich grofsen Ausschlag, so wird dieser sofort beträc…lich kleiner, wenn man zwischen die Platten eine Glas-, Hartgumm…

Schwefelplatte einschiebt. Es hat also das bloſse Ersetzen der Schicht trockener Luft durch die genannten Nichtleiter die Kapazität des Plattenkondensators vergröſsert. Daher gilt auch obige Formel für die Kapazität C des Kugelkondensators nur, wenn die Zwischenschicht Luft ist.

Dagegen würde $C_G = 3\,C$ bis $3^1/_4\,C$, wenn statt Luft Glas verschiedener Sorten, ferner $C_H = 3{,}15\,C$, wenn statt Luft Hartgummi, und $C_S = 2{,}08$ bis $3{,}84\,C$, wenn Schwefel den ebenso groſsen Raum zwischen beiden Platten ausfüllt. Man sagt, die **Dielektrizitätskonstante** des Glases ist $D = 3$ bis $3^1/_4$, des Schwefels 3,84, des Hartgummis 3,15, des Kohlendioxyds 1,000356, **der Luft 1**, des Vakuums 0,99941 (— diese Abweichung zwischen den D für trockene Luft und das Vakuum ist so gering, daſs sie in der Technik auſser acht bleibt), des Wasserstoffs 0,999674. Somit müſste es auch für eine gläserne Leydener Flasche von der Form und Belegung des oben betrachteten Kugelkondensators heiſsen $C_G = 3 \cdot \frac{R}{\delta}\, r$.

Ist so für einen Kondensator von bestimmter Gröſse, Gestalt und bestimmtem Dielektrikum die Kapazität C durch Rechnung ermittelt, und wird von ihm die Ladung des äuſseren Beleges statt in die Erde in eine Maſsflasche abgeleitet, so läſst sich aus der Zeitdauer zwischen je zwei Selbstentladungen aus auf die von irgend einer Elektrizitätsquelle binnen gewisser Zeit gelieferte Zahl von Coulomb ein Schluſs ziehen (LA 183) und somit auch die **Maſsflasche** eichen (Fig. 472). Durch Rechnungen und Versuche ergibt sich z. B., daſs eine zylindrische Leydener Flasche von $r = 5$ cm Basisradius, $h = 20$ cm hohen Belegen, 0,3 cm Glasdicke eine Kapazität von 600 (cm) besitzt; also eine ebenso groſse, wie eine freie Kugel von 6 m Radius.

Fig. 472.



LA 183.

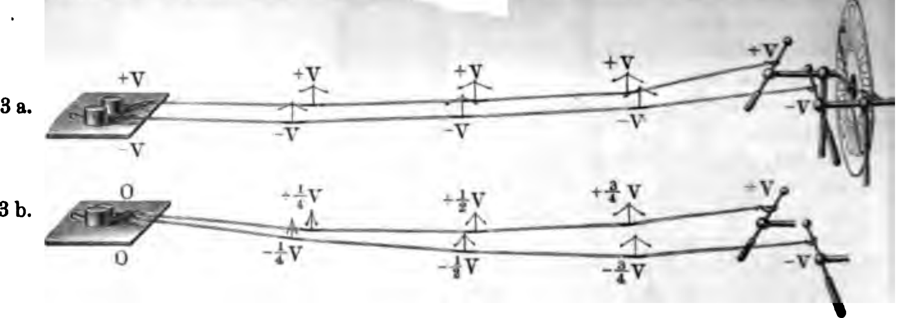
Zwischen den Dielektrizitätskonstanten D und den Brechungsquotienten n verschiedener Stoffe besteht die von MAXWELL vorausgesehene, von BOLTZMANN durch Versuche gefundene Beziehung $D = n^2$ (z. B. gegossener Schwefel $D = 3{,}84$, $n = 2{,}040$, $n^2 = 4{,}162$; Kolophonium $D = 2{,}55$, $n = 1{,}543$, $n^2 = 2{,}382$; Paraffin $D = 2{,}32$, $n = 1{,}536$, $n^2 = 2{,}259$); diese Beziehung ist für die elektromagnetische Lichttheorie von gröſster Bedeutung geworden; einiges hierüber § 157.

Jüngst (1903) haben RUBENS und HAGEN das elektrische Leitvermögen von Metallen in absolutem Maſs aus ausschlieſslich optischen Konstanten (Reflektionsvermögen des Metalls, Lichtgeschwindigkeit und Wellenlänge) berechnet und mit den experimentell ermittelten Werten übereinstimmend gefunden.

§ 140. Potential und elektrischer Strom.

In § 137 wurde die Grundbedingung für das elektrische Gleichgewicht aufgestellt, und auch die §§ 138, 139 setzten im allgemeinen solches voraus. Was dagegen geschieht, wenn solches **Gleichgewicht nicht besteht**, zeigt zunächst

Versuch a): Mit den Polen (Sammelkugeln) einer Influenzmaschine stehen in leitender Verbindung halbleitende Holzstäbchen (deren mehrere durch Metallhülsen zu je einem 2 bis 4 m langen Stab verbunden sind). In gleichen Abständen befinden sich an den Stäben kleine Elektroskope (Doppelpendel aus Korkkügelchen und Zwirn, unmittelbar über das Holz zu legen, oder elektrische Fähnchen); behufs genauerer Messung kann von diesen Stellen eine leitende Verbindung zu einem Elektrometer her[illegible]rden. Die zweiten Enden der Stäbe sind in leitender Verbi[illegible]nit je einem isolierten Metallkörper (Gewichtsstücke auf Ebo[illegible]chen oder auf Paraffinplatten). Wird die Maschine in Gang ges[illegible]ınd bleibt 1. jeder der beiden Stäbe isoliert (Fig. 473a), s[illegible]e Elektroskope an allen Stellen die gleichen Potentiale, i[illegible] der eine Stab das der einen Kugel gleiche positive Pot[illegible] $+V$), der andere Stab ein überall gleiches negatives P[illegible]V) an. Die **Potentialdifferenz** zwischen der einen und der [illegible] Polkugel und allen mit ihr in leitender Verbindung stehende[illegible]n ist also gegen die andere



473 a.

473 b.

$V - (-V) = 2V$. (Infolge von Ladungsverlusten an die Umgebung divergieren die von den Polkugeln entfernteren Pendel meist etwas schwächer.) — 2. Wird einer der Stäbe bei einem der Elektroskope oder speziell an seinem Ende ableitend berührt (mit der Erde leitend verbunden), so wird hier das Potential Null, und an den Elektroskopen erkennen wir einen **Potentialabfall,** nämlich von der positiven Polkugel bis zu dieser Stelle von $+V$ bis Null (bezw. von der negativen Kugel bis zu jener Stelle ein Ansteigen von $-V$ bis Null). — 3. Ein ebensolcher Potentialabfall von $+V$ bis $-V$ tritt

wenn die beiden Metallkörper miteinander in leitende Ver-gesetzt werden (Fig. 473 b).

r gut gelingt der Versuch, wenn statt der Holzstäbe halbleitende er sehr dünne Metalldrähte genommen werden. Warum bei dicken, ıt leitenden Drähten die Polkugeln überhaupt keine merkliche Potential-ehr anzeigen, vergl. LA 202.

LA 202.

das unmittelbare Versuchsergebnis, nämlich den durch die Elektro-:eigten **Potentialabfall**, hinausgehend denken wir uns diesen auch ɔn einem **Durchfliefsen** positiver Ladung von der positiven iven Polkugel und nennen diese sich bewegenden Ladungen einen en **Strom**".

eichem Rechte kann man sich auch eine negative Ladungsmenge von en Polkugel zur positiven hin, oder auch beide Ladungen in entgegen-lichtungen (durcheinander hindurch) fliefsend denken. Doch ist es vom positiven Strome als dem „Strome" kurzweg zu sprechen. — ıs Wesentliche des sehr allgemeinen Begriffes „elektrischer Strom" von ɜren Bedingungen des Versuches a) zu scheiden, stellen wir ihm an die on ihm in der äufseren Anordnung gänzlich abweichenden

:h b): Je ein Zink- und ein Kupfer-(oder Kohlen-)stäbchen, welche, ler zu berühren, in ein Probiergläschen mit destilliertem Wasser oder ısser (mit Kochsalzlösung Mischung von Schwefel-aliumdichromat) tauchen, kleines **„galvanisches** die aus der Flüssigkeit ˈnden der beiden festen ſsen die **Pole** des Ele-ˈAlles Nähere über gal-lemente und Batterien ine gröſsere Anzahl (etwa) solcher Elemente sind ɜ r einander geschaltet", ink des ersten Elementes rhalb des Gläschens eine ɜrbindung zum Kupfer . (Cu_2), ebenso eine von u. s. w. führt. Die aus keit ragenden Enden von $_{100}$ bilden dann die **Pole** ɜrie". Von diesen Polen te zu zwei einander nahe stehenden Scheibchen, ınen ein Gold- oder Alu-tchen herabhängt (Fig. 474). Dieses Blättchen zeigt keine Ladung die Zink- und Kupferstäbchen nicht in die Salzlösung tauchen; sogleich Eintauchen aber zeigt das Blättchen an dem Kupferpole positive, inkpole negative Ladung an (wird nämlich in die Nähe der ɪplatte eine geriebene Harzstange gehalten, so wird das durch Ver-tens der Stange negativ geladene Blättchen von dem Kupferpole

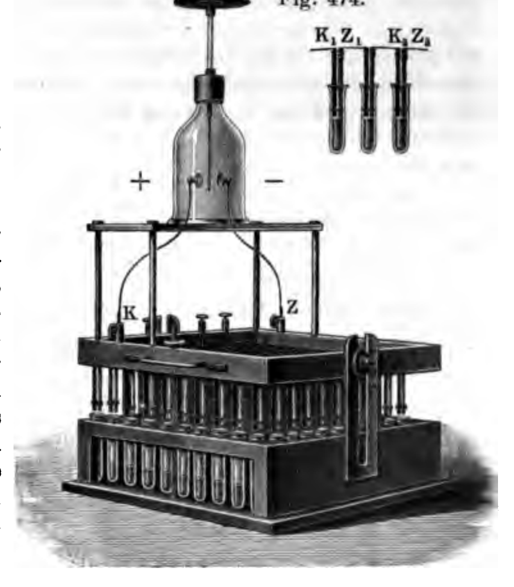


Fig. 474.

angezogen, vom Zinkpole abgestofsen). Zwischen den beiden Scheibchen aufgehängt, pendelt das Blättchen hin und her, wie der Klöppel beim elektrischen Glockenspiel.

An einer solchen **„offenen“** galvanischen Batterie sind also die Polscheibchen ebenso in entgegengesetzten elektrischen Zuständen, oder sie weisen ebenso eine **Potentialdifferenz** auf, wie die Polkugeln der im Betrieb stehenden Influenzmaschine, solange zwischen diesen keine leitende Verbindung hergestellt ist (Versuch a 1.). — Wird dann die Batterie **„geschlossen“**, d. h. werden die aus der Flüssigkeit ragenden Enden von Cu_1 und Zn_{100} miteinander leitend verbunden (wie die Polkugeln bei Versuch a 3.), so werden wir auch in diesem Leiter einen **elektrischen Strom** erwarten. Um diese Erwartung zu bestätigen, mufs (durch Annäherung des geladenen Blättchens) noch gezeigt werden, daſs an den Polen der Batterie, auch wenn sie leitend verbunden sind, eine **konstante Potentialdifferenz erhalten** bleibt, d. h. die Ladungen daselbst sich immer erneuern. (*Versuch* [illegible] Verbindung jedes der beiden Pole mit einem hinreichend empfindlichen Ele[illegible] oder Elektrometer.) — Wie also an der Influenzmaschine der Strom so la[illegible]rch die Stäbe geht, als durch fortgesetzte Drehung die durch die Leitun[illegible] immer wieder entladenden Polkugeln immer wieder neu geladen werden, so [illegible]en sich auch an den Batteriepolen die Ladungen immer sofort wieder, [illegible] durch das „Schliefsen“ der Batterie oder durch beliebig rasch und [illegible]lte ableitende Berührung der Pole die Ladungen jedesmal beseitigt w[illegible] (Wegen der Inkonstanz einer solchen Batterie, § 155, wird allerdings die Po[illegible]aldifferenz der beiden Pole allmählich kleiner.) — Wie ferner bei der Influenz[illegible]aschine die Erneuerung der Ladungen auf Kosten der bei der Drehung (und zw[illegible] durch Überwindung der gegenseitigen Anziehung der Ladungen) verbrauchten m[illegible]chanischen Arbeit, so erfolgt bei der Batterie diese Erneuerung der Lad[illegible]gen auf Kosten der chemischen Arbeit, welche namentlich im Angegriffenwerden des Zinks durch die Flüssigkeit sich kundgibt.

Als wesentlich für den Begriff des elektrischen Stromes (und zwar zunächst für den des **stationären Gleichstromes**) lassen sich also zunächst aus den beiden Beispielen die folgenden Erfordernisse herausheben:

1. Es werden zwei Stellen P_1 und P_2 eines elektrischen Feldes auf **konstanter Potentialdifferenz** $V_1 - V_2$ **erhalten.** 2. Zwischen P_1 und P_2 besteht **leitende Verbindung.** 3. Für diesen Leiter ist also die elektrostatische Grundbedingung, dafs an allen Stellen seiner Oberfläche und seines Innern das gleiche Potential herrschen müsse, nicht erfüllt; vielmehr findet ein **Potentialabfall** von der Stelle höheren Potentials P_1 gegen die niedrigeren Potentials P_2 statt. — Indem nun der Zustand dieses Leiters kein elektrostatischer ist, stellen wir ihn uns als einen elektrokinetischen vor und nennen **das Abfliefsen positiver Ladungen von den Stellen höheren zu Stellen niedrigeren Potentials** einen **elektrischen Strom.**

Die im Wort „Strom“ festgehaltene Vorstellung des „Abfliefsens“ von Ladungen ist aber schon wieder bildlich und entspricht der Wirklichkeit nur insoweit, als die im § 137 entwickelte Vorstellung **„elektromotorischer Verschiebungen“** (im Gegensatz zu ponderomotorischen) begründet ist. Ist aber einmal zugegeben, dafs und inwiefern sich an einem ruhenden Körper (dessen

leinste Teilchen mit den zwischen sie gebetteten Ätherteilchen hierbei noch immer a gegenseitiger Bewegung sein können) eine Ladungsmenge $+\varepsilon$ als solche „verschieben“ könne, so ist es durch die Tatsache der Abstoſsung gleichnamiger und Anziehung ungleichnamiger Ladungen geradezu gefordert, also auch aus ihr zu erklären, daſs z. B. von der positiven Polkugel Teile der positiven Ladung seitens der auf ihr noch vorhandenen positiven Ladung abgestoſsen und zugleich seitens der negativen Polkugel angezogen werden; d. h. es müssen dann wirklich Ladungsmengen von den Stellen höheren zu Stellen niederen Potentials sich bewegen, „flieſsen, strömen“. — Allerdings brauchte das nicht in dem Leiter, durch seinen ganzen Querschnitt hindurch, sondern es könnte an der Oberfläche des Leiters im angrenzenden Dielektrikum stattfinden; direkte Erfahrungen zu gunsten dieser neueren Vorstellungen in §§ 156, 157.

Gleichviel, ob dieses oder jenes anschauliche Bild mit den tatsächlichen Vorgängen in und um einen stromdurchflossenen Leiter verbunden wird, treten die Tatsachen der Elektrizitätsleitung in so weitgehende Analogie zu denen der Wärmeleitung, daſs sogar die dort von Fourier (1826) begründeten Begriffs- und Maſsbestimmungen bald darauf von Ohm (1827) auf die Elektrizitätsleitung übertragen werden konnten. So entspricht dem im § 79 aufgestellten Ausdruck für die Stärke des Wärmestromes, oder wie wir der Analogie wegen vorübergehend wieder sagen wollen, für die **kalorische Stromstärke** $i = k \cdot \frac{q}{l}(t' - t)$ .. (1),

Ohms Gesetz für die **elektrische Stromstärke** $i = k \cdot \frac{q}{l}(V' - V)$ .. (2),

wo k das **spezifische elektrische Leitungsvermögen** des leitenden Stoffes, q der (als überall konstant vorausgesetzte) Querschnitt des Leiters, l seine Länge, $V' - V$ die Differenz der an den Enden des Leiters herrschenden Potentiale V' und V bedeutet.

Die hier auf den Begriff der Potentialdifferenz gegründete Fassung des Begriffes „elektrischer Strom“ ist noch nicht allgemein genug, um alle in den Wirkungen nach auſsen hin ähnlichen Zustände an elektrischen Leitern zu umfassen. Denn zwar häufig, aber nicht immer (z. B. nicht bei den Induktionsströmen, § 150) sind es Potentialdifferenzen, die ein Strömen von Ladungen veranlassen. Durch Ersetzung des Begriffes Potentialdifferenz durch den umfassenden Begriff **„elektromotorische Kraft“** (die Maxwell so definiert: „Alles, was eine Fortführung der Elektrizität verursacht oder zu verursachen strebt, nennt man elektromotorische Kraft“) — anderseits durch Ersetzung des Begriffes „Leitungsvermögen“ durch dessen reciproken Wert **„Leitungswiderstand“**, gelangen wir zu folgendem symbolischen Ausdruck für

Ohms Gesetz: **Elektrische Stromstärke** $= \frac{\textbf{Elektromotorische Kraft}}{\textbf{Widerstand}}$ . . . (3)

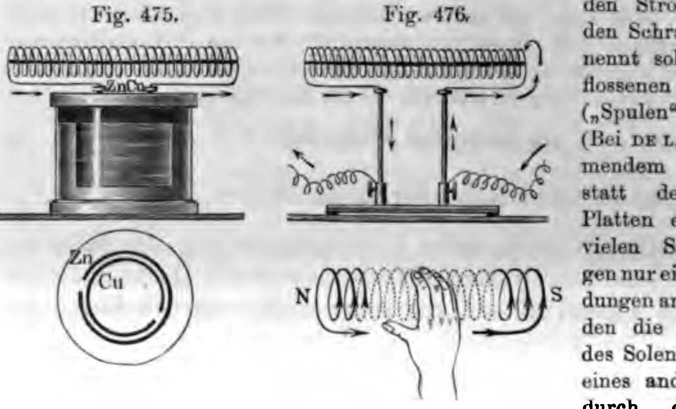
Dabei werden wir uns durch Einführung des **elektromagnetischen Maſssystemes** auch unabhängig machen von der bisher dem Begriffe des elektrischen Stromes zu Grunde liegenden Vorstellung „flieſsender Ladungsmengen“ [sowie auch der Begriff des Wärmestromes unabhängig ist von der Vorstellung eines flieſsenden Wärmestoffes; denn gegenüber dieser hypothetischen Vorstellung stellt obige Gleichung (1) eine Tatsache dar]. Auch werden wir auf Ohms Gesetz in allen weiteren Teilen der Lehre von den mannigfaltigen „Wirkungen des elektrischen Stromes“ zurückzukommen haben (namentlich in §§ 150, 155).

Von allen diesen „Wirkungen der Ströme" sei noch im vorliegend schnitte I, der nur die mechanischen Erscheinungen an elektrischen k behandelt, nur eine ebenfalls rein mechanische vorläufig angeführt, i die gegenseitige Anziehung und Abstofsung elektrischer Ströme (g stromdurchflossener Leiter).

§ 141. Anziehung und Abstofsung zwischen stromd flossenen Leitern. — Übergang von den elektrischen z magnetischen Erscheinungen.

Vorversuche: Ein Schraubendraht (Fig. 475) aus leichtem, aber r dünnem Drahte ist geschaltet an je eine zylindrische Platte aus dünnem Z Kupfer, die durch eine Korkplatte auf verdünnter Schwefelsäure schwimm halten werden. Die in dem so hergestellten Zink-Kupfer-Element au den Ströme gehe den Schraubendral nennt solche stro flossenen Schraube („Spulen") Sol (Bei DE LA RIVES, mendem Strom" statt der cylin Platten ebene, s vielen Schrauber gen nur eine oder z dungen angewend den die Enden des Solenoides de eines anderen Sc durch das vo

Fig. 475. Fig. 476.



Batterie ein Strom fliefst (Fig. 476), genähert, so üben sie aufeinander t ziehung, teils Abstofsung aus, ähnlich wie je zwei ungleichnami gleichnamig geladene elektrische Pendel. — Dabei wirkt ein **Solenoid** genäherte Magnetnadel selbst **wie ein Magnet;** und ebenso werden die Solenoids durch die Pole eines genäherten Magnetstabes angezogen und abg

Solche mechanischen Wirkungen von Strömen **auf Ströme** heifsen **dynamische** Erscheinungen; die entsprechenden Wirkungen zwischen S und Magneten **elektromagnetische** Erscheinungen. Sie bilden das nat Bindeglied zwischen den elektrischen und magnetischen Erscheinungen. änderungen dieser Versuche, sowie Mafsbestimmungen über die elektrodyna und elektromagnetischen Erscheinungen zu Beginn des zweitnächsten Ab (§ 147 ff.).

. Mechanische Erscheinungen an magnetischen Körpern.

§ 142. Magnetpole. Vorläufiges über das magnetische Kraftfeld der Erde.

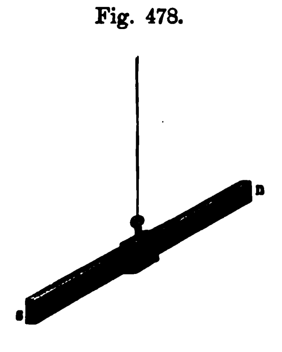
Vorversuche: 1. Ein Magnetstab hält nahe seinen Enden gröſsere enstücke (Nägel) der Schwere entgegen fest als näher der Mitte. — An die Enden einer Magnetnadel hängen sich Büschel von Eisenspänen, die sich nach allen Richtungen von den Spitzen der Nadel ;sträuben; schon in geringem Abstande von den Spitzen haften iig oder keine Späne. — Bei solchen zugespitzten schmalen Stäben ıgnetisierten Stricknadeln, Kompaſsnadeln) trifft also mit ziemlicher näherung die Fiktion zu, als ob alle magnetischen Kräfte in zwei thematischen Punkten, nämlich den Spitzen, ihren „Sitz" hätten. se beiden Punkte wären dann die **Pole.** Bei nicht zugespitzten ben wären die Pole (richtiger: die Polarregionen) zu definieren als len der stärksten magnetischen Wirkungsfähigkeit. — ;her Pole hat ein Magnet in der Regel zwei. Doch zeigt dichtere

Fig. 477.



arung der Spänchen manchmal auch drei (Fig. 477) und mehrere her relativen Maxima an; im weiteren soll von solchen „Folgeıkten" abgesehen werden.

Fig. 478.



Eine entsprechend frei bewegliche Magnet-.el (Fig. 478 und Fig. 481) weist mit einem e, dem **Nordpole,** in die Nordgegend, mit ı **Südpole** in die Südgegend. — *Versuche* 3 ɪr die beim Annähern der Pole $n_1\ n_2$, s_2, $s_1\ n_2$, $s_1\ s_2$ zweier Nadeln eintretenden etischen und statischen Erscheinungen ɪschleunigungen, Schwingungen, veränderte lenkung, Aneinanderhaften) lehren: **Gleichnige Pole stoſsen einander ab, ungleichnige ziehen einander an.**

Die strenge Definition des Begriffes „Magnetpol" eines magnetischen pers muſs darauf Rücksicht nehmen, daſs sich die magnetischen Wirkungen

des Körpers aus den magnetischen Wirkungen aller oder doch der meisten Teilchen des Magneten **zusammensetzen.** (Es ist also der Magnetpol ebenso wenig der ausschliefsliche „Sitz“ der magnetischen Kräfte als der Erdmittelpunkt der „Sitz“ der Schwerkraft ist, wie man vor der Entdeckung der allgemeinen Gravitation geglaubt hatte; vielmehr:) Wie alle Massenteile der Erde durch ihre Anziehungen auf äufsere Körper zu den Erscheinungen der Schwere beitragen, und wie auch der „Schwerpunkt“ eines Körpers der Angriffspunkt der Resultierenden aller auf ihn wirkenden Schwerkräfte (genauer der **Mittelpunkt der parallelen Schwerkräfte**, § 122) ist, so wird sich ein Magnetpol als ein solcher **Mittelpunkt paralleler magnetischer Kräfte** erweisen. Da aber eine solche Definition schon wieder voraussetzt, dafs die von der **Erde** auf die verschiedenen gleichnamigen Elemente eines magnetischen Körpers einwirkenden Kräfte einander **parallel** sind, so verschaffen wir uns, zunächst noch unabhängig von dem Begriffe des „Poles“, ein anschauliches Bild vo[illegible]m wirklichen magnetischen Zustande eines gegebenen Magneten einerseits, [illegible]de anderseits, durch folgenden

Versuch 4: Unter einen wagr[illegible]en, mit Eisenfeilicht oder Eisenpulver bestreuten Karton w[illegible]e beiden Enden eines kräftigen [illegible].

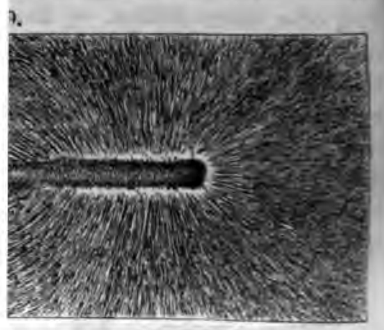
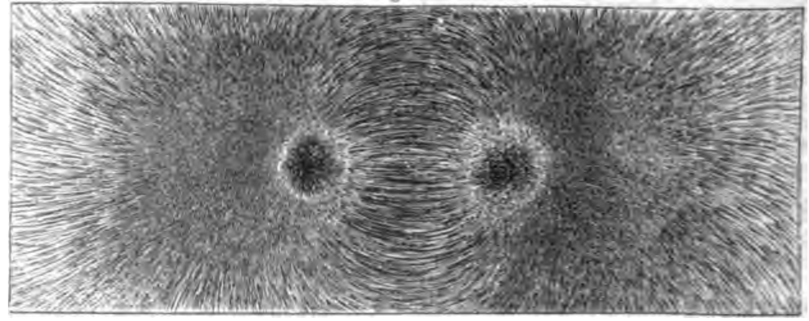


Fig. 480.



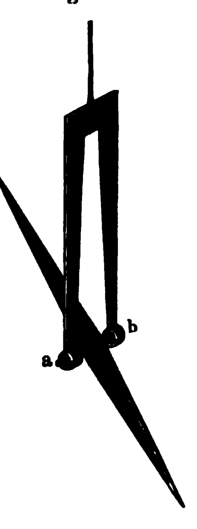
Hufeisenmagnets gehalten. Die Eisenteilchen ordnen sich dann zu Ketten und Schnüren an, deren Verlauf **Kraftlinien des magnetischen Feldes** des Hufeisenmagnets direkt sichtbar macht. Hierbei stellt die Ebene des Kartons je einen Schnitt durch das Kraftfeld dar; bringt man also den Magnet in verschiedene Lagen zum

rechten Karton (z. B. dessen einen Schenkel unter, den anderen r den Karton u. s. f.), so ergibt sich aus sämtlichen Gestalten er Linien nicht nur ein zwei-, sondern ein dreidimensionales ld des Feldes. (Fig. 479 zeigt die Kraftlinien in der Ebene der enden eines Hufeisenmagnetes mit flachen, Fig. 480 die eines mit indrischen Schenkeln.)

Die Einstellung der einzelnen Spänchen erfolgt zunächst ähnlich wie die der lote (vergl. Fig. 76, S. 104) im einfachen oder zusammengesetzten Kraftfelde vitierender Massen; zur Anziehung und Abstofsung aber, welche jedes enteilchen eines Spänchens durch jedes magnetische Teilchen des auf sein ftfeld zu untersuchenden Magnets erfährt, kommt noch die Magnetisierung rch Verteilung der einzelnen Nachbarteilchen unter-ander. *Versuch* über die magnetischen Ketten nach g. 490, § 145.

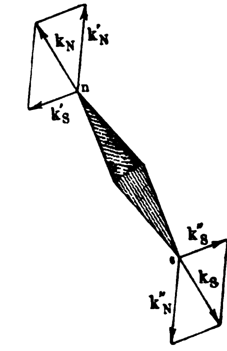
Um eine Magnetnadel möglichst frei beweglich zu chen, bringen wir eine durch ihren Schwerpunkt gehende rizontale Achse an und lassen die sie tragende Schere einen vertikalen Faden von möglichst geringer Torsion drehen (Fig. 481). (Über die Ausgestaltung dieser ein-hen, aber wenig empfindlichen und verläfslichen Vor-tung zum Inklinatorium vergl. § 146.) — Denken uns sehr viele solcher Nadeln an die verschiedensten llen in die Nähe der Erde gebracht, so geben uns die htungen der Nadeln selbst wieder die **Kraftlinien des gnetischen Feldes der Erde** an. Bringen wir die Nadel die verschiedenen Punkte eines eisenfreien Zimmers, so l alle Richtungen, die die Nadel annimmt, zueinander allel; was wir schon aus den im Vergleiche zu den Di-nsionen des Zimmers riesigen Dimensionen des Erdkörpers lärlich finden. Diese Vorstellung, dafs die von seiten Erde auf je eine Nadel ausgeübten Kräfte zueinander rallel seien, wird bestätigt durch

Fig. 481.



Versuch 5: Ein Magnet beliebiger Form wird mittels einer Korkeibe (eines Uhrglases) auf Wasser oder Vaselinöl schwimmend erlten; er nimmt dann durch bestimmte Drehung wagrechter Ebene eine besimmte Stellung zur de annähernd in der Richtung Nord-Süd an, pfängt aber hierbei keine fortschreitende wegung (etwa gegen Norden oder gegen Süden). Es kann also an an dem Magnet nur ein **äftepaar,** nicht eine translatorisch rkende Resultierende angegriffen haben.

Fig. 482.



Das an dem drehbaren Magnete angreifende Kräfte-r können wir uns dann so zu stande gekommen ken (Fig. 482): In *n*, bezw. *s* greift die Resultierende r von der Erde ausgehenden nord-, bezw. südmagneti-

schen Kräfte an, und die beiden Kräftepaare $(k'_N k'_S)$ und $(k''_N k''_S)$ setzen sich zu einem resultierenden Paare $(k_N k_S)$ zusammen. — Erst auf jene Erscheinung und diese Erklärung gründet sich also die strenge Definition:

Pol eines Magnets heifst der Mittelpunkt der Resultierenden aller auf den Magnet gleichsinnig parallel wirkenden magnetischen Kräfte eines homogenen magnetischen Kraftfeldes.

Die durch die beiden Pole begrenzte Strecke heifst die **magnetische Achse** des Körpers.

Diese Strecke fällt der Länge und der Richtung nach bei Magnetnadeln mehr oder minder annähernd zusammen mit dem Abstande der beiden Spitzen voneinander. Bei einem cylindrischen Magnetstabe von regelmäfsiger Magnetisierung liegen die Pole nicht in den Mittelpunkten der Stirnflächen, sondern etwa um $^1/_{12}$ der Stablänge tiefer (sie fallen auch [illegible]r, wie bei anders gestalteten Magneten, im allgemeinen nicht ganz zusammen [illegible] den Maximis der magnetischen Wirkung an der Oberfläche, wie sie sich in der stärksten Tragkraft und dem Verlauf der Kraftlinien im äufseren Felde kun[illegible]gibt). — Wir werden im folgenden einen Magnet mit den Polen n, s und [illegible]ande l kurz durch $(n, s; l)$ bezeichnen.

Über die Mafsgröfsen **Pol**[illegible] **magnetisches Moment = Polstärke × magnetische Achse** vergl. §[illegible] § 146. Für das Nächstfolgende genügt [illegible]tzung der Polstärke, ob an zwei [illegible]hviel oder mehr oder weniger Eisen [illegible]n bleibt. Es zeigt sich dann, dafs die [illegible]ole je eines Magnets immer gleich s[illegible]l; der strengere Beweis hierfür liegt wieder er[illegible] in dem Ausbleiben translatorischer Bewegungen beim obigen Versuch 5. —

Fig. 483.

Zwei nach Fig. 483 miteinander verbundene Nadeln bilden ein (ganz oder annähernd) **astatisches Nadelpaar,** auf das die Erde kein (oder ein beliebig kleines) Drehmoment ausübt. —

Dafs es nicht möglich ist, die nordmagnetischen Teile eines Magnets von den südmagnetischen in ähnlicher Weise zu trennen, wie etwa in Versuch 6, § 132 die positiv elektrische Hälfte des Metallzylinders von der negativen, zeigt

Versuch 6: Eine Stricknadel, die sich bei Bestreuung mit Eisenpulver an beiden Enden gleich stark magnetisch, in der Mitte unmagnetisch zeigte, wird daselbst zerbrochen; die früheren Pole bleiben, an der Bruchstelle aber zeigen sich jetzt zwei neue Pole, so dafs jede der beiden Nadelhälften wieder **ein vollständiger Magnet** ist. Ebenso bei weiterer Zwei-, Vier- . . . teilung.

Es ist hierbei nicht nötig, anzunehmen, dafs beim Zerbrechen die zwei neuen Pole erst entstanden seien, sondern, wenn sie in gleicher Stärke schon vorhanden gewesen waren, mufsten sie sich in ihrer Wirkung nach aufsen aufheben. — Prüft man bei einer in 2, 4, 8 . . . Teile zerteilten Stricknadel die einzelnen Bruchstücke auf die verhältnismäfsige Stärke der Pole, so erweisen sich durch hinreichend feine messende Versuche die mittleren Stücke sogar als die stärkeren, und das Auftreten stärkerer Kräfte gegen die Enden des Stabes im ganzen stellt sich hierbei als gröfserer relativer Unterschied der an sich

i neren Kräfte heraus (LA 184). Ähnlicher *Versuch* mit Zusammenbacken von LA 184. mpulver zu einem Stäbchen im Kraftfelde eines starken Magnets.

Solche Versuche über das Zerteilen von Magneten und Wiederzusammensetzen [...]erer aus kleineren führte zur Hypothese von den **Elementarmagneten**, auf [...]he Hypothese zurückzukommen ist bei Ampères Theorie der elektrischen [...]isströme, § 147. — Unabhängig von allen Hypothesen und Theorieen über „Konstitution der Magnete" sind die folgenden Mafsbestimmungen magne[...]her Kräfte und magnetischer Potentiale.

143. Coulombs Gesetz für magnetische Kräfte. Mafs der magnetischen Menge (Polstärke).

Schon ganz rohe Versuche zeigen, dafs der Pol eines Magnets auf den einer [...]gnetnadel um so kräftiger wirkt, je kleiner der Abstand der Pole vonein[...]er ist und je kräftiger (d. h. zunächst je tragfähiger) dieser Magnet selbst — Ganz analog dem Gesetze für elektrische Kräfte gilt denn auch

[...]ulombs Gesetz für magnetische Kräfte: $f = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$ Dyn . . (1)

Einheit der magnetischen Menge oder **Einheit der Polstärke** [...]stE) ist hierbei die Stärke eines Pols, der auf einen ihm gleichen **1 cm** Abstand mit einer Kraft von **1 Dyn** abstofsend wirkt.

Übt auf einen mit 1 PstE versehenen Punkt ein anderer Punkt [...]s 1 cm Abstand eine Abstofsung von μ_1 Dyn aus, so schreiben wir [...]sem eine Polstärke von μ_1 PstE zu. Nordmagnetische Mengen [...]rden als $+\mu$, südmagnetische als $-\mu$ bezeichnet.

Da es bei den meisten magnetischen Erscheinungen nur auf das Drehungs[...]streben eines Magnets, also nicht auf die an seinen Polen angreifenden Kräfte, [...]dern auf die an ihm angreifenden Kräftepaare ankommt, so ist für jeden [...]gnet als Mafsgröfse noch besonders die folgende wichtig:

Das **magnetische Moment** eines **Magnets** wird gemessen durch [...]s Produkt aus der **Polstärke** μ und dem **Abstande der Pole** l; $[...] = \mu\, l$ (Dyn, cm).

Auch Coulombs Gesetz für Magnete ist ein Elementengesetz, indem von [...]em „Abstande" r nur für je zwei magnetische Punkte die Rede sein kann; ist also wieder nicht unmittelbar, ja sogar nur mittels noch gröfserer Umwege [...]hweisbar als das für elektrische Ladungspunkte. Denn während wir zwei [...]gelchen wenigstens mit nur je einer Art Ladung versehen können, mufs man [...] die unendlich vielen magnetischen Punkte je eines Magnets zu mindestens zwei Punkten zusammengefafst denken. Wenn also z. B. ein Magnet mit den [...]en N, S auf einen mit den Polen n, s wirkt, so setzen sich mindestens die [...]r Wirkungen von N auf n, S auf n, N auf s und S auf s zu einer Gesamt[...]kung zusammen, die wir nun erst wirklich beobachten können. — Die ein[...]sten Versuche werden also diejenigen sein, bei welchen zwei so lange Stäbe [...]ählt und so gegeneinander gestellt werden, dafs gegenüber der Wirkung z. B. N auf n die drei übrigen Wirkungen sehr klein werden. Ist dann z. B. magnetisierte Stricknadel (n, s) an einem Kokonfaden in wagrechter Ebene [...]bar aufgehängt und wird dem Pole n der Pol N eines langen Magnetstabes

genähert, so erweist sich bei 2, 3, 4 . . . mal so grofsem Abstande r die Kraft als annähernd 4, 9, 16 . . . mal so klein, wie man entweder aus den statischen Wirkungen (dem Ablenkungswinkel der Nadel bei gegebenem Torsionsmoment des Fadens) oder aus kinetischen Wirkungen (Anzahl der Schwingungen, die sie, aus der jeweiligen Gleichgewichtslage ein wenig verschoben, unter dem Einflufs von N ausführt) erschliefsen kann. Genauer als diese direkte induktive Methode ist folgende „umgekehrte induktive Methode" (log. Anh., Nr. 36):

Anh. 36.

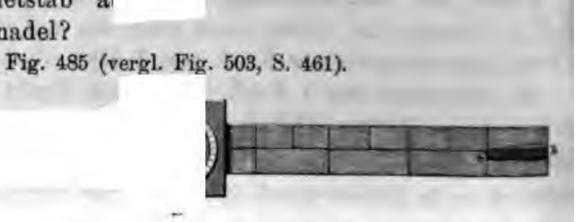
Aufgabe: Einer Magnetnadel ($\nu\sigma$; λ) vom magnetischen Moment $\mu\lambda = M_1$ stehe ein Magnetstab (n, s; l) vom magnetischen Moment $ml = M$ so gegenüber, dafs die magnetische Achse ns senkrecht zur magnetischen Achse $\nu\sigma$ ist („erste Hauptlage"; vergl. die Rechnung für die „zweite Hauptlage" LA 185). Es sei λ klein gegen l, und l sei klein gegen den Abstand r der Mittelpunkte beider Magnete. Mit welcher Kraft F wirkt der ganze Magnetstab auf je einen Pol der Nadel; und mit welchem Kärftepaar wirkt der ganze Magnetstab auf die ganze Magnetnadel?

LA 185.

Fig. 484.

F, $r+\frac{l}{2}$, $r-\frac{l}{2}$, r, l

Fig. 485 (vergl. Fig. 503, S. 461).



Wir setzen in ersten Annäherungen: Abstand $\nu s \doteq r - \frac{l}{2}$, $\nu n \doteq r + \frac{l}{2}$.

LA 186. Auf den Pol ν wirkt dann die resultierende Kraft (LA 186).

$$F = \frac{\mu m}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{\mu m}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2} = \mu m \frac{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2 - \left(r-\frac{l}{2}\right)^2}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2} \doteq \mu m \frac{2lr}{r^4} = 2\mu \frac{ml}{r^3} = 2\mu \frac{M}{r^3} \,. \quad (1)$$

Da an jeden der beiden Pole der Nadel der ganze Magnetstab mit gleichen aber entgegengesetzten (annähernd antiparallelen) Kräften F wirkt, deren Angriffslinien den Abstand λ haben, so ist das Moment dieses Kräftepaares

$$F.\lambda = 2\mu \frac{M}{r^3} \cdot \lambda = 2 \frac{\mu\lambda . M}{r^3} = 2 \frac{M_1 . M}{r^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Die Gl. (2) besagt also: Wenn für die magnetischen Kräfte je zweier magnetischer Punkte das Gesetz der verkehrten zweiten Potenz des Abstandes gilt, so mufs für die gesamte Wirkung eines Magnetstabes auf einen magnetischen Punkt das Gesetz der dritten Potenz des Abstandes gelten. Die Gl. (2) besagt, dafs, wenn wir der Magnetnadel ($\nu\sigma$; λ) denselben Magnetstab in der ersten Hauptlage auf die Abstände $1/2$, $1/3$, $1/4$ . . . nähern, die Nadel ein Drehbestreben von den verhältnismäfsigen Gröfsen 8, 27, 64 . . . zeigen wird. — Umgekehrt schliefsen wir dann: Da sich durch Versuche zeigen läfst, dafs eine solche Zunahme des Drehbestrebens der ganzen Magnetnadel nach der verkehrten dritten Potenz eintritt, so ist hiermit, und erst hiermit, bewiesen, dafs

je eines magnetischen Punktes μ auf einen magnetischen Punkt m . . . mal so groſs gewesen ist.

ch solche mittelbaren Bestätigungen des Coulombschen Gesetzes erfordern h die Berücksichtigung des weiteren Umstandes, daſs wir alle magne- Versuche nur im magnetischen Felde der Erde vornehmen können wie die aeromechanischen Versuche nur auf dem Grunde des Luftmeeres nmen werden können, § 43). Bei der wirklichen Durchführung jener en Versuche, die GAUSS vorgenommen und durch die er das Gesetz der und somit auch das der zweiten Potenz bestätigt gefunden hat, bildet ch die magnetische Richtkraft der Erde (genauer die „Horizontal- nente des Erdmagnetismus") diejenige Maſsgröſse, an der wir das Drehbestreben der Magnetnadel zu messen haben. Wir kommen daher messenden Versuche über die magnetischen Kräfte zwischen zwei Magnet- m § 146 zurück.

Potential und Kraftlinien im magnetischen Felde.

sich Coulombs Gesetz für magnetische Kräfte von dem für elek- Kräfte nur durch die Art der Mengen μ und ε unterscheidet, so ist auch chung für das elektrische Potential $V = \frac{\varepsilon}{r}$ Erg per 1 st. LE sofort ;bar auf das

magnetische Potential $V = \frac{\mu}{r}$ Erg per 1 PstE.

s der Ähnlichkeit der geometrischen Tafeln II a—d (bei S. 109) mit dem ischen Bilde der Ketten und Schnüre zwischen den Polen eines Magneten ich, daſs diese physikalischen Kraftlinien an Magneten zunächst chts anderes sind als die Aufeinanderfolgen von Normalen gegen die tischen Äquipotential- oder Niveauflächen. — Es hat aber FARADAY ıen magnetischen Kraftlinien eine fruchtbare physikalische Hypothese hung gebracht, nach welcher wir uns den Zustand (des Äthers?) um jeden schen Körper herum ähnlich dem Zustand gespannter elastischer Fäden rgl. vorzustellen hätten. In dem Medium, das einen magnetischen Körper herrschen hiernach längs der Kraftlinien **Zugspannungen** (vermöge ie Kraftlinien sich zu verkürzen streben). Der einfachste unter Bild fallende Vorgang ist der, daſs wir zwei einander anziehende Pole ıder zu ziehen suchen; wären hier die beiden Pole durch ein System von ıen Schnüren von der Gestalt der zwischen ihnen verlaufenden Kraftlinien ler gebunden, so würde das Auseinanderziehen der Pole in den Schnüren nnungen bewirken und infolge der elastischen Gegenwirkung würden Pole einander zu nähern suchen. — Überdies nahm FARADAY an, allen zu den Kraftlinien normalen Richtungen (also nach allen Rich- längs der Niveauflächen) **Druckspannungen** herrschen. — Jene Zug- uckspannungen erklärte noch weiter eindringend MAXWELL als Folge- ungen von Wirbelbewegungen des Äthers; einiges hierüber in dem lsenden § 157. Bis dahin wollen wir, wo von den magnetischen Kraftlinien h gemacht wird (ohne die in der Tat heutzutage z. B. kein Konstrukteur ıamomaschinen auskommt), die Darstellung vollständig unabhängig halten ı besonderen physikalischen Hypothesen FARADAYS und MAXWELLS. Viel- ıllen die magnetischen Kraftlinien, ebenso wie die elektrischen (§ 136 ff.)

und die Kraftlinien der Schwere (§§ 20, 24) nur über die Richtungen und **Gröfsen der magnetischen Kräfte des Kraftfeldes** und über die entgegen diesen Feldkräften zu leistenden **Arbeiten** Aufschlufs geben.

Das einfachste Beispiel hierfür bietet ein (isoliert gedachter) Magnetpol. Indem von ihm Kraftlinien nach allen Richtungen des Raumes in Gestalt gerader Halbstrahlen weggehen, so wird Coulombs empirisches Gesetz der Abnahme der magnetischen Kraft mit dem Quadrate des Abstandes in der Sprache der Kraftlinien-Vorstellung sich so erklären: Denken wir uns um den Pol als Mittelpunkt zwei Kugeln von den Radien r cm und R cm herumgelegt, so werden diese Kugelflächen im Verhältnisse $\frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2}$ **dichter**, bezw. weniger dicht von den **magnetischen Kraftlinien durchsetzt**. Also ganz dieselbe Erklärung, wie die für das Abstandsgesetz der Lichtintensität (§ 117). — Wie aber die Lichtstrahlen nicht als physikalisch isolierte Gerade, sondern als blofs gedachte Gerade innerhalb **stetiger Lichtbüschel** zu denken si ind auch die magnetischen Kraftlinien nicht als gegeneinander isolier (Die Ketten und Schnüre von Eisenfeilspänen, die die bequemste ng der Kraftlinien bilden, sind allerdings infolge der Abstofsung je zweier benachbarter Ketten voneinander räumlich getrennt.) r eine an sich willkürliche, aber sehr zweckmäfsige künstliche Fest Faraday die Kraftlinien in bestimmter **endlicher** Anzahl fingierte und schon früher feststehenden Maße der Feldstärke in die im § 24 für die Gra nskräfte angegebene Beziehung setzte:

LA 68. Die **Feldstärke** an irge Stelle eines magnetischen Kraftfeldes wird dargestellt durch nzahl der daselbst durch 1 cm² der Niveauflächen hindurch Kraftlinien (LA 68). — In einem **homogenen magnetischen** **aftfelde** sind die Kraftlinien einander parallel und überall gleich dicht geschart.

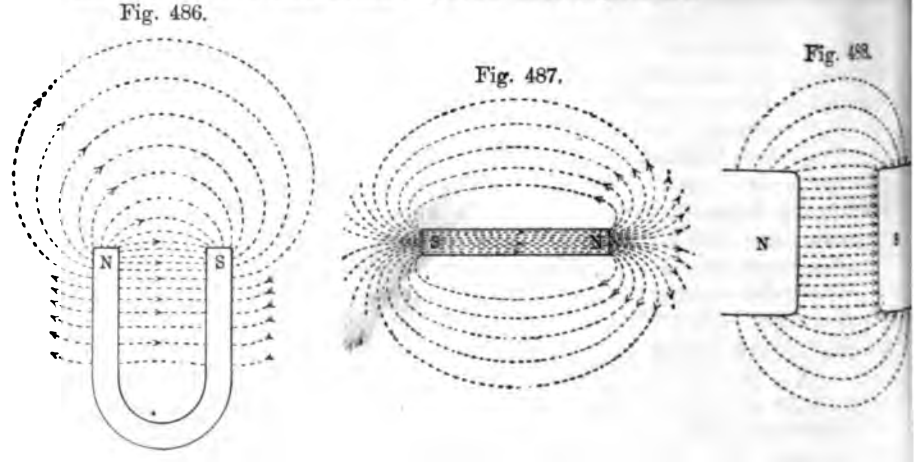


Fig. 486. Fig. 487. Fig. 488.

Den Kraftlinien wird auch eine bestimmte **Richtung zugeschrieben**, nämlich die, nach der der **Nordpol** einer in das magnetische Feld gebrachten (und das Feld nur unmerklich störenden) **Nadel weist** (vergl. Figg. 486, 487 und 488).

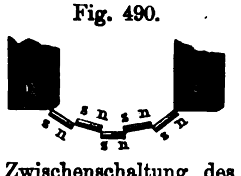
icht im Hinblick auf diese Festsetzung auch von einem „Verlauf der Kraftlinien“, ja sogar von einem „magnetischen Strome“, analog hen Strome, als dessen Richtung die des positiven Stromes festgesetzt dessen man positive Ladung von Stellen höherer zu Stellen niederer fsend denkt. Aber weder mit dem Ausdruck „magnetischer Strom“ t dem der „Richtung“ der Kraftlinien wird etwa die Vorstellung eines ı magnetischen Fluidums verbunden. Dieser Unterschied der Hypo- :tlich in der Erfahrungstatsache begründet, dafs man die Nord- und ıen nicht voneinander trennen kann und ihnen insofern auch keine ıliche Beweglichkeit beizulegen braucht, wie den elektrischen Fluidis.

,gnetisieren durch Verteilung. Arbeitsleistungen ;netisieren und Entmagnetisieren. Paramagnetische und diamagnetische Stoffe.

1. Ein Nagel aus weichem Eisen (ein festgeklemmter 39) sei dadurch als unmagnetisch erwiesen, dafs Eisen- nicht haften bleiben. Sie haften aber sogleich z. B. spitze, wenn an den Nagelkopf ein kräftiger Magnetpol d. Gröfseren Abständen entspricht schwächeres ɪrden, wie sich schon aus den Mengen der haftenden deutlicher daraus zeigt, dafs eine in gleichbleibendem ı der Nagelspitze gebrachte Magnetnadel immer lang- ringt. Dafs nicht etwa die Schwingungen nur durch den stand des Nadelpols vom Pol Magnets ohne wesentliche Mit- es Nagels verursacht sind, zeigt an die Nadel bei unveränderter Pol einmal mit, einmal ohne Zwischenschaltung des ıgen läfst. — Kettchen nach Fig. 490.

Fig. 489.

Fig. 490.



ɪisieren durch Verteilung: **Unmagnetisches weiches . im magnetischen Kraftfelde selbst ein Magnet, und ıt es an der dem Pole zugewendeten Seite den ungleich- an der abgewendeten Seite den gleichnamigen Pol an.**

ıauere quantitative Beschreibung ergibt sich mit Hilfe der zusammen- :entiale des durch Verteilung magnetisierenden und magnetisierten weiche Eisen gleicht im raschen Annehmen der Verteilung einem r bei der elektrostatischen Influenz; doch gilt hier nicht eine so einfache e die elektrostatische Grundbedingung nach § 137, da magnetische Po- im Innern des weichen Eisens und an dessen Oberfläche konstant sein afür wird das Verhalten des weichen Eisens in irgend einem magne- ehr übersichtlich durch die Beachtung der Gestaltsveränderungen, ɪftlinien des Feldes erfahren, wenn Körper aus weichem bestimmter Form hineingebracht werden. Schon bei obigem Gegenversuch läfst sich der Einflufs des zwischen den grofsen d die Nadel eingeschalteten Nagels so beschreiben, dafs durch den

Nagel mehr Kraftlinien des Poles gegen die Nadel hin gelenkt sind. Ein dieses Verhalten noch näher erläuterndes Bild ist das: Die (*mp*, *no* (Fig. 491) stellen den Verlauf von Kraftlinien in einem homogene dar. Durch das Prisma *abcd* aus weichem Eisen werden sie gegen diesen hin abgelenkt. Wäre nun *mp*, *no* ein Wasserlauf, überall gleich dicht mi

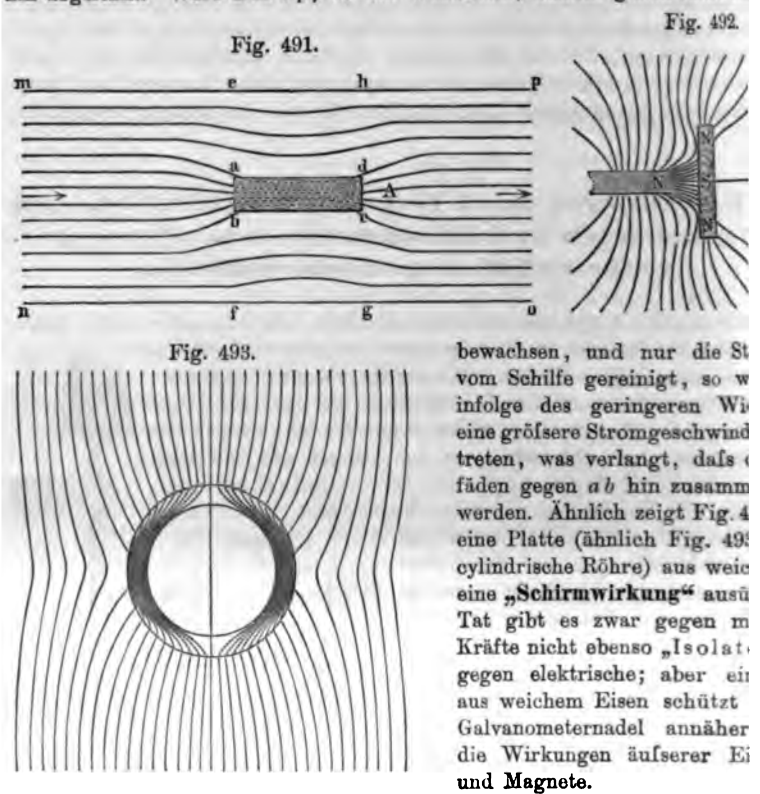


Fig. 491. Fig. 492. Fig. 493.

bewachsen, und nur die St vom Schilfe gereinigt, so w infolge des geringeren Wi eine gröfsere Stromgeschwind treten, was verlangt, dafs fäden gegen *ab* hin zusamm werden. Ähnlich zeigt Fig. 4 eine Platte (ähnlich Fig. 49 cylindrische Röhre) aus weic eine **„Schirmwirkung"** ausü Tat gibt es zwar gegen m Kräfte nicht ebenso „Isolat gegen elektrische; aber ei aus weichem Eisen schützt Galvanometernadel annäher die Wirkungen äufserer Ei und Magnete.

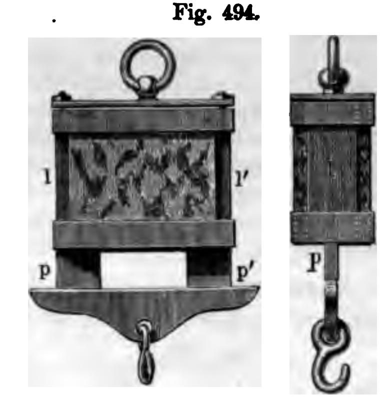
Auch **Stahl** wird durch Verteilung **magnetisiert und** der nämlichen Lage der Pole wie **weiches Eisen**. Währe Eisen schnell magnetisch und nach **Entfernung** des vert Magnets wieder schnell unmagnetisch (genauer: viel magnetisch, siehe unten) wird, wird Stahl langsam, aber d magnetisch. — Dauernde **künstliche Magnete** lassen sich a aus weichem Eisen, sondern nur aus gutem Stahl **herstellen**.

Das Magnetischwerden von Stahl durch Verteilung geschieht rasch der Stahl in der Nähe des magnetisierenden Poles erschüttert raschesten, wenn der Stahlstab der Länge nach mit dem Pole **„gestrich** Das Stabende, wo der Pol abgehoben wird, zeigt sich diesem unglei Prüft man eine Stricknadel nach 2-, 5-, 10-, 20maligem Streichen, so fi dafs allmählich ein Zustand **„magnetischer Sättigung"** erreicht wi Sättigungspunkt kann in einem sehr kräftigen magnetischen Felde, z

neten, **vorübergehend überschritten** werden, nach Aufhören der en magnetischen Kraft geht aber dann die Magnetisierung des Stahles :u jenem Punkte zurück). Prüft man beim Magnetisieren durch Streichen ıigen Strichen jedesmal auch den Streichmagnet, so zeigt sich keine ng (ja öfters sogar eine kleine Verstärkung; letztere rührt her von ıng, die der durch Streichen magnetisch gewordene Körper auf den ı, falls dieser noch nicht bis zur Sättigung magnetisiert gewesen war, 'ir haben also keinen Grund, eine „Magnetisierung durch Mitteilung" ı, sondern wir werden die Hypothesen zur Erklärung des Magnetischıd des Magnetischseins so einzurichten haben, dafs z. B. der Stahl treichen magnetische Eigenschaften gehabt habe, sie aber nach aufsen geben konnte. Nach der besonderen Hypothese der „**Elementarmagnete**" ·e Ausgestaltung durch Ampères Hypothese der Elementar-Kreisıpfängt, § 147), hat die Magnetisierung durch Verteilen mit der durch emeinsam, dafs die schon vorhandenen Elementarmagnete durch den enden Körper nicht erst erzeugt, sondern nur **gerichtet**, d. i. so ərden, dafs ihre Nordpole nach der einen, die Südpole nach der anderen a (und zwar alle oder nur ein Teil der Pole, je nachdem die Sättigung oder nicht).

als noch natürliche Magnete eine Rolle spielten, suchte man ihre :u verstärken durch die Anbringung von „**Armaturen**", bestehend aus d einem **Anker**, beides aus isen (Fig. 494). — Dafs man lichen Magneten aufser der rader Stäbe auch die am verwendete der Hufeisen zu ʒt, hat darin seinen Zweck, n dem an die beiden Pole geır seitens beider Pole entgegenagnetismen induziert werden, ie Pole verstärkend zurückerdies wird durch die gegeniehung der Polpaare die Tragärkt (— auch schützt jeder Magnet vor allfälliger Schwäːh Verteilungswirkung seitens ʒnetismus). Die Tragkraft der gnete wächst zwar mit deren Gröfse, aber ihr nicht einfach proondern nach Häcker nur etwa mit der Potenz $^2/_3$.

Fig. 494.



lethoden zur Herstellung künstlicher permanenter Magnete haben an verloren, seitdem mit der Leichtigkeit, mächtige elektrische Ströme schaffen, fast überall **Elektromagnete** angewendet werden, wo es auf netische Wirkungen ankommt. — Daher im folgenden nur noch einige, und Elektromagnete gemeinsam und von allen Hypothesen über das ı Magnetismus" unabhängige Bestimmungen über

:itsleistungen beim Magnetisieren und Entmagneti- - War z. B. ein Stahlstab zuerst unmagnetisch und erhält Streichen mit einem Nordpol N an dem Ende, von dem N ı wird, einen Südpol s, so kostet das Wegziehen des Poles N

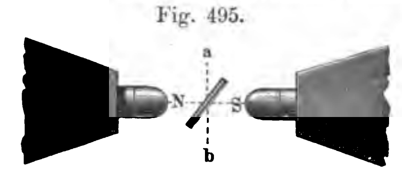
von *s* mehr mechanische Arbeit, als wenn dieses Ende des Stahlstabes noch unmagnetisch gewesen wäre. — Ähnlich nun, wie wir uns vorstellen, dafs die sich immer erneuernde Ladung des Elektrophordeckels durch die bei seinem Abheben entgegen der Anziehung seitens des Harzkuchens geleistete Arbeit hervorgebracht sei, haben wir uns auch die Magnetisierung eines Stahlstabes durch die beim Streichen geleistete Arbeit bewirkt zu denken.

Ein magnetischer Körper, an dessen magnetischem Zustande sich nichts ändert, leistet weder Arbeit, noch verbraucht er solche. Auch der mächtigste Magnet, dessen Tragkraft wir anstaunen, ist hierin nur zu vergleichen etwa der Erde, welche die mächtigsten Gesteinsblöcke und Meere an ihrer Oberfläche durch ihre Anziehung festhält: Arbeit aber wird hierbei noch nicht geleistet. — Daher ist auf ein magnetisches *perpetu*[illegible]*obile* ebenso wenig zu hoffen wie auf ein mechanisches, bei dem die Schw[illegible]t alle Arbeit leistet; denn im konstant bleibenden Schwerkraft-, bezw. Magn[illegible] würde bei der Rückkehr der Maschine in die frühere Lage wieder ebenso vi[illegible]beit verbraucht.

Aber auch wenn man z. B. den [illegible]st durch Heranziehen von Eisen Arbeit verrichten liefse und ihn dann dur[illegible]ofsen oder noch vollständiger durch Erhitzen bis zur Glühtemperatur e[illegible]agnetisierte, so dafs man nun das Eisen ohne Arbeitsleistung vom Magne[illegible] entfernen könnte, ist nicht auf eine Umgehung des Gesetzes von der Erha[illegible]g der Energie zu hoffen. Es wurde nämlich umgekehrt auf Grund dieses G[illegible]zes vorausgesehen, dafs es mehr Arbeit kosten werde, einen magnetisierten St[illegible]körper auf die ihm den Magnetismus nehmende Glühtemperatur zu bringen, als einen unmagnetisierten auf die gleiche Temperatur; und Versuche haben diese Erwartung bestätigt. — In viel auffallenderer Weise noch bestätigen sich die wichtigen Beziehungen für die beim Magnetisieren und Entmagnetisieren zu verrichtende Arbeit, wenn diese Arbeit nicht die Form von Wärme, sondern die von elektrischen Strömen hat: so namentlich bei den Elektromotoren und bei der Magnetoinduktion; vergl. III. und V. Abschnitt.

Paramagnetische und diamagnetische Stoffe. — Versuch: Stäbchen aus Eisen, reinem Nickel . . . stellen sich zwischen den Polen eines Magnets „axial" (z. B. aus der „äquatorialen" Lage *ab* in die Richtung *NS*, Fig. 495), entsprechend dem Verlaufe der Kraftlinien vom Süd- zum Nordpol des Magneten. Das gleiche Verhalten zeigen zwischen den Polen sehr starker Magnete (Elektromagnete) auch Stäbchen aus Platin, Aluminium, Kalium, Natrium, Silicium . . ., die **paramagnetisch** Stoffe heifsen (— dies also nur ein anderer Name für die im gewöhnlichen Sinne „magnetisierbaren" Stoffe).

Fig. 495.



Im Sinne der Kraftlinientheorie heifsen die paramagnetischen Stoffe auch „**magnetisch permeabel**", d. h. für die Kraftlinien durchlässig und zwar in der oben durch Fig. 491 dargestellten Weise. Aus dieser Vorstellung ergibt sich auch ein Mafs für die Magnetisierbarkeit verschiedener Stoffe. Gesetzt nämlich innerhalb eines homogenen Kraftfeldes (z. B. dem der Erde oder zwischen d

hen einer Dynamomaschine) sei H die Feldstärke, wenn sich daselbst m" befindet (fast ebenso bei Luft), und es gingen also durch eine normal chtung der Kraftlinien gelegte Ebene von 1 cm² daselbst H Kraftlinien. ann der bestmagnetisierbare Stoff, nämlich weiches Eisen, an diese Stelle it, so gehen durch 1 cm² 2000 bis 3000 mal so viele Kraftlinien als durch ler benachbarten Stellen des Vakuums (der Luft); bei Nickel bis 300 mal, bei bis 170 mal so viel. — Über die Mitberücksichtigung der **erdmagnetischen** und die Methoden zu ihrer Ermittelung vergl. die erst im folgenden § zu nden Berechnungen (von M und H).

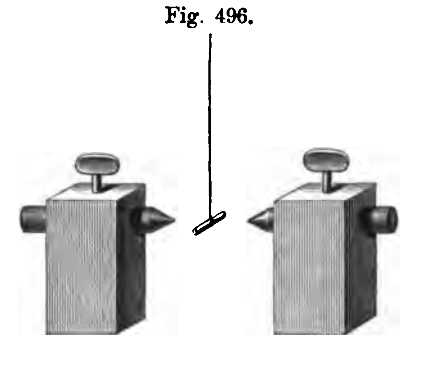
erden statt Hufeisenmagnet und Anker die beiden Hälften eines ringförmigen aus weichem Eisen, die möglichst stark elektromagnetisch erregt sind, auf enseitige Anziehung ihrer Stirnflächen geprüft, so ergibt sich diese als dem Gewichte von etwa $12^1/_2$ bis $18^1/_2$ kg per cm². — Das Maximum der isierbarkeit für harten Stahl ist etwa 37 Proz. geringer als für weiches Eisen.

emanenter Magnetismus. Hysteresis. — Beim Versuch nach 89 bleibt das weiche Eisen meistens noch merklich magnetisch, der erregende Magnet schon wieder entfernt ist. Auch ein aus weichem Eisen, der durch einen Strom elektromagnetisch war, hält den ihn unmittelbar berührenden Anker noch fest, em der Strom schon aufgehört hat; wird aber der Anker nun rissen oder weggeschoben, so haftet er nicht mehr am Kern. daher, wie z. B. bei Telegraphenapparaten, der Anker rasch abelnd sich dem Kerne nähern und wieder von ihm entfernen, so s zwischen ihnen nicht zur Berührung kommen.)

iese Erscheinungen des **„remanenten Magnetismus"** bilden nur einen Teil igen Tatsachen, die man als **Hysteresis** bezeichnet: Genaue Messung der jeweiligen Feldstärke entsprechenden Magnetisierung durch Verteilung in nmen weichem Eisen zeigt nämlich, dafs, wenn die Feldstärke von Null an nt, die Magnetisierung (wie zu erwarten) immer stärker wird, aber nicht h proportional; nimmt dann die Feldstärke wieder bis Null ab, so wird en nicht ebenfalls ganz unmagnetisch, sondern dies erst in einem entgegen- magnetischen Felde (es fallen also die „Magnetisierungskurven" für zu- nehmende Magnetisierung nicht zusammen). — Diese Tatsachen sind prak- u berücksichtigen, wenn, wie in Wechselstrommaschinen, Eisen in rascher mit entgegengesetztem Vorzeichen magnetisiert werden mufs.

iamagnetische Stoffe sind ut, Antimon, Zink, Zinn, Queck-, Blei, Silber, Kupfer, Gold; fel, Phosphor; eisenfreies Glas, ristall. Sie zeigen ein den para-tischen gegensätzliches Ver-, indem sich z. B. ein Wis-ibchen, zwischen die Pole räftigen Elektromagneten auf-gt, „äquatorial" stellt

Fig. 496.



(Fig. 496, a. v. S.), d. h. so, daſs die Achse des Stäbchens normal steht gegen die Kraftlinien des Feldes.

Man hat sich hier vorzustellen, daſs die Kraftlinien den diamagnetischen Stoffen ausweichen, also z. B. durch 1 cm² des Wismuts nur 0,9998 mal so viele Kraftlinien gehen als durch 1 cm² der benachbarten Stellen des Vakuums (der Luft).

Da bei Anwendung hinreichender Feldstärken jeder Stoff entweder para- oder diamagnetisch reagiert, so müſste man die Magnetisierbarkeit zu den „allgemeinen Eigenschaften" der Körper zählen, trotzdem man sie lange Zeit für eine noch speziellere als die Elektrisierbarkeit, nämlich auf eisenhaltige Stoffe beschränkt gehalten hatte.

§ 146. Das magnetische Kraftfeld der Erde (Erdmagnetismus). — Absolu[illegible] für irdische Magnete.

Wenn einmal durch die Beobac[illegible] der *parallelen Richtungen*, nach welchen sich innerhalb eines Zi[illegible] Stadt ... eine möglichst *frei* bewegliche Magnetnadel (Fig. 481, S. [illegible]wenigstens eine *Deklinationsnadel* einstellt, die **Erde** als ein gr[illegible] sich uns dargestellt hat, so liegt die Frage nahe, wo die magneti[illegible]sses Magnets liegen, wie groſs ihre *Polstärke* und sein *magnetis*[illegible]ent sei. Da aber auf die Erde als *Kugel* die Erfahrungen über die I[illegible]le an *Magnetnadeln* jedenfalls nicht ohne weiteres übertragbar sind, [illegible]ir kein Recht, von vornherein anzunehmen, daſs diese Pole überhau[illegible] *berfläche* der Erde liegen müssen (es wäre ja eine Anordnung der n[illegible]en Kräfte in der Weise irgend einer Zahl von Folgepunkten oder dergl. [illegible]). — In der Tat schlugen auch alle Bemühungen fehl, das magnetische Verhalten der Erde daraus zu „erklären", daſs man sich *einen* kräftigen, dünnen Magnetstab von annähernd der Länge und Richtung eines Erddurchmessers dachte, dessen zu berechnende magnetische Wirkungen dann den an den verschiedensten Orten der Erde zu beobachtenden hätten entsprechen müssen. Etwas befriedigender war die noch ältere Fiktion (aus dem XVIII. Jhdt.), nahe dem Erdmittelpunkte einen *kurzen* sehr kräftigen Magnet anzunehmen. Diese bessere Übereinstimmung wird begreiflich, wenn wir uns in erster Annäherung die ganze Erde als *homogen* mit positiv-magnetischen Mengen versehen denken, welche dann nach dem Gesetz über die Wirkung von Kugeln nach auſsen hin so wirken müſsten, als wäre nahe ihrem Mittelpunkte ein Sitz positiver magnetischer Kräfte; und ihm nahe läge auch der negative Pol, als wäre zugleich die ganze Erde homogen mit negativ-magnetischen Mengen versehen.

Um sich aber von allen solchen Hypothesen und Fiktionen unabhängig zu machen und einen den *tatsächlichen* erdmagnetischen Zustand wiedergebenden mathematischen Ausdruck für sämtliche Punkte der Erdoberfläche zu erhalten, forderte Gauss, daſs an möglichst vielen über die ganze Erde verbreiteten Beobachtungsorten besondere Messungen über die *Richtung* und über die *Stärke* der jeweiligen erdmagnetischen Kräfte angestellt würden. Denkt man sich dann einerseits jeden Punkt an, über und unter der Erdoberfläche durch seine geographische Breite φ, seine geographische Länge λ und seinen Abstand r vom Erdmittelpunkte (wo $r \gtreqless R$, der Erdhalbmesser) geometrisch bestimmt, anderseits das *magnetische Potential* V des magnetischen Kraftfeldes der Erde daselbst durch einen algebraischen Ausdruck beschrieben, in welchem auſser φ, λ, r noch 24 vorläufig unbestimmte Koeffizienten vorkommen, so lassen sich durch Einsetzung der aus jenen speziellen Beobachtungen gefundenen Werte der Richtung

l Stärke der erdmagnetischen Kräfte (und hiermit auch die an jenen Beob-
ıtungsorten herrschenden Potentiale) jene 24 Koeffizienten berechnen. Werden
nuf diese Koeffizienten wieder in die **allgemeine** Gleichung für V eingesetzt,
ssen sich nun auch für solche Orte in der Nähe der Erdoberfläche, für die
ch keine direkten Beobachtungen vorliegen, Richtung und Gröfse der daselbst
rrschenden magnetischen Kräfte vorausberechnen. Insoweit auch diese Rech-
ıngen dann durch wirkliche Beobachtungen ihre Bestätigung erlangen, kann
er mathematische Ausdruck für V als die **vollständige und allgemeine**
eschreibung des magnetischen Zustandes der Erde gelten.

In der Tat sind nach dem Plane von Gauss von 1834 an seitens aller Kultur-
aten „**Beobachtungsstationen für Erdmagnetismus**" errichtet worden,
ren es jetzt 34 (davon 20 in Europa) gibt. — Die **theoretische** Aufgabe dieser
ationen ist, die nötigen Beiträge zu der soeben erörterten vollständigen
eschreibung des erdmagnetischen Zustandes durch eine täglich zu bestimmten
unden anzustellende Beobachtung der **erdmagnetischen Elemente**, nämlich
eklination, Inklination und **Horizontalintensität** zu sammeln. Erst hiermit ist
ch die Grundlage für eine künftige **Erklärung** des Auftretens der erdmagne-
chen Kräfte gegeben (eine Hypothese hierüber vergl. § 147).

Die **praktische** Bedeutung aller dieser im folgenden noch näher zu
ildernden erdmagnetischen Unter-
hungen liegt namentlich in der
rwendung der Kenntnisse über
Verhalten der Magnetnadeln zur
entierung im Seewesen, im Berg-
sen, in der Feldmefskunst u. s. f.
ist es z. B. dem Seefahrer, welcher
bis dahin unbesuchte Teile der
loberfläche (z. B. bei Südpolar-
editionen) vordringen will, von
hster Wichtigkeit, auch für diese
genden die jeweilige Deklination
auszusehen; dies gelingt durch
tsetzen des den wirklichen Beob-
tungen entnommenen Verlaufes
„Isogonen", Isoklinen und Iso-
ıamen mit um so brauchbareren
näherungen, je dichter das Beob-
tungsnetz über die ganze Erde
gebreitet ist.

Fig. 497.

Mehr im einzelnen sind die bei der Erforschung des **erdmagnetischen**
standes — hiermit aber überhaupt auch erst die bei den meisten Messungen
gnetischer Kräfte was immer für **paramagnetischer** und **diamagnetischer**
rper im absoluten (nicht blofs relativen) Mafse — in Betracht kommenden
griffe, Methoden und Ergebnisse die folgenden:

1. **Deklinationsnadel** nennen wir eine Magnetnadel, die um eine
rtikale Achse in horizontaler Ebene drehbar ist: Magnet
ttels Korkscheibe auf Wasser schwimmend (ähnlich wie beim ältesten
inesischen Kompafs); Nadel mit Achathütchen auf einer vertikalen
itze (Fig. 497; die Nadel ist umlegbar, um Abweichungen der

Fig. 498. Fig. 499.



magnetischen Achse *cd* von d
bindungslinie *ab* der Spitzen
gieren); Magnetstab an I
hängend; **Deklinatorium**
und **Magnetometer** mit Sp
lesung (Fig. 499). — **Kompaſs**,
Bussole (wie „orientiert“ sich der
Seemann mittels dieser?).

Deklinationswinkel oder kurz **magnetische Deklination** (in der Seemannssprache „Miſsweisung“) nennt man den Winkel, den die magnetische Achse der ruhenden Deklinationsnadel mit dem astronomischen Meridian (der SN-Richtung) einschlieſst.

Sowie unter geographischem oder astronomischem Meridian in genauer wissenschaftlicher Fassung nicht die in der NS-Richtung verlaufende Linie verstanden wird, sondern die durch diese Gerade gelegte vertikale Ebene (§ 176), so wird auch unter dem **magnetischen Meridian** diejenige vertikale Ebene verstanden, welche durch die magnetische Achse der ruhenden Deklinationsnadel gelegt gedacht wird. Die **Deklination** läſst sich also auch definieren als der (Flächen-) Winkel zwischen der Ebene des astronomischen und der Ebene des magnetischen Meridians.

Die Deklination ist im allgemeinen für verschiedene Orte der Erdoberfläche verschieden, wie zuerst COLUMBUS (1492) gelegentlich seiner ersten Fahrt über den Atlantischen Ozean bemerkt hat; siehe unten.

Die Deklination ist aber auch an demselben Orte veränderlich mit der Zeit, indem sie beträchtliche **säkulare Variationen** im Verlaufe von Jahrzehnten und Jahrhunderten, ferner kleinere regelmäſsige Veränderungen mit **jährlicher** und **täglicher** Periode, endlich **unregelmäſsige Störungen** zeigt. — Es sei sogleich hier bemerkt, daſs ähnliche Veränderlichkeiten auch die beiden anderen der erdmagnetischen Elemente, Inklination und Horizontalintensität, aufweisen.

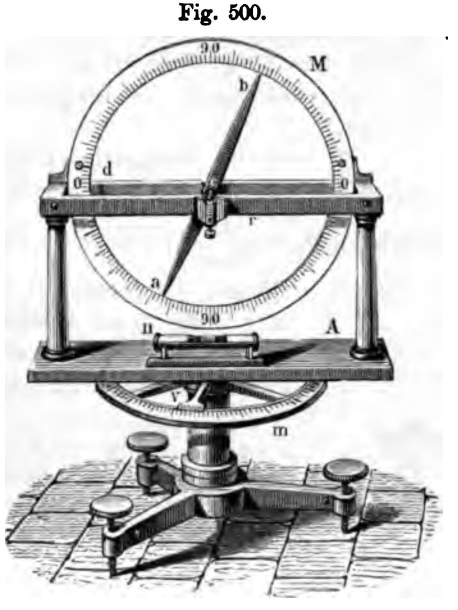
Für einen bestimmten Zeitpunkt bieten eine zusammenfassende Darstellung die Isogonenkarten (Fig. 504), auf welchen die Orte gleicher mittlerer Deklina-

n durch Linienzüge, **Isogonen**, verbunden sind; die Linie der Deklination 0° ißt **Agone**. — Über dreierlei Bedeutungen des Wortes **„magnetischer Nordpol“** rgl. unten bei den „Ergebnissen“.

2. Die **Inklinationsnadel** ist um eine durch ihren Schwerpunkt hende horizontale Achse in vertikaler Ebene drehbar.

Inklinationswinkel oder kurz **magnetische Inklination** heißt r Winkel, den die magnetische Achse der Nadel mit der Horintalen einschließt, sobald e Drehungsebene der adel zusammenfällt mit em magnetischen Merian. — Das **Inklinatorium** ig. 500) besteht deshalb im esentlichen aus einem vertilen Teilkreise (Inklinationseis), in dem sich die Ininationsnadel dreht, und an m die Inklinationswinkel von m wagrechten Durchesser aus abgelesen werden, d einem horizontalen ilkreise (Deklinationskreis), er dem der vertikale Teilis samt der Nadel sich n Azimut“ (§ 175) drehen st.

Fig. 500.



Daß und warum für die Bestimmung der Inklination die Einstellung des klinationskreises in dem magnetischen Meridian wesentlich ist, zeigt folgender

Versuch: Drehen wir langsam den Inklinationskreis des Inklinatoriums (oder ch die Nadel in Fig. 481, indem wir die Schere mit den Fingern fassen und sie n die Vertikale drehen), so zeigt sich, daß die Nadel um einen Winkel i (für sere Gegenden rund $i = 65^0$) sich senkt, wenn sie sich in der Ebene des eridians drehen konnte; daß dagegen die Senkung bis 90° zunimmt, wenn sie ch in der Ebene normal zu der des magnetischen Meridians drehen mußte. — Die rklärung dieses auf den ersten Anblick überraschenden Verhaltens der Inklinaonsnadel liegt darin, daß von der Gesamtintensität der magnetischen Kraft der rde, welche in die Richtung der frei beweglichen Magnetnadel fällt, die in die bene des magnetischen Meridians fallende „Horizontalintensität“ unwirksam emacht ist, eben weil die Drehungsachse der Nadel nun nicht mehr frei ist.

Aus den Angaben der geschilderten Apparate gestaltet sich nun die Ermittelng der Richtung und Intensität der magnetischen Erdkräfte wie folgt:

1. Es wird mittels des Deklinatoriums oder Magnetometers die weilige Größe des **Deklinationswinkels** δ und hiermit die Lage s magnetischen Meridians bestimmt.

2. Es wird die Stärke der in die Richtung des magnetischen Meridians entfallenden Horizontalkomponente des Erdmagnetismus, kurz die **Horizontalintensität** H, entweder aus der Schwingungszahl des in 1. benutzten Magnetstabes und seinem Trägheitsmoment (LA 186) oder mit einer für Schulzwecke hinreichenden Genauigkeit durch folgenden *Versuch* bestimmt: Die vertikal abwärts gerichtete (hinreichend steife) Zunge einer Hebelwage drückt (oder zieht mittels eines Kokonfadens) eine Deklinationsnadel so, dafs durch Auflegen eines bestimmten Gewichtchens auf die eine Wagschale die Nadel entgegen der Richtkraft der Erde um 90° gedreht erhalten wird (LA 187).

LA 186.

LA 187.

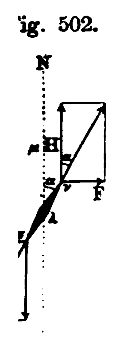
3. Es wird mittels des Inklinatoriums der **Inklinationswinkel** i bestimmt.

4. Es wird die **Gesamtin**[illegible]**t** J der erdmagnetischen Kraft für den Ort und die Zei[illegible]obachtungen 2. und 3. nach der Gleichung $J = \frac{H}{\cos i}$ bere[illegible]nn die Horizontalintensität, wie sie sich als Rich[illegible]uf die Deklinationsnadel äufsert, ist nur die in di[illegible]ntalebene fallende Komponente der Gesa[illegible] sie sich als Richtkraft auf die Inklination[illegible] (Fig. 501).

Fig. 501.

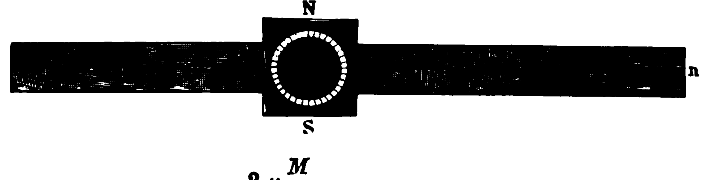
Dafs und inwiefern nun aber die Gröfsen H und J, welche die magnetischen Kräfte der Erde betreffen, nur Hand in Hand mit den magnetischen Kräften, bezw. magnetischen Momenten der bei den Versuchen verwendeten Nadeln und Stäbe bestimmt werden können, wird an obigem Versuche 2 (oder was immer für anderen Methoden) zur Bestimmung von H klar. Gesetzt nämlich, es sei der nämliche Stab einmal in schwach, ein andermal in stark magnetischem Zustande durch den Faden aus der ihm durch die Richtkraft der Erde angewiesenen Lage herausgezogen worden; es wird hierzu einer um so gröfseren Kraft an der Wage bedürfen, je gröfser entweder die Polstärke, bezw. das magnetische Moment des Stabes, oder je gröfser die augenblickliche Richtkraft der Erde, oder je gröfser beide sind. Da die Horizontalintensität H nur die Gröfse der Kraft bedeutet, mit der die ganze Erde auf den Einheitspol einer Deklinationsnadel (die also sehr schwach magnetisch sein müfste) wirkt, d. i. die Kraft, mit der die magnetische Menge 1 seitens der Erde wagrecht nach Norden getrieben wird, so wird eine magnetische Menge m mit mH Dyn angetrieben. — Da aber überdies von dem der Horizontalintensität unterworfenen Stabe auch nicht einmal die Polstärke m selbst, sondern nur sein magnetisches Moment $ml = M$ in dem Verhalten des Stabes sich äufsert, so liefert der Versuch 2 direkt nur den numerischen Wert A für das Produkt der zwei Faktoren $M . H = A$. — Zu dieser „ersten Hauptoperation" für die Bestimmung von M und H kommt, damit wir zur Bestimmung dieser zwei Unbekannten zwei Gleichungen erhalten, noch als

5. „zweite Hauptoperation" die Bestimmung des Quotienten $M : H = B$. Es wird beim Versuche nach Fig. 484, S. 448 der Winkel α abgelesen, um den durch den Stab $(n, s; l)$ vom Moment M bei seiner **„ersten Hauptlage"** die Nadel $(\nu, \sigma; \lambda)$ von der Polstärke μ aus dem magnetischen Meridian **abgelenkt** wird.


Fig. 502.

Da auf dieselbe Nadel (ν, σ; λ) die Horizontalintensität mit einer Kraft μH längs des magnetischen Meridians wirkt, so nimmt die Nadel ihre Zwischenstellung nach dem Kräfterechteck (Fig. 502) aus μH und der in § 143, Gl. (2) bestimmten Kraft F so ein,

Fig. 503 (vergl. Fig. 485, S. 448).



dafs $tg\,\alpha = \frac{F}{\mu H} = \frac{2\mu \frac{M}{r^3}}{\mu H}$ wird, woraus $\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} tg\,\alpha = B.$

bei erklärt sich das Ausfallen des Faktors μ hier aus der Erwägung, dafs bei ebenen magnetischen Kräften des Stabes und der Erde sie auf Magnetnadeln beliebig schwächerer oder stärkerer Magnetisierung zwar mit kleineren oder [g]röeren Kräften, aber im selben Verhältnis einwirken werden.) — LA 186. LA 186.

Aus den beiden Gleichungen $MH = A$ und $M:H = B$ ergibt sich schliefs- ı $M = \sqrt{AB}$ und $H = \sqrt{A:B}$.

Bei den streng wissenschaftlichen Durchführungen der zwei Hauptoperationen, ı sie Aufgabe der mit viel künstlicheren experimentellen Hilfsmitteln aus-:üsteten magnetischen Observatorien sind, müssen auch an Stelle der hier nur ıematisch und in erster Annäherung durchgeführten Berechnungen viel ver-:ikeltere treten. Sie liefern dann folgende

Ergebnisse hinsichtlich der magnetischen Kraft der Erde: ären durch gleichzeitige. Beobachtung in einem sehr dicht und ıichmäfsig über sehr viele Orte der Erde ausgebreiteten Beobachngsnetz allenthalben die erdmagnetischen Elemente, δ, i, H, bestimmt, liefsen sich hieraus auch die Linien gleichen magnetischen)tentials an der Erdoberfläche (magnetische Äquipotentiallinien, veaulinien) berechnen und konstruieren. So wurde z. B. die Karte g. 505 für das Jahr 1835 (auf Grund eines damals freilich noch sehr ckenhaften Beobachtungsmaterials) gewonnen. — In bezug auf diese iveaulinien stellen dann die jeweiligen Richtungen der Deklinationsıdel (die nicht zusammenfallen mit den Isogonen oder Deklinationsıien, Fig. 504, aber aus ihnen zu entnehmen sind, siehe unten über ıagnetische Meridianlinien") die Kraftlinien dar, indem sich beide chtungen überall unter rechten Winkeln schneiden (Anh., Nr. 28). Anh. 28. ı je einer Stelle der Erdoberfläche herrscht eine um so gröfsere)rizontalintensität, je näher einander daselbst die Niveauien sind.

Die Niveaulinien sind in Fig. 505 so gezeichnet, dafs die beigesetzten Werte 300, 600, 850, 890 mit dem Faktor 0,00034941 multipliziert werden müssen,

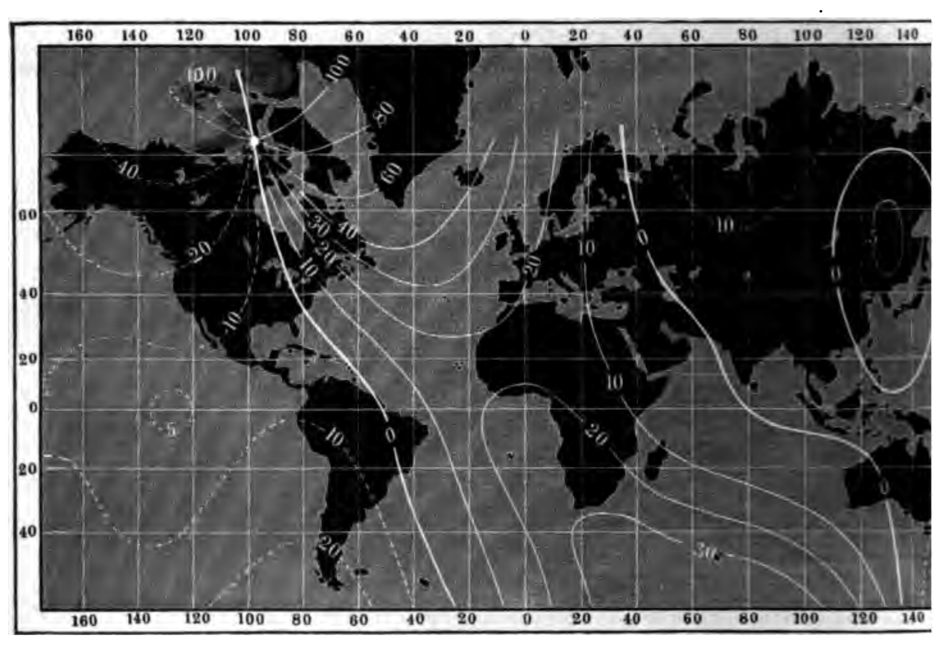


Fig. 504. Magnetische Deklinationslinien (Isogonen) (für 1835 berechnet nach Gauss' Theori
——— westliche Deklination, ... östliche Deklination.

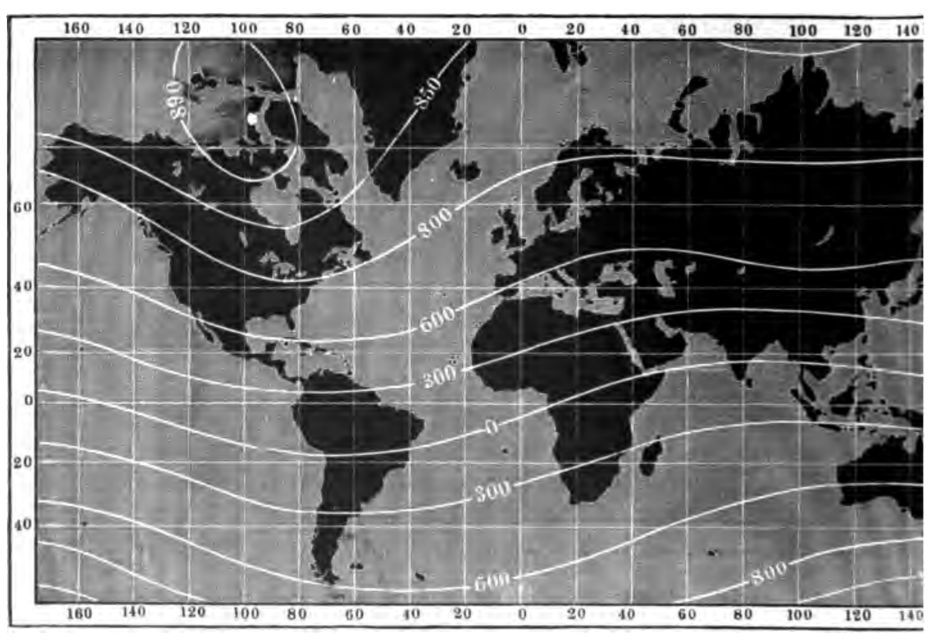


Fig. 505. Magnetische Niveaulinien (für 1835 berechnet nach Gauss' Theorie).

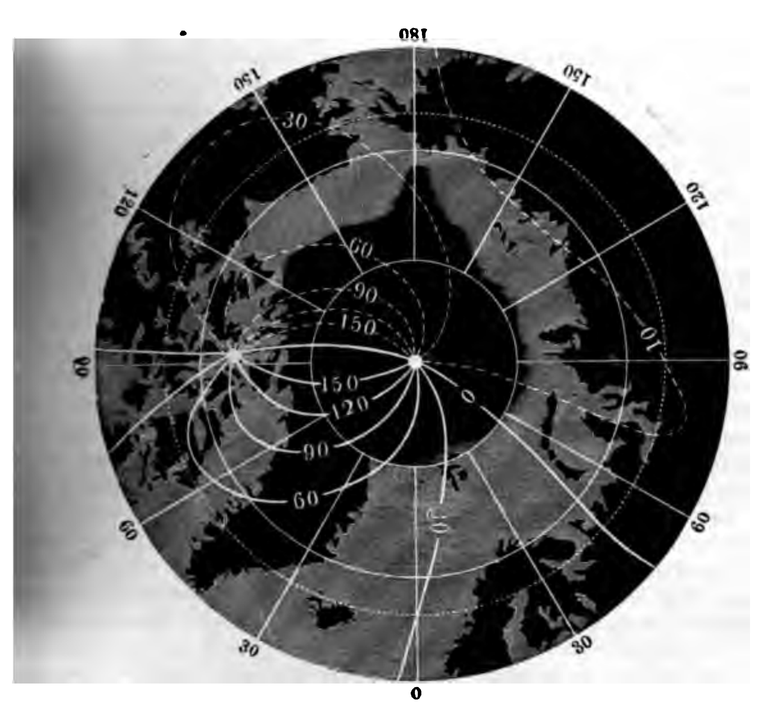


Fig. 506. Geographischer und magnetischer Nordpol (für 1835 berechnet aus Gauss' Theorie).

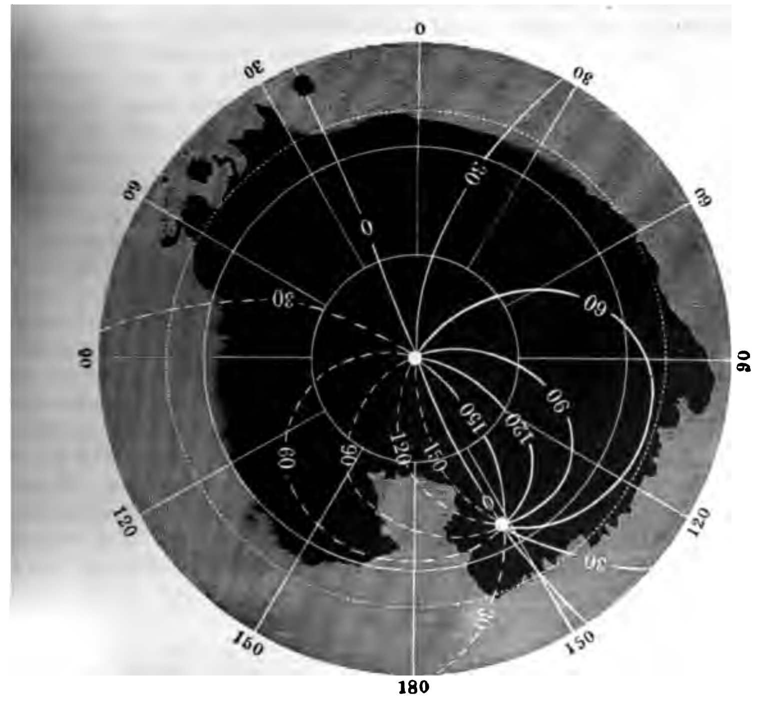


Fig. 507. Geographischer und magnetischer Südpol (für 1835 berechnet aus Gauss' Theorie).

damit sie das dort herrschende magnetische Potential in den absoluten Potentialeinheiten des C-S-G-Systems (Erg per 1 PstE) darstellen. — Denken wir uns für alle Punkte unter, an und über der Erdoberfläche die magnetischen Niveauflächen gezogen, so schneiden sich diese mit der Erdoberfläche in jenen Niveaulinien.

Das Wort **magnetischer Nordpol der Erde** kann in dreierlei Sinn gebraucht werden: Indem Kapitän Ross 1831 bei den Melvilleinseln (70° 5,3′ nördl. Breite und 96° 45,3′ westl. von Greenwich) „den magnetischen Nordpol“ entdeckte, verstand er hi[illegible]unter denjenigen Punkt, an welchem die Deklinationsnadel keine feste [illegible]ellung mehr einnahm, dagegen die Inklinationsnadel sich mit dem Nordp[illegible] vertikal abwärts stellte, wie immer man sie auch im Azimute drehte. — Beide Erscheinungen hätten in gleicher Weise eintreten müssen, wenn der magnetische Zustand der Erde der einer Nadel wäre, deren Spitzen wir uns als den ausschliefslichen „Sitz“ einer nord- und einer südmagnetischen Menge denken, und zwar hätte dabei ein Nordpol der Erde in diesem Sinne sowohl in jenem Punkte der [illegible]ber beliebig tief vertikal unter ihm liegen können. — [illegible]eingangs dieses Paragraphen bemerkt, sich der ma[illegible]rde überhaupt nicht mit dem einer Nadel verglei[illegible] der Erdoberfläche selbst, die im gewöhnlichsten [illegible]etzt noch als „magnetischer Nordpol der Erde“ [illegible] nicht ein Pol im strengen Sinne (2) des Mittelpunk[illegible] 142, wobei sich von selbst versteht, dafs wir die Lage [illegible]erem Sinne schon deshalb nicht durch direkte Versuche erm[illegible]r nicht die Erde als Ganzes wieder in ein homogenes magnetisch[illegible]n können): gleichwohl wäre dies, und nur dies auch für die ganz[illegible]ich der strengste Sinn des Begriffes „Nordpol“. — Eine dritte Bedeutung (3) des Wortes „magnetischer Nordpol der Erde“ wäre endlich die, dafs man hierunter die Stelle höchster nordmagnetischer Intensität (unter oder an der Erdoberfläche) versteht, die dann wieder keineswegs mit den beiden anderen definierten Stellen zusammenfällt. — Dem magnetischen Südpol (im ersten Sinne) kam Borchgrevink 1900 nahe; er verlegt seine jetzige Lage auf 73° 20′ südl. Br., 146° östl. Länge (nahe der Stelle, die nach den bisher ausführlichsten magnetischen Karten von Neumayer vorausgesehen war).

Zum Begriffe der Isogonen oder Deklinationslinien ist noch zu bemerken: Da an dem Begriffe der magnetischen Deklination zwei Richtungen, die des magnetischen und die des astronomischen Meridians, beteiligt sind, so müssen die Isogonen nicht nur am **magnetischen Nordpol** (im 1. Sinne), sondern sie müssen auch im geographischen Nordpol zusammenlaufen (Fig. 506, s. v. S.). Da dieser Umstand unmittelbar nichts mit dem magnetischen Zustande der Erde zu tun hat, so hat Duperrey **magnetische Meridiane** (d. h. Meridianlinien) so konstruiert, wie sie sich ergeben würden, wenn man von je einem Orte der Erde ausgehend in der Richtung der Deklinationsnadel fortginge. Diese magnetischen Meridianlinien schneiden die Deklinationslinien (Isogonen) unter dem jeweiligen Deklinationswinkel und geben also indirekt die Deklination in jedem ihrer Punkte an; auch sie laufen im magnetischen Nordpol (im 1. Sinne) zusammen. **Magnetische Parallele** heifsen dann diejenigen Kurven, die das System der magnetischen Meridianlinien an allen Stellen rechtwinklig schneiden (Anh., Nr. 28): diese sind also identisch mit den magnetischen Äquipotentiallinien oder Niveaulinien.

Anh. 28.

Erdmagnetische Elemente in Mitteleuropa (für die Epoche 1902,0).

…ir.	0°			5°			10°			15°			20°		
	δ	i	H	δ	i	H	δ	i	H	δ	i	H	δ	i	H
…Br.	17,2°	69,3°	0,171	14,3°	68,9°	0,175	11,4°	68,5°	0,177	8,6°	68,1°	0,179	5,8°	67,8°	0,181
…Br.	16,0°	66,0°	0,191	13,6°	65,5°	0,194	11,1°	64,9°	0,197	8,8°	64,5°	0,.00	6,4°	64,1°	0,203
…Br.	15,0°	62,2°	0,213	13,0°	61,6°	0,216	10,8°	61,0°	0,219	8,8°	60,5°	0,223	6,8°	59,8°	0,226

Hier bedeutet z. B. die Zahl $H = 0{,}200 = {}^1/_5$ (für 50° n. Br., 15° ö. L.), dafs den Einheitspol der Deklinationsnadel ein Horizontalkomponente von der Stärke Dyn einwirkt.

Die mittleren jährlichen Änderungen betragen für dieses Gebiet (er-lossen aus den nächst vorausgehenden für die nächst folgenden Jahre):

für die Deklination δ im Mittel — 0,09°
für die Inklination i im Mittel — 0,03°
für die Horizontalintensität H + 0,00016 bis 0,00025.

Als Beispiel säkularer Variationen folgende Deklinationen für Paris:

…re:	1541	1580	1603	1610	1663	1770	1780	1814	1832	1850	1885
…d.:	7°	$8^1/_2$°	8° 45′	8° östl.	0° west.	8° 10′	19° 55′	22° 34′	22° 3′	20° 36′	16° 15′.

Mit Rücksicht auf die säkularen, jährlichen und täglichen Variationen sowie die Störungen des erdmagnetischen Zustandes haben wir uns das System erd-gnetischer Kraftlinien und Niveauflächen als fortwährend ein wenig fluktuierend denken. — Die Ursachen dieser Veränderungen sind natürlich noch unbekannt, ja die Ursache des Erdmagnetismus selbst unbekannt ist. Doch hat sich z. B. eigt, dafs, als am 18. April 1842, 9h 10′ in Griechenland ein heftiges Erdbeben ttfand, noch in derselben Minute zu Parma, Prag und München die Deklination plötzliche starke Veränderung aufwies (allerdings vielleicht nur infolge chanischer Erschütterung). Man bezeichnet starke, weit ausgebreitete Störungen erdmagnetischen Zustandes als magnetische Ungewitter. Zu diesen gehören h die Nordlichter (§ 200).

Ein Bild von der durchschnittlichen Stärke der Magnetisierung, die die le als Ganzes annähernd gleichförmig haben müfste, um das an ihrer Oberfläche beobachtende Potential hervorzubringen, erhalten wir, wenn wir sie als aus ter Kubikzentimetern von homogen magnetisiertem Eisen (Stahl, Nickel . . .) tehend denken, deren magnetisches Moment 0,078 ist. Diese Stärke der Magne-erung entspricht nur etwa 0,01% der Sättigung des stärkst magnetisierten chen Eisens (§ 145). Der Radius einer Kugel aus solchem Eisen müfste ${}^1/_{26}$ Erd-ius sein, damit sie dieselbe magnetische Wirkung im äufseren Kraftfelde hat die wirkliche Erde.

III. Mechanische Kräfte zwischen Strömen und Magneten. Magneto- und Elektro-Induktion.

---

§. 147. Bewegung und Erregung von Magneten durch Ströme. Übersicht der Wechselwirkungen zwischen Magneten und Strömen. — [illegible]ivalenz von Magnetstäben und Kreiss[illegible]römen.

Geschichtliches. Blicken wir von [illegible] heute unzählbar gewordenen Anwendungen elektromagnetischer V[illegible]gä[illegible] [illegible]elegraphie, Telephonie, Signalwesen, Elektromotoren [im Sinne der [illegible] [illegible]chnung „elektrische Triebmaschinen“] u. s. f.) zurück auf Örsteds Beob[illegible] [illegible]820), dafs eine Deklinationsnadel abgelenkt wurde, als durch eine [illegible]barten Draht ein Strom flofs, so stellt es sich als ein seltsamer Umst[illegible]ar, dafs gerade diese Entdeckung so lange, drei Jahrzehnte seit Galvanis e[illegible]obachtung, während deren im übrigen so grofsartige Entdeckungen wie di[illegible] elektrischen Lichtbogens, der Elektrolysen u. s. f. zu verzeichnen waren, au[illegible] [illegible]ch hatte warten lassen. Denn längst waren nahe Beziehungen zwischen magnetischen und elektrischen Erscheinungen bekannt (Gilbert 1600 hatte sie sogleich unter dem gemeinsamen Titel „*De magnete*“ behandelt; Coulomb hatte für beiderlei Kräfte das gleiche Wirkungsgesetz gefunden); es war beobachtet, dafs durch Blitzschläge Magnetnadeln beeinflufst werden, auch die Entladung von Leydener Flaschen ergab Magnetisierungen, wenn auch keine regelmäfsigen. — Zuerst bemerkte Örsted eine Ablenkung durch einen infolge Starkstromes glühenden Kupferdraht und schrieb sie der Wärmewirkung zu, beobachtete aber alsbald auch ähnliche Wirkungen infolge schwacher Ströme und variierte nun planmäfsig die Erscheinungen, indem er den Stromleiter ober-, unterhalb, neben der Nadel, parallel zu ihr und unter schiefen und rechten Winkeln vorübergehen liefs. Als zusammenfassenden Ausdruck aller so gewonnenen Einzelgesetze gab Ampère (1820) die „**Schwimmerregel**“ an: **Denken** wir uns eine menschliche Figur **mit dem (positiven) Strom** schwimmend **und das Gesicht dem Magneten zuwendend**, so wird der **Nordpol** der Nadel **gegen die Linke** des Schwimmers abgelenkt. — **Bequemer ist folgende**

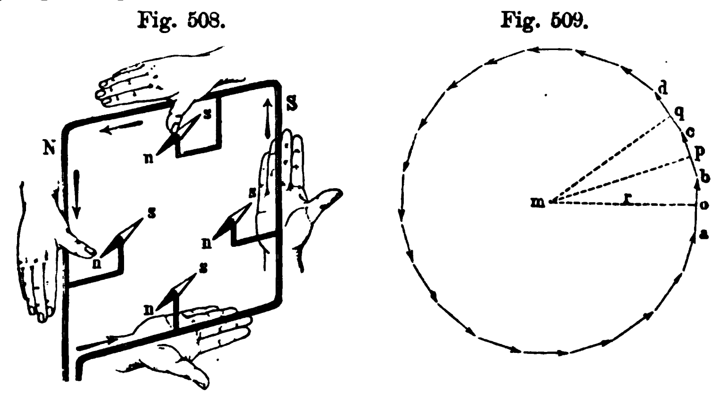
„Handregel“: **Liegt an dem Stromleiter die rechte Hand so, dafs die Finger in der Richtung des Stromes weisen und die Innenfläche der Hand dem Magneten zugewendet ist, so wird der Nordpol gegen den Daumen abgelenkt.**

Anwendung dieser Regel auf jeden der vier Teile des eine Nadel umfliefsenden Rechteck-Stromes (Fig. 508; vergl. ferner Fig. 523, S. 474); ebenso auf die einzelnen Elemente des **Kreisstromes** (Fig. 509).

Die Gröfse der Ablenkung zeigt sich schon bei rohen Versuchen abhängig von der „Stärke“ des Stromes und von seinem Abstande von der Nadel. Ist

nämlich die Stromstärke klein (vorläufig geschätzt nach den ebenfalls schwachen Wärmewirkungen, chemischen Wirkungen u. s. f.), der Abstand grofs, so weicht die Deklinationsnadel nur wenig vom magnetischen Meridiane ab; dagegen stellt sie sich fast normal zum Meridian, wenn ein starker Strom sehr nahe der Nadel in der Meridianrichtung fliefst. Eben hieraus erklärt es sich auch, dafs bei denjenigen Stellungen, wo der Strom schon normal (horizontal, schief oder vertikal) gegen die Richtung der ruhenden Deklinationsnadel fliefst, diese keine Ablenkung zeigt; desgleichen dann, wenn die Deklinationsnadel aus der ihr durch die

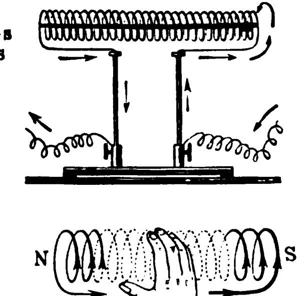
Fig. 508. Fig. 509.



vertikale Drehungsachse angewiesenen horizontalen Drehungsebene heraustreten müfste. — Im übrigen geschieht die schliefsliche Einstellung der Nadel gemäfs dem Zusammenwirken der ablenkenden Kraft des Stromes mit der Richtkraft des Erdmagnetismus. — Alle diese quantitativen Beziehungen sollen erst im folgenden § näher untersucht werden. Vorerst verfolgen wir die Beobachtungen des § 141, nach welchen Magnete und Solenoide — sowie auch schon je einer der Kreisströme, aus denen ein Solenoid zusammengesetzt zu denken ist — in ihren Wirkungen auf Magnete und Ströme äquivalent sind.

Versuch 1: a) Neben den Nordpol *n* einer ruhenden Deklinationsnadel *ns* (Fig. 510) wird ein Solenoid so gehalten, dafs seine Achse auf der der Nadel normal steht.

Fig. 510.



Nach der auf beliebige Teile des Solenoides anzuwendenden Handregel wird dann bei der aus der Figur ersichtlichen Stromrichtung der Nordpol vom Solenoid weggetrieben. Somit entspricht das Ende *N* des Solenoids dem Nordpol eines Magnets, dessen magnetische Achse zusammenfällt mit der geometrischen Achse des Solenoids. Man nennt deshalb diese geometrische Achse auch geradezu die **magnetische Achse des Solenoids** (und zwar auch mit Rücksicht auf deren Länge; so dafs man ähnlich wie von den Polen und dem „magne-

tischen Moment eines Stabes", § 143, auch von den Polen und dem „magnetischen Moment eines Solenoids" spricht). — b) Variation des Versuches für die Pole n, S; s, N; s, S. — c) Wirkung eines in der Hand gehaltenen Magnetstabes auf die Pole eines wie in § 141, Fig. 475 schwimmenden (oder mittels eines „Ampèreschen Gestelles" schwebenden) Solenoids. — d) Anziehungen und Abstofsungen der Pole zweier Solenoide (§ 141, Figg. 475, 476).

Die in obigen Versuchen gebrauchten Solenoide mit weit abstehenden Windungen blanken Drahtes sind in den zahlreichen praktischen Anwendungen vertreten durch „Drahtspulen" (Fig. 511), d. s. Holzspulen, auf die ein mit isolierender Seide, Wolle (Guttapercha) umsponnener Draht in eng anliegenden Windungen, oft in vielen Lagen übereinander, gewickelt ist, dessen Enden meist Klemmschrauben tragen. — Für die theoretische Behandlung bleibt vor allem zu unters[...] die Wirkung je eines Kreisstromes auf je einen Pol und umgekehrt, wie [...]nähernd verwirklicht ist in folgendem.

Fig. 511.

Versuch 2: Ein kreisförmiger s[...]omdurchflossener Draht wird in die Ebene des magnetischen Meridi[...]ns gebracht und in den Mittelpunkt des Kreises wird a) der Nor[...]-(Süd-)Pol einer langen Deklinationsnadel, b) der Mittelpunkt einer kurzen Nadel gestellt. Auch hier erhalten die Pole Bewegungen normal zur Ebene des Kreisstromes (Vorbild der Tangentenbussole, folg. §).

Versuch 3: Durch einen wagrechten Karton wird ein vertikaler gerader Draht gesteckt, der von einem starken Strom durchflossen ist. Stellt man auf den Karton a) hinreichend nahe dem Draht eine oder mehrere kleine Deklinationsnadeln, so stellen sich ihre Achsen normal zum Draht; wird eine Deklinationsnadel um den Draht längs eines Kreises, durch dessen Mittelpunkt der Draht geht, herumgeführt, so stellt sich ihre magnetische Achse immer längs der Tangente dieses Kreises ein. — b) Ähnlich bilden Eisenspänchen Ringe (Fig. 512) diese stellen also die **Kraftlinien des magnetischen Feldes de[s] geraden stromdurchflossenen Leiters dar.**

Denken wir uns solcher Ringe beliebig viele in parallelen Ebenen übereir[n]ander, so kommen sie in den Mantelflächen von röhrenförmig ineinander liegende[n] Zylindern zu liegen, deren gemeinschaftliche Achse der stromdurchflossene Drah[t] ist. In diesem Sinne bezeichnete FARADAY den „Strom als Achse der Kraft (ein Ausdruck, der nach HELMHOLTZ' eigenem Zeugnis lange Zeit nicht verstande[n] wurde). — Wenden wir auf die ringförmigen Kraftlinien den in § 144 festgesetzte[n] Begriff der Richtung einer magnetischen Kraftlinie an, wonach hierunter di[e] Richtung verstanden wird, nach der die Nordpole der Nadeln oder der Spänche[n]

sen, so ergibt sich aus der Schwimmer- oder Handregel MAXWELLS Bohrer-
gel: **Die kreisförmigen Kraftlinien des Stromes verlaufen in demjenigen
ehungssinn, in dem sich die Teilchen eines Bohrers** (Korkziehers) **drehen,
n wir in der Richtung des (positiven) Stromes vorwärts schrauben** (Fig. 512).
Denken wir uns nun einen solchen geraden von seinen Kraftlinien umgebenen
aht wieder zu einem Kreisstrom (Fig. 513) und dann mehrere solche zu einem

Fig. 512. Fig. 513. Fig. 514. Fig. 515.

Fig. 516.

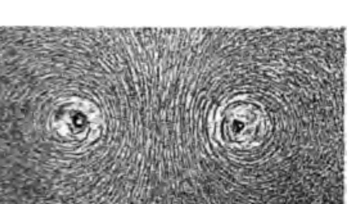
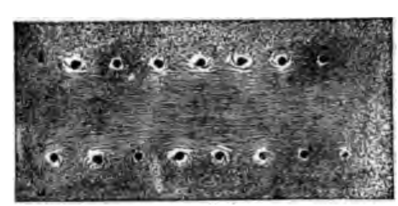


Fig. 517.



enoid (Fig. 515) zusammengerollt, so ordnen sich die Kraftlinien, bezw. die
nspänchen (Fig. 516 bezw. Fig. 517) immer ähnlicher denen eines Magnetstabes
. 514) an. —

Wenn nun **Solenoide** und **Kreisströme** nach den „Bewegungen“, genauer:
h den beschleunigenden Kräften, welche sie auf einen Magnetpol ausüben,
gnetstäben äquivalent sind, so ist zu erwarten, dafs sie auch Magnete
eugen, „erregen“ können. — In der Tat fand AMPÈRE im Verfolgen der von
sted entdeckten **Bewegung** von Magneten durch Ströme alsbald auch die
regung von Magneten durch Ströme; man bezeichnet diese als

Elektromagnetische Erscheinungen (im engeren Sinne). —
ersuch 4: a) Um einen geraden oder hufeisenförmigen Stab aus
eichem Eisen wird durch übersponnenen Draht ein Strom geleitet.
olange dieser fliefst, erweist sich der Eisenkern als kräftiger Magnet
Elektromagnet). — b) Stahl an Stelle von weichem Eisen wird nur
ngsam magnetisch, bleibt es aber auch nach Aufhören des Stromes.

Die Wirkung des Elektromagnets nach aufsen ist so kräftig, dafs ihr gegen-
ber die des Solenoids nach aufsen häufig aufser Betracht bleiben kann. Doch
ben die Pole des Solenoids und ihres Magnetkernes gleiche Lage, und ihre
irkungen addieren sich. Wir können uns also auch vorstellen, dafs durch
s Einführen des Eisenkernes in das Solenoid die Wirkung des Solenoids ähnlich
rstärkt worden sei wie durch das Vorlegen des Eisennagels vor einen indu-
renden Pol die Wirkung dieses Pols auf einen Nadelpol bei der Magnetisierung
rch Verteilung (§ 145); oder: die Kraftlinien des Solenoids ohne und mit
senkern unterscheiden sich nur durch die dichtere Scharung.

Versuch 5: Ragt in die Höhlung einer Spule nur ein kleiner Teil eines Stabes aus weichem Eisen, so wird dieser in die Spule hineingezogen, ja der Schwere entgegen schwebend erhalten, solange durch die Spule ein hinreichend starker Strom fliefst. Hier treten also Bewegung und Erregung von Magneten durch Ströme nebeneinander auf (Vorbild des Motors von PAGE, vergl. § 163).

Halten wir die zwei Hauptformen der Wirkung eines Stromes auf einen Magnet unter den Schlagworten „**Bewegung**“ eines Magnets durch einen Strom und „**Erregung**“ eines Magnets durch einen Strom auseinander, so ordnen sich ganz analog auch die Wirkungen zwischen Magneten unter diese beiden Begriffe, nämlich die **Bewegung** eines Magnetes durch einen Magnet (Anziehung und Abstofsung der Pole) und die **Erregung** eines Magnets durch einen Magnet (Magnetisierung durch [illegible] teilung). — Da wir nun aber überdies auch zwei Ströme einander anziehen [illegible] stofsen sahen (§ 141), so werden wir aufser dieser **Bewegung** von St[illegible] durch Ströme auch eine **Erregung** von Strömen durch Ströme er[illegible] lektro-Induktion“) und diesen wieder analog einer Erregung von St[illegible] lagnete („Magneto-Induktion“). Wir erhalten so überhaupt als Le[illegible] die sonst kaum mehr zu überschauende Mannigfaltigkeit aller dieser m[illegible] chen, elektrodynamischen, elektromagnetischen und Induktic[illegible] kungen die folgende Übersicht über die

Wechselwirkungen zwischen Magneten und Strömen:

Bewegung, Erregung	von Magneten durch Magnete:	Anziehung und Abstofsung von Polen, Magnetisierung durch Verteilung.
Bewegung, Erregung	von Magneten durch Ströme:	Örsteds Versuche, Elektromagnete.
Bewegung, Erregung	von Strömen durch Magnete:	Elektromagnetische Rotationen (LA 188), Magneto-Induktion.
Bewegung, Erregung	von Strömen durch Ströme:	**Elektrodynamik im engeren Sinne, Elektro-Induktion.**

LA 188.

Wie nun schon die elektromagnetischen Beziehungen **zwischen Magneten und Strömen** die Äquivalenz von Magneten und Kreisströmen **erwiesen haben, so wird** dies sich auch in allen folgenden Erscheinungen **bestätigen, so dafs wir z. B. nach** Belieben die Magneto-Induktion auf Elektro-Induktion **oder umgekehrt „zurückführen“** können. Eine besondere Anwendung dieser Äquivalenz **ist**

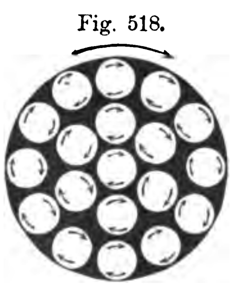


Fig. 518.

Ampères Theorie des Magnetismus: In § 14 wurden alle magnetischen Erscheinungen **zurückgeführt auf** die Vorstellung der Elementarmagnete. **Statt nun hier** bei ein „magnetisches Molekül“ **etwa als Kügelchen mit** einer nord- und südmagnetischen Hälfte **vorzustellen, könnte** wir uns längs seines Äquators **einen Kreisstrom** denken, also den Elementarmagnet **durch einen Elementar**kreisstrom ersetzen, wobei die Ströme **im Innern eine** Magneten einander entgegenwirken (Fig. 518). — **Eine An**wendung dieser Vorstellung **im grofsen ist die Hypothese** zur Erklärung des Erdmagnetismus, **dafs in der Näh** des Erdäquators ein Strom kreise (etwa ein Thermostrom infolge der ungleiche Erwärmung bei der täglichen Bewegung der Erde in Bezug auf die Sonne). **Das** magnetische Feld eines solchen Kreisstromes **wäre dann dem eines Magnetstabe**

gleich, der seine Pole in der Nähe der geographischen Erdpole hat. Insofern aber nach § 146 ein solcher Magnetstab das wirkliche Feld der Erde nur sehr unvollkommen wiedergibt, müfste auch statt des einen Kreisstromes um den Äquator ein mannigfaltigeres System von Kreisströmen angenommen werden.

Statt einer solchen Zurückführung der Magnete auf Ströme hat sich wesentlich in der Elektrotechnik die Ersetzung der Kreisströme und Solenoide durch Magnete bewährt, indem z. B. für den Bau von Strommaschinen, Elektromotoren überall die Lage der magnetischen Kraftlinien der Spulen rechnerisch und konstruktiv zu Grunde gelegt wird. — Gleichviel nun, ob die Zurückführung so oder umgekehrt erfolgt, ist zur vollständigen Begründung der tatsächlichen Äquivalenz die quantitative Feststellung der von Magnetpolen und Stromelementen und hiernach der von ganzen Magnetstäben und Kreisströmen ausgeübten Kräfte erforderlich.

§ 148. Kraftgesetze für Pole und Stromelemente. — Elektromagnetisches Mafs der Stromstärke.

Wie Coulomb die Elementengesetze für die Wirkungen je zweier Ladungspunkte $f = \frac{\varepsilon \varepsilon_1}{r^2}$ Dyn, bezw. je zweier Magnetpole $f = \frac{\mu \mu_1}{r^2}$ Dyn aufeinander aus den allein beobachtbaren und mefsbaren Wirkungen geladener Körper, bezw. ganzer Magnetstäbe ableitete (§ 143), so ergaben sich mittelbar aus Beobachtungen an geschlossenen Stromkreisen und Magneten:

Biot-Savarts Gesetz für **Stromelement und Pol:** $f = \frac{i \lambda \cdot \mu}{r^2}$ Dyn (1)

Ampères Gesetz für **Stromelement und Stromelement:** $f = \frac{i \lambda \cdot i_1 \lambda_1}{r^2}$ Dyn (2)

welche Gleichungen für die einfachsten Fälle gelten, dafs die Stromelemente auf der Verbindungslinie von Element und Pol, bezw. Element und Element normal stehen und dafs die Elemente einander parallel sind. — Um einen Schritt gegenüber (2) verallgemeinert ist $f = \frac{i \lambda \cdot i_1 \lambda_1}{r^2} \cos \vartheta$, wo die Stromelemente von den Längen λ und λ_1 cm noch in Ebenen liegen, die auf der Verbindungsstrecke der Elemente normal stehen, wo aber die durch die Elemente gehenden Geraden miteinander den Winkel ϑ einschliefsen (Fig. 519). Die Diskussion in Bezug auf ϑ besagt, dafs, wenn für $\vartheta = 0$, wo f positiv ist, dies Anziehung bedeutet, für $\vartheta = 90^\circ$, $f = 0$ wird, und für $\vartheta = 180^\circ$ f negativ ist und Abstofsung bedeute. Dafs sich **gleichsinnig parallele Stromelemente anziehen, antiparallele abstofsen,** hat Ampère durch Versuche mit geradlinigen Leiterstücken, deren je eines durch entsprechende Aufhängung (an „Ampères Gestell") beweglich gemacht war, direkt bestätigt. Das Unerwartete, dafs hier **gleich** gerichtete Ströme einander **anziehen** (während doch gleichnamige Ladungen und Pole einander abstofsen) **klärt sich auf**, wenn wir beachten, dafs an zwei mit den Stirnflächen

Fig. 519.

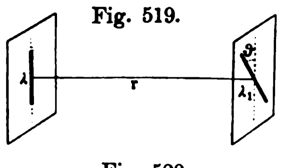
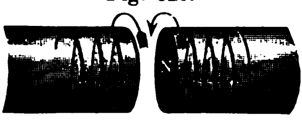
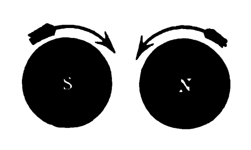


Fig. 520.





aneinander liegenden gleichartigen Solenoiden den gleichsinnigen Stromelementen ungleichnamige Pole entsprechen (Fig. 520 a. v. S.).

Mit der Entwickelung, welche die Elektrizitätslehre durch FARADAY gewann, hat es sich als nützlich erwiesen, nicht überall auf BIOT-SAVARTS und AMPÈRES Elementengesetze zurückzugehen, sondern die magnetischen Felder ganzer Magnete und Solenoide in Beziehungen zueinander zu denken. Speziell wird auch bei der folgenden Definition der elektromagnetischen Stromeinheit nicht mehr zurückgegangen auf die Wirkung der einzelnen Stromelemente, sondern auf die des Kreisstromes als solchen; nämlich:

I. Die **Einheit der Stromstärke** in elektromagnetischem Maſse (m. SE) hat ein Strom, der den Bogen von **1 cm** Länge eines Kreises von **1 cm** Halbmesser durchflieſsend auf einen **Einheitspol** im Mittelpunkte des Kreises mit einer Kraft von **1 Dyn** wirkt.

Technische elektromagnetische **Einheit der Stromstärke** ist **1 Ampère (Amp. oder A)** = [illegible] **SE.** — Somit 1 m. SE = 10 A.

Die Stärke i m. SE = 10 [illegible] hat ein Strom, der jenen Bogen von 1 cm im Einheitskreise [illegible]end, auf jenen Einheitspol mit einer Kraft von i Dyn wirkt.

Von einem solchen Strome [illegible], wirkt dann der ganze Kreisstrom von 1 cm Halbmesser auf den Ein[illegible]m Mittelpunkte mit $2\pi i$ Dyn, der ganze Kreisstrom von r cm Halbmesse[illegible] einen Pol von μ PE mit der Kraft

$$F = \mu \, . \, \frac{2\pi r \, . \, i}{r^2} = \mu \, . \, \frac{2\pi i}{r} \text{ Dyn} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Umgekehrt: Wirkt ein Strom unter diesen Bedingungen mit einer Kraft von F Dyn auf einen Pol von μ PE, so ist die

$$\textbf{Stromstärke } i = F \frac{r}{2\pi \, . \, \mu} \text{ m. SE} = 10 \, . \, F \frac{r}{2\pi \, . \, \mu} \text{ Ampère} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nach diesem Maſse erfolgt die Messung von Strömen durch die Tangentenbussolen, die Sinusbussolen und die mannigfaltigen Arten von Galvanometern und Ampèremetern. Überall wird hier die elektromagnetische Stromkraft in Vergleich gesetzt mit der magnetischen Richtkraft der Erde auf die Pole der Nadel, speziell der Horizontalintensität H (§ 146). Theoretisch grundlegend, wenn auch elektrotechnisch nicht mehr verwendet, ist die

Tangentenbussole von WILHELM WEBER: Der Mittelpunkt eines dicken Metallringes (oder mehrerer Windungen übersponnenen, dicken Drahtes) fällt zusammen mit dem Mittelpunkte einer kurzen Deklinationsnadel, die mittels eines leichten Zeigers auf eine wagerechte Kreisteilung weist und zwar auf 0°, wenn die Ebene des Ringes in den magnetischen Meridian fällt (Fig. 521). Einem Ausschlag der Nadel um α^0 Grade entspricht die

$$\textbf{Stromstärke } i_\alpha = R \, tg \, \alpha \text{ m. SE} = \mathbf{10} \, R \, tg \, \alpha \text{ Amp.} \quad . \quad . \quad (5)$$

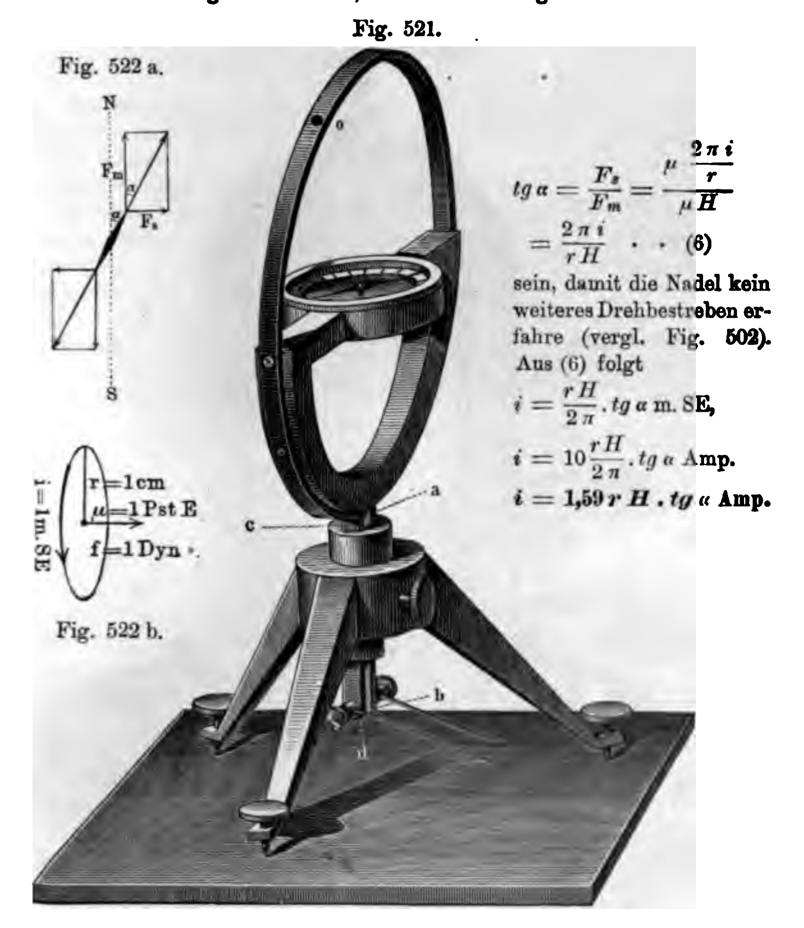
wo R der **Reduktionsfaktor** der Bussole, bezogen auf absolutes

heifst und mafszahlengleich ist der in m. SE gemessenen Strom-desjenigen Stromes, der einen Ausschlag von 45° erzeugt.

eben also z. B. drei Ströme Ausschläge von 40°, 45°, 50°, so verhalten sich omstärken wie $tg\ 40° : tg\ 45° : tg\ 50° = 0{,}83910 : 1 : 1{,}1918$.

bleitung der Gleichung (6): Fingieren wir, die Nadel sei so kurz, dafs, l sie abgelenkt wird, jeder ihrer Pole dem Mittelpunkt des durch den gehenden Kreisstromes nahe genug bleibe, um von diesem mit der Kraft $\mu \cdot \frac{2\pi i}{r}$ Dyn normal zur Ebene des magnetischen Meridians angetrieben zu . Da aber gleichzeitig durch die Horizontalkomponente des Erd-ismus der Pol mit der Kraft $F_m = \mu . H$ Dyn parallel zur Ebene des ischen Meridians angetrieben wird, so mufs nach Fig. 522

Fig. 521.



$$tg\,\alpha = \frac{F_s}{F_m} = \frac{\mu \frac{2\pi i}{r}}{\mu H} = \frac{2\pi i}{r H} \quad . \quad . \quad (6)$$

sein, damit die Nadel kein weiteres Drehbestreben erfahre (vergl. Fig. 502). Aus (6) folgt

$$i = \frac{rH}{2\pi} . tg\,\alpha \text{ m. SE},$$

$$i = 10 \frac{rH}{2\pi} . tg\,\alpha \text{ Amp.}$$

$$i = 1{,}59\, r\, H . tg\,\alpha \text{ Amp.}$$

ist $\frac{rH}{2\pi} = R$ die oben in Gleichung (5) als Reduktionsfaktor be-ete Gröfse, ausgedrückt durch r und H. — Er ist also wegen des Aus-

fallens des Faktors μ zwar wieder (wie bei der Bestimmung von H selbst **unabhängig** von dem Magnetisierungszustand der Nadel, wegen H aber **unabhängig** von dem jeweiligen magnetischen Zustand der Erde. Doc diese Gröſse R wegen der geringen täglichen und jährlichen Variatio

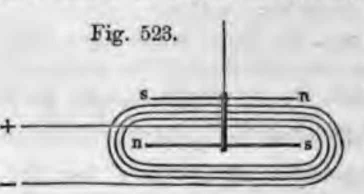


Fig. 523.

Stärke des erdmagnetischen Feld eine Konstante des Instruments be werden. Sie wird entweder **theor** bestimmt durch Messung von r ı oder **empirisch** nach **elektroc** **schem Maſse**, § 154, indem man selben Stromkreis die Tangentenbuss ein Voltameter hintereinander schal dem dieses ein spezielles i in Ampère gibt, folgt aus diesem i und ei wieder der Reduktionsfaktor. — In KESSLERS Bussole ist durch entsprechend

Fig. 524.



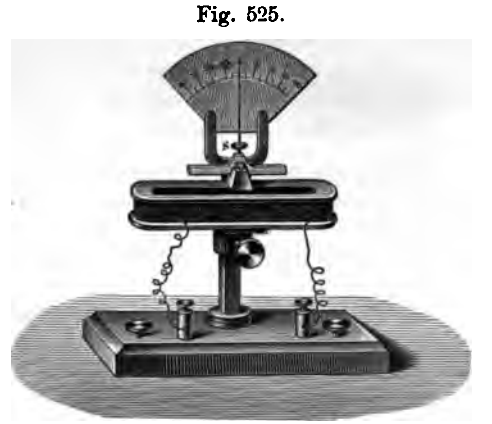
des Radius der 10 Stromdrahtwindungen $i_{45} = 1$ Amp.; daher zeigt sie un $i_\alpha = tg\,\alpha$ **Amp.** (bezw. bei dünneren Windungen $i'_\alpha = \frac{1}{100} tg\,\alpha$ Amp.).

Über die **Sinusbussole** vergl. LA 189. — In **Gaugains Bussole** ist die LA. 189.
del seitwärts von der Ebene der Kreisströme so angebracht, daſs die durch das **sächliche** Heraustreten der Pole aus der Mittelebene der Tangentenbussole ent**stehenden** Fehler sehr annähernd kompensiert werden.

Zum Nachweis, bezw. zur Messung schwacher Ströme dienen die **Galvanoskope** und **Galvanometer** (letzterer Ausdruck im engeren **Sinne**, denn streng genommen ist auch schon die Tangentenbussole **ein** Galvanometer). Bei diesen wird übersponnener Draht in vielen **Windungen**, die sich in ihren Wirkungen gegenseitig unterstützen, **um** eine Magnetnadel geführt (vergl. Fig. 508); die Empfindlichkeit **kann** beliebig (bis 10^{-12} Amp.) gesteigert werden, indem statt einer **Nadel** ein annähernd astatisches Nadelpaar verwendet wird (Fig. 523); **Poggendorffs** Galvanometer, Fig. 524.

Statt der Nadel sind auch magnetisierte Stahlspiegel (oder Glasspiegelchen **mit** aufgekitteten Magnetstäbchen) behufs Spiegelablesung, Glockenmagnete u. s. f. **in** Gebrauch. Wegen der meist von der Anordnung nach Kreisströmen stark **abweichenden** Wickelung der Drähte läſst sich die elektromagnetische Wirkung **nicht** aus der Gestalt der Drähte und des Magnets berechnen, und es muſs daher **der** Gradteilung (oder Längenteilung bei Spiegelablesung) die zugehörige Reihe **der** Stromstärken empirisch bestimmt werden durch Vergleichung mit einer **Tangentenbussole** oder mit einem **Voltameter**. — **Torsionsgalvanometer** für indirekte Messung starker Ströme. — Das namentlich in **technischen** Anlagen gebräuchliche **Ampèremeter** (§ 172) besteht in **einem** beweglichen Stücke weichen **Eisens** in einem Solenoid und ist **nach** den Angaben der Tangentenbussole oder des Voltameters auf **Ampère** geeicht. Ähnlich das **Vertikalgalvanometer** für Schulversuche (auch für Projektion, Fig. 525). **Vergl.** auch Fig. 534, S. 480 das **Meſsinstrument** für Ampères und **Volt** (nach Hartmann und Braun).

Fig. 525.



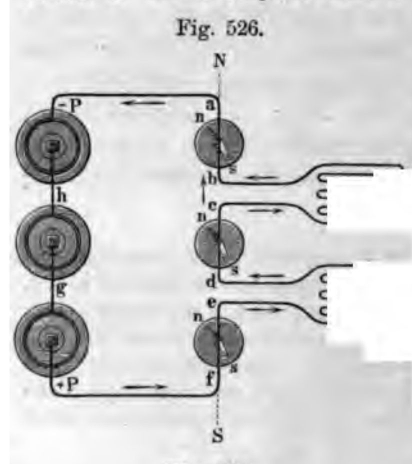
149. Ohms Gesetz. Messung von Widerständen und von elektromotorischen Kräften.

Im § 140 ergab sich Ohms Gesetz Elektr. Stromstärke $= \frac{\text{Elektromot. Kraft}}{\text{Widerstand}}$ **zunächst** nur theoretisch (nach Analogie des Wärmestromes) aus der Vorstellung **fließender** Ladungsmengen. Um diese Beziehung nunmehr experimentell zu **beweisen**, gehen wir nicht auf die in elektrostatischem Maſse gemessenen und **dann** als „flieſsend" gedachten Ladungsmengen zurück, sondern nehmen sogleich

die Stromstärke als im elektromagnetischen Mafse (nach Ampères), d. h. nach den Angaben der Tangentenbussole (oder einem nach ihr geeichten Galvanometer, Ampèremeter u. s. w.) gemessen an. — Von welchen anderen Umständen dann die so gemessene Stromstärke abhängt (bezw. nicht abhängt) zeigen folgende Versuche:

I. Unabhängigkeit der Stromstärke von der Stelle im Leiterkreise. *Versuch* 1: Als Stromquelle diene z. B. eine galvanische Batterie von drei Elementen (Fig. 526). Die Pole $+P$ und $-P$ sind durch einen möglichst langen Leiterdraht so verbunden, dafs die Leiterstücke ab und ef nahe bei den Polen, cd fern von den Polen sind. Werden hier Bussolen eingeschaltet, so zeigen [illegible] überall die gleiche Stromstärke an. [illegible]sgleichen auch in den Verbindungs[illegible]ähten der einzelnen Elemente gh (Bar[illegible]w 1825).

Fig. 526.



Versuch 2 (nach Fechner 1831): In [illegible] Brett (Fig. 527) sind Leiter aus verschiedenen Stoffen, von verschiedener Länge und Stärke hintereinander in leitende Verbindung gesetzt. Wird dieser Streifen wieder in die Richtung des magnetischen Meridians NS und über ihn an beliebigen Stellen eine Magnetnadel gebracht, so wird sie über allen Stellen von einem durchgehenden Strome gleich stark abgelenkt (vorausgesetzt, dafs sie überall gleichen Abstand von ihm hat).

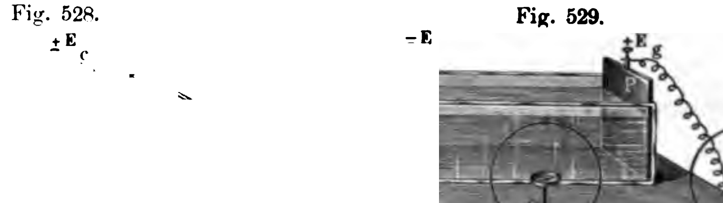
Fig. 527.

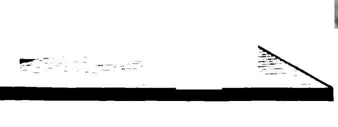


Die hiermit festgestellte Unabhängigkeit ist nicht so zu verstehen, dafs die Ablenkung der Nadel auch dann noch dieselbe bliebe, wenn z. B. längere oder dünnere Drähte eingeschaltet würden; sondern dann wird die Ablenkung schwächer (vergl. II), aber wieder an allen Stellen des Stromkreises in gleichem Mafse.

II. Abhängigkeit der Stromstärke vom Widerstande. *Versuch* 3: Geben zwei in Säure getauchte Platten bei bestimmtem Abstande voneinander und bestimmten Zuleitungsdrähten zur Bussole (Fig. 528) einen bestimmten Ausschlag

Fig. 528. Fig. 529.



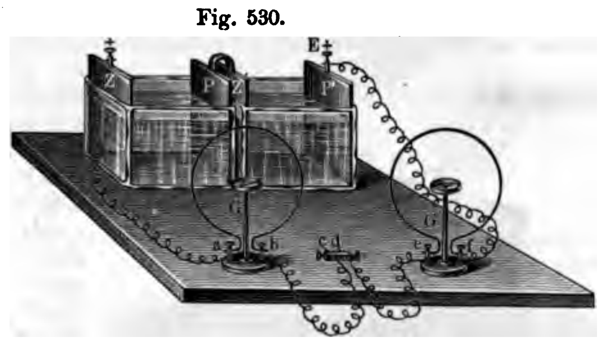




ladel, so wird dieser kleiner, wenn der Plattenabstand gröfser oder wenn die te länger, dünner oder z. B. statt aus Kupfer aus Eisen genommen werden. i zeigt sich, dafs, wenn sowohl jener Abstand der Platten 2, 3 . . . n fach auch die Länge des Drahtes 2, 3 . . . n fach genommen wird (somit auch Bussolen, Fig. 529), die Bussolen nur $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n}$ der früheren Stromstärke igen.

III. Abhängigkeit der Stromstärke von der elektromotori-.en Kraft. *Versuch* 4 (Fig. 530): Werden zwei Elemente hintereinander chaltet, so dafs die chen den Platten eiden Flüssigkeits-len dieselben Quer-nitte und zusammen elbe Länge haben beim Versuch 3, wächst die Strom-ke wieder auf den zen Wert wie bei 528, somit das ppelte wie bei 529.

Fig. 530.



Aus solchen Versuchen schliefsen wir: Wenn einerseits der **Widerstand** zwar sowohl der **„innere“** der Stromquelle wie der **„äufsere“** in den Drähten, instrumenten u. s. f.) 2, 3 . . . n mal so grofs, anderseits die elektromoto-he Kraft (diese vorläufig — Näheres vergl. § 155 — proportional gesetzt der hl der hintereinander geschalteten Elemente) 2, 3 . . . n mal so grofs wird, t die Stromstärke ungeändert; oder: **Die Stromstärke ist dem Gesamt-rstande verkehrt, der elektromotorischen Kraft direkt proportional.** —

Da von den drei hier genannten Gröfsen im bisherigen eine Einheit nur für Stromstärke, nämlich 1 Ampère, festgesetzt wurde, so lassen sich für die n anderen die Einheiten, nämlich das **Ohm** für den Widerstand und das für die elektromotorische Kraft, so wählen, dafs sich statt der obigen olischen Gleichung die bestimmteren symbolischen Gleichungen ergeben:

$$1 \text{ Amp.} = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ohm}} \text{ und Ohms Gesetz: } J \text{ Amp.} = \frac{V \text{ Volt}}{W \text{ Ohm}}.$$

Für die Reihenfolge der Definitionen dieser beiden Mafsgröfsen „Ohm“ und t“ kommt in Betracht, dafs sich Widerstände von bestimmter Gröfse viel leichter tellen und untereinander vergleichen lassen als elektromotorische Kräfte; wes-nächst der Stromstärke (I) im elektromagnetischen Mafse so definiert wird:

II. Die **Einheit des elektrischen Widerstandes ist 1 Ohm** (1 Ω), der Widerstand eines Leiters, in dem ein Strom von **1 Amp.** die stung von **1 Watt**, d. h. die Arbeit von **1 Joule per sec** $= 10^7$ **Erg sec verrichtet** (§ 22, S. 94). — LA 190. LA 190.

Diese Arbeitsleistung wird am bequemsten im kalorischen Mafse ttelt, indem 1 Joule $= 10^7$ Erg äquivalent 0,24 cal. sind (§ 82).

Dieser theoretischen, auf die Einheiten des C-S-G-Systemes zurückgehenden tion der Widerstands-Einheit waren praktische Bestimmungen der Wider-

stände durch JACOBI (Kupferdrähte) und SIEMENS vorangegangen. SIEMENS Qu silbereinheit ist der Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge 1 mm² Querschnitt bei 0° C. Da diese Einheit völlig konstant und leicht na messen ist, so bezieht man auf sie auch die Definition:

Das gesetzliche Ohm ist der Widerstand einer Quecksi säule von 1,063 m Länge und 1 mm² Querschnitt bei 0° C.; d

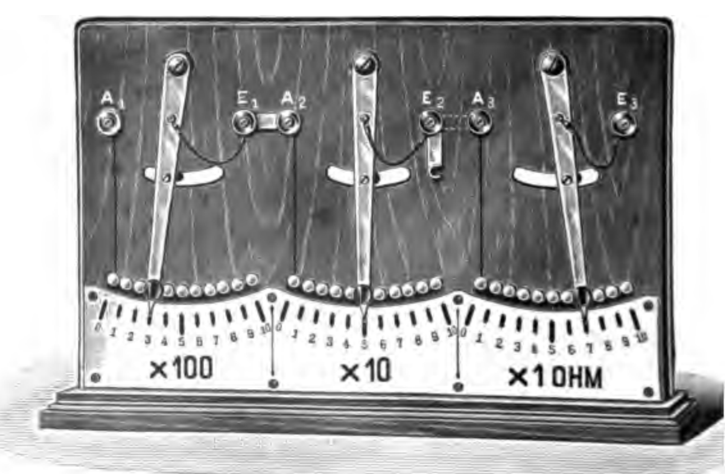
$$1\ \Omega = 1{,}063\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{mm}^2}\ \mathrm{Hg}\ 0^\circ\ \mathrm{C.}$$

Um in dieser Maſseinheit die Widerstände von Leitern aus verschied Stoffen und verschiedener Gestalt (meist, aber keineswegs immer in Draht anzugeben, dienen die W **stands-Etalons**, denen sehr verschiedene Einrichtu gegeben hat: Der **Stöpsel-R stat** von Siemens (Fig. 531) hält Drahtspulen, deren W stände Bruchteile und Viel eines Ω (analog einem Gew satze von $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^5/_{10}$, 1 g 5 g, 10 g . . .) darstellen. alle Stöpsel eingesetzt, so der Strom von der einen Kl zur anderen durch die d und fast widerstandslosen M stäbe. Wird dagegen z. B Stöpsel 1 Ω herausgezoge mufs hier der Strom seinen Weg durch die eine Spule nehmen, deren W stand 1 Ω ist. — Ähnlich (noch bequemer) beim **Kurbelrheostaten** zu zwecken (z. B. Fig. 532 nach Hartmann und Braun). — Während bei

Fig. 531.

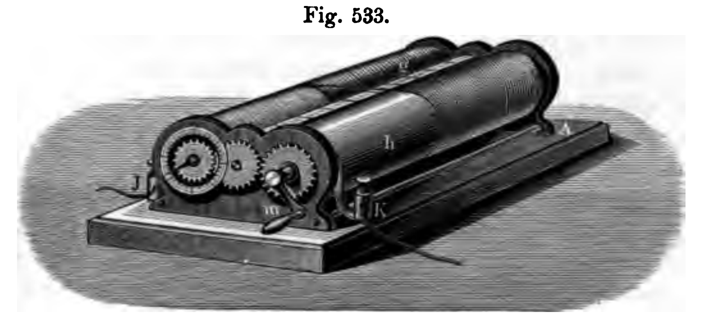


Fig. 532.
1/6 n. Gr.



schriebenen Rheostaten die Widerstände nur unstetig geändert werden können, schieht dies stetig z. B. beim **Walzenrheostaten** von WHEATSTONE, wo sich liebig lange Drahtteile von einer nicht leitenden Rolle aus Serpentin, Buchsbaumholz auf eine leitende Rolle, deren Widerstand zu vernachlässigen ist, wickeln lassen, Fig. 533.

Fig. 533.



Einem anderen Zwecke als diese Mafswiderstände dienen die Regulier- (Vorschalt-) Widerstände, z. B. der **Kurbelrheostat** (vergl. Fig. 646, ähnlich **Lampenrheostat**), um nämlich z. B. die Starkströme der Strafsenleitungen auf eine für die einzelnen einzuschaltenden Apparate taugliche Stromstärke abzusetzen. — **Flüssigkeitswiderstände.**

Die Abhängigkeit des Widerstandes von der Gestalt der Körper t die einfachste im Falle von Prismen und Zylindern (so bei Drähten, Stäben, Flüssigkeitssäulen in Röhren, Trögen u. s. w.).

Z. B. Ein Kupfer-, Eisendraht von der Länge l m und dem Querschnitt q mm² hat den

Widerstand $w = c\,\frac{l}{q}$ — wo c der **spezifische Leitungswiderstand**

nd die

eitungsfähigkeit $\frac{1}{w} = k\,\frac{q}{l}$, — und $\frac{1}{c} = k$ das **spezifische Leitungsvermögen**

es leitenden Stoffes (Kupfer, Eisen . . .) heifst.

Diese **Beziehung** von w zu l und q ergibt sich zunächst theoretisch nach nalogie **zum** Wärmestrome aus der analogen Stellung des Faktors $k\,\frac{q}{l}$ in den leichungen für den kalorischen und den elektrischen Strom, § 140, S. 440. Da- n ist die Bezeichnung „Widerstand" von der Vorstellung hergenommen, dafs e im Drahte fliefsende Ladungsmenge in ihm eine Art Reibungswiderstand findet, nlich wie das Wasser in engen Leitungsröhren; wobei das blofs Bildliche und ypothetische dieser Vorstellung nicht zu verkennen ist (auch gibt es gerade bei r Wärmeleitung nichts, was als „Widerstand" zu denken wäre, den die von ellen höherer zu Stellen niederer Temperatur fliefsenden Wärmemengen finden). er den tatsächlichen Kern des Begriffes „elektrischer Leitungswiderstand", dafs h nämlich in jedem durchströmten Leiter ein kleinerer oder gröfserer Teil der ktrischen Energie in Wärme-Energie umsetzt, vergl. § 152.

Experimentell kann die Vergleichung von Widerständen durch einander- oder Nebeneinanderschalten des zu messenden Widerstandes mit standsetalons und Vergleichung der so sich ergebenden Stromstärken bei derter elektromotorischer Kraft der Stromquelle erfolgen. Meistens, so na

LA 190, 191. bei Widerstandsbestimmungen mittels der **Wheatstoneschen Brücke** (LA 1 kommen in Anwendung die Gesetze der

Stromverzweigung. Die Klemmen z. B. einer galva Batterie kann man statt durch einen Draht auch durch 2, n Leiter von gleichem oder verschiedenem Widerstand verbind vorauszusehen, fliefst durch den Leiter von gröfserer Leitungs keit auch ein gröfserer, durch den von kleinerer Leitungsfä ein kleinerer Teil des Stromes.

Ein besonderer Fall ... nverzweigung ist folgender: Wenn eine überall gleich dicke ... s gut leitendem Stoffe an einer ... einen Strom eintreten und ... anderen Stelle Q_2 der Platte den St treten läfst, wird zwar der ... m gröfseren Teile die kürzeste Ve von Q_1 und Q_2 aufsuchen, ... stetigem Übergange werden „Stro (vergl. § 42) von immer grö... nge und dementsprechend geringer sich an der Leitung mitbeteiligen. ... nlich erwachsen mannigfaltige math Aufgaben, die KIRCHHOFF (1849) ... lgemein lösen lehrte. — Wären Klemmen P_1 und P_2 desselben E... entes durch zwei Drähte von de ständen w_1 und w_2 und daher den Leitungsfähigkeiten $\frac{1}{w_1}$ und $\frac{1}{w_2}$ verbu bestätigt es sich durch Versuche, dafs $i_1 : i_2 = \frac{1}{w_1} : \frac{1}{w_2}$ oder $i_1 w_1 = i_2$ ist die Summe der Stromstärke $i_1 + i_2 = i$, d. i. die Stärke eines Stro er sich in einem Leiter gebildet hätte, dessen Leitungsfähigkeit der Summe der Leitungsfä beider Zweige; $\frac{1}{w} = \frac{1}{w_1} + \dots$ lich für n Leitungen. (Allg über Kirchhoffs Gesetz sie

Fig. 534.



III. Einheit der motorischen Kraft is (1 V), d. i. diejenige motorische Kraft (spez jenige Potentialdiffere in einem Leiter von Widerstand einen Stron Stärke **1 Ampère** he

Das Voltmeter (Fig. 6 unterscheidet sich vom Am (vergl. Fig. 635, S. 561) nur dafs das Solenoid von seh Widerstande ist (so bein mente von Hartmann un Fig. 534, das für schwach

alvanometer, für stärkere als Ampèremeter und bei Einschalten der Spule grofsem Widerstande als Voltmeter dient). Wird nämlich das Voltmeter rei Stellen P_1, P_2 einer Stromquelle oder Stromleitung angeschlossen, so entlt sich in dem Solenoid wegen des grofsen Widerstandes ein nur schwacher a und es wird die Potentialdifferenz zwischen P_1 und P_2 durch den Mefsrat selbst nur wenig verändert (ähnlich wie durch ein Thermometer von ger Wärmekapazität sich die Temperatur des zu prüfenden Körpers nur g ändert). Aus dem bekannten Widerstande des Solenoids und der jeweilig stenden Stromstärke lassen sich daher die Potentialdifferenzen $V_2 - V_1$ jederberechnen; dies kann ein für allemal für die möglichen Stromstärken geschehen das Instrument direkt nach Volt geeicht werden.

Mafsangaben über die elektromotorischen Kräfte verschiedener Ladungs- und nquellen vergl. §§ 150, 155, 162.

Für diejenige Gröfse, die durch Volt gemessen wird und die im bisherigen Potentialdifferenz, teils elektromotorische Kraft (für die in der trotechnik das Zeichen EMK gebräuchlich ist) genannt wurde, ist auch, sntlich in der Elektrotechnik, der Ausdruck **Spannung**, speziell **Klemmenmnung** in Gebrauch; z. B. es herrsche an den Endklemmen einer Dynamoshine, von denen der Strom in die Leitungen zu elektrischen Eisenbahnen u. dergl. geführt wird, eine Klemmenspannung von 500 Volt, von 2000 Volt u. dergl. elbe Wort „Spannung“ wurde in § 133 für einen wesentlich anderen Begriff, lich für den aus der gegenseitigen Abstofsung von Ladungselementen hervornden statischen Druck auf die Flächeneinheit verwendet (somit zu messen Dyn per cm², wogegen elektrische Potentiale und Potentialdifferenzen in Erg st. LE zu messen sind). Diese Verschiedenheit der Bedeutungen erklärt sich us, dafs das Wort Spannung schon in derjenigen Zeit der Entwickelung der trizitätslehre gebräuchlich war, da die Begriffe selbst sich erst zu klären anm. Im folgenden soll von Spannung im Sinne von Potentialdifferenz erst ler innerhalb der Elektrotechnik (§ 162 ff.) die Rede sein. — —

Beziehungen zwischen elektrostatischen, elektromagnetischen elektrotechnischen Mafsen. — Da in § 136 die Einheit der Potentialrenz und hiermit die der Stromstärke gegründet war auf die Vorstellung der trostatischen Ladungseinheit (§ 135) und des „Strömens“ solcher Ladungen in Leitern, wogegen von diesen Vorstellungen das elektromagnetische Mafs der mstärke ganz unabhängig ist, so tritt die Frage nach den Umrechnungslen zwischen beiden Systemen auf. Die Antwort kann in verschiedenen Formen iben werden (LA 192), am besten prägt man sich ein: LA 192.

1 Volt [d. i. die Einheit der Potentialdifferenz im elektrotechhen Mafssystem] = $^1/_{300}$ **elektrostatische Potentialeinheit** (§ 136) 10^8 absol. elektromagnetische Einheiten (§ 148).

Die Zahl **300** ist als abgerundeter Wert gewählt worden auf Grund der st von W. Weber 1856 gefundenen Zahl $3{,}1707 \cdot 10^{10}$, für die nach späteren ueren Versuchen ein Wert zwischen $3{,}003 \cdot 10^{10}$ und $3{,}014 \cdot 10^{10}$ zu setzen wäre der, als mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes sehr nahe einstimmend, in der elektromagnetischen Theorie des Lichtes (§ 157) zu grofser utung gelangt ist. Einige weitere Beziehungen zwischen den elektrischen gröfsen in den verschiedenen Mafssystemen vergl. math. Anh., Nr. 29. Anh. 29.

Über die in der Elektrotechnik üblichen Bezeichnungen **Volt-Ampère = 1 Watt** Einheit der Leistung), **Wattstunde** (als Einheit der Arbeit) u. dergl. vergl. § 172.

Bemerkung 1: Man hört oft von Anfängern fragen, „wie stark der Strom“ einer gegebenen Batterie, eines Akkumulators, einer Dynamomaschine sei. In dieser Form ist die Frage gegenstandslos, da es ganz vom „äufseren Widerstande“ des an die Klemmen geschlossenen Apparates (Elektromagnet, Spule, Elektromotor, Wasserzersetzungsapparat, Glühlampe . . .) nebst dem Widerstande der zum Anschlusse verwendeten Leitungsdrähte abhängt, wie grofs in diesem ganzen Stromkreise die Stromstärke ausfällt. — Nur wenn die Klemmen durch einen Leiter von sehr geringem Widerstande („Kurzschlufs“ durch einen kurzen dicken Draht) verbunden wären, hinge die so sich ergebende Maximal-Stromstärke, die diese Stromquelle geben kann, nur mehr von ihrer elektromotorischen Kraft und von ihrem eigenen inneren Widerstande ab. Begreiflicherweise pflegen aber die Stromquellen gerade für diesen Grenzfall nicht mehr eingerichtet zu sein, sondern z. B. eine Dynamomaschine, die zum Betriebe einer Lichtleitung bestimmt ist, würde (falls nicht besondere Sicherheitsvorkehrungen getroffen sind: „Bleisicherungen“ § 171) bei eintretendem Kurzschlusse sofort in ihren eigenen Stromleitungen eine so grofse Stromstärke geben, dafs die Bewickelungen der Drähte abbrennen würden. (Bei „Nebenschlufsmaschinen“ tritt bei Kurzschlufs Entmagnetisierung, also kein Abbrennen ein.)

Bemerkung 2. Der Begriff des „äufseren Widerstandes“ drängte sich früher auf als der des „inneren Widerstandes“, indem sich z. B. bei langen und dünnen Zuleitungsdrähten die Stromstärke geringer zeigte, trotzdem an der Stromquelle scheinbar keine Veränderung eingetreten war. Wenngleich aber der obige Versuch III zeigt, dafs ähnlich wie die Verlängerung des Drahtes auch die Verlängerung des Flüssigkeitsprismas zwischen den beiden Platten des Elementes zur Schwächung der Wirkungen im äufseren Stromkreise beiträgt, und wenn wir also auch dieser Flüssigkeit einen Widerstand zuschreiben, so wird doch dieser Begriff eines inneren Widerstandes einer näheren Untersuchung vor allem deswegen bedürfen, weil in der Flüssigkeit beim Durchgang des Stromes auch chemische Veränderungen eintreten. Überdies sind aber die Berührungsstellen von Flüssigkeit und Metall selbst Stromquellen (etwas der Entstehung des Stromes Förderliches, wogegen die äufseren Stromleiter zur Entstehung des Stromes überhaupt nichts beitragen). — Noch auffallender ist dies bei dem inneren Widerstande z. B. einer Dynamomaschine, wo die Drahtwindungen der zwischen Magnetpolen rotierenden Spulen gleichzeitig die Erzeugungsstellen des Stromes sind und auch diesem Strome Widerstand entgegensetzen. — Es soll daher der Begriff und Einflufs des „inneren Widerstandes“ an dem typischen Beispiele des inneren Widerstandes galvanischer Batterieen in § 155 noch näher untersucht werden.

Bemerkung 3. Sowie bei der Stromverzweigung mehrere äufsere Leiter den Leitungskreis bilden, können auch an mehr als zwei Stellen P_1 und P_2 des Leiterkreises mehrere und verschiedenartige Stromquellen vorhanden sein. Es wäre z. B. denkbar und ausführbar, hintereinander Batterieen, Thermoelemente, Dynamomaschinen u. s. f. zu schalten. Wie Rechnung und Versuche zeigen, gilt dann das folgende verallgemeinerte Ohmsche Gesetz:

$$\text{Stromstärke} = \frac{\text{Summe der elektromotorischen Kräfte}}{\text{Summe der Widerstände}}, \qquad i = \frac{\Sigma E}{\Sigma W},$$

oder $\Sigma E = i\,\Sigma W$, welcher Ausdruck auch für je eine der Zweigleitungen gilt. Da in einer solchen nach den eingangs geschilderten Versuchen 1 und 2 die Stromstärke an allen Stellen des Leiters konstant ist, so ist weiter $\Sigma E = \Sigma(i \cdot W)$. In dieser Form heifst die Beziehung der zweite **Kirchhoffsche Satz**. Als

ter **Kirchhoffscher Satz** wird der (oben bei der Berechnung der Strom-
:weigung **benutzte) Satz bezeichnet**, dafs an jeder Stelle eines geschlossenen
ionären Stromes so viel Ladung zufliefst, als abfliefst; somit $\Sigma i = 0$.

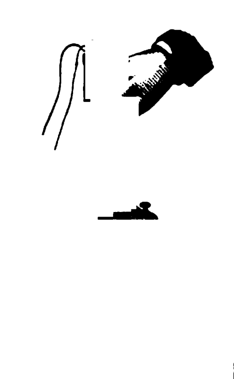
§ 150. Magneto- und Elektro-Induktion.

Geschichtliches. Faraday erwartete im Hinblick auf die Erscheinungen der
:trischen und magnetischen Verteilung, sowie des Bewegtwerdens von Strom-
ern durch Magnete, dafs in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters oder
es Magnets in geschlossenen Stromleitern Ströme auftreten werden. Diese
vartung bestätigte sich aber so lange nicht, als jene Körper in gegenseitiger
he waren. Erst als Faraday zufällig bemerkte (1831), dafs im Augenblicke
Entstehens und Vergehens des Stromes im „primären" Stromkreise, und
s auch bei gegenseitiger Annäherung und Entfernung des primären und
kundären" Leiters das mit letzterem verbundene Galvanometer einen (kurz
iernden) Strom anzeigte, und nachdem er weiter auf Grund der Äquivalenz von
)mdurchflossenen Spulen und Magneten auch bei Bewegung eines Magnets gegen
ı sekundären Leiter solche Ströme gefunden hatte (noch 1831), war die Reihe
r Beziehungen zwischen Strömen und Magneten (Combinationen der
›wegung" und der „Erregung" nach Übersicht S. 470) vollständig in der Er-
rung nachgewiesen. — Entsprechend der bisher eingehaltenen Ersetzung der
rkungen von Kreisströmen durch die von Magneten stellen wir die Versuche
ır Magneto-Induktion voran:

Fig. 535.



Fig. 536.



Versuch a): Eine Spule mit sehr vielen Windungen dünnen
rahtes ist durch lange Zuleitungsdrähte mit einem Galvanometer zu
nem geschlossenen Stromleiter verbunden (Fig. 535). Die Nadel zeigt
einen Strom an, wenn man der Spule einen **Magnet nähert** (rasch
die Höhlung hineinschiebt); 2. keinen Strom, solange der Magnet
:h ruhig in der Spule befindet; 3. einen Strom von entgegengesetzter
.chtung wie in 1, wenn von der Spule **der Magnet entfernt** (rasch

ı) wird; 4. keinen Strom, wenn der Magnet sich ruhig
ır Spule befindet. — Man nennt die bei 1 und 3 auf-
trete öme **magnetoinduzierte** Ströme.

b) Wir. der Magnet durch ein **Solenoid** ersetzt (eine Spule von wenigen ndungen dicken Drahtes, damit der Widerstand klein, also die S mstärke grofs sei), durch das der „primäre" Strom einer Batt st (Fig. 536 a. v. S.), so ergeben sich bei den gleichen Bewegungen wie in 1 und 3 **elektroinduzierte Ströme.**

Sowohl bei a) wie bei b) kommt es nur auf die relative Bewegung der erregenden Magnete in bezug auf die Induktionsspule an; es kann also auch die Induktionsspule zu ruhenden Magneten und Primärspulen hinbewegt oder von ihnen entfernt werden (Fig. 592; einfachstes Vorbild der Wechselstrommaschine).

c) Dem Annähe es Magnets, bezw. Solenoids an den geschlossenen (r ist gleichwertig ein **Verstärken** ruhender Magnete, ı Entfernen (a, b, 3) ist ebenso gleichwertig das Sc.

Es sind nun die Richtung, β) für die Stärke der induzierten Ströme fest

Zu α). Gehen wi nderen Fall (a, 1), und zwar sei noch spezieller der einer Wi sspule sich nähernde Pol ein Nord-). Der durch den geschlossenen Leiter- le induzierte Strom hat dann die durch d ıgedeutete Richtung. Dies läfst sich direkt experimentell feststellen, aber auch schon vorher nach Analogie des Arbeitsaufwandes bei Influenzmaschinen (bezw. beim Abheben des Elektrophordeckels, § 134) mit Wahrscheinlichkeit erwarten (log. Anhang, Nr. 37). Denn angenommen, das Herzubewegen von N habe schon einen Induktionsstrom von der angegebenen Richtung erregt, so wird dieser Strom gemäfs der Handregel den Nordpol von sich wegzubewegen suchen und es wird also das Annähern des Poles entgegen dieser Abstofsung mechanische Arbeit kosten, für die dann eben dieser Strom das elektrische Äquivalent darstellt. — Gleiches gilt, wenn (b, 1) einer Windung der sekundären Spule eine Windung des primären Stromes genähert wird, wobei der **induzierte** Strom dem **induzierenden entgegengesetzt gerichtet** (beim Entfernen der Primärwindung **gleich gerichtet**) ist; denn da entgegengesetzte Ströme einander abstofsen (§ 148), hat das Annähern der Primärspule entgegen der Abstofsung seitens der sekundären Spule Arbeit gekostet. — Diese Beziehungen wurden sehr bald nach der Entdeckung der magneto- und elektrinduzierten Ströme von Faraday selbst experimentell allseitig bestätigt und 1834 (also noch 8 Jahre vor der allgemeinen Aufstellung des Gesetzes der Erhaltung der Arbeit durch Robert Mayer) von Lenz formuliert in der seither sogenannten

Fig. 537.



Anh. 37.

Lenzschen Regel: Die Richtung aller Arten von **Induktionsströmen** ist eine solche, dafs diese **den erregenden Bewegungen der Magnete oder Solenoide mechanischen Widerstand leisten**

Inwiefern auch die Induktion durch Magnete und Ströme, die sich in Bezug auf den sekundären Leiter nicht bewegen, sondern nur stärker und schwächer werden, mit der Lenzschen Regel und sohin mit der Erhaltung der Arbeit im Einklange ist, vergl. folgenden Paragraphen.

Zu β). Wie von vornherein zu erwarten (genauere Maſsbestimmungen im folgenden Paragraphen), sind die **induzierten Ströme um so stärker, je stärker die induzierenden Magnete und Ströme sind,** ferner **je rascher sich ihre Stärke vergröſsert oder verkleinert** (am kräftigsten bei raschem Anfangen oder Aufhören der magnetischen Kräfte oder des Stromes), bezw. **je rascher sie im Bezug auf den sekundären Leiter bewegt werden** (vorausgesetzt, daſs nicht infolge der rascheren Bewegung der sekundäre Leiter auch nur kürzer im Kraftfelde des erregenden Magnets oder Solenoids ist); endlich **je länger der sekundäre Leiter ist.** — Im Hinblick auf die gemäſs der Lenzschen Regel zu verrichtende Arbeit gilt allgemein: Um starke Induktionsströme zu erhalten, müssen die Induktionsspulen innerhalb des Kraftfeldes der induzierenden Magnete und Solenoide so bewegt werden, daſs der zu überwindende Widerstand ein möglichst groſser ist; dies der leitende Gedanke für den Bau aller **Dynamomaschinen,** allgemeiner: **Strommaschinen** oder **Generatoren,** §§ 162, 164.

Als **Induktionsapparate** kurzweg bezeichnet man solche für Elektroinduktion, insbesondere Dubois-Reymonds Schlittenapparat (Fig. 538) und Rühmkorffs Induktorium (kurz: „ein Rühmkorff",

Fig. 538.

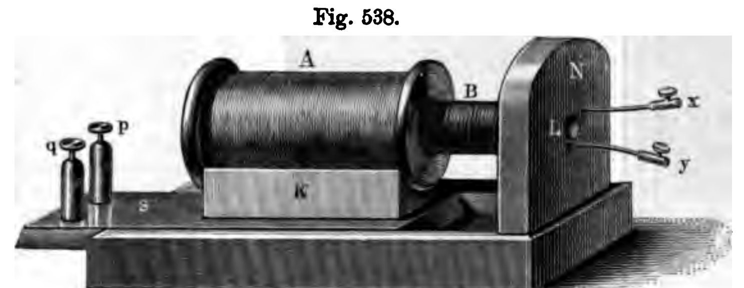


Fig. 539 a. f. S.). In beiden wird (in der Regel seitens einer Batterie) ein Primärstrom in eine Primärspule von verhältnismäſsig wenigen Windungen dicken Drahtes geleitet, die sich innerhalb einer Sekundärspule von vielen Windungen dünnen Drahtes befinden (bei groſsen Rühmkorff bis zu Längen von 100 000 m). In den Primärstrom sind Selbstunterbrecher verschiedener Formen (Wagners Hammer, § 173; bei groſsen Induktorien als besonderer Nebenapparat Foucaults Interruptor, Fig. 539, a. f. S., neuestens Wehnelts Unterbrecher u. a.) geschaltet.

Innerhalb der Primärspulen befindet sich (entweder fest oder in sie einschiebbar) ein Bündel von Drähten aus weichem Eisen, durch das die Wirkung beträchtlich verstärkt wird und zwar in folgender Weise: Durch den intermittierenden Primärstrom wird das weiche Eisen intermittierend magnetisch und wirkt daher auf die Sekundärspule magnetoinduzierend. Von dieser Wirkung der Eisenkerne zunächst abgesehen, läſst sich das Prinzip der Induktorien so erklären: Je eine Windung der Primärspule wirkt gleichzeitig auf viele der

ihr nahen Windungen der Sekundärspule überall in demselben Sinne ein. Es wird infolgedessen der elektrische Strom im sekundären Leiter vergleichbar mit dem einer Batterie von vielen hintereinander geschalteten Elementen, wie sie beim Versuch 2 im § 140 verwendet worden war. Indem dabei der Draht der primären Spule dünn gewählt sein mufs, damit viele seiner Windungen in der Nähe jener primären Windungen Platz finden, wird der Widerstand dieses dünnen langen Drahtes ein grofser und daher gemäfs dem Ohmschen Gesetz die Stromstärke eine kleine sein; wieder ähnlich, wie die kleinen Elemente bei jenem Versuch nur schwache Ströme liefern. So werden in gröfseren Rühmkorffschen Apparaten starke Primärströme (etwa 40 A) bei mäfsiger Klemmenspannung (etwa 12 Volt) in schwache Ströme (etwa 0,8 A) von hoher Klemmenspannung (etwa 600 Volt) „transformiert". Die Wirkung kann durch Kondensatoren (Stanniolblätter zwischen Wachstuch), mit denen die Poldrähte der Sekundärspule in Verbindung stehen, ähnlich gesteigert werden, wie durch Leydener Flaschen die Wirkung der Influenzmaschine. — Über die durch Induktorien zu erzielenden prachtvollen optischen Erscheinungen, die jenen der sogenannten elektrostatischen Entladungen ähnlich sind, vergl. § 156.

Fig. 539.

Die Induktorien stellen einen besonderen Fall der **Transformatoren** im weiteren Sinne dar; über Transformatoren im engeren Sinne vergl. § 166.

Extrastrom; Selbstinduktion. **Sowie ein Strom bei jeder**



erung seiner Stärke in einem benachbarten Stromleiter Ströme ziert, tut er es auch im eigenen Schliefsungsleiter. FARADAY nte den Induktionsstrom, der jeden nicht stationären Strom im nen Leiter begleitet, den **Extrastrom**; man sagt jetzt von ihm, ei durch **Selbstinduktion** entstanden.

Da beim Verstärken und speziell beim Anfangen eines Stromes der Extran entgegengesetzte Richtung hat, wird ein an Stärke zunehmender närstrom gleichsam durch sich selbst geschwächt; und ebenso wird ein an ke abnehmender Primärstrom durch sich selbst verstärkt. Diese Tatsachen eren ihr Paradoxes, wenn man sie vergleicht mit dem Anlauf und Endlauf nach dem Trägheits- und Beharrungsgesetz sich bewegenden Masse (§ 15, I; iell beim Schwungrad, § 31): im Anlauf nämlich setzt die Masse der beschleunden Kraft einen Widerstand entgegen, als ob sie das Beschleunigen hindern te; im Endlauf setzt sie der Verzögerung einen Widerstand entgegen, als ob las Verzögern hindern wollte. — Tatsächlich erreicht infolge des Extrastromes r Strom nicht schon im Zeitpunkte des Schliefsens, sondern erst etwas später ihm nach der elektromotorischen Kraft und nach dem Ohmschen Widerstand zumende Stromstärke. — Man kann diese Tatsachen auch so ausdrücken: Einem an ke zunehmenden Strom gegenüber zeigt jeder Leiter einen gröfseren derstand, einem an Stärke abnehmenden Strom einen kleineren Widernd als gegenüber einem stationären Strome. In dieser Weise kommt jedem mleiter **Selbstinduktion** zu (und jedem nicht stationären Strome eine „elektrotorische **Gegenkraft** der Selbstinduktion", sowie jedem Leiter ein duktiver Widerstand" neben dem Ohmschen, deren Resultierende der heinbare Widerstand" heifst). — Extraströme und Selbstinduktion sind in raubendrähten beträchtlich, da hier je eine Windung auch auf die benachbarten virkt, dagegen unbeträchtlich in geraden Leitern. — Die einfachste und auffigste Erscheinung, welche in der Selbstinduktion ihre Erklärung findet, zeigt ender *Versuch:* Eine Spule gibt beim Schliefsen keine Funken (oder doch bei sehr hoher Potentialdifferenz der Drahtenden, und auch da nur verchsweise schwache), wohl aber kräftige Funken beim Öffnen; dagegen wird er Unterschied bei geraden Leitungsdrähten unmerklich. Ähnlich die physiosche Wirkung der beim Öffnen und Schliefsen hinreichend starker Ströme zu pfindenden elektrischen Schläge.

FOUCAULTS Ströme. Noch vor FARADAYS Entdeckungen der Magneto- und ktroinduktion hatte ARAGO beobachtet, dafs eine über einer wagrechten, rotieren- Kupferscheibe stehende Magnetnadel abgelenkt und bei hinreichend rascher ation der Scheibe selbst in Drehung versetzt wurde (dies auch dann, wenn ch eine zwischengelegte Glasscheibe Luftströmungen zwischen Scheibe und Nadel geschlossen waren). Dämpfung der Schwingungen von Magnetstäben durch pfergehäuse. — Durch Faradays Entdeckung der Magnetoinduktion erklärten dann diese Erscheinungen, indem durch die Relativbewegung zwischen Nadel Kupfer in diesem Ströme erregt werden, die nach ÖRSTEDS Gesetz wieder auf Nadel ablenkend wirken. Man pflegt solche Ströme nach FOUCAULT zu benen, da sie von diesem besonders eingehend untersucht wurden. — WALTENENS Pendel (Fig. 540 a. f. S.) zeigt solche Erscheinungen in besonders auffälliger se: Schwingt nämlich das Pendel zwischen den Polschuhen, solange der Elektronet noch nicht durch einen Strom angeregt ist, unter unmerklichem Widerde der Luft und Reibung, so kommt es doch fast augenblicklich zum Still-

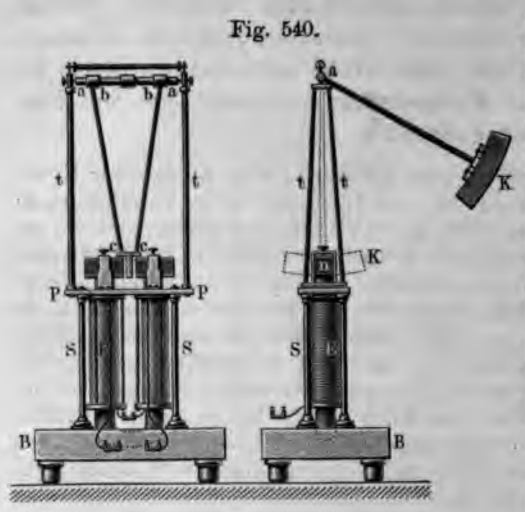


Fig. 540.

stande, wenn die Polschuhe magnetisch werden. Auch hier werden im Kupfer durch die Polschuhe Ströme induziert. Dabei erwärmt sich das Kupfer ähnlich, wie wenn es in einer zähen Masse durch Stofs und Reibung aufgehalten würde. — Solche Ströme treten auch in den zusammenhängenden Eisenmassen der Elektromagnete bei allen Veränderungen der Stromstärke auf. Um daher bei Dynamomaschinen u. dergl. die Erhitzung der Eisenkerne zu verhindern, werden diese aus dünnen Blechen weichen Eisens, die lackiert oder durch Papierblätter getrennt sind, zusammengesetzt.

§ 151. Einige Mafsbestimmungen für Induktionsströme. Wechselströme, Mehrphasenströme.

Nach der Lenzschen Regel treten nur dort Induktionsströme auf, wo entgegen einer elektromagnetischen oder elektrodynamischen Anziehung oder Abstofsung zwischen dem induzierenden Magnet oder Solenoid einerseits, dem induzierten Strom anderseits mechanische Arbeit zu leisten ist. Zur Anwendung dieser Regel ist also erforderlich, dafs die Richtungen der Kräfte, welche vom Magnet oder Solenoid einerseits, vom sekundären Leiter anderseits ausgehen, einander ganz oder zum Teil (d. h. Komponenten jener Kräfte) der jeweiligen Richtung der relativen Bewegung entgegengesetzt seien. — Dies führt auf die Beachtung der Kraftlinien des dem Magnet, bezw. Solenoid zugehörigen Kraftfeldes, in welchem der sekundäre Leiter bewegt wird. **Es wird dann sowohl das Auftreten oder Nichtauftreten von Induktionsströmen überhaupt wie auch deren** Stärke **bestimmt durch die bewundernswert einfache**

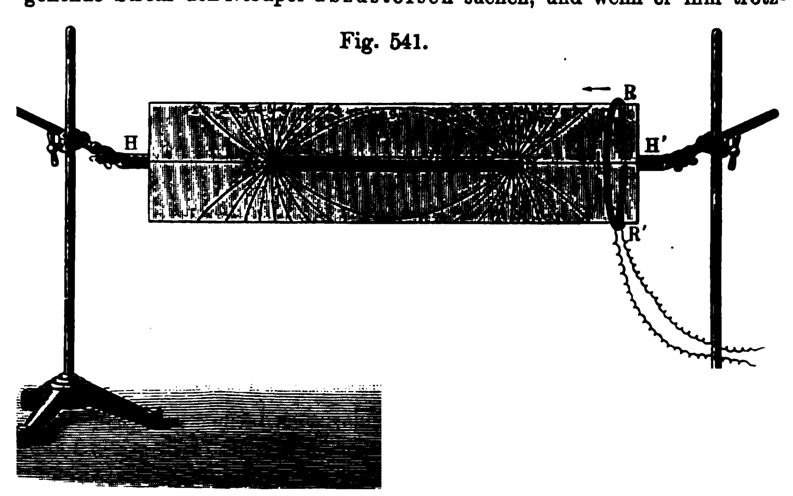
Faradaysche Regel: **Wird ein Leiter im Kraftfeld eines Magnets oder stromdurchflossenen Leiters bewegt, so ist die Mafszahl der elektromotorischen Kraft** (und daher beim Widerstande 1 Ω auch die der **Stromstärke) des induzierten Stromes gleich der Anzahl der per sec vom Leiter gleichsinnig durchschnittenen Kraftlinien.**

Der Sinn und die Richtigkeit dieses ganz allgemein (für kurze und lange, gerade und krumme, senkrecht oder schief gegen die Kraftlinien gerichtete Leiter von gröfserem oder kleinerem Widerstande, die gerade oder schief, schneller oder langsamer gegen die Kraftlinien bewegt werden) geltenden Gesetzes (rechnerischer Beweis für einfache Fälle vergl. LA 194) sind erläutert in Fig. 541: Sekundärer Leiter ist der aus mehreren Windungen bestehende und zu einem Galvanometer von mäfsiger Empfindlichkeit führende Draht RR', welcher in der Richtung des gröfseren Pfeiles bewegt wird. Induzierend wirkt der Magnet NS, der ersetzt

LA 194.

ınn durch eine stromdurchflossene **Spule** mit oder ohne Eisenkern. Auf Karton sind die Kraftlinien so gezeichnet, dafs, wenn der Karton um die NS rotiert, der Raum des Kraftfeldes in 10 gleiche Räume geteilt wird, leren jeden also ein Zehntel der sämtlichen Kraftlinien hindurchgeht. Dafs bei ınäherung von RR' an den Pol S ein Strom von der Richtung des kleineren induziert wird, ergibt sich nach Lenz' Regel zusammen mit der Handregel. ren wir nämlich z. B., dafs derselbe Leiter RR' einem isolierten Nordpol N rt werde, so wird der in der **vorderen** Hälfte des Ringes nach **aufgehende** Strom den Nordpol **abzustofsen** suchen, und wenn er ihm trotz-

Fig. 541.



nähert wird, wird dies **Arbeit** kosten. Die Annäherung des Stromes an den wird also einen entgegengesetzt gerichteten Strom erzielen. — Mit Benutzung ıftlinien erhellt, dafs zunächst beim isolierten Pol der induzierte Strom am **ten** sein wird, wenn sich der Pol in der Ebene des Ringes befindet. Denn ərden die vom isolierten Pol radial weggehenden Kraftlinien (in der Zeichie nahezu vertikalen) vom Stromleiter normal geschnitten. Wird ferner der ber den vollständigen Magnet geschoben, so hat der induzierte Strom die Stärke, wenn er die Kraftlinie 5 schneidet, beim Hingleiten über N bei : stärkste entgegengesetzt gerichtete u. s. w.

ıch bei den kompliziertest gestalteten Magneten ohne Bewickelung oder ɔher lassen sich die Kraftlinien, wenn auch manchmal kaum mehr berechnen, noch empirisch durch das einfache Mittel des Aufstreuens von Eisenfeilicht ln; und der Elektrotechniker hat beim Bau von Dynamomaschinen dann auf zu achten, dafs die bewegten Stromspulen **möglichst viele dieser inien schneiden**, wonach sich die Form der Spulen und der Magnete zu hat (vergl. §§ 162, 164). — Ein besonders einfaches Beispiel für diese Bevon Sekundärleitern und Kraftlinien gibt der

rdinduktor (Fig. 542 a. f. S.). Die Kraftlinien des homogenen tischen Feldes der Erde liegen in der Richtung der Inklinationsnadel. ılso der Ring des Erdinduktors mit seiner Ebene zuerst normal die Richtung der Inklinationsnadel gestellt und dann gedreht,

Fig. 542.



LA 195. so schneidet er bei jeder Drehung diese Kraftlinien der Erde (LA 195) und gibt Induktionsströme.

Bei den Versuchen von Palmieri gaben 200 Windungen eines $1^1/_2$ mm dicken Kupferdrahtes auf einem elliptischen Rahmen von den Halbachsen a = 1,1 m, b = 0,3 m Funken, elektrische Schläge und Wasserzersetzung.

Die Methode der Kraftlinien macht es nun auch begreiflich, warum z. B. dem Annähern eines Magnetpoles an einen Kreisstromleiter oder ein Solenoid auch das **Verstärken** des Poles äquivalent ist: es geraten nämlich dann die Kraftlinien in Bewegung (indem sich ihrer mehr zum Pole hinzubegeben, § 144) und sie schneiden somit den ruhenden Leiter. Ähnlich in allen übrigen Fällen der Verstärkung oder Schwächung von Magneten und Primärspulen.

Wechselströme. Wiewohl die induzierten Ströme z. B. beim Hineinstoßen eines Magnetstabes in die Höhlung einer Sekundärspule rasch an- und abschwellen, so wäre es doch denkbar, Induktionsströme von konstanter Stärke (wenigstens für kurze Zeit) zu erhalten, wenn zugleich mit der Bewegung des erregenden Stromes oder Magnets auch seine Stärke entsprechend verändert würde. In der Praxis kommt dieser Fall nirgends vor; wohl aber gelingt es durch geeignete Stromwender (§ 173), den Induktionsströmen gleiche Richtung zu geben, so daß sie dann von Batterieströmen sich nur noch durch mehr oder weniger Intermittieren unterscheiden. In den ersten Zeiten der Konstruktion von Strommaschinen war man darauf bedacht, solche **Gleichströme** zu gewinnen, die dann z. B. zu elektrochemischen Anwendungen geeignet sind. Erst später erkannte man, daß auch die **Wechselströme** bestimmte Vorteile haben, insbesondere ökonomische; vergl. § 164.

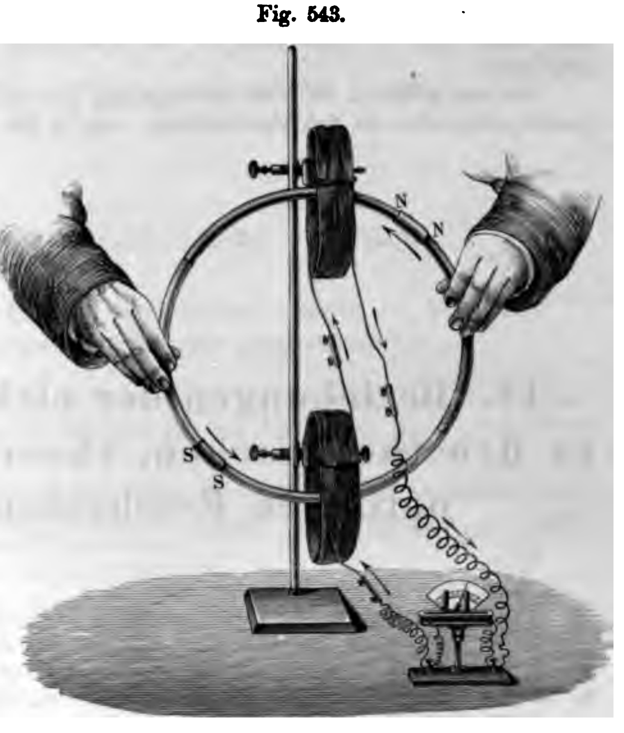
Der einfachsten mathematischen Behandlung zugänglich sind diejenigen Wechselströme, deren Stromstärken einer Sinuskurve entsprechen (kurz: **Sinusströme**), bei der die Abszissen die Zeit, die Ordinaten die Stromstärke darstellen. Auf solche Ströme werden dann die Begriffe der Wellenlehre übertragen: Schwingungsdauer, Schwingungszahl, Amplitude u. s. w. des Stromes. — Die oberhalb der Abszissenachse liegenden Wellenberge stellen den in der einen, die Täler den in der entgegengesetzten Richtung fließenden Strom dar. Die „mittlere Stärke“ des einen Stromes wird dargestellt durch die Höhe desjenigen Rechteckes, das der Fläche eines Wellenberges flächengleich ist (math. Anhang, Nr. 19, LA 197).

Anh. 19. LA 197.

e Grundgleichung (das Weg-Zeit-Gesetz) für die einfache Schwingung hwingung eines Punktes lautet: $s = a \sin \alpha t$ (§ 12, Gl. 5), so lautet die der Zeit wechselnde elektromotorische Kraft e eines Sinusstromes αt, wo E der Maximalwert von e ist (Ableitung dieser Gl. LA 196). LA 196, 197.

nfaches Beispiel für das Entstehen von Wechselströmen (das zuchematisch vereinfachte Vorbild für die Einrichtung des charakteristandteiles ɔmaschine, Gramme-ges, § 162, ; Fig. 543 vei Spulen umen mit anometer geschlossereis. Zwei nige Mag-l mit den ən Polen S zu einem n Magnetvereinigen. Ring durch in hin-schwinder er Bewe-Sinne der N und SS kreist in rähten bei Figur er-'ickelungs-m im Sinne n Drähten Pfeile.

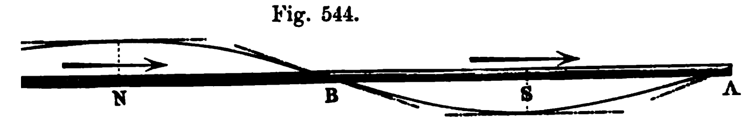
Fig. 543.



ı wir uns dabei den Magnetring zu einem geraden Stab ausgestreckt, e Kurve von der in Fig. 544 dargestellten Gestalt (ebenfalls je nach isierung des Stabes mehr oder minder annähernd eine Sinuslinie))rdinaten die **Stärken** der magnetischen Kräfte darstellen.

ı wir uns dann über diesen geraden Stab wieder eine Drahtspule im feile hingeschoben, so treten die stärksten Induktionsströme auf beim

Fig. 544.



n über die Stellen NS, weil dort die Spule die meisten Kraftlinien nd zwar mit allen ihren Teilen gleichsinnig. Eine Spule, parallel zum lesselben vorbeigeführt, erfährt hingegen gerade bei N und S keine In-

duktion, weil dort vordere und hintere Spulenseiten gleichgerichtete, also in Kreise entgegengesetzte Induktionen erfahren, die sich aufheben.

Denken wir uns endlich (was konstruktiv in dieser Form freilich nicht zu verwirklichen ist) den Magnetring in der Stellung nach Fig. 543 festgehalten und die Spulen in dem den Pfeilen entgegengesetzten Sinne um den Ring herum geführt, so ergibt sich dieselbe relative Bewegung zwischen Spule und Magnet und also auch derselbe Strom. — Von dieser Einrichtung wäre dann nur noch ein Schritt zum Grammeschen Ring (§ 162); auch er gäbe Wechselströme, wenn nicht durch die Kollektoren für die Verwandlung in Gleichströme gesorgt wäre.

Den aus mehreren einfachen Schwingungen zusammengesetzten Schwingungen entsprechen die **Mehrphasenströme**, vergl. § 164.

IV. Beziehungen der elektrischen zu den thermischen, chemischen und optischen Erscheinungen.

Vorbemerkung: In den Abschnitten I, II, III wurden aus dem Ineinandergreifen der elektrischen Erscheinungen mit allen Gattungen sonstiger physikalischer Erscheinungen speziell die „**mechanischen** Wirkungen" herausgehoben. So ist z. B. die Anziehung zweier geladener Pendel, aber auch die Anziehung eines Elektromagnets auf seinen Anker u. dergl. für sich betrachtet nur ein rein mechanischer Vorgang, indem die „Wirkungen" der Ladungen, der Ströme und der magnetischen Kräfte hier nur Beschleunigungen und mechanische Spannungen sind. Umgekehrt ist auch das Auftreten eines Induktionsstromes z. B. infolge Bewegung eines Magnets in dem entstehenden Kraftfelde des Stromes durch eine rein mechanische „Ursache" bewirkt, nämlich durch die mechanische Arbeit entgegen der Abstofsung, bezw. Anziehung zwischen Pol und induziertem Strom. Dabei stellen sich die elektrostatische Induktion (z. B. das Auftreten der Ladungen einer Influenzmaschine) und die elektromagnetische Induktion (Magneto- und Elektroinduktion) als die verhältnismäfsig durchsichtigste Umsetzung mechanischer in elektrische Energieen dar — jedenfalls sind sie minder verwickelt als selbst die Elektrisierung durch Reibung.

Die noch erübrigenden **thermischen, chemischen und optischen** Wirkungen des Stromes zeigen eine ähnliche Reziprozität, wie die für die mechanischen Wirkungen und Ursachen gemäfs der im § 147, S. 470 gegebenen Übersicht mechanischen Vorgänge zwischen elektrischen Strömen und Magneten. So es z. B. einerseits die Thermoströme, anderseits Peltiers Phänomen; den elek

schen Erscheinungen entsprechen als Umkehrung die Batterieströme. Überall wir es hier mit doppelseitigen Umsetzungen von Energie, z. B. von Stromergie in Wärme, bezw. Wärme in Stromenergie, zu tun.

Überdies wird sich durch die Beobachtung dieser aufsermechanischen gänge an Strömen der Einblick in das Wesen des elektrischen Stromes und in für seine Leitung mafsgebenden molekularen Zustand der verschiedenen ngen von Stoffen überhaupt vertiefen, indem in den Gutleitern (Leitern ter Ordnung) vorwiegend die thermischen Wirkungen, in den Elektrolyten rn zweiter Ordnung) die chemischen Wirkungen, in den Schlechtleitern lektricis) die optischen Wirkungen (Lichterscheinungen bei Entladungen Gasen) der „Elektrizität" vorwiegend zur Erscheinung kommen.

A. Stromarbeit und Wärme.

§ 152. Umsetzung von Stromenergie in Wärme. Kalorisches Mafs der Stromstärke.

Die aus der Elektrotechnik bekanntesten „Wärmewirkungen des Stromes" d die in den **elektrischen Bogenlampen** und **Glühlampen** (§§ 167, 168); ferner **inensprengung**, Galvanokaustik, elektrisches Schweifsen u. dergl. m.

Vorversuche: 1. Werden die Enden der Drähte einer (hinreichend grofsttigen) galvanischen Batterie mit den ngern aneinander geprefst, so empfindet n ein Warmwerden dieser Drahtenden. ird dann zwischen sie ein hinreichend nner und nicht zu langer Metalldraht schaltet, so wird er glühend. 2. In em Kettchen aus gleich dicken Stücken n Silber- und Platindraht (Fig. 546) ird beim Durchgang eines Stromes, der tin eben zum Glühen bringt, Silber ch nicht glühend.

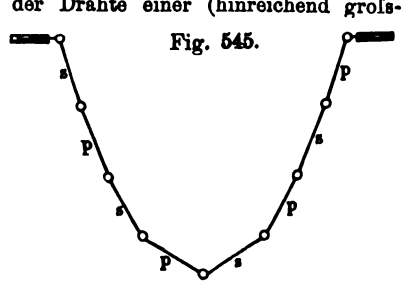


Fig. 545.

Überall tritt hier an den Stellen gröfseren Widerstandes (z. B. zwischen n Kohlenspitzen der Bogenlampe) eine beträchtlichere Erhöhung des Wärmetades im Vergleich zu den übrigen Teilen des Stromleiters auf. Gleichwohl fehlt an solcher Wärmeentwickelung auch nicht in den bestleitenden Teilen eines hliefsungskreises; ja eben dieser Umsatz von Stromenergie in Wärme ist es, rch den die Vorstellung eines **„Widerstandes"**, wie er gemäfs Versuchen von r Art der in § 149, S. 476 geschilderten an allen Stellen eines Stromleiters geringerem oder höherem Grade vorhanden ist, erst am unmittelbarsten physiisch verständlich wird. Leuchtet z. B. eine elektrische Glühlampe, die in den hliefsungskreis derselben Stromquelle (Dynamomaschine, Batterie . . .) geschaltet bei langen dünnen Drähten weniger als bei kurzen dicken, so erklärt sich r gröfsere „Widerstand" eben daraus, dafs in den langen dünnen Drähten hr von der Stromenergie sich schon in Wärme umgesetzt hat.

…cher als das Gesetz für die Abhängigkeit des Wärme…
…stärke und Widerstand (sowie von der inneren und ä…
…tungsfähigkeit, § 79, des Stromleiters, seiner spez…
v… …. s. f.) ist das Gesetz für die durch den ganzen
generie… **Wärmemenge**; und zwar am einfachsten dann, we…

Fig. 546.

Strom keine Gelegenheit hat, einen Teil
Energie vor ihrem Übergang in Wärme zu …
tischen, Induktions- oder chemischen Wir…
zu verbrauchen. Es ist dies dann der Fall,
zwischen den Polklemmen nur ein Dra…
homogenem Metall (ohne eingeschaltete T…
elemente, el…trolytische Zellen u. dergl.) gef…

Wird … ein Teil dieses Drahtes z. B. durch
Kalorimeter …endes Gefäſs mit reinem Wasser ode…
(die als Schle…tleiter, § 79, ein Abzweigen des
a… … in die kalorimetrische Flüssigkeit
u… Thermometer geführt, so läſst sic…
diesem Teil de Drahtes entwickelte Wärmemenge …
LA 199. (Fig. 546, LA 199). Nach dieser und anderen Meth…
stätigt sich

Joules Gesetz: Wenn sich die Energie eines Stromes von
bei einer elektromotorischen Kraft von e Volt in einem Wide…
von w Ohm während t sec ganz in Wärme (nicht auch zum
andere Energieformen) umsetzt, so beträgt diese

$$\textbf{Stromwärme}\; Q = 0{,}24\, i\, e\, t = 0{,}24\, i^2 w\, t \;\textbf{cal},$$

wo der Koeffizient 0,24 (genauer 0,2394) **das kalorische Aqui…**
(in Grammkalorien) **der mechanischen Arbeitseinheit** (i…
ist. (Vergl. § 82.)

Dies Gesetz hatte Joule noch vor den **bestätigenden Versuchen** d…
gende theoretische Überlegungen gefunden: **Bei einem stationären Strome**
binnen 1, 2, 3 … t sec 1, 2, 3 … t mal so groſse elektrische Ladungsme…
Entladung, die als Stromwärme das kalorische Äquivalent der in de…
aufgespeicherten elektrischen Energie darstellt. **Diese Energie ist**
LA 198. **stärke × Zeit) × (Stromstärke × Widerstand); LA 198.** — Darin,
theoretisch erwartete und in Einheiten der mechanischen Arbeit ausgedr…
trag der aus dem Strom zu gewinnenden Wärmemenge mit der aus den …
ermittelten Wärmemenge übereinstimmt, war erst der experimentelle
geführt, daſs ebenso wie der Wärme auch der Stromenergie ein m…
sches Äquivalent zukommt.

Kalorische Messung der Stromstärke: **Auf Grund vorstehende…**
kann man eine Stromstärke ebenso wie im elektromagnetischen (und gen…
im elektrochemischen) Maſse auch im kalorischen **Maſse messen.** D…
gemäſs obiger Gleichung die Maſszahlen nach kalorischem **Maſse die** Q…
der Maſszahlen nach elektromagnetischem (sowie nach **chemischem**) M…

:h lehrreich ist, indem es zeigt, dafs in dem Begriffe „Stärke des ›" nicht schon von selbst gegeben ist, was wir unter einem „2, 3 . . . *i*-Strom" zu verstehen haben, sondern dafs erst festgestellt werden mufs, cher „Wirkung" des Stromes wir ihn selbst bemessen wollen.
ktisch sind die kalorimetrischen Messungen für sich nicht so einfach wie esungen an der Tangentenbussole (oder am Ampèremeter und Voltameter). d sie vorzüglich geeignet namentlich für Wechselströme, da diese keine Stromstärke besitzen, die einen bestimmten Ausschlag an der Tangenten-oder konstante Wasserzersetzung in einem Voltameter) gibt; wohl aber e bestimmte Menge Stromenergie auch bei Wechselströmen in Wärme t und läfst sich also durch diese Wärmemenge messen (§ 172).

153. Umsetzung von Wärme in Stromenergie. Peltiers und Thomsons Phänomene.

chichtliches. Seebeck hat (1821) beobachtet, dafs, wenn die Lötstelle erschiedener Metalle erwärmt und andere Stellen derselben Metalle durch hliefsungsleiter verbunden werden, in diesem ein Strom auftritt. — Dafs röme schon bei geringen Erwärmungen, bezw. Abkühlungen der Löt-rächtliche Stärke haben können, zeigt folgender

rsuch: Ein Antimon- und ein Kupfer-ig. 547, bezw. ein Kupfer- und ein t-, bezw. ein Antimon- und ein Wis-b) sind zusammengelötet zu einem ge-nen Rahmen, der um eine Deklinations-ührt. Wird der Rahmen in die Ebene gnetischen Meridians gestellt und nun die ötstelle auch nur durch die Flamme eines lzchens erwärmt, bezw. durch Auflegen von gekühlt, so weicht die Nadel um beträcht-inkel aus. Aus dem Sinne der Ablenkung sich, dafs durch eine **erwärmte** Lötstelle der in der Richtung Kupfer — Antimon (bezw. — Kupfer, Wismut — Antimon: für diese letalle also **„dem Alphabet entgegen"**) lurch abgekühlte Lötstellen im entgegen-ten Sinne.

Fig. 547.

Fig. 548.

Fig. 549.

Verbindung zweier Metalle heifst ein **Thermo-**, wenn sie nur eine zu erwärmende oder abzu-Lötstelle hat; eine Verbindung mehrerer solcher g. 548 u. 549 eine **Thermosäule.** (Eine Anwendung rmosäule in Verbindung mit dem Galvanometer zur Nachweisung und sehr geringer Temperaturdifferenzen, vergl. z. B. in Mellonis Apparat S. 377.) — Ein Thermoelement ist also zu vergleichen mit einem galva-Element; und wie an diesem, solange es nicht geschlossen ist, die aus

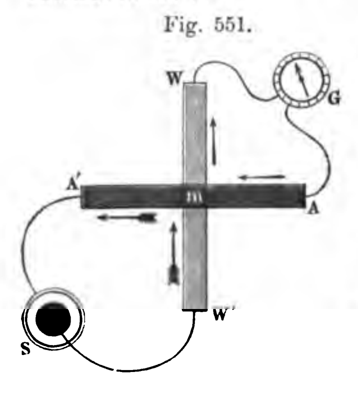
der Flüssigkeit ragenden Enden der festen Körper eine Potentialdifferenz aufweisen, werden wir uns eine solche auch erwarten dürfen an dem nicht geschlossenen Thermoelement; desgleichen eine gröfsere Potentialdifferenz an einer nicht geschlossenen Thermosäule. In der Tat ergaben z. B. 20 hintereinander geschaltete Elemente eine Potentialdifferenz gleich der eines Bunsenelementes, also von etwa 2 Volt, ein solches Thermoelement demnach eine von etwa $^1/_{10}$ Volt. Daher äufsert sich die elektrostatische Ladung eines solchen Elementes erst an einem sehr empfindlichen Elektroskop oder Elektrometer. — Dagegen zeigt ein Galvanometer von kleinem innerem Widerstande Thermoströme sogar schon dann, wenn nicht, wie bisher angenommen, zwei Metalle verschiedener chemischer Beschaffenheit einander berühren und daselbst eine andere Temperatur als in der Umgebung besitzen; sondern schon ein zu einem Knoten geschlungener Kupferdraht (Fig. 550) gibt, in der Nähe des Knotens erwärmt, merkliche Ströme; es erklärt sich dies daraus, daſs das Biegen des Drahtes den Stoff etwas unhomogen gemacht hat.

Fig. 550.



Die Erklärung der Wärmeströme glaubte man anfänglich aus der bloſsen Berührung von chemisch (oder mechanisch) verschiedenartigen Stoffen erklären zu können (analog der „Kontakttheorie“ galvanischer Elemente, § 155), wobei die doch wesentliche Bedingung des Temperaturunterschiedes gegen die Umgebung nicht in die Erklärung mit einbezogen war. — Im Hinblick darauf ist es angemessener, von der Tatsache auszugehen, dafs zwischen den ungleich warm gehaltenen Berührungsstellen der 2 (3, 4 . . .) Metallstäbe vor allem ein stationärer Wärmestrom sich bildet, und dafs in der Temperaturdifferenz zusammen mit der chemischen Differenz erst die vollständige Ursache der auftretenden Potentialdifferenzen und daher des Stromes liege. — Das Ineinandergreifen dieser drei Zustandsdifferenzen bestätigt sich in der Umkehrung des Vorganges bei den Thermoströmen in

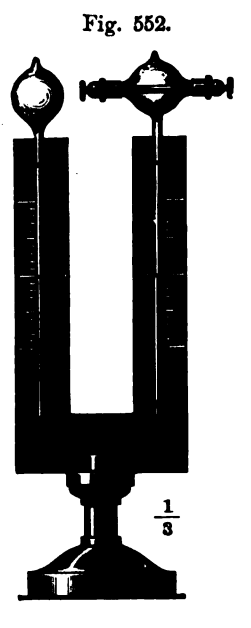
Fig. 551.



Peltiers Versuch: Wird durch ein Doppelstäbchen aus Antimon und Wismut ein Strom in der Richtung $A-W$ (also hier: im Sinne des Alphabetes) geleitet, so zeigt sich in der Umgebung der Lötstellen beider Metalle eine Abkühlung; bei Umkehrung der Stromrichtung eine Erwärmung.

Da der Strom $A-W$ nach dem Jouleschen Gesetze den ganzen Stromkreis, also auch die Lötstellen, erwärmt, so ist die zu beobachtende Abkühlung nur der Überschufs einer stärkeren Abkühlung über die schwächere Erwärmung. Namentlich aber, wenn die Stäbe hinreichend dick sind und also kleine Leitungswiderstände geben, kann diese Erwärmung beliebig klein gemacht werden, so dafs die kurz als „Peltiers Phänomen“ bezeichnete Abkühlung beliebig rein zur Erscheinung zu bringen ist. — Dabei wird für die bequemste

ıhführung des Versuches und namentlich für genaue Messungen jene Abkühlung t direkt thermo- und kalorimetrisch ermittelt, sondern auf sie daraus geossen, dafs im „Peltier-Kreuz“ (Fig. 551) die durch Batteriestrom *SW′ m A′ S* bewirkte Abkühlung bei *m* ıem Stromkreise *m A G W m* einen Thermostrom her-ᐧuft, dessen Stärke das Galvanometer *G* zeigt. Un-ᴇelbarer durch das Differentialthermometer in Fig. 552.


Fig. 552.

Als „Thomson-Effekt“ wird die Erscheinung eichnet, dafs auch schon, wenn der Strom-is nicht aus verschiedenem Metall zusammen-etzt, aber an verschiedenen Stellen verschiedene nperaturen künstlich erhalten werden, ein hin-ch gehender Strom Änderungen dieser Tem-aturen hervorruft.

Peltiers Phänomen bildet eine Umkehrung der ;heinung der Thermoströme (ohne doch mit der Joule-ın Erwärmung identisch zu sein). — Es ist hier so bei der Erzeugung der Wärme durch mechanische eit (z. B. pneumatisches Feuerzeug) und der Erzeugung hanischer Arbeit durch Wärme (z. B. Dampfmaschine). Joulesche Erwärmung dagegen mag der den eigent-ən Effekt des pneumatischen Feuerzeuges begleitenden ärmung durch Reibung (des Kolbens an den Glas-den) analog gesetzt werden.

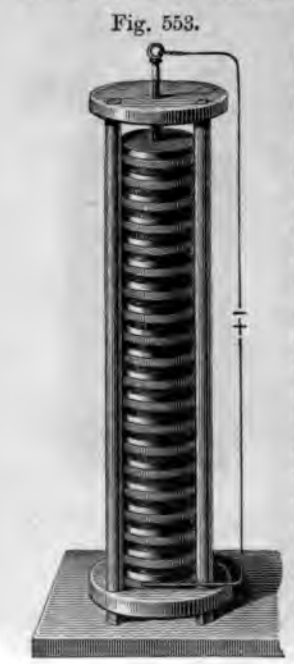
Pyro-Elektrizität. — Ein Turmalinkrystall nimmt bei gleichmäfsiger rärmung an den Enden seiner krystallographischen Hauptachse entgegen-etzte elektrostatische Ladungen an. Dies ist ein Beispiel, dafs speziell ı das krystallinische Gefüge (ähnlich wie die mechanische Unhomogenität im suche nach Fig. 550) zusammen mit Veränderungen des Wärmezustandes entialdifferenz bedingen kann.

B. Stromarbeit und chemische Arbeit.

Geschichtliches. Von allen Beziehungen zwischen Stromenergie und anderen ɪrgieformen ist zufällig am frühesten bekannt geworden die Erregung ktrischer Ströme durch chemische Vorgänge, was dann zur Erfindung **galvanischen Elemente** führte (gegenwärtig ist ihre Bedeutung fast schon ıchwindend im Vergleich zu den Dynamomaschinen oder kurz „Generatoren“, ;2). Diesen Strömen bei chemischem Verbinden (bezw. Substituieren, z. B. Zn für H_2 in H_2SO_4) entspricht als Umkehrung die **Elektrolyse**, d. i. die setzung chemischer Verbindungen durch den elektrischen Strom. — Dabei ən uns heute (ähnlich wie die Wärmewirkungen des Stromes die theoretische ıdlage für das Verständnis der Thermoströme bildeten) die elektrolytischen ;änge als wesentlich für die elektrochemischen Vorgänge in den Elementen, m auch innerhalb jedes Elementes fortwährend elektrolytische Vorgänge finden, wie sich praktisch am auffallendsten an den nicht konstanten Ele-ten (in der „galvanischen Polarisation“) zeigt.

Das theoretische Verständnis der Vorgänge in galvanischen Elementen und Batterieen als wesentlich elektrochemischer Vorgänge hat sich aber erst spät entwickelt und schwer zu behaupten vermocht gegenüber der von VOLTA vertretenen „Kontakttheorie", die ihrerseits der Wahrheit um einen Schritt näher gekommen war als die ursprüngliche Meinung GALVANIS, dafs das von ihm 1789 zufällig beobachtete Zucken von Froschschenkeln, die mittels Kupferhaken an eisernen Stäben aufgehängt waren, der „tierischen Elektrizität" zuzuschreiben sei. VOLTA erklärte diese Erscheinungen so, dafs hierbei Elektrizitätsquelle die Berührung der beiden chemisch verschiedenen Metalle sei, und dafs der Froschschenkel, der bei zufälligem Berühren des Eisenstabes zuckte, nur einerseits als Schliefsungsleiter (für den Stromkreis Kupfer-Schenkel-Eisen-Kupfer), anderseits als Elektroskop wirke. Die Verfolgung dieses Gedankens führte zur Erfindung der (von einem Lebensprozesse unabhängigen) **Voltaschen Säule** (Fig. 553), in welcher Scheiben von Zink, Silber, feuchtem Tuch — Zink, Silber, feuchtem Tuch u. s. f. übereinander geschichtet waren. Die Endplatten zeigten dann um so kräftigere Ladungen, je mehr Platten vorhanden waren. Diese Zusammenstellungen zweier chemisch verschiedener Metalle und einer Flüssigkeit vervollkommnete sich dann bald in der handsameren **Voltaschen Batterie** (Zn, Cu, H_2SO_4 mit H_2O).

Fig. 553.



Schon vor der Erfindung von Säule und Element sollte der Nachweis, dafs bei der Berührung zweier verschiedener Metalle diese Ladungen zeigen, erbracht werden durch den sogenannten Voltaschen Fundamentalversuch: Auf ein sehr empfindliches Elektroskop (meist mit Zambonischer Säule siehe unten) wird als Sammler z. B. eine Zinkplatte geschraubt und auf sie mittels eines isolierenden Handgriffes eine Kupferplatte gesetzt. Nach dem Abheben der Cu-Platte zeigt das Elektroskop eine positive Ladung der Zn-Platte an. Bei Vertauschung der Platten zeigt sich eine negative Ladung der Kupferplatte. — Von Einrichtung und Verwendung des Kondensationselektroskops unterscheidet sich dieser Versuch wesentlich dadurch, dafs die Platten blank geputzt sein und in metallische Berührung gebracht werden müssen. Eine Zink- und Silberplatte geben stärkere, eine Zink- und Platinplatte noch stärkere Wirkungen. Hiernach wurden die festen Gutleiter (**Leiter erster Ordnung**) geordnet in die „Spannungsreihe" nach VOLTA (andere Forscher erhielten einigermafsen abweichende Reihen):

+ Zn, Pb, Sn, Fe, Cu, Ag, Au, Kohle, Graphit, Braunstein —

VOLTA hatte auch schon richtig bemerkt, dafs **Wasser, Säuren, Salzlösungen**... sich dieser Spannungsreihe nicht einordnen lassen. **Überdies hatte er** fälschlich geglaubt, dafs diese **„Leiter zweiter Ordnung"** mit den der Spannungsreihe angehörigen „Leitern erster Ordnung" keine oder nur sehr geringe Potentialdifferenz geben; aber BUFFS Ausdehnung des Voltaschen Fundamentalversuches zeigte, dafs bei Berührung jener Flüssigkeiten mit Zink die Flüssigkeit **positive Ladung**, das **Zink** aber jetzt **negative** Ladung annimmt.

gen die durch diese Versuche scheinbar zur Tatsache erhobene Hypothese, ie bloſse Berührung heterogener Stoffe reiche aus, ihnen entgegen- Ladungen, also eine Potentialdifferenz, zu erteilen, wurde von den Gegnern Kontakttheorie“ geltend gemacht, daſs sie dem Gesetze der Erhaltung der widerspräche (wie denn auch VOLTA seine Säule für ein elektrisches *im mobile* gehalten hatte). Um jene vermeintliche Tatsache mit diesem nen Naturgesetz in Einklang zu bringen, wurde darauf hingewiesen, daſs ten nicht von jeder chemischen Einwirkung seitens der anhaftenden und iden feuchten Luft freizuhalten seien und daſs in Wahrheit diese chemische lie Quelle der elektrischen Arbeitsfähigkeit sei. Diese elektrochemische ıng bestätigte sich in bei weitem weniger subtiler Weise als bei den ersuchen am Voltaschen Element, indem hier ein auffälliger Verbrauch nk und Schwefelsäure mit dem Auftreten des Stromes jederzeit Hand l geht. Gegenwärtig ist denn auch die Kontakttheorie fast völlig durch trochemische Theorie überwunden.

. Aufwand von Stromenergie bei der Elektrolyse. Chemisches Maſs der Stromstärke.

:schichtliches. Daſs der galvanische Strom beim Durchgang durch chemisch engesetzte leitende Flüssigkeiten diese zersetze, wurde 1800 durch NICHOLSON ɪLISLE (bald darauf von RITTER) in dem besonderen Falle der sogenannten rzersetzung beobachtet. Als hierher gehörig wurde nachmals erkannt, ·EXANDER V. HUMBOLDT schon 1797 bei Kontakt von Zink, Silber und neben einer Oxydation des Zinks auch Entwickelung von Wasserstoff und achgewiesen hatte. Die epochemachendste Entdeckung war dann die 1807 'Y mit Hilfe kräftiger Ströme vollzogene Zerlegung der Alkalien und Erden 214), die wir schon mit schwächeren Strömen erzielen durch folgende

rsuche: Ein Stückchen Ätznatron (NaHO) wird durch Anhauchen feucht ; und auf ein Platinplättchen gelegt, das mit dem vom positiven Pol einer kommenden Drahte leitend verbunden ist. Wird der vom negativen Pole ıde Draht an das Ätznatron gehalten, so entwickeln sich an der Berührungs- ·läschen von Wasserstoffgas nebst Metall- ɜn, die anfangs silberweiſs sind, bald aber d weiſslich werden; sie zeigen alle Eigen- des metallischen Natriums (Na_2). — Natrium- ı erhält man, wenn in dem Gefäſs (Fig. 554) ·en mit Quecksilber bedeckt und darüber ızentrierte Ätznatronlösung gebracht wird.

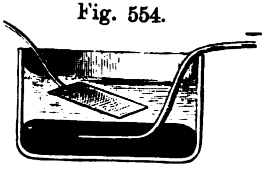


Fig. 554.

RADAY hat nicht nur die Elektrochemie durch unzählige Einzeltatsachen rt, sondern auch die (zum Teil siehe unten, noch heute übliche) Terminologie rt:

ektrolyse heiſst jede chemische Zerlegung eines zusammen- ɜn Stoffes beim Durchgang des Stromes; **Elektrolyte** heiſsen zerlegenden Stoffe (— über ihre allgemeinen Unterschiede von ɜitern erster Ordnung“ s. u.). — **Anode** heiſst die Eintrittsstelle sitiven) Stromes, **Kathode** die Austrittsstelle des (positiven, ıtrittsstelle des negativen) Stromes; beide heiſsen Elektroden. —

Anion heifst der an der Anode sich ausscheidende (wörtlich: zu der Anode hinwandernde) Stoff; **Kation;** beide heifsen Ionen (im älteren, Faradayschen Sinne des Wortes; über einen neueren, engeren Sinn siehe unten).

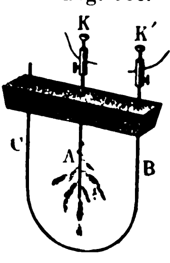
Das allgemeinste Ergebnis für die Beziehungen zwischen dem chemischen und elektrischen Verhalten der Stoffe besteht darin, dafs Wasserstoff, die Metalle, Metalloxyde, Basen u. s. f. **Kationen** oder **elektropositive** Stoffe sind (letztere Bezeichnung in Hinblick auf den Satz von der Anziehung ungleichnamig geladener Körper); Sauerstoff und die anderen Nichtmetalle, die sauren Oxyde, Säuren und Säurereste sind **Anionen** oder **elektronegative** Stoffe. — Über elektrochemische Äquivalente vergl. §§ 209, 211.

Drücken wir die (zum Teil erst „sekundäre", siehe unten) Zerlegung z. B. von Natron, Kochsalz u. s. f. aus durch die Symbole $Na_2|O$, $Na|Cl$, $H|Cl$, $Ca|Cl_2$, so sind die vor dem Striche stehenden Stoffe elektropositiv, die hinter dem Striche stehenden elektronegativ.

Schon dafs z. B. bei Humboldts Beobachtungen das Zink durch den bei ihm ausgeschiedenen Sauerstoff angegriffen wurde, läfst einen noch einfacheren chemischen Vorgang erwarten, wenn statt des Zinks eine durch Sauerstoff nicht angreifbare Elektrode, z. B. Platin, verwendet wird. Hiernach unterscheiden sich z. B. die beiden folgenden

Versuche (Fig. 555): Aus Kupfersulfat in Wasser scheidet sich an der Kathode Kupfer aus (und zwar gleichgiltig, ob der hier eintauchende Draht aus Platin, Kupfer oder einem anderen Metall ist). Ist 1. die Anode Platin, so steigen hier Bläschen von Sauerstoff auf, die umgebende Flüssigkeit wird lichter und erweist sich schliefslich als Schwefelsäure. — Ist dagegen 2. die Anode Kupfer, so zeigt sich an ihr kein Sauerstoff, wohl aber wird das Kupfer selbst angegriffen und die Flüssigkeit bleibt Kupfersulfatlösung.

Fig. 555.



Primärer Vorgang bei 1 und 2 ist die Zerfällung $Cu|SO_4$. **Sekundärer** Vorgang ist bei 1, dafs die Atomgruppe SO_4 mit dem Wasser der Kupfersulfatlösung die Reaktion gibt: $SO_4 + H_2O = H_2SO_4 + O$. [Über das Nähere dieser Reaktion gibt es mehrere Hypothesen: α) SO_4 zerfällt in $SO_3 + O$; dieses aus SO_4 stammende O bleibt frei, während sich SO_3 mit H_2O zu H_2SO_4 ergänzt. β) SO_4 entreifst dem Wasser H_2 und das aus dem Wasser stammende O wird frei. γ) Nach den neuesten Vorstellungen sind an dem Vorgange je zwei O-H Ionen (siehe unten) beteiligt, so dafs $2(SO_4 + OH.H) = 2H_2SO_4 + H_2O + O$. — Überdies sind mit Rücksicht darauf, dafs nicht O_1, sondern nur O_2 als freies Molekül bestehen kann, bei α, β, γ alle Glieder zu verdoppeln]. —

Fig. 556.

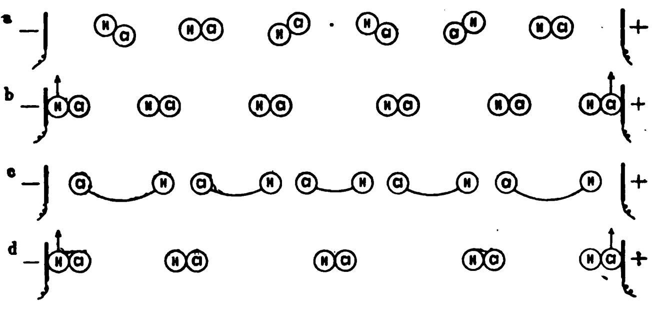
Bei Versuch 2 ist der **sekundäre** Vorgang der, dafs sich SO_4 mit Cu immer wieder zu $CuSO_4$ ergänzt. — Anwendung in der Galvanoplastik (§ 169). *Versuche* über den „Bleibaum" (Fig. 556) und ähnliche.

.uch die sogenannte „Wasserzersetzung“ ist in Wahrheit als irer Vorgang eine Zersetzung der dem Wasser beigemengten trolyte (Säuren, Basen, Salze). Erst **sekundär**, tritt auch Zerng des Wassers ein nach dem Schema $\overset{-}{\diagdown}H_2|SO_4 + H_2O\overset{+}{\diagup}$.

›ie Gründe für diese Auffassung sind folgende: Chemisch reines Wasser em Durchgange des Stromes einen überaus grofsen Widerstand entgegen. darf als „chemisch reines Wasser“ nicht das gewöhnliche destillierte gelten, ıon viel weniger schlecht leitet und z. B. binnen $4^1/_2$ Stunden 70 Proz. und Tagen um das 40fache an Leitungsfähigkeit zunimmt; denn schon von den ıfbewahrung dienenden Glasgefäfsen löst chemisch reines Wasser genügend itende Stoffe auf, dafs die Lösung verhältnismäfsig gut leitend wird.) Nach lgemeinen Gesetze, dafs Elektrolyte nur leiten, wenn sie zersetzt werden. ngekehrt (siehe unten), kann also Wasser selbst kaum als Elektrolyt — Dennoch ist der Name „Wasserzersetzung“ (desgl. „Wasserzersetzungst“ u. dergl.) nicht ganz zu verwerfen, indem ja wenigstens mittelbar die ılich entwickelten Mengen H_2 und O doch aus dem den Elektrolyten beigten Wasser stammen; wie denn auch z. B. mittels einer gegebenen H_2SO_4 eine beliebige Menge H_2O in Knallgas verwandelt werden kann.

ROTTHUSS' und CLAUSIUS' Erklärung der Elektrolyse: Achtet man darauf, hen Punkten des von dem Strome durchflossenen, durch die beiden (rechteckigen) leche begrenzten Prismas aus angesäuertem Wasser oder aus Salzsäureflüssig-Cl) Bläschen aufsteigen, so sieht man, dafs dies nur an den Blechen, also nur n Endflächen des Prismas, nicht aber in seinem Innern geschieht. st also ein wesentlicher Unterschied der chemischen von den Wärmewirkungen omes; denn ein stromdurchflossener Draht erwärmt sich nicht nur an seinen sondern an seiner ganzen Oberfläche wie im Innern.) — Um diese Tatsache klären, nahm GROTTHUSS folgende Reihe von Vorgängen (nach Schema

Fig. 557.



7 a, b, c, d . . .) an: Wenn z. B. HCl zersetzt wird, so werden zwar durch ırchfliefsenden Strom alle HCl-Moleküle infolge der elektrischen Anziehung der positiv und negativ geladenen Endplatten in H- und Cl-Atome gen, aber so, dafs nur bei — ein H-Atom, bei + ein Cl-Atom frei wird (b), n sich die übrigen frei gewordenen Atome neuerdings zu Paaren ver-(c). Diese werden dann infolge der elektrischen Anziehung seitens der positiv ›gativ geladenen Endplatten so gedreht, dafs wieder der Kathode die

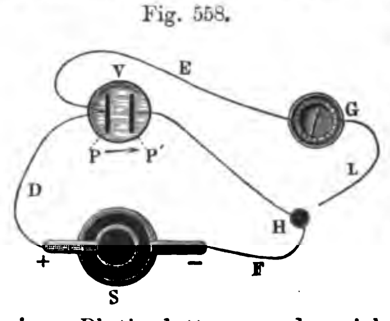
Anode die Cl-Atome zugekehrt sind (d) und wieder daselbst Spaltung n Moleküle und Entweichen der einfachen Gase eintritt (d) u.s.f. — se läfst es aber unerklärt, warum z. B. ein H-Atom stärker durch lektrisch angezogen werden soll, als es vom benachbarten O-Atom chemisch zogen wird. Diese und noch andere Schwierigkeiten der Erklärung beseitigte usius, indem er darauf hinwies, dafs mit Rücksicht auf die gegenseitigen Bewegungen der Atome je eines Moleküls immer ein Teil der Moleküle in Zerfall begriffen sei und dafs nur die jeweiligen freien Atome von den Elektroden ange gen zu werden brauchen. Da hiernach keine eigene Kraft zum Zerreifsen Moleküle erforderlich ist, wird es erklärlich, dafs ein Strom anfänglich auch schon bei der geringsten Stromstärke Elektrolyse hervorzurufen vermag. — KOHLRAUSCH hat berechnet, dafs bei einem Potentialabfall von 1 Volt auf 1 cm Länge in einem Elektrolyten, der nur wenig von reinem Wasser verschieden ist, die Gesch serstoffes bei 13° etwa 0,0029 cm sec^{-1} ist und dafs die Kraft, d, um 1 g H mit der Geschwindigkeit 1 cm sec^{-1} durch die Lö , gleich ist der eines Gewichtes von 3,3 . 10^9 kg.

Die neueste Ionen n Begriff des **„Ion“** so, dafs nur die wandernden Stoffe selb an den Elektroden überhaupt sich ausscheidenden, meist schon ten Stoffe als Anion und Kation bezeichnet werden. Indem d n den Elektroden chemisch äquivalente Stoffmengen ausgeschied nan den Vorgang so auf, wie wenn jedes chemische Äquival lektrolyten wandernden Ions mit einer bestimmten unveränderli r negativen Ladungsmenge verbunden wäre. (Über den hierin n anderen elektrischen Erscheinungen begründeten Begriff des Elektr nten.). —

Die bisher beschriebenen und erklärten Vorgänge in einer elektrolytischen Zelle werden nun aber wesentlich mitbestimmt und kompliziert durch die eine jede Elektrolyse begleitende (und nur durch sekundäre Vorgänge, z. B. in den konstanten Elementen, wieder aufzuhebende) sogenannte

Galvanische Polarisation. *Versuch:* Werden die Drähte eines Wasserzersetzungsapparates, nachdem er einige Zeit in Tätigkeit gewesen war, von der Stromquelle (Batterie) weggenommen und an ein Galvanometer geschaltet (Fig. 558, wo H ein Quecksilbernäpfchen darstellt, in das zuerst der Draht F, dann statt dessen der Draht L gesenkt wird), so zeigt das Galvanometer G, dafs jetzt die Zersetzungszelle wie **ein galvanisches Element wirkt.** Der Strom **kommt dabei von** derjenigen Platinplatte, an der sich der **Wasserstoff ausgesondert hatte.** — Dabei ist der von der Zelle gelieferte Strom **sehr schwach,** wenn der ursprüngliche Strom nur kurze Zeit **hindurchgegangen war,** und erreicht nach längerem Durchgange eine **bestimmte gröfste Stärke,** die

Fig. 558.



hängt von der Stärke des erregenden Stromes und von dem Material r Elektrodenplatten; besonders kräftig dann, wenn es Bleiplatten, erzogen mit Bleisuperoxyd, gewesen waren (Akkumulatoren, § 170).

War also in den Stromkreis einer Stromquelle (Batterie, Dynamomaschine) nreichend lange eine elektrolytische Zelle (Wasserzersetzungsapparat, Akkumulator) schaltet, so sendet er seinerseits einen **Gegenstrom** in jene Stromquelle (ähnlich ie wenn zwei Batterien. in denselben Stromkreis so geschaltet werden, dafs sie tgegengesetzt gerichtete Ströme senden, von denen dann bald der eine, bald der dere überwiegen kann oder die sich auch aufheben können). Werden (bestimmte rten von) Dynamomaschinen als Stromquellen für Elektrolyse oder für Ladung n Akkumulatoren verwendet, so können sie durch den Gegenstrom eine „Umlarisierung“ (Richtungswechsel des durch sie gelieferten Stromes) erfahren. ergleichung des Gegenstromes mit der Selbstinduktion (§ 150).

Durch diese **elektromotorischen Gegenkräfte** erklärt es sich nun, dafs ein asserzersetzungsapparat z. B. nicht durch 1 und nicht durch 2, sondern erst rch 3 oder mehrere hintereinander geschaltete Daniell-Elemente in Funktion halten werden kann: denn jene Gegenkraft ist bei den polarisierten Platinblechen s Zersetzungsapparates selbst schon 2,03 mal so grofs wie die von einem Daniellement. Dagegen reichen schon zwei Bunsenelemente zur Wasserzersetzung aus. - Eben diese galvanische Polarisation ist es auch, die die Inkonstanz niger Elemente zur Folge hat; vergl. den folgenden Paragraphen.

Allgemeine Unterschiede zwischen den Elektrolyten oder Leitern weiter Ordnung und den Leitern erster Ordnung. — Allgemein eifst man **Elektrolyte** alle Stoffe, die dem elektrischen Strome den urchgang gestatten (also Gutleiter oder wenigstens Halbleiter nd), die aber während dieses Durchganges chemisch **zersetzt** werden. ierzu gehört auch schon ihrem Begriffe nach, dafs sie chemisch usammengesetzt seien, überdies aber in der Regel, dafs sie im üssigen (weder im festen, noch im gasförmigen) Zustande seien. — och sind nicht alle chemisch zusammengesetzten Flüssigkeiten Elekolyte; z. B. Terpentinöl, Naphta, chemisch reines Wasser. — Dabei lt nicht nur, dafs ein Elektrolyt primär durch den Strom nur nn zersetzt wird, wenn er selbst (nicht blofs eine Beimengung, e bei der sogenannten Wasserzersetzung) den Strom leitet, sondern ch umgekehrt: Ein Elektrolyt kann den Strom nicht leiten, ohne rch ihn zersetzt zu werden.

Auf Grund der letzteren Tatsache (die allerdings nach neuesten Versuchen lleicht doch nicht ausnahmslos ist) ergibt sich als eine wahrscheinliche Hypose die folgende weitere Ausgestaltung der oben dargestellten Theorie von AUSIUS: Eine elektrolytische Leitung besteht in einem Konvektionsvorgange 80), d. h. die bei der Anode eintretenden positiven Ladungen werden von den Anode anliegenden Atomen übernommen und an die Nachbaratome weitergeben u. s. w. Neuestens ist diese Hypothese noch weiter gebildet worden zum griffe „elektrisches Atom“ oder „**Elektron**“ (— so nannte STONEY 1881 das von LMHOLTZ 1881 angenommene elektrische Elementarquantum, d. h. die sich

bei keinem Vorgange an thermischen Atomen weiter teilenden elektrischen Ladungsmengen. Indem gewisse elektrodynamische Wirkungen dieser Elektronen, z. B. bei Kathodenstrahlen, § 158, zu ähnlichen Erscheinungen führen wie die Trägheit der mechanischen Masse, so wurde ihnen auch „scheinbare Masse" zugeschrieben, und diese wäre 1000—2000 mal so klein als die eines Wasserstoffatomes. Die Gröfse eines Elektrons verhielte sich zu der eines Bacillus wie dieser zur Erdkugel. Über viel ältere Hypothesen von „Uratomen" vergl. § 209).

Von den Elektrolyten oder Leitern zweiter Ordnung unterscheiden sich die **Leiter erster Ordnung** (die Metalle, Kohle, Braunstein und einige andere) dadurch, dafs der Durchgang des Stromes mit keinen chemischen Zersetzungen verbunden ist, was sich bei Metallen und Kohle als Grundstoffen von selbst versteht, aber auch von fast allen chemisch zusammengesetzten festen Stoffen und ebenso erhitzten Gasen, die den Strom einigermafsen leiten, gilt.

Besteht der Durchgang des Stromes bei den Elektrolyten in einer Konvektion, so wohl auch bei den Leitern erster Ordnung und den Gasen, aber so, dafs entweder ein Zerfall der Moleküle in Atome nicht stattfindet, oder jedem Zerfall ein sofortiges Wiederersetzen, ohne Ausscheidung der Bestandteile an den Elektroden, entspricht. — Unabhängig von diesen Hypothesen ist Tatsache (die auch die hypothetischen Vorstellungen von der Konstitution der beiderlei Stoffe und ihr Verhalten gegen hindurchgehende Ladungen weiter bilden helfen kann):

Während das Leitungsvermögen bei den meisten Leitern erster Ordnung mit der Temperatur zunimmt, nimmt es bei allen Leitern zweiter Ordnung ab.

Fig. 559.



Chemisches Mafs der Stromstärke. *Versuch:* Wird über die Platinbleche eines Wasserzersetzungsapparates ein gemeinsames Rohr gestellt, so mengen sich die ausgeschiedenen Gase zu Knallgas. Die **Zahl der in der Minute ausgeschiedenen Kubikcentimeter Knallgas** (reduziert auf 0° C und 76 cm Druck) gibt ein chemisches Mafs der Stromstärke. — Schaltet man überdies eine Tangentenbussole (ein Ampèremeter) ein, so zeigt sich, dafs dieses chemische Mafs einfach direkt proportional ist dem elektromagnetischen Mafs der Stromstärke.

Die zu solchen elektrochemischen Messungen bestimmten Apparate heifsen **Voltameter**; bei ihnen wird das Knallgas nach dem Volumen (Fig. 559), oder im Kupfer-, bezw. Silber-Voltameter die Menge des an der Kupferkathode aus Kupfersulfatlösung ausgeschie-



en Kupfers, bezw. an einer Silberkathode (oder in einem Platin-
;el) aus Silbernitrat ausgeschiedenen Silbers durch Wägung vor
l nach dem Durchgange des Stromes bestimmt.

Umgekehrt kann man auch die Tangentenbussole nach dem Voltameter eichen. gelten dabei als Reduktionszahlen (**elektrochemische Äquivalente** des sers, Kupfers, Silbers — vergl. FARADAYS allgemeines Gesetz der elektromischen Äquivalenz, §§ 209, 211) die folgenden wichtigen Konstanten:

a) Ein Strom von 1 Amp. zersetzt (scheidet aus):

	Knallgas (0°, 76 cm)	Wasser	Kupfer	Silber
sec	0,1740 cm³	0,0933 mg	0,3281 mg	1,118 mg
min	10,44 cm³	5,6 mg	19,686 mg	67,08 mg

b) Daher zeigt umgekehrt die Ausscheidung von **1 cm Knallgas per sec** ;7 **Amp.** (per min von 0,09578 Amp.) an.

Wieder ist wie bei der Messung der Ströme durch elektromagnetische Mefsarate zu bedenken, dafs durch die Einschaltung des elektrochemischen Apparates die Stromstärke entsprechend dem Widerstande des Mefsapparates st verringert; wobei in diesen Widerstand auch die elektromotorische Gegenft des Voltameters, das Polarisation annimmt, einzurechnen ist. Dies geht so t, dafs gemäfs obigen Tatsachen der galvanischen Polarisation z. B. die durch Daniell-Element bei übrigens noch so geringem äufseren Widerstande gelieferte mstärke durch ein Knallgasvoltameter überhaupt nicht gemessen werden kann.

155. Umsetzung chemischer Energie in Stromenergie und Wärme. — Galvanische Elemente und Batterien.

Von den zahllosen Arten „galvanischer Elemente“, die sich einteilen en einerseits in solche mit einer und mit zwei Flüssigkeiten, anderseits constante und inkonstante, seien hier nur einige wenige angeführt:

ı) Mit einer Flüssigkeit (oder gemengten issigkeiten):

1. **Volta**-Element: Zink und Kupfer in rdünnter Schwefelsäure. (Inkonstant.)

2. Das **Chromsäure**-Element von Buff d Bunsen (Fig. 560): Zink und Kohle einem Gemenge von Schwefelsäure d doppeltchromsaurem Kali (Kaliumchromat). (Inkonstant.)

Fig. 560.

3. Das **Smee**-Element: Zink und Silber, s mit Platinmoor überzogen ist, in verunter Schwefelsäure. (Konstant; Volt.)

4. Das **Leclanché**-Element (Fig. 561 f. S.): Zink und ein Gemenge von Kohle und Braunstein in ızentrierter Salmiaklösung. (Konstant; 1,5 Volt.)

...t **zwei durch eine poröse Wand (Diaphragma) getrennte...**
hier ... ...er **berührenden Flüssigkeiten:**

5. ...**niell-Element:** Zink in verdünnter Schwefelsäure und
Kupfer ... koncentrierter Kupfervitriollösung, d. h. Kupfersulfat in
Wasser. ...onstant; 1,088 Volt.) — Ähnlich **Meidinger**-Ballonelement
(ohne Diaphragma Fig. 562).

6. **Bunsen**-Element, Fig. 563): Zink in verdünnter Schwefel-
säure, Kohle in koncentrierter Salpetersäure. (Konstant; 1,9 Vol...

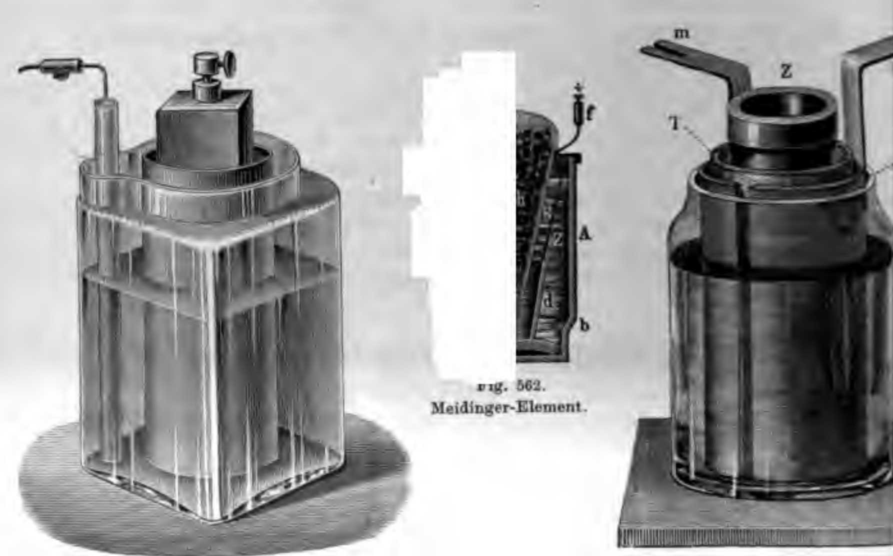


Fig. 561. Leclanché-Element.

Fig. 562. Meidinger-Element.

Fig. 563. Bunsen-Elem...

Spezielle Vorteile und Nachteile einiger dieser Elemente sind: Die Leclan...
batterie wird benutzt für schwache, nach langen Pausen zu verwendende Strö...
sie empfiehlt sich also z. B. für Zimmertelegraphen, indem nur von Zeit zu ...
Salmiaklösung nachgefüllt zu werden braucht. — Das Bunsen-Element hat gr...
elektromotorische Kraft, bedarf aber besonderer Vorsichtsmafsregeln bei der A...
stellung, da es die schädlichen Untersalpetersäuredämpfe entwickelt.

7. **Latimer Clarks** Normal-Element: Chemisch reines **Zink** und ein Plat...
draht in einem Brei aus Quecksilbersulfat und Zinksulfatlösung; ist theoreti...
wichtig wegen seiner sehr konstanten elektromotorischen Kraft.

8. Der Voltaschen Säule wurde nachgebildet **Behrens' (Zambonis) trock...**
Säule; sie wird so hergestellt: Je ein Bogen sogenannten unechten Silber- (Zi...
und Gold- (Kupfer-) Papiers werden mit den Papierseiten aufeinander geklebt
einige 100 oder 1000 Scheibchen in einer isolierenden Glasröhre so aufeinander
schichtet, dafs je eine Zinn- und Kupferschicht einander metallisch berüh...
Die metallischen Endfassungen einer solchen Röhre zeigen dann jahrelang


Fig. 564.

‹chtliche Potentiale (Vergleich mit der 100-
›mentigen Batterie Fig. 474, S. 439). — Eine
‹che Säule bildet den Hauptbestandteil in
›chners **Elektroskop** (Fig. 564). An einem
‹chen im physikalischen Kabinett der Uni-
›rsität in Innsbruck pendelt das Goldblätt-
‹en seit dem Jahre 1823. Gleichwohl ist
›cherlich auch Zambonis Säule nicht etwa
‹n elektrisches *perpetuum mobile*, sondern
›e im Papier enthaltene Feuchtigkeit unter-
‹ält schwache chemische Vorgänge, die als
›e Ladungsquelle zu betrachten sind.

Erklärung der Vorgänge im **oltaschen Element** (Fig. 565): Sind e in H_2SO_4 tauchenden Platten ı **und Cu** mittels eines Schliefsungsleiters Cu verbunden, so sind s **Berührungsstellen** heterogener Stoffe in Betracht zu ziehen: H_2SO_4—Zn, II Zn—Cu, III Cu—H_2SO_4. — Hier ist vor allem die **elle I**, da an ihr nicht nur Berührung, sondern **ıch chemischer** Umsatz stattfindet, als Ladungs**ıelle ähnlich** aufzufassen wie die bewegte Scheibe **›r Influenzmaschine.** Wie dann in der Influenz**aschine** sich die Ladungen durch das ganze System **›cheibe,** Saugkämme u. s. w.) bis an die Polkugeln **›geben** und daselbst eine elektrostatische Po**›ntialdifferenz** bewirken, so zeigt sich eine solche **ıch** an den aus der Säure ragenden **„Polen“** des ıicht geschlossenen Elementes. Wie ferner in ›inem die Polkugeln der Influenzmaschine verbin›denden Leiter ein Strom fliefst, so strömt von der Stelle I negative Ladung im Sinne I, II, III und von III durch die Säure nach I zurück; dagegen **positive** Ladung von I durch die Säure über III nach II und durch das Zink nach I zurück.

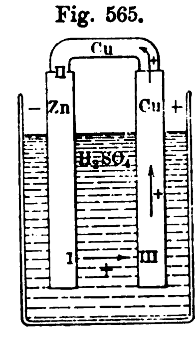


Fig. 565.

Die ältere Kontakttheorie zog überdies auch noch die Berührungsstellen I und III in Betracht, wobei die von II ausgehenden Ströme sich mit denen von I ›ddieren, wogegen die von III einen schwachen Gegenstrom bilden sollten. ›egenwärtig wird II (— vorausgesetzt, dafs hier keinerlei chemischer Umsatz ›wischen Zn und Cu stattfindet) überhaupt nicht mehr als Ladungsstelle be›rachtet; und bezüglich III ist es wahrscheinlich, dafs bei der Berührung von ›u und H_2SO_4 sofort Cu-Ionen in Lösung gehen, so dafs also Berührung zwischen ›u, $CuSO_4$ und H_2SO_4 in Betracht zu ziehen wäre. — Hauptquelle der Ladungen ›nd Ströme bleibt doch nur die Stelle I; zusammenfassend gilt also auf alle Fälle:

Im offenen Volta-Element ist das aus der Säure ragende **Kupfer**›nde der **positive,** das aus der Säure ragende Zinkende der negative

Pol. — len die Pole durch einen Leiter verbunden, so fliefst in diesem eren Schliefsungsleiter der **Strom von Cu nach Zn.** Zusamı ıit der Flüssigkeit bilden dann der äufsere Schliefsungsleiter und ie Platten einen geschlossenen Stromkreis und in diesem fliefst inne halb der Säure der Strom von Zn zu Cu. Für diesen durch die S ure gehenden Strom des geschlossenen Elementes ist also **Zn die A de, Cu die Kathode.**

ten Nachweis, dafs wirklich auch in der Flüssigkeit des Elementes ein Stroı ich dem im äufseren Schliefsungsleiter fliefst, hat Fechner im Anschlufs en durch Fig. 527 dargestellten Versuch geführt. Wie nämlich dort die Magı el über die Reihe der stromdurchflossenen Metalle: Quecksilber, Zinn, Kupfer . . . gehalten und durch den Strom überall gleich stark abgelenkt wurde, so zeigt sich del über eine Glasröhre gehalten wird, durch deren Endpfr und Kupfer in Säure (oder in Schwefelsäure und Kupfersulfatlö in Diaphragma getrennt sind) hineinragen und durch einen S rbunden sind.

Der durch die hwefelsäure des Elementes gehende Strom zersetzt so, wie das angesäuerte Wasser in einem Wasserzersetzung lurch den von aufsen kommenden Strom zersetzt wird. ementes wird der **Wasserstoff** H_2 an der **Kupferplatte** ın sammelt, wogegen der Rest SO_4 sich mit dem Zn zu $ZnSO_4$ v t.

Gleichzeitig liefern aber die nunmehr elektrolytisch angeregten Platten des Elementes auch einen **Gegenstrom,** wodurch nicht nur der Strom im inneren Schliefsungsleiter der Schwefelsäure, sondern auch der im äufseren geschwächt wird; hiermit ist die Inkonstanz des Voltaschen Elementes erklärt.

Die Aufgabe, dieser Inkonstanz vorzubeugen, hat zuerst Daniell (1836) dadurch gelöst, dafs er im Voltaschen Elemente die Kupferplatte statt mit H_2SO_4 mit $CuSO_4$ umgab. Indem sich nun an der Kupferplatte nicht mehr H_2, sondern Cu ausschied, war die galvanische Polarisation vermieden, d. h. das erste konstante Element erfunden.

Man könnte daran denken, auch die Zinkplatte nicht mehr von H_2SO_4 umgeben sein zu lassen, damit das Angegriffenwerden des Zn durch SO_4 unterbleibe. Hiermit aber wäre die Entstehung des Stromes überhaupt unterdrückt, falls nicht die Ersatzflüssigkeit (wie z. B. die Salmiaklösung in den Leclanché-Elementen) eine wenn auch nicht so rasche chemische Wirkung wie die Schwefelsäure auf das Zink hätte. (Vergl. unten Favres Gesetz.)

Die Konstanz des Smee-Elementes erklärt sich daraus, dafs die an der Silberplatte sich abscheidenden Wasserstoffbläschen am Platinmoor nicht festhaften, sondern emporsteigen. — Ähnlich beim Bunsen-Element, wo die die Kohle umgebende Salpetersäure es zum Ausscheiden von Wasserstoff nicht kommen läfst, da H mit einem Teile des Sauerstoffs der Salpetersäure sich zu H_2O verbindet. — Ähnliche Erklärungen für die übrigen konstanten Elemente.

Indem wir bisher nur die Stromenergie betrachteten, die aus der verbrauchten chemischen Energie von Säure und Zink hervorgeht, haben wir nur einen Teil der Energieumsetzungen im Elemente beobachtet, nicht aber die begleitenden **Wärmevorgänge.** Wie aber im äufseren Schliefsungsleiter (Leiter erster Ordnung) die Joulesche Wärme auftritt, so ist auch in der elektrolytischen Flüssigkeit des Elementes als einem Leiter zweiter Ordnung eine Erwärmung zu erwarten. Eine solche tritt auch in der Regel ein, und zwar um so rascher, wenn das Element kurz geschlossen, d. h. der innere Widerstand klein gegen den äufseren ist. FAVRE hat, indem er Elemente und äufsere Schliefsungsleiter kalorimetrisch untersuchte, die Summen der in und aufser dem Element auftretenden Wärmemengen bei den verschiedensten Widerständen gleich gefunden; und zwar wird an allen Elementen, in denen binnen längerer oder kürzerer Zeit gleich grofse Mengen Zink verbraucht werden, die produzierte Gesamtwärmemenge gleich gefunden — nämlich gleich der Wärmemenge, die auftritt, wenn die gleiche Zinkmenge mit Schwefelsäure in Zinksulfat übergeht, ohne dafs ein elektrischer Strom hat fliefsen können. Wir müssen also allgemeiner sagen, dafs der im Elemente verbrauchten chemischen Energie die gewonnene Stromenergie nicht für sich äquivalent sei, sondern die Stromenergie zusammen mit der Wärmeenergie. — Die Güte eines Elementes wird also wesentlich davon abhängen, ob von der verbrauchten chemischen Energie ein gröfserer oder kleinerer Teil zuerst die Form der Stromenergie annimmt, bis er zusammen mit der kleineren oder gröfseren gleich anfangs gebildeten Wärmeenergie schliefslich wieder in die Form von Wärme (dieses schliefsliche „Grab aller Energie") übergeht. Es ist also wie bei verschiedenen Beleuchtungsmethoden, wo z. B. eine gewöhnliche Gasflamme sogleich wenig Licht und viel Wärme, ein Auerbrenner viel mehr Licht gibt, das aber schliefslich auch absorbiert wird, also in Wärme übergeht. — In neuerer Zeit wurde gefunden (BRAUN, JAHN), dafs es Elemente gibt, die bei sehr grofsem äufseren Widerstande sich sogar abkühlen (z. B. das Chlorsilber-Element von WARREN DE LA RUE). In diesen Elementen mufs also die Stromenergie mehr betragen, als durch die chemischen Prozesse an Energie geliefert wird, wobei dann der Abgang aus der Wärme des Elementes und dessen Umgebung gedeckt wird. — Überdies nimmt in den während des Betriebes sich erwärmenden Elementen die elektromotorische Kraft mit steigender Temperatur ab, in den sich abkühlenden zu. In Elementen, deren elektromotorische Kraft von der Temperatur unabhängig ist, wie es nahezu beim Daniellschen zutrifft, wird gerade die ganze verfügbare chemische Energie in Stromenergie umgewandelt.

Galvanische Batterien. — Es lag nahe, die Wirkungen eines galvanischen Elementes zu steigern I. durch Vergröfserung des Elementes, vor allem seiner Platten, II. durch Vermehrung der Elemente. — Im Falle II zeigt sich aber schon vor genauerer Messung der wesentliche Unterschied, dafs, wenn a) alle Zinkplatten untereinander und alle Kupferplatten untereinander verbunden werden, es auf die **Zahl** der Elemente nicht ankommt, indem n solcher „**nebeneinander geschalteter Elemente**" (Fig. 566, a. f. S.) annähernd nur so wirken wie ein Element mit $n$mal so grofsen Platten (Fall I). — Werden dagegen b) die „Elemente **hinter**einander geschaltet", d. h. so, dafs Zn_1 mit Cu_2, Zn_2 mit Cu_3 ... verbunden werden (wie beim Versuche mit der vielelementigen Batterie, § 140 und Fig. 567, a. f. S.),

…ich die Potentialdifferenz der Endplatten pro-
…er Zahl der Elemente; wogegen es wieder für die
… . *n* Elemente zu erreichende Potentialdifferenz auf die
…Elemente nicht ankommt.

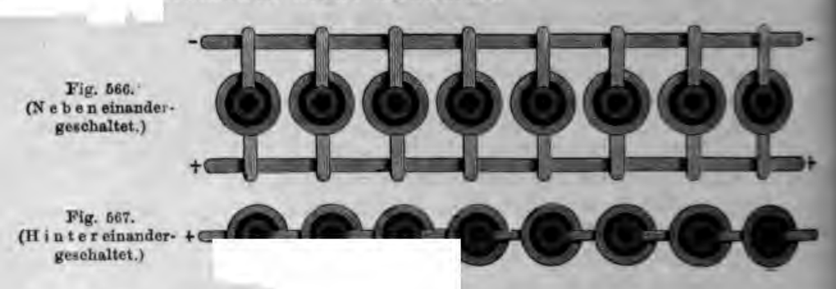


Fig. 566. (Nebeneinandergeschaltet.)

Fig. 567. (Hintereinandergeschaltet.)

Überdies fällt als … n den verschiedenen Wirkungen einer Batterie im äuß… e I. manche (z. B. die Ablenkung einer Magnetnadel du… …en, dicken Draht, ebenso das Glühendmachen eines … ei Vergröfserung der Elemente oder Nebeneinanders… r bei Vermehrung der Elemente wachsen; II. andere … die in einer langen Telegraphenleitung, die physiolog… lie Polklemmen der Batterie anfassenden Menschen) wa… n … Vermehrung der hintereinander geschalteten Elemente, nicht aber durch deren Vergröfserung.

Die Erklärung dieser und verwandter Tatsachen liegt darin, dafs neben dem **äufseren Widerstande** im Stromkreise je eines oder mehrerer Elemente auch deren **innerer Widerstand** in Rechnung gezogen werden mufs; und indem die unter Anwendung des Ohmschen Gesetzes auf die inneren Widerstände durchgeführte Rechnung durch die Versuche bestätigt wird, ist erst der allseitige Nachweis für jene Erweiterung des Ohmschen Gesetzes vollendet.

Es sei für je **ein Element** der äufsere Widerstand w_a, der innere Widerstand w_i, die elektromotorische Kraft e gleich der Potentialdifferenz an den Polen. Dann herrscht sowohl im äufseren wie im inneren Schliefsungsleiter ein Strom von derselben Stärke i Amp., die wir kurz bezeichnen als die

Stromstärke eines Elementes $i = \frac{e}{w_a + w_i}$.

Grenzfälle sind hier I. „w_a klein“ (d. h. der äufsere Widerstand verschwindend klein im Vergleich zum inneren w_i); II. „w_a grofs“, so dafs wir geradezu $w_a \doteq 0$, bezw. $w_i \doteq 0$ setzen können. Dann wird, wenn

$$w_a \text{ klein}, \quad i_I \doteq \frac{e}{0 + w_i} = \frac{e}{w_i} = i'_I,$$

$$w_a \text{ grofs}, \quad i_{II} \doteq \frac{e}{w_a + 0} = \frac{e}{w_a} = i'_{II}.$$

Für das Neben-, bezw. Hintereinanderschalten mehrerer Elemente haben folgende zwei Grundtatsachen als nicht weiter erklärbar hinzuzunehmen:

I. Die Potentialdifferenz zweier einander berührender, chemisch ver-
[...]dener (und aufeinander chemisch wirkender) Körper ist von der Gröſse [...] Berührungsfläche ganz unabhängig. (Analogieen: Der hydrostatische [...]ck per cm^2 ist unabhängig von der Gröſse des Querschnittes; ferner: Der Grad [...] Verbrennungswärme an einer φ mm^2 groſsen Schnittfläche eines Phosphorstückes [...] dessen Berührung mit Sauerstoff ist unabhängig von den übrigen Quadrat-[...]metern, Berührungs- und Brennfläche; u. dergl. mehr.) — Daher wird dann [...]ch **Nebeneinanderschalten die Potentialdifferenz nicht gesteigert.**

II. Werden zwei Elemente so hintereinander geschaltet, daſs z. B. an Zn_1 des [...] Elementes das Cu_2 des anderen sich anschlieſst, so dringt gleichsam die [...]ung von Zn_1 durch Cu_2, durch die Säure des zweiten Elementes bis Zn_2 vor [...] es superponierten sich hier die Ladungen von Zn_1 und Zn_2. Wegen der unver-[...]derten Kapazität des letzten Zn wird also durch **Hintereinanderschalten** [...]e Potentialdifferenz auf das 2-, bezw. *n*fache **gesteigert.** — Diese Tatsache [...] man sich durch die Erwägung plausibel machen, daſs auch sonst Ladungs-[...]ngen sich superponieren, wobei aber das Auseinandertreten der Ladungen und [...] Anhäufungen an den entgegengesetzten Polenden mindestens ebenso besondere [...]fahrungen darstellt wie die Grundtatsache der elektrostatischen Induktion, und wie [...]B. die Erscheinungen des § 132, Versuch c, die zur paradoxen Auslegung führten, [...]s die sogenannte freie Ladung ungestört durch die gebundene hindurch abflieſst.

Diese beiden Tatsachen I und II führen dann weiter zu folgenden Erklärungen [...]r **Batterien von *n* Elementen:** Sind die n gleichen Elemente nebeneinander geschaltet, so bleibt die Potentialdifferenz an den Polen ungeändert, [...]gegen wird der innere Widerstand verkleinert, nämlich $\frac{w_i}{n}$, da der [...]samte Strom durch einen Elektrolyt von n mal so groſsem Gesamtquerschnitt zu strömen hat. Werden dagegen die Elemente hintereinander [...]schaltet, so wächst sowohl die Potentialdifferenz der Endpole auf ne, wie auch [...]e Summe der inneren Widerstände auf nw_i; wogegen bei gleichem Schlieſsungs-[...]iter w_a unverändert bleibt. Daher sind die **Stromstärken für *n* Elemente** bei

Schaltung nebeneinander (auf Menge oder Quantität)	Schaltung hintereinander (auf Spannung oder Intensität)
$J_{\rm I} = \dfrac{e}{w_a + \dfrac{w_i}{n}}$	$J_{\rm II} = \dfrac{ne}{w_a + nw_i} = \dfrac{e}{\dfrac{w_a}{n} + w_i}$

Grenzfälle sind hier wieder: I. Der äuſsere Widerstand w_a sei schon bei [...]nem Elemente verschwindend klein gegen w_i; er ist dann um so mehr ver-[...]schwindend klein gegen den Gesamtwiderstand der n Elemente; kurz „w_a klein". — Es sei im anderen Grenzfalle „w_a groſs", sogar gegen nw_i. — Dann wird, wenn

[...]$_a$ klein, $J'_{\rm I} = \dfrac{e}{\dfrac{w_i}{n}} = n\dfrac{e}{w_i} = n\,i'_{\rm I}$	w_a groſs, $J'_{\rm II} = \dfrac{e}{\dfrac{w_a}{n}} = n\dfrac{e}{w_a} = n\,i'_{\rm II}$.

In diesen beiden Fällen wird also die Ver-n-fachung der Elemente wirkungs-[...]ll sein („sich lohnen"). — Dagegen bleibt sie wirkungslos, wenn

[...] groſs, weil dann $J''_{\rm II} = \dfrac{e}{w_a} = i'_{\rm II}$.	w_a klein, weil dann $J''_{\rm I} = \dfrac{e}{w_i} = i'_{\rm I}$

hungen der elektrischen zu den thermischen u. s. w. Erscheinu

rklichkeit kommt es weder zu dieser vollen Unabhängigkeit de
s . . . romes von der Gröfse der Elemente, der Quantität des Stro
der . . . r Elemente, noch auch zu jener Ver-n-fachung der Wirkung; s

. . . ir die Stromstärke günstigste Schaltung ist diejenig
LA 200. der . . . äufsere **Widerstand gleich ist dem inneren** (LA 20(

Messende *Versuche* im einzelnen zur Bestätigung der entwickelten
(z. B. mittels 1, bezw. 2, 3 . . . Latimer Clark-Elementen und dem Kurb
LA 201. stand mit dem Galvanometer von Hartmann u. Braun) (LA 201). — —

Ganz analoge Betrachtungen und Rechnungen wie für d
den inneren und äufseren Widerständen der Batterien abhä
Stromstärken gelten auch für die Ströme der Dynamomascl
LA 202. der Thermoket. . . . (LA 202).

C. . . . ität und Licht.

§ 156. Lichterscheinu . . . bei Entladung durch Ga . . . Schlechtleiter. — Dis . . . e Entladungen. — Kaltes

Fig. 568.

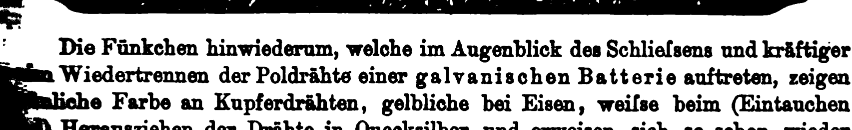
a
a₁
b₁
b

Von den sog . . . „Lichtwirkungen" elektrischer I und Ströme sind . . . nur **mittelbare**, nämlich blofs I erscheinungen der auftretenden hohen **Wärmegrade** Leuchten der glühenden Kohlenfäden in den **Glühlampen**, d auch leuchten würden, wenn der Kohlenfaden statt durch der schen Strom z. B. unter **Luftabschlufs in einem Ofen** erhit Auch dafs das elektrische **Bogenlicht reich an kurzwelligen** ist, stimmt noch mit der Erfahrung überein, dafs in glühenden bei höheren Temperaturen — und die des elektrischen Lichtb hören zu den höchsten erreichbaren — immer kürzere Wellen längeren hinzukommen. — Dagegen:

Zahlreiche Erscheinungen, namentlich an Geifsl Röhren (Figg. 568, 569 a. f. S.), Crookes-Röhren (vergl. § 158), also bei Entladung in verdünnten unter hoher Potentialdifferenz, weisen darauf hi durch die elektrischen Zustände der Lichtäther au gleichsweise **unmittelbar**, nämlich nicht erst i der Erwärmung der in ihn eingebetteten Moleke Emission von Licht angeregt werden kann, die d **„Elektrolumineszenz"** (§ 121) bezeichnet wird. Es nämlich z. B. die entsprechend verdünnte Luft in (schen Röhren violettes, also kurzwelliges Licht sc Temperaturen von etwa 80° C aus. — Auch das **und Büschellicht** an Spitzen und Kugeln von Ele

...chinen, das **St. Elmsfeuer** . . . ist nicht eine blofse Glüh-...scheinung. — Oft erregen die Entladungen auch Fluoreszenz ...g. 569).

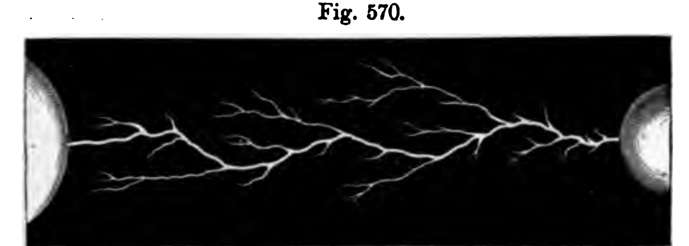
Fig. 569.



Die Fünkchen hinwiederum, welche im Augenblick des Schliefsens und kräftiger ...m Wiedertrennen der Poldrähte einer galvanischen Batterie auftreten, zeigen ...liche Farbe an Kupferdrähten, gelbliche bei Eisen, weifse beim (Eintauchen ...) Herausziehen der Drähte in Quecksilber und erweisen sich so schon wieder ... als sekundäre Erscheinungen der Wärmewirkung des elektrischen Stromes, ...lich der Verbrennung jener Metalle; desgleichen die Feuererscheinungen ...im Kurzschlufs von Starkstromleitungen.

Der im engeren Sinne sogenannte **elektrische Funke** (Fig. 570) zwischen den Polkugeln einer Elektrisiermaschine, bei Entladung einer

Fig. 570.



...ydener Flasche, zwischen den Polen eines Induktoriums u. dergl. ...igt sich als aus beiderlei Lichtwirkungen, den mittelbaren und ...unmittelbaren, zusammengesetzt.

Die spektroskopische Untersuchung ergibt nämlich folgendes: Wird mittels einer Sammellinse das Bild der verschiedenen Teile des Funkens auf den Spalt des Spektralapparates geworfen, so entsprechen die hellen Spektrallinien nahe den metallischen Elektroden dem Emissionsspektrum eben dieser Metalle; in gröfseren Abständen von den Elektroden werden diese Linien schwächer, dünner und weniger zahlreich. Dagegen zeigt sich an allen Stellen zwischen den Elektroden das Spektrum des Gases, durch welches die Entladung stattfindet, und zwar ebenso wie es sich zeigt, wenn das Gas in einer Geifsler-Röhre mit einem sehr engen, geraden Rohrteile zur Elektrolumineszenz gebracht wird (wobei die hier hellleuchtende schmale Lichtquelle selbst schon den Licht durchlassenden Spalt vertreten kann). — Hiernach kann also von einem selbständigen „Spektrum des elektrischen Funkens" nicht die Rede sein, da die Vergleichung der Funken verschiedener Elektroden und verschiedener Gase sonst nichts Gemeinsames aufweist. — Solche Beobachtungen bilden auch einen (wiewohl nicht völlig ausschliefsenden) Grund gegen die Auffassung, dafs durch die elektrische Entladung der Lichtäther (nicht nur vergleichsweise, sondern völlig) direkt, ohne Vermittelung der in ihn eingebetteten Moleküle wägbaren Stoffes, zur Lichtemission angeregt werde (unbeschadet der im folgenden Paragraphen darzulegenden Wesensgleichheit elektrischer und optischer Wellen).

Gleichwohl stellen der **elektrische Funke**, nach Abzug des an ihm mitbeteiligten Glühens der Metalle, und das von ihm nur graduell verschiedene elektrische **Büschellicht** und **Glimmlicht** eine eigenartige Erscheinungsgruppe dar, die man unter der Bezeichnung **disruptive Entladung durch Dielektrica** zusammenfafst, im Gegensatze zu den **Stromerscheinungen** in Leitern erster und zweiter Ordnung. — Einiges zur Erklärung der disruptiven Entladungen aus dem Begriffe der „**elektrischen Festigkeit**" zu Ende des folgenden §.

Die folgende Tabelle gibt die Schlagweite d cm zwischen zwei gleichen leitenden Kugeln vom Radius r cm bei V statischen Potentialdifferenz-Einheiten an (in trockener Luft bei 74,5 cm Druck und 18° C):

$r = 2{,}5$ cm		$r = 1{,}0$ cm		$r = 0{,}5$ cm		$r = 0{,}25$ cm	
d	V	d	V	d	V	d	V
0,5	61,2	0,5	58,3	0,5	57,7	0,5	52,4
1,0	109,5	1,0	104,3	1,0	90,0	1,0	67,5
1,5	154,1	1,5	—	1,5	—	1,5	74,4

Auf G[illegible] abzuleitenden Gesetzmäfsigkeiten kann man aus de[illegible] Fig. 571) gemessenen Schlagweiten auf die Potentiale schliefsen; wie ja eine ähnliche Schätzung der Leistungsfähigkeiten der Elektrisiermaschinen u. dergl. von jeher instinktiv ausgeübt wurde.

Tesla (1892) hat durch Wechselströme von hoher Frequenz (Hunderttausende von Stromwechseln per sec mittels oszillierender Entladungen in Leydener Flaschen, folgender Paragraph) Lichterscheinungen hervorgerufen, die sich von allen bis dahin bekannten schon dadurch unterscheiden, dafs z. B. Geifsler-Röhren auch schon aufzuleuchten beginnen, wenn nur ihr **eines** Ende in leitender Verbindung mit der Stromquelle ist. — „Kaltes Licht."

Diese Tesla-Ströme zeigen auch sonst höchst überraschende Wirkungen, indem sie trotz Spannungen von Hunderttausenden von Volt den in sie eingeschalteten menschlichen Körper nicht beschädigen. Theoretisch ist dies wieder ein Hinweis darauf, dafs die „Leitung" — wenigstens dieser Wechselströme — nicht **in** den sogenannten Gutleitern vor sich geht, sondern an deren **Oberfläche** im Dielektricum, indem infolge der ungeheuer raschen Stromwechsel die Strömungen nicht Zeit finden, in den menschlichen Körper oder sonst einen Gutleiter einzudringen.

§ 157. Elektrische Wellen und Lichtwellen. — Die Hypothesen von Maxwell und die Versuche von Hertz.

Geschichtliches. Die erste Tatsache, welche den unmittelbaren Zusammenhang zwischen elektromagnetischen und optischen Vorgängen herstellte, war FARADAYS (1846) Entdeckung der Drehung der Polarisationsebene eines polarisierten Lichtstrahles in einem kräftigen magnetischen Felde. — Aus den ganz neuen geometrischen Anschauungen über die Zuordnung von elektrischen und magnetischen Kräften und Kraftlinien, die FARADAY aus seinen reichen experimentellen Forschungen abgeleitet hatte, entwickelte MAXWELL (1831 bis 1879) eine rechnerische Theorie, die das Ganze der elektrischen und magnetischen Erscheinungen und als „elektromagnetische Lichttheorie" auch die optischen Erscheinungen (sowie die der „Ätherstrahlung" überhaupt, § 121) zu umfassen bestimmt war. Diese theoretischen Konstruktionen MAXWELLS erfuhren ihre glänzende experimentelle Bestätigung durch HERTZ' Versuche über elektrische Wellen (1888), deren Endergebnis sich dahin aussprechen läfst, dafs die Vorgänge in der nichtleitenden Umgebung z. B. eines elektrischen Induktoriums nicht qualitativ, sondern nur dadurch von den Vorgängen in einem lichtdurchstrahlten Raume unterschieden sind, dafs die auf direktem elektrischen Wege gemessenen elektrischen Wellen in der Luft oder in anderen Dielektricis Wellenlängen von mehreren Metern bis herab zu $\lambda = 6$ mm (5 mm), dagegen die leuchtenden von $\lambda = 0{,}0008$ mm bis herab zu $\lambda = 0{,}0003$ mm (vergl. Tafel V) haben.

Als die früheste einschlägige experimentelle Erfahrung stellen sich im Lichte dieser epochemachenden Entdeckung die Versuche von FEDDERSEN (1858) über oszillatorische Entladungen an Leydener Flaschen dar. Wird nämlich das Bild des Entladungsfunkens einer Leydener Flasche in einem Planspiegel beobachtet, der um eine zur Längsausdehnung des Funkens parallele Achse rotiert, so zeigt sich dieses Bild als eine Reihe zahlreicher paralleler heller Streifen. Es ist also in Wahrheit nicht ein Funke, sondern eine Folge solcher aufgetreten. Dabei verrät das abwechselnd Breiter- und Schmalerwerden der Funkenbilder (Fig. 572

Fig. 572.

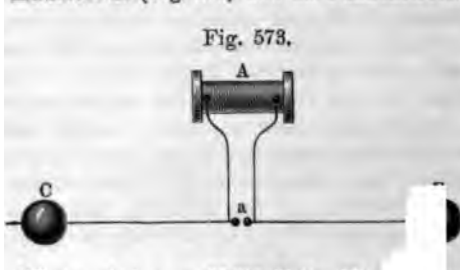


nach photographischen Aufnahmen) ein oszillatorisches Wechseln der elektrischen Zustände beider Pole. — In der Tat war es schon früher bei Erforschung der magnetischen Wirkungen von Flaschenentladungen aufgefallen, dafs die Lage der Pole bei gleicher Ladung der Flasche und gleicher Richtung des Entladungsstromes scheinbar unregelmäfsig wechselt. (Die Erklärung hiervon ergab sich aus den sogenannten Ladungsrückständen, welche nach Entladung von Leydener Flaschen im Dielektricum sich zeigten und die ebenfalls bald positiv, bald negativ waren.) Alle diese Erscheinungen erklärten sich aus einer Art Hin- und Herwogen der Ladungen, ähnlich wie die Schwankungen der Flüssigkeit in Kommunikationsgefäfsen bei Störungen des Gleichgewichtes.

Sowie aber das genannte hydromechanische Gleichnis schon den wirklichen Vorgang beim stationären Strom nur teilweise versinnlichen konnte, so gilt es nun auch, das „gleichsam Hin- und Herfluten" der entgegengesetzten Ladungen beim Entladen einer Leydener Flasche oder sonstiger höherer Potentialdifferenzen aus den anderweitig bekannten Gesetzen elektrischer Erscheinungen möglichst frei von bloſsen Gleichnissen näher zu verfolgen. Solche theoretischen Vorüberlegungen waren es, die HERTZ auf seine Versuche führten (wogegen eine bloſs zufällige, rein empirische Beobachtung der bei den Versuchen auftretenden Erscheinungen schon deshalb ausgeschlossen war, weil diese Erscheinungen für sich, namentlich bei den ersten Versuchen, ganz unscheinbare waren — winzige Fünkchen auf einer etwa 0,5 bis 2 mm langen Funkenstrecke).

HERTZ verwendete statt der Ladung einer Leydener Flasche die eines Funkeninduktors A (Fig. 573) und als Funkenstrecke den Abstand a zweier Messingkugeln von je 1,5 cm Halbmesser. Diese Polkugeln waren mit zwei Zinkkugeln B und C von je 15 cm Halbmesser mittels eines 2,6 m langen, 5 mm dicken Kupferdrahtes leitend verbunden. Somit war einerseits die Kapazität C des Leitersystemes CaB, anderseits der Selbstinduktionskoeffizient L dieses Systems bekannt; desgleichen die Potentialdifferenz bei a zu 36 000 Volt. Hier [illegible] erechnete Hertz, daſs die Dauer T der elektrischen **Schwingungen** während der Entladung $T = 2,5 . 10^{-8}$ sec sein muſste (LA 203).

Fig. 573.



LA 203. Daſs nun diese elektrischen Schwingungen in dem den Induktionsapparat umgebenden Dielektricum **elektrische Wellen** hervorrufen, erkannte HERTZ, indem er in einem Rechtecke aus Draht, das bis auf eine ganz kurze Funkenstrecke geschlossen war, Fünkchen beobachtete, die ein Analogon zur **Resonanz** darstellten, weshalb jenes Drahtrechteck als „elektrischer Resonator" bezeichnet wurde. — Ferner zeigten sich Erscheinungen der **Reflexion,** zuerst an den Wänden des Experimentierzimmers, dann an groſsen, zu parabolischen Zylindern gestalteten Blechen. Bei entsprechend gewähltem Abstande zwischen der primären Funkenstrecke und der Wand bildeten sich nämlich durch **Interferenz** der reflektierten mit den neu ankommenden, fortschreitenden Wellen **stehende Wellen,** was sich dadurch kundgab, daſs in Abständen von durchschnittlich 4,8 m **Maxima,** bezw. **Minima** der Fünkchen auf der sekundären Funkenstrecke zeigten. Hiermit war die Länge dieser elektrischen Wellen in der Luft zu 4,8 m $\times$ 2 = 9,6 m ermittelt.

Aus jenem berechneten Werte von T und diesem beobachteten Werte von λ ergab sich schlieſslich gemäſs der allgemeinen Gleichung $c = \lambda : T$ auch die

Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen $c = 300000$ km sec^{-1} — also eine Geschwindigkeit gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes, d. i. nach der Wellenlehre des Lichtes: gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtwellen.

Schon WHEATSTONE (1834) hatte die „Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrizität in einem Kupferdrahte" durch folgende direkte Methode bestimmt: Die Entladung einer Leydener Flasche ging durch drei Funkenstrecken ab, cd, e

4), wobei von b nach c und ebenso von d nach e je ein 367 m langer Draht
Die Funken wurden beobachtet durch einen sehr rasch rotierenden Spiegel,
Achse parallel der Geraden af lag. Hierbei zeigte sich 1. jedes Funken-
ı senkrecht zu af etwas in die Breite gezogen, woraus auf die Dauer
ınkens gleich $^1/_{1152000}$ sec geschlossen
2. Die Funkenbilder von ab und ef
ı derselben Geraden; cd aber war um so
rschoben, dafs WHEATSTONE auf eine
indigkeit in diesem Drahte zu 430000 km
SIEMENS fand (1876) nach einer anderen
e die Geschwindigkeit im Eisendrahte
km. Zu diesen stark voneinander ab-
den Zahlen ist zu bemerken, dafs hier
ich die Kapazität der Drähte und ihre
liche Ladung und Entladung in Be-
ram; wogegen erst die HERTZsche Zahl
. 10^5 km $\sec^{-1}$, eine eigentliche Aus-
;sgeschwindigkeit unter einfachen Ver-
en darstellt. — Auch die Umrechnungs-
s elektrostatischen in das elektromag-
Mafssystem war schon viel früher
. WEBER und KOHLRAUSCH 1856) rund
m $\sec^{-1}$ gefunden worden. Inzwischen
ch MAXWELL aus seiner mathema-
Theorie vorausgesehen, dafs jene
nungszahl gleich sein müsse der
ndigkeit elektrischer Wellen.
gelang durch Weiterbildung der
:hen Versuche (namentlich durch
ıerung der Oscillationen einerseits
:h Ersetzung der Resonatoren durch
„Empfänger“: Kohärer [§ 160],
er u. dergl.), elektrische Wellen bis herab zu $\lambda = 6$ mm und $n = 5 \,.\, 10^{10}$
zu erzeugen. Von da bis zu den Wellen der strahlenden Wärme von
)0 $\mu\mu$ = 0,0027 mm (vergl. Tafel V) bleibt allerdings noch eine klaffende
– wahrscheinlich nicht, weil es Wellen solcher Längen und Schwingungs-
nicht gibt oder geben kann, sondern weil einerseits die elektrischen
ger nicht mehr, und anderseits die Instrumente für strahlende Wärme
:ht auf solche Strahlen reagieren.

Fig. 574.

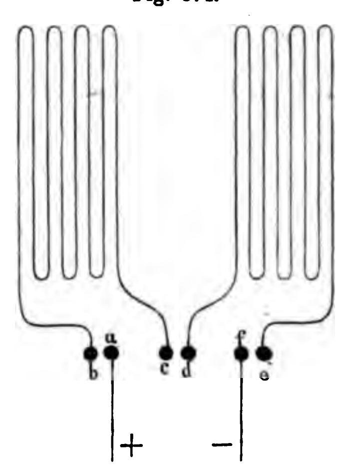
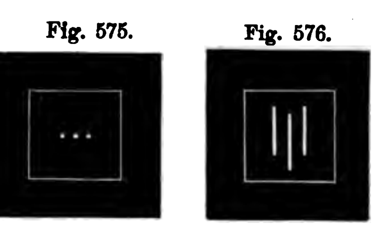


Fig. 575. Fig. 576.

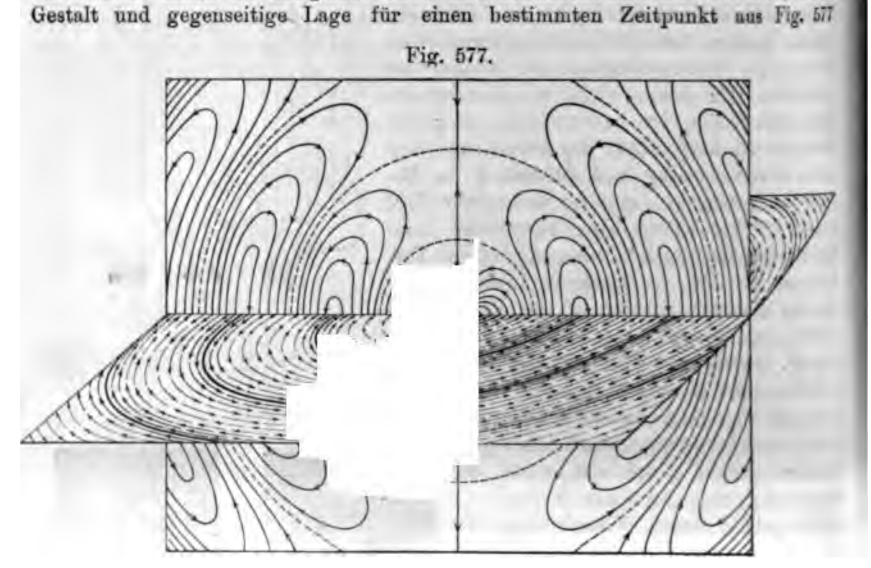


ıe Entdeckung der Wesensgleichheit der elektrischen Wellen mit Wärme-,
und chemischen Wellen erhielt alsbald eine grofse Zahl Bestätigungen
afs sich auch jene elektrischen Wellen als transversale herausstellten, für
nebst der **Reflexion** auch **einfache Brechung** (z. B. an einem Prisma
ı) und **Beugung, Polarisation, Doppelbrechung** u. s. f. experimentell
sen liefsen.

n kann aber nicht sagen, hiermit seien die elektrischen Wellen qualitativ
htwellen“ in dem Sinne erwiesen, dafs man die Vorstellungen der ersten
les XIX. Jahrhunderts festhält, nach welchen die Lichtwellen einfach
ısche Wellen im elastisch gedachten Lichtäther sein sollten; sondern
ırt lag es nahe, nun vielmehr die Lichtwellen und spezieller ihre Trans-

versalität auf die von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen her schon bekannten Tatsachen der transversalen Wirkungen magnetischer und elektrischer Körper aufeinander zu deuten. — Für den besonderen Fall, dafs wir uns die Polkugeln der primären Funkenstrecke a, die wir nach dem Vorausgehenden als einen elektrischen Oszillator bezeichnen können, nicht von einem wägbaren Medium, sondern nur vom Äther umgeben denken, läfst sich der Zustand des Äthers während der elektrischen Oszillationen nunmehr wieder beschreiben durch die magnetischen und elektrischen Kraftlinien, deren Gestalt und gegenseitige Lage für einen bestimmten Zeitpunkt aus Fig. 577

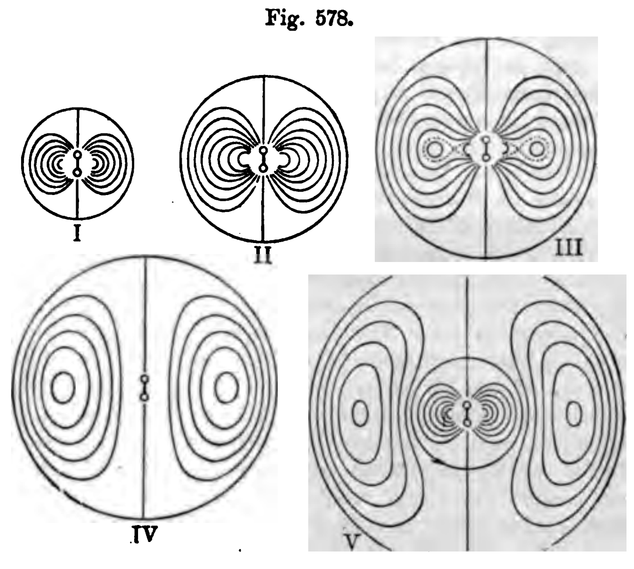
Fig. 577.



ersichtlich wird. Wäre nämlich in dem Oszillator ein konstanter Strom geflossen, so hätten ihm magnetische Kraftlinien von der Anordnung der Fig. 512 entsprochen; und blieben diese in unveränderter Lage und Dichte, so würden sie einem ebenfalls konstanten Zustande des magnetischen Kraftfeldes entsprechen. Wenn dagegen der Strom 1. seine Stärke von 0 an erst binnen der kleinen Zeit τ sec erreicht und wenn 2. die jeder einzelnen Stromstärke entsprechende Stärke des magnetischen Feldes durch den Raum mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit durchzieht, so müssen statt der ruhenden Kraftlinien magnetische Wellenringe vom Stromleiter weg sich fortpflanzen; und zwar so, dafs jedem Wechsel der Stromrichtung im Oscillator eine Umkehrung der Richtung der magnetischen Kraftlinien entspricht; in der Fig. 577 angedeutet durch die entgegengesetzten Richtungen der Pfeile. — Diese Wechsel des magnetischen Zustandes müssen dann weiterhin in dem als Leiter gedachten umgebenden Äther magnetoinduzierte, in sich geschlossene elektrische Ströme zur Folge haben, deren Gestalt und Richtung sich aus den Gesetzen der Magneto- und Elektroinduktion einerseits, der elektromagnetischen und elektrodynamischen Kräfte anderseits ergibt. — Fig. 578 (I bis V) stellt die allmähliche Entstehung der elektrischen Wellen vom Beginn der elektrischen Schwingungen am Oscillator dar. Und zwar I zur Zeit, ehe sie sich noch auf ein Viertel Wellenlänge ausgedehnt haben, während die beiden Sammelkugeln entgegengesetzt geladen sind; Fig. II, während sich die Sammelkugeln bereits zu entladen beginnen; in Fig. III

schnürt sich ein Teil jeder Kraftlinie ab, indem er sich in die Sammelkugeln zurückzieht, wogegen der andere Teil sich in sich selbst schliefst; weshalb in IV zu beiden Seiten des Oscillators geschlossene Ringwellen sich vom Oscillator entfernen, während die Sammelkugeln ganz entladen sind. In V rückt dann wieder ein neues Wellensystem wie in I nach; u. s. f.

Fig. 578.



Im bisherigen war wieder über die „physikalische Natur der magnetischen und elektrischen Kraftlinien" keine noch weiter vordringende Hypothese gemacht worden. Aber FARADAYS Gedanke ist noch weiter verfolgt worden, indem sich Maxwell die magnetischen Kraftlinien als die Achsen von Wirbeln im Äther dachte; infolge der kreisenden Bewegung in den Wirbeln würden dann Zentrifugalspannungen entstehen, in denen sich senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien gerichtete elektrische Kräfte wiedererkennen lassen. Hiermit wäre zunächst ein Ausgangspunkt für die mechanische Erklärung elektrokinetischer Vorgänge gegeben.

Die elektrostatischen Zustände in einem Dielektrikum wären dann so zu denken, dafs der Äther (den man, statt wie einst mit einem festen, starren Körper von ungeheurem Elastizitätsmodul, nun mit elastischer Gallerte verglich) durch alle elektrischen Ladungen eines in ihn gebetteten Leiters eine **„dielektrische Verschiebung"** erfahre. — Zur Erläuterung der Begriffe „Dielektricum" und „dielektrische Verschiebung", die die Grundlage der neueren Elektrizitätstheorieen bilden, einiges nach MAXWELL: Die Stoffe, die man früher Schlechtleiter oder Isolatoren genannt hatte, weil sie einem elektrischen Strome sehr grofsen, ja unendlichen Widerstand zu bieten schienen (alle Gase, einige Flüssigkeiten, die nicht Elektrolyte sind, wie Terpentinöl, Naphta; einige feste Körper, wie Guttapercha, Kautschuk, Bernstein, Glas bei niederer Temperatur, krystallinische Elektrolyte), werden nun Dielectrica genannt, „weil man doch gewisse elektrische Wirkungen durch sie hindurchsenden kann". — Eine auf ein Dielektricum wirkende elektromotorische Kraft bringt in der Richtung dieser Kraft im Dielektricum eine dielektrische Verschiebung hervor. Ist die elektromotorische Kraft konstant, so ist nur Verschiebung, aber kein Strom vorhanden. Wächst die elektromotorische Kraft, so ist die Zunahme der Verschiebung einem elektrischen Strome äquivalent, der in derselben Richtung verläuft, in der die elektromotorische Kraft wirkt. Nimmt die elektromotorische Kraft ab, so ist die

Abnahme der elektrischen Verschiebung äquivalent einem Strome in entgegengesetzter Richtung. — Umgekehrt: In einem Dielektricum wird durch eine dielektrische Verschiebung eine innere elektromotorische Kraft hervorgerufen, deren Richtung der der Verschiebung entgegengesetzt ist, und welche die Verschiebung auf Null zu bringen bestrebt ist. Der Sitz dieser inneren Kraft ist in dem Dielektricum überall da, wo eine Verschiebung ist. — Um eine elektrische Verschiebung in einem Dielektricum hervorzubringen, ist ein Aufwand von Arbeit erforderlich, die durch das halbe Produkt aus der elektromotorischen Kraft und der elektrischen Verschiebung gemessen wird. Diese Arbeit ist als *potentielle Energie im Dielektricum* aufgespeichert. — Die *Dielektrizitätskonstante* eines Stoffes gibt das Verhältnis der Gröfsen der Verschiebungen an, die durch dieselbe elektromotorische Kraft in dem Stoffe und im Vakuum hervorgerufen werden. Daraus, dafs nach Boltzmann die Dielektrizitätskonstanten vieler Stoffe (Schwefel, Kolophonium, Paraffin, Ha[illegible]mi; Luft, CO_2, CO, H, NO, CH_4, C_2H_4) den Quadraten ihrer Brechungsquot[illegible] gleich sind (§ 139), wird nicht nur ebenfalls wieder der sachliche Zusam[illegible]ang zwischen Licht und Elektrizität erwiesen, sondern es ist dies auch e[illegible]spiel, wie die Optik ihrerseits aus der elektromagnetischen Theorie des [illegible]ufschlüsse über die optischen Tatsachen als solche zu erwarten hat, wo[illegible] Elastizitätstheorie des Lichtes die Gröfse und Verschiedenheit der [illegible]quotienten und hiermit die Dispersion des Lichtes nur durch mehr ode[illegible]r künstliche Hilfshypothesen über die mechanischen Kräfte zwischen Körpe[illegible]Ätheratomen zu erklären vermocht hatte.

Speziell die *disruptive Entl*[illegible] *durch Dielektrica* legt es übrigens ebenfalls nahe, die *dielektrische* [illegible]*hiebung mit elastischer Verschiebung* zu vergleichen. Indem *feste* [illegible]ktrica beim Durchgange der Entladung oft durchgebohrt, zerrissen, zum Teil in Dampfform zerstreut werden, sind diese Entladungserscheinungen dem *Zerreifsen, Zerbrechen, Zerdrehen* . . . eines Körpers analog. Wie kleine oder grofse Kräfte oder Kraftmomente *Dehnung, Biegung, Verdrehung* . . . herbeiführen, so die **elektromotorischen Kräfte** kleinere oder gröfsere dielektrische Verschiebungen. **Der konstanten** *elastischen Deformation* entspricht *Leitung* oder **Durchgang von Ladungen**; dem *vollkommen elastischen Körper*, der nach **Aufhören der Kraftwirkung** seine frühere Gestalt wiedergewinnt, entspricht ein **Dielektricum, das gegenüber** eine nicht zu grofsen elektromotorischen Kraft als **vollkommener Isolator** wirkt. Wie jeder über seine Festigkeitsgrenze mechanisch **deformierte Körper** zerreifst, zerbricht . . ., so gibt es auch eine **elektrische Festigkeit, gemessen durch** die gröfste elektromotorische Kraft, die das Dielektricum **aushalten kann**, *ohne* dafs es zur *disruptiven Entladung* kommt. **Dafs sich beim elektrischen** Funken zwischen zwei Leitern die ganzen Ladungen nahezu **auf einmal entladen**, ist zu vergleichen dem Vorgange, durch den z. B. ein Blatt **Papier bei zu starker** Spannung plötzlich zerreifst. Immer erfolgt hierbei der **Rifs von den schwächsten** Stellen der Ränder aus und geht unregelmäfsig **zu den übrigen schwachen** Stellen des Papiers; ebenso sind die Zacken des **elektrischen Funkens wahrscheinlich** durch Staubteilchen u. dergl. bedingt. — Ein *unvollkommen* **elastischer** *Körper*, der nach Aufhören der Kraftwirkung seine frühere **Gestalt nicht mehr vollständig** annimmt, entspricht einem *Halbleiter*. Stoffe, wie **Luft**, die *nur* disruptive Erscheinungen hindurchlassen, kann man „*elektrisch* **brüchige**" nennen, ähnlich den *spröden* oder brüchigen Stoffen. — Die *elektrischen* **Rückstände** im Glase einer Leydener Flasche oder in der Guttapercha eines **unterseeischen** Kabels entsprechen der *elastischen Nachwirkung*. (LA 204.)

LA 204.

§ 158. Kathodenstrahlen, Röntgenstrahlen, Becquerelstrahlen u. s. f.

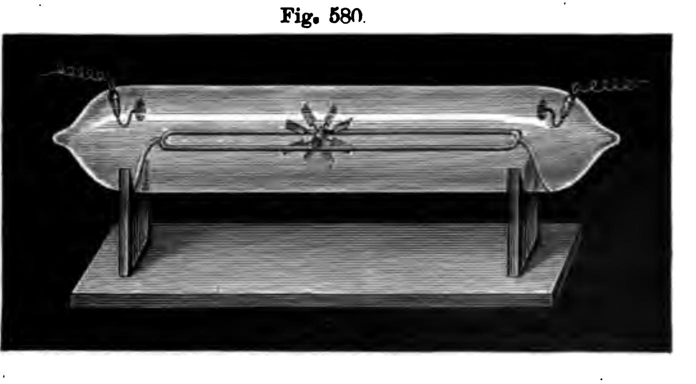
Die Lichterscheinungen bei disruptiven Entladungen in der Luft von gewöhnlicher Dichte und namentlich in verdünnten Gasen konnten ins Grofse gesteigert und aufs mannigfachste abgeändert werden seit der Verwendung mächtiger Induktorien an Stelle der Reibungselektrisier- und Influenzmaschinen. Hierbei ergaben sich überdies noch besondere Klassen von Erscheinungen insofern, als in sehr verdünnten Gasen nicht nur ein Aufleuchten an Ort und Stelle, sondern eine **geradlinige Ausbreitung** bestimmter Wirkungen zu beobachten war, die (noch vor Hertz' experimenteller Bestätigung des Begriffes elektrischer Wellen) zu dem Begriffe von **Kathodenstrahlen** geführt hatten.

Fig. 579.



Es hat nämlich Hittorf 1869 und um dieselbe Zeit Crookes in sehr stark verdünnten Gasen Erscheinungen beobachtet, die Crookes auf einen „vierten Aggregatzustand" deutete, der noch über den gasförmigen hinausgehen sollte; Stoffe in diesem Zustande nannte er „strahlende Materie". — Nach einer anderen Auffassung sollten bei den Entladungen von den als Kathode dienenden Platindrähten und Blechen Platinteilchen oegerissen und nit grofser Geschwindigkeit ings merklich erader Linien ortgeschleudert rerden. — Nach iner neuesten lypothese sind lie Kathoden-„Strahlen" nichts anderes als die negativen **Elektronen** (§ 154) selbst, die von der Kathode in den Raum geschleudert werden. — Einige der zahlreichen, diesen Hypothesen zu Grunde liegenden Tatsachen sind folgende: Wenn in dem mit sehr verdünnter Luft gefüllten Gefäfse (Fig. 579) die Platte *a* als Kathode verwendet wird, so erzeugt das Kreuz *b* aus Aluminiumblech auf der hinter ihm liegenden Wand bei *d* einen Schatten (von dem noch besonders merkwürdig ist, dafs, wenn das Kreuz *b* um das unten befindliche Scharnier umgelegt wird und die Entladung

Fig. 580.



bei *a* ihren Fortgang nimmt, dann das früher dunkle Kreuz bei *d* nun heller als seine Umgebung aufleuchtet — zu vergleichen den negativen Nachbildern auf unserer Netzhaut). Wird der Strom gewechselt, so dafs *a* Anode und *b* Kathode ist, so bleiben diese Erscheinungen aus. Auch direkt mechanische Wirkungen lassen sich erzielen, indem z. B. das Glimmerrädchen in Fig. 580 (s. v. S.) von der Kathode weggetrieben wird, wie wenn aus dieser Wind ausströmte. Hat die Kathode *c* die Gestalt eines Hohlspiegelchens, so beginnt in dessen Krümmungsmittelpunkt (nicht im Brennpunkt — vergl. Fig. 581) ein Platinblech zu glühen, wie wenn es von den normal zu den Flächenelementen des Spiegelchens fortgetriebenen Teilchen gleichsam gehämmert oder wie wenn es von den eben in dieser Richtung ausgehenden Strahlen ähnlich erhitzt würde wie der Feuerschwamm im Brennpunkte eines Hohlspiegels. — Gegenwärtig ist die Bezeichnung **Kathodenstrahlen** allgemein gebräuchlich geworden; in ihr ist, unabhängig von näheren Hypothesen, festgehalten, dafs die Erscheinungen jedenfalls so erfolgen, als ob von der Kathode Strahlen ähnlich den Licht- und Wärmestrahlen ausgingen und auch alle Wirkungen hervorbringen, die den der sonst als Strahlung erkannten Vorgänge ähnlich sind. Die direkt erwiesene Tatsache, dafs jene „Strahlen" negative Ladungen mit sich führen, wurde zum Ausgangspunkt für die „Elektronen"-Theorie.

Fig. 581.



Gröfstes Aufsehen erregte (1895) die Entdeckung der von Röntgen als **X-Strahlen**, seither allgemein als **Röntgenstrahlen** bezeichneten Strahlen, die von den durch Kathodenstrahlen getroffenen Stellen ausgehen und durch völlig undurchsichtige Stoffe hindurch noch kräftige chemische, Fluoreszenz- und elektrische Entladungswirkungen ausüben.

So wurden die Röntgenstrahlen fast unmittelbar nach ihrer Entdeckung zu einem regelmäfsigen diagnostischen Hilfsmittel für den Arzt, der nun photographische Aufnahmen vom Innern des menschlichen Körpers gewinnen und so z. B. eingeschlossene Fremdkörper, Unregelmäfsigkeiten im Knochenbau, bei besonders guten Aufnahmen auch von Weichteilen gewinnen konnte. Es gehört hierzu 1. ein Induktorium, 2. eine Röntgenröhre (von der Form des Gefäfses in Fig. 579, wo *a* wieder die Kathode, statt *b* ein einfacher Zuleitungsdraht angebracht ist, oder auch von mancherlei anderen Formen). Die X-Strahlen gehen dann z. B. durch die zu photographierende Hand, unter der 3. die photographische Platte in einer lichtundurchlässigen Kassette liegt. Auf der Platte entwickelt sich wie sonst durch Lichtstrahlen das negative Bild, indem die Weichteile viel mehr, die Knochen weniger oder nichts von den Strahlen hindurchlassen. — Theoretisch waren diese Strahlen insofern von gröfstem Interesse, als keine

≥chung an ihnen wahrgenommen werden konnte, weshalb eine Wellen-Aus-
ɜitungsgeschwindigkeit noch viel gröſser sein müſste als die der Licht- und
ktrischen Wellen. — Nach der neuesten Elektronentheorie entsprechen die
ɑntgenstrahlen Explosionswellen, die sich von Stellen fester Körper ausbreiten,
› Elektronen mit ungeheurer Geschwindigkeit, nach Richard etwa ein Viertel
r Lichtgeschwindigkeit, aufprallen.

Seit wenigen Jahren sind noch weitere merkwürdige Erscheinungen bekannt
ɾworden, die man **Becquerelstrahlen** nennt. Einige Stoffe nämlich, die
as Uranverbindungen abgeschieden und als Radium und Polonium be-
eichnet wurden (es ist nicht sicher, ob es Grundstoffe sind), aber auch andere
„**radioaktive Stoffe**", wie Chlorbaryum, Brombaryum u. s. f., wirken entladend
auf einen ihnen nahen, geladenen Leiter; schon sehr kleine Mengen dieser Stoffe
wirken, in Metallhülsen eingeschlossen, durch diese hindurch erregend auf die
photographische Platte oder fluoreszierende Schirme ähnlich wie Röntgenstrahlen;
neuestens wurde neben zahlreichen anderen überraschenden Wirkungen auch beob-
achtet, daſs schon kleine Mengen solcher Stoffe, in Zelluloid oder dünne Metallhülsen
eingeschlossen und für einige Stunden in die Nähe der Haut gebracht, in dieser
nach Tagen Entzündungen bis zu erst nach Wochen heilenden Wunden hervor-
riefen. Letztere Erscheinungen würden vielleicht eher hindeuten auf ein Eindringen
von Stoffteilchen in die Haut, die dann daselbst als Fremd- oder Giftstoffe immer
neue Reizung herbeiführten. Namentlich die photochemischen und die Fluoreszenz-
Wirkungen weisen aber auf eine innere Verwandtschaft mit sonstigen Strahlungs-
vorgängen hin. Auch das Entladen von Leitern hat sein unmittelbares Vorbild
an der (sonderbarerweise erst von Hertz bemerkten) Tatsache, daſs Lichtstrahlen,
namentlich die stark brechbaren und ultravioletten Strahlen, auf negativ geladene
Leiter sehr rasch entladend wirken. — Daſs die radioaktive Wirkung Monate (ja
wie man schlieſsen zu dürfen glaubt, Jahrhunderte) lang ohne meſsbaren Verlust
oder Ersatz an Masse und Energie andauert, wurde aus folgender Weiter-
bildung der Elektronenhypothese erklärt: Es ist kein Zufall, daſs die Stoffe von
gröſstem Atomgewicht, Uran (240), Thor (232), Radium (225), besonders radio-
aktiv sind; denn diese Systeme von einer Viertel- bis einer Halbmillion Elektronen
(vergl. S. 504) hätten die Grenze möglicher Stabilität erreicht und es rissen sich
aus ihnen immer einzelne Subatome mit jenen ungeheuren Geschwindigkeiten los.

Anhang:

§ 159. Elektrische Vorgänge im lebenden tierischen Körper.

Schon im Altertum wuſste man, daſs der Zitterrochen der ihn ergreifenden
Hand diejenige Empfindung verbunden mit Muskelzucken errege, die wir
jetzt „**elektrischen Schlag**" nennen. Als Musschenbroeck zum erstenmal den
Schlag einer Leydener Flasche verspürte, bemerkte er sogleich die Ähnlichkeit
dieser Empfindung mit der beim Schlage des Zitterrochens. Seither kennt man
als „elektrische Fische" überdies den Zitteraal, Zitterwels und einige andere. —
Der Lebensprozeſs dieser Tiere ist also eine Quelle kräftiger elektrischer Ladungen.
Der von hier gewonnene Begriff „**tierische Elektrizität**" wurde dann auch irriger-
weise herangezogen zur Erklärung von Galvanis Beobachten der zuckenden
Froschschenkel (§ 153), wurde aber durch Voltas abweichende Deutung jener
Erscheinung eine Zeitlang überhaupt zurückgedrängt.

DuBois Reymond (1848) zeigte in einer umfassenden Untersuchung, daſs sowohl in den **Nerven** als auch in den **Muskeln** während der Funktion dieser Organe **elektrische Ströme** auftreten. Mittels empfindlicher Galvanometer gelingt es, solche schon beim bloſsen Biegen des Fingers nachzuweisen.

Nun lag es wieder nahe, die Ausbreitung von Nervenreizungen mit der Fortpflanzung von Strömen in Telegraphendrähten zu vergleichen; ja das Nervensystem mit seinen Leitungsbahnen und Zentralorganen (Gehirn, Rückenmark) legte den Vergleich mit einem Telegraphennetze, seinen Drähten und Zentralstationen nahe. Es ist aber gewiſs, daſs der „**Nervenstrom**", dessen Geschwindigkeit Helmholtz zu 30 bis 40 m sec^{-1} festgestellt hatte, **kein elektrischer Strom** sein könnte, schon wegen dieser millionenmal zu kleinen Fortpflanzungsgeschwindigkeit. (Vielmehr sind es im Nerv höchst wahrsc[illegible]h **chemische Umsetzungen**, indem der an dem einen Ende einer Nervenfaser [illegible]eifende Reiz die in ihr aufgespeicherte potentielle Energie in ähnlicher Weis[illegible]ritt für Schritt auslöst, wie der Funke ein Lauffeuer allmählich zum Abbre[illegible]ringt.)

Die sogenannten **physiolo**[illegible]**hen Wirkungen** elektrischer **Entladungen** sind viel weniger an stationäre Ströme als an **Änderungen** der Stromstärke geknüpft. Die kräftigsten Wirkungen geben daher Induktionsapparate mit ra[illegible]m Stromwechsel.

Auch beim Schlag der Leydener [illegible]che mögen es die raschen Umladungen sein, die ihn so empfindlich machen; dagegen die Erfahrungen mit Teslaströmen (voriger Paragraph). — Tötungen durch Blitzschlag, durch Starkströme.

V. Aus der Elektrotechnik.

Vorbemerkung. Die theoretischen Grundlagen der Elektrizitätslehre, welche in den vorausgegangenen Abschnitten I bis IV erörtert wurden, und welche die anfänglich zumeist auf rein empirischem Wege gefundenen Erscheinungen und Vorgänge auf diesem Gebiete in das exakte Gewand von Gesetzen und mathematischen Formeln kleiden, bilden die Grundlage für die mannigfaltigsten praktischen (technischen) Anwendungen, die sich die gesamte zivilisierte Menschheit mit geradezu beispielloser Raschheit binnen der jüngsten Jahrzehnte zu nutze gemacht hat und die man schon heute gar nicht mehr zu entbehren vermöchte. Telegraph und Telephon stehen für die öffentliche, Geschäfts- und Privatwelt dem Briefverkehr zur Seite; das elektrische Licht strahlt nicht mehr nur in groſsen und kleinen Städten, sondern auch in kleinsten Dörfern, in den Tiefen der Bergwerke und der Tunnel; der elektrischen Arbeitsübertragung bedienen sich das Kleingewerbe wie die Groſsbetriebe der Fabriken, wobei seit einigen Jahren die Übertragung ganz gewaltiger Leistungen mit hohem Wirkungsgrade auf Entfernungen

von mehreren Hunderten von Kilometern nichts Seltenes mehr ist. Es sei noch erinnert an die wirtschaftliche und verkehrstechnische Wichtigkeit der elektrischen Bahnen für den Strafsenbahn- und für den Lokalverkehr, wozu noch in allernächster Zeit der Fernschnellverkehr kommen wird (bis Ende 1901 wurden bei den Versuchsfahrten bereits Fahrgeschwindigkeiten von 160 km per Stunde erreicht).

Für diese und unzählige andere Anwendungen vom gröfsten bis zum kleinsten bieten sich behufs geordneten Überblickes mehrere Einteilungsgründe dar:

Der noch bis vor kurzem einschneidendste Gegensatz war der zwischen **Schwachstromtechnik** (Telegraphie, Telephonie, Signalwesen . . .) und **Starkstromtechnik** (Dynamomaschinen, elektrische Bahnen, elektrisches Licht, Elektrometallurgie . . .). Doch werden heute auch schon die Ströme z. B. für Telephonzentralen von Dynamomaschinen oder Akkumulatoren geliefert.

Eine andere der Praxis des Technikers selbst entnommene Gliederung ist die: 1. **Stromquellen** (dynamoelektrische Maschinen für Gleichstrom und Wechselstrom; Akkumulatoren, gegen welche die Batterieen, Thermoelemente u. dergl. schon fast ganz zurückgetreten sind). 2. **Elektromotoren** für Gleichstrom und Wechselstrom. 3. **Telegraphie und Telephonie.** 4. **Bogen- und Glühlampen.** 5. **Elektrochemische** Betriebe (Galvanoplastik, Metallurgie . . .). — Neben diesen Vorrichtungen für Erzeugung und Verbrauch der Ströme beanspruchen aber nicht minder grofse Aufmerksamkeit 6. die **elektrischen Leitungen** einschliefslich der Sicherungen (gegen Kurzschlufs, Blitzschlag . . .), 7. die **Mefsinstrumente,** 8. noch mancherlei Nebenapparate der Elektrotechnik (Widerstände, Umschalter, Klemmen u. s. w.).

Die im folgenden eingehaltene Reihenfolge ist durch die äufserliche Rücksicht des unmittelbaren Anschlusses an die theoretischen Abschnitte III und IV vorgezeichnet.

A) Anwendungen der elektromagnetischen und Induktionswirkungen.

I. Telegraphie, Telephonie, Signalwesen.

Geschichtliches. Von denjenigen Telegraphenapparaten, die heute noch praktisch verwendet werden, ist am frühesten erfunden Morses Schreibtelegraph (in der heutigen Form konstruiert 1840, im allgemeinen Gebrauch seit 1850). Neben ihm stehen heute allgemein in Verwendung Hughes' Typendruckapparat (1855) für Hauptstationen und Thomsons Syphonrekorder (1853) für überseeische Telegraphie.

Nachdem man längst eine „Fernschrift" mittels Magnetnadeln geahnt hatte (so Porta 1569), und Lesage in Genf (1774) mittels mechanischer Wirkungen durch Leydener Flaschen, Sömmering (1808) mittels Wasserzersetzung sogar wirklich schon telegraphiert hatten, schlug Ampère (1820) die Magnetnadel als Zeichenbringer vor und dieser Vorschlag wurde von Schilling in Cannstadt verwirklicht. Doch sind als die ersten, welche einen **elektromagnetischen** (Nadel-) **Telegraphen** (1833) praktisch zur Anwendung brachten, Gauss und Weber zu nennen. Sie verständigten sich zwischen dem magnetischen Observatorium und dem physikalischen Kabinett in Göttingen (etwa 3 km) durch die Bewegungen eines Magnets,

der zuerst durch einen Batteriestrom, dann durch Induktionsströme abgelenkt wurde. STEINHEIL in München verbesserte diesen Apparat wesentlich und erfand insbesondere (1838) die „**Erdleitung**“; seine Leistungen enthalten eigentlich alles, was die Grundlage der modernen elektrischen Telegraphie bildet.

Die Konstruktion verschiedener **Apparate**, wie der Zeigertelegraphen (WHEATSTONE 1839), bei denen durch Verstellen eines Kontaktes an der einen Station ein Zeiger über einer kreisförmigen Platte zu dem zu telegraphierenden Buchstaben geführt wurde, der chemischen Telegraphen (BAIN 1842), die auch Zeichnungen (nach einer Art Rastermethode) zu übertragen gestatteten, ferner der Rufapparate und der Relais (WHEATSTONE 1839) bildeten das eine Problem der elektrischen Telegraphie; zwei andere Probleme aber wurden durch das Bestreben der immer weiteren Ausbreitung der telegraphischen Korrespondenz hervorgerufen: a) das Problem der **überseeischen oder Kabeltelegraphie** und b) das der **Multiplextelegraphie.**

a) Die Kabeltelegraphie verlan[illegible]or allem bedeutende technische Vorbereitungen zur Herstellung hinreiche[illegible]ltbarer Kabel und zur Verlegung derselben auf dem Meeresgrunde. Nac[illegible]eren vergeblichen Versuchen gelang es erst 1866, das erste transatlantische [illegible]zwischen Irland und Amerika) betriebsfähig zu machen; es folgten alsbald [illegible]re submarine Drahtverbindungen, und Anfang 1901 gab es 1750 unterseeische[illegible]l in einer Gesamtlänge von 358148 km.

b) Der grofse Andrang zu den [illegible]geren Telegraphenlinien führte zu dem Streben, solche Linien dadurch bes[illegible]zunutzen, dafs man in den unvermeidlichen Pausen zwischen den einzelnen [illegible]en einer Depesche auf demselben Draht die Zeichen einer zweiten (eventuell [illegible]ten, vierten . . .) Depesche einschob. Durch geeignete Taster, Bewickelunge[illegible]nd Schaltungen gelang dies sowohl bei Morse- wie bei Hughes-Apparaten; insbesondere bei letzteren wird in der Tat von dieser Multiplexschaltung heute öfters Gebrauch gemacht. (Stimmgabeltelegraphie. Bis Ende 1901 gelang es MERCADIER, 24 Depeschen gleichzeitig zwischen verschiedenen Aufgabs- und Empfangsorten auf derselben Linie zu befördern; Versuche auf der Telegraphenlinie Paris — Bordeaux.)

Neuestens ist die **drahtlose Telegraphie** zu einem Problem geworden, das MARCONI (1896) zu praktischer Verwendung gebracht hat.

Die **Telephonie** erregte sogleich bei BELLS Erfindung (1877), der ein Telephon von REIS (1860) vorausgegangen war, allgemeine Aufmerksamkeit, fand aber wirkliche praktische Verwendung erst in Verbindung mit dem von HUGHES (1878) erfundenen **Mikrophon**. Gegenwärtig vermitteln Telephonzentralen den schon sehr beträchtlichen telephonischen Verkehr innerhalb der Städte und auch die interurbane Telephonie ist zu bedeutendem Ansehen gekommen. (Längste Linie Chicago—New York 1520 km.)

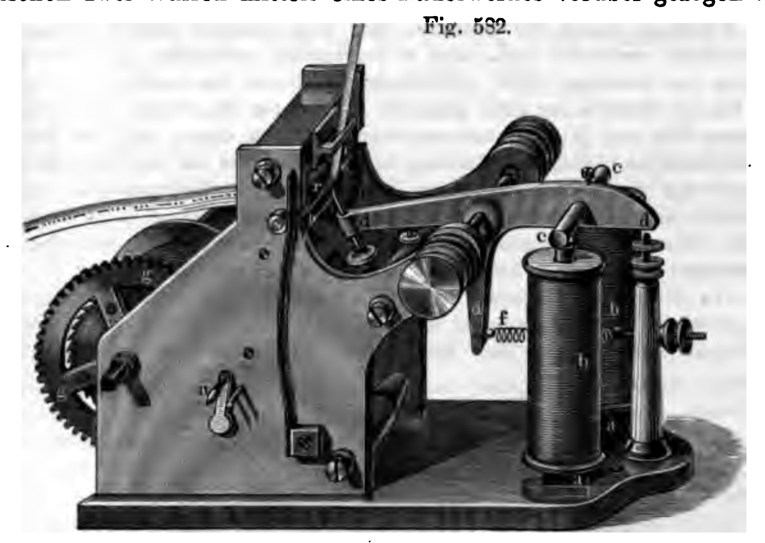
Das **Signalwesen** hat sich unter Zuhilfenahme verschiedener Apparate: Läutwerke, Verschlufs- und Sicherungsapparate, Kontrollapparate, Telegraphen, Telephone ganz besonders im Eisenbahnbetriebe entwickelt.

§ 160. Einige Arten von Telegraphen.

1. **Morses Schreibtelegraph** hat in der Aufgabestation A als **Zeichengeber** einen Taster, in der Empfangsstation E als **Zeichenbringer** (Zeichenempfänger, Fig. 582 — die Doppelschaltung zeigt schematisch Fig. 583) einen **Schreibapparat**, bestehend aus einem

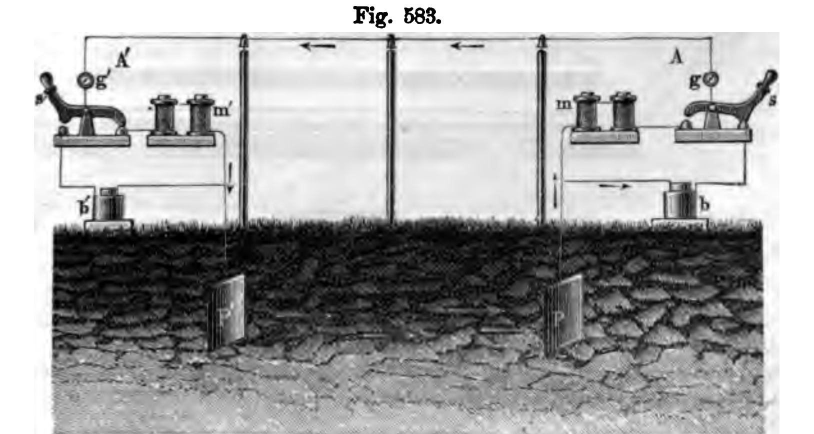
ektromagnet und einem Hebel, der an dem einen Ende einen Anker, . dem anderen einen Schreibstift trägt, an dem ein Papierstreifen rischen zwei Walzen mittels eines Räderwerkes vorüber gezogen wird.

Fig. 582.



ei älteren Apparaten drückt der Stift Striche und Punkte in das apier, bei neueren schreibt er sie mit Farbe (also deutlicher sichtbar) uf. — Durch eine elastische Feder wird der Hebel in die Ruhe-ellung gebracht, sobald der Elektromagnet stromlos ist.

Fig. 583.

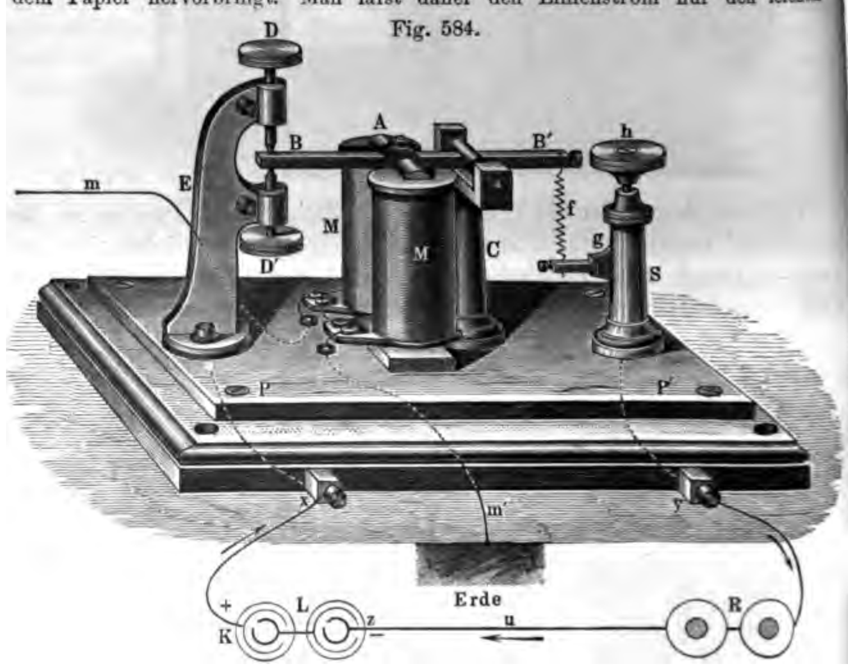


Erdleitung: Nach dem ursprünglichen Gedanken, auf dem alle Telegraphie ruht, hätte der Strom von der Linienbatterie zum Zeichengeber, von da rch die Linienleitung zum Zeichenbringer und von diesem durch eine Rückitung zur Linienbatterie zurückgehen müssen. Diese Rückleitung hat STEINHEIL

erspart, indem er sowohl von der Batterie wie vom Zeichenbringer Leitungen zu grofsen in die Erde eingesenkten Metallplatten (Erdplatten) gehen liefs. Man stellte sich zuerst das Erdprisma zwischen diesen Platten als Ersatz des Rückleitungsdrahtes vor. Doch entspricht diese Vorstellung gewifs nicht dem wirklichen Vorgange: schon der Gedanke, dafs viele Tausende solcher Platten über den Kontinent verbreitet sind, läfst es unglaublich erscheinen, dafs jeder Strom den Weg zur richtigen Platte zurückfindet. Vielmehr hat zunächst die von dem einen Pol der Batterie zur Erde gehenden Leitung nur den Zweck, das Potential an diesem Pole auf Null herabzusetzen, wodurch dann, weil die Potentialdifferenz konstant bleibt, das Potential des anderen Poles auf das Doppelte steigt. Von hier aus findet dann längs der Linienleitung ein Potentialabfall bis zum Zeichenbringer und der mit ihm verbundenen Erdplatte statt, d. h. es fliefst auch jetzt der Strom von der Batterie durch den Zeichengeber zum Zeichenbringer.

Relais: Bei langen Leitungen würde die Stärke des aus der Linienbatterie kommenden Stromes nicht ausreichen, um den Elektromagnet des Zeichenbringers kräftig genug zu erregen, dafs der Stift deutliche Zeichen auf dem Papier hervorbringt. Man läfst daher den Linienstrom nur den leichten

Fig. 584.



Kontakthebel eines Übertragers (Relais, Fig. 584) in Bewegung setzen, der dann den Strom einer Lokalbatterie schliefst. Erst dieser Lokalstrom setzt den Zeichenbringer in Tätigkeit.

Über die Blitzschutzvorrichtungen, die einen wesentlichen Bestandteil jeder Telegraphenanlage bilden, vergl. § 171.

2. Hughes' Typendrucktelegraph. Fig. 585 zeigt für zwei Stationen die Hauptbestandteile und ihre Verbindung. Am Umfange des „Typenrades" *A* sind die Buchstaben des Alphabetes und die Ziffern der Reihe nach angeordnet; die

tehende Scheibe S enthält ebenso viele Schlitze als das Typenrad Zähne und Klaviatur des Apparates ebenso viele Tasten h, die mit den Buchstaben, bezw. ırn bezeichnet sind. Wird in der Station I die Taste h (etwa für den Buchen a) niedergedrückt, so tritt das metallische Ende des Tasterhebels durch den itz der Scheibe S. Der rasch um die vertikale Achse rotierende Kontaktitten n schliefst Vorübergehen Stromkreis der terie, in welchen Spule des polariten Elektromag- e eingeschaltet der Anker wird ch eine Feder losssen und drückt Papierstreifen p an den nach

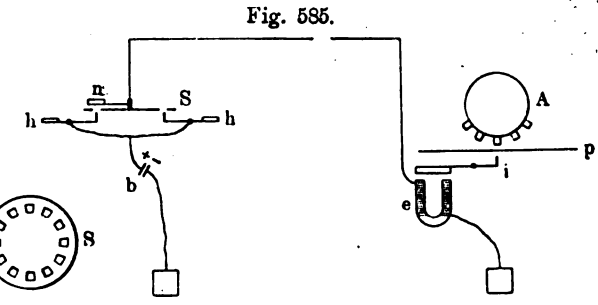


Fig. 585.

ın gekehrten Zahn des Typenrades: der dort befindliche Buchstabe wird auf Papierstreifen abgedruckt. Da Kontaktschlitten und Typenrad in stets übertimmender (isochroner und synchroner) Rotation erhalten werden (durch ein tiges Laufwerk mit geeigneten Brems- und Korrektionsvorrichtungen — in Figur weggelassen), so befindet sich im Augenblick des Kontaktes (für den hstaben a) das Typenrad A in der Lage, dafs gerade der Buchstabe a dem ierstreifen gegenübersteht und auf ihn abgedruckt wird.

3. Casellis Pantelegraph löste die Aufgabe, nicht nur einzelne Zeichen Lettern, sondern beliebige Zeichnungen, Unterschriften u. dergl. in genauer ›ie zu telegraphieren. Das Prinzip ist das zweier genau isochron schwinler massiver Pendel; das an der Aufgabestation schwingt über der auf nder Zinnfolie aufgetragenen Schrift aus nichtleitendem Stoffe, dieser unterht einen Strom, der vom Zinn in das berührende Pendel übergeht. In der ›fangsstation geht aus dem Pendel der Strom durch ein mit Blutlaugensalz änktes Papier und bringt hier Zersetzung und Blaufärbung hervor, so dafs dem Papier eine Folge blauer Punkte entsprechend den Unterbrechungen durch Schrift in der Empfangsstation entsteht. — Dieser höchst geistreiche Gedanke zwar ausgeführt worden, aber nicht in die Praxis eingedrungen. — Eine um so bere Zukunft verspricht

4. Marconis sogenannte **drahtlose Telegraphie** (dieser Name ır nur so zu verstehen, dafs es keiner Leitungsdrähte zwischen Auf›e- und Empfangsstation bedarf, wohl aber werden als Absender bst Drähte bis zu 50 m Länge um ihrer Kapazität willen verwendet). s Prinzip ist das der Hertzschen Wellen. Solche werden in der fgabestation durch ein Induktorium hervorgebracht und zwar in Unterchungen mittels eines Morse-Tasters. Diese Wellen erregen in der ıpfangsstation einen Morseschen Apparat, indem sie das Relais und mit auch die Lokalbatterie den Punkten und Strichen entsprechend längere oder kürzere Zeit mittels eines „Kohärers“ (Fritters, von ten = oberflächlich zusammenschweifsen) in Tätigkeit setzen.

Dieser Kohärer besteht in einer Glasröhre, die mit feinem Metallpulver (auch

Schräubchen u. dergl.) gefüllt ist. Dieses hindert den Durchgang des S infolge zu grofsen Leitungswiderstandes an den Stellen loser Berührung; aber der Fritter von elektrischen Wellen getroffen wird, gestattet er den gang des Stromes der Lokalbatterie, indem durch die Wellen die Metallteil engeren Zusammenhang gesetzt werden. Durch eine Klopfvorrichtung wir der Fritter jedesmal wieder aufgerüttelt und zum Empfange neuer Well bereitet. Ende 1901 soll Marconi einfache Zeichen schon über den Atlan Ozean telegraphiert haben.

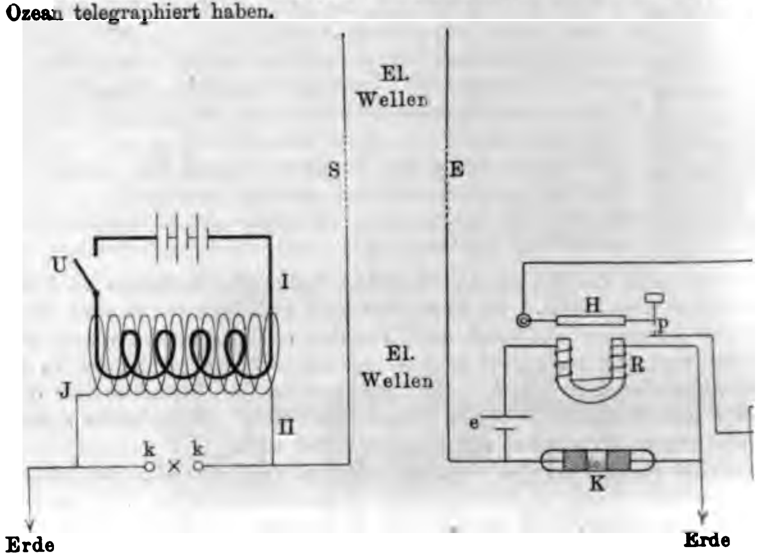


Fig. 586. Senderapparat Fig. 587. Empfangsapparat
für sogenannnte drahtlose Telegraphie.

I Primärspule, *II* Sekundärspule, *U* Unterbrecherschlüssel, *k k* Funkenstrecke des Induktoriums. — *S* Senderdraht.

R, *H* Relais, *M* Morse-Schreibapparat (Klopfer fortgelassen), *e* Relaisbatterie. — *E* Empfängerdra

Im Gegensatze zu dieser bisher höchsten Leistung der Telegraphi eine der einfachsten dar

5. Die elektrischen Läutwerke. In einer elektrischen einfachster Form (Fig. 588) nimmt der Strom den Weg *a b c d* dem er zwischen *a* und *b* um den Elektromagnet *g* führt, wodu Anker *cd* angezogen und der Kon *e* gelöst wird. Indem hiermit de bei *e* unterbrochen und also *g* netisch ist, wird der bei *c* federnd wieder an den Kontakt bei *e* gebra Strom fliefst wieder u. s. f. — (zur Theorie der „Selbstunterbr in § 173.) — Der mit dem Ank bundene Hammer *h* schlägt in Folge an die Glocke *i*.

Fig. 588.

Um ein solches Läutwerk zu Signalzwecken zu verwenden, wird noch ein geeigneter Taster in die Leitung eingeschaltet; für die Hausklingel z. B. ein Drücker, für ein Stationsdeckungssignal ein mit der Stationsscheibe (Semaphor) verbundener, durch Drehung der Scheibe zu schließender Kontakt u. dergl.

Für größere Signalanlagen, z. B. Hotels, Bureaux u. s. w., ist noch ein Zimmerntableau (Indikator) erforderlich, das angibt, von welchem Zimmer aus das Zeichen mit der Klingel gegeben wurde.

§ 161. Telephon und Mikrophon.

Graham Bell hat (1877) die Aufgabe des Fernsprechens durch sein Telephon gelöst, bei welchem **Geber** (Sprechtelephon, I) und **Empfänger** (Hörtelephon, II) völlig gleich gebaut waren. Über das eine Ende, z. B. *N*, eines nicht bis zur Sättigung magnetisierten Stahlstabes *NS* (Fig. 589 a schematisch, Fig. 589 b nach der wirklichen Einrichtung) ist eine flache Spule mit vielen Windungen dünnen Drahtes

Fig. 589 a.

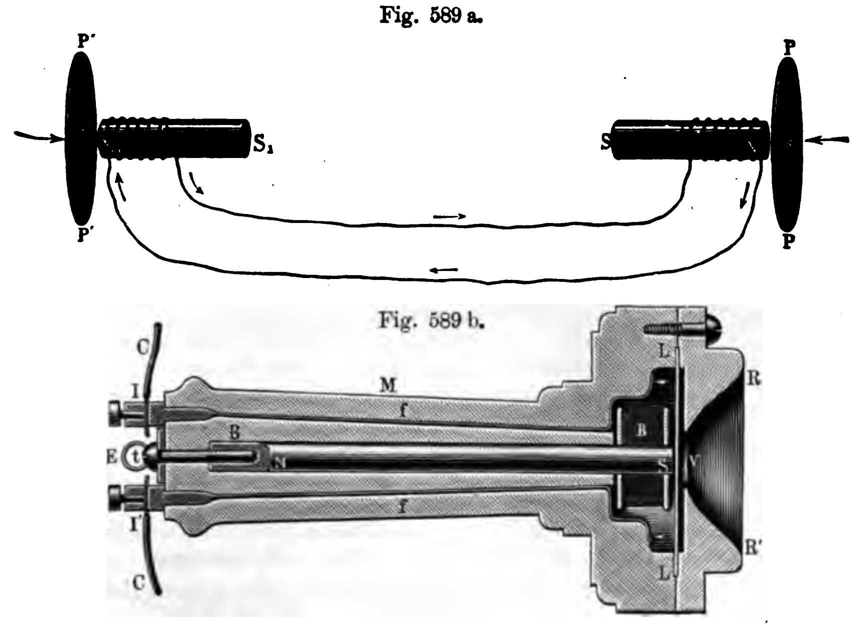


Fig. 589 b.

geschoben. Diesem Ende gegenüber liegt in kleinem Abstande ein kreisförmiges dünnes Eisenblech („Membran"), vor das ein Mundstück geschraubt ist. Die Enden des Spulendrahtes führen zu den am hinteren Ende der Kapsel aufgeschraubten Klemmen. Von diesen führt eine Leitung zu den Klemmen des Hörtelephones, und zwar entweder eine isolierte Hin- und Rückleitung, oder letztere ersetzt durch eine „Erdleitung" wie beim Telegraphen (doch ist diese hier nicht immer anwendbar, weil schweifende Erdströme („vagabundierende"

Ströme aus Starkstromanlagen, besonders elektrischen Bahnen) im Hörtelephon störende Geräusche hervorrufen können).

Sobald gegen die Membran von I gesprochen wird, gerät sie in Schwingungen, und ihr Abstand von dem Pole N wird hierdurch abwechselnd kleiner, bezw. gröfser als ihr mittlerer Abstand in der Ruhelage. In dieser Ruhelage war sie durch Verteilung seitens N bis zu einer bestimmten Stärke magnetisiert gewesen und hatte auf N ebenfalls in bestimmter Stärke zurückgewirkt. Dem Annähern der Membran entspricht daher ein Verstärken, dem Wegbewegen der Membran eine Schwächung des Poles N. Diese Änderungen von N erzeugen **magnetoelektrische** Ströme in der Spule nächst N und in der ganzen Leitung von hier [illegible] m Hörtelephon. In diesem wird dann durch **elektromagnetis**[illegible] kungen der Spule auf den Stahlkern die magnetische Anzieh[illegible] des Poles nächst der Membran stärker und schwächer und [illegible] daher diese Membran des Hörtelephones in Schwingungen [illegible] denen des Sprechtelephones.

Wäre also z. B. an die Membran des Gebers ein einfacher Ton a^1 von 435 Schwingungen per sec hineingek[illegible], so würde auch die Membran des Empfängers (annähernd) einfache Sinu[illegible] ngungen von der gleichen Schwingungszahl ausführen, diese an die angrenzende Luft übertragen und somit von dem Empfänger ebenfalls ein einfacher Ton a^1 herauserklingen. — Ähnlich bei beliebigen Summen von einfachen Tönen. — In Wirklichkeit war die Wiedergabe der Klangfarbe in Bells Telephon eine mangelhafte, indem die Schwingungsform der Geber-Membran sich doch nicht nach allen Partialtönen gleichmäfsig auf die Empfänger-Membran übertrug. Noch mangelhafter als die Klänge, speziell Vokale, wurden manche Konsonanten wiedergegeben.

Doch hatte Bells Telephon unbeschadet seiner praktischen Mängel höchstes theoretisches Interesse. Wie man nämlich sieht, war an dem Entstehen der Ströme in Bells Telephon keinerlei Batterie beteiligt, sondern die minimale Veränderung des magnetischen Zustandes im Sprechtelegraphen hatte für die Erregung der Ströme genügt. Eben dieser Umstand hatte beim Bekanntwerden der Erfindung das höchste Staunen erregt (William Thomson begrüfste sie mit dem Ausrufe: „Wunder über Wunder"). — Immerhin wäre aber mit jener bewundernswert einfachen Vorrichtung ein direktes Fernsprechen z. B. zwischen Berlin und Paris, Triest und Hamburg noch nicht möglich gewesen.

Bei den gegenwärtig gebrauchten Telephonverbindungen liefern Batterien (oder Akkumulatoren) den Strom, der im Sprechapparate periodische Änderungen seiner Stärke nach nachfolgendem Prinzip erhält: Der Strom geht durch ein Kohlenstäbchen, das lose in Fassungen liegt, die mit einem elastischen Resonanzbrettchen verbunden sind (**Mikrophon**). Wird gegen diese gesprochen (Ticken einer Uhr, Fig. 590, „Trampeln" einer Fliege), so genügt die mechanische Erschütterung, um den Kontakt des Kohlenstäbchens zu einem mehr oder minder innigen, daher den Widerstand an den Enden des Stäbchens kleiner oder gröfser und somit die Stromstärke im ganzen Stromkreise gröfser oder kleiner zu machen. —

a Hörtelephon bringen dann diese Änderungen der Stromstärke die- lben Wirkungen hervor wie beim Bellschen Telephon.

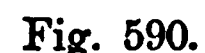
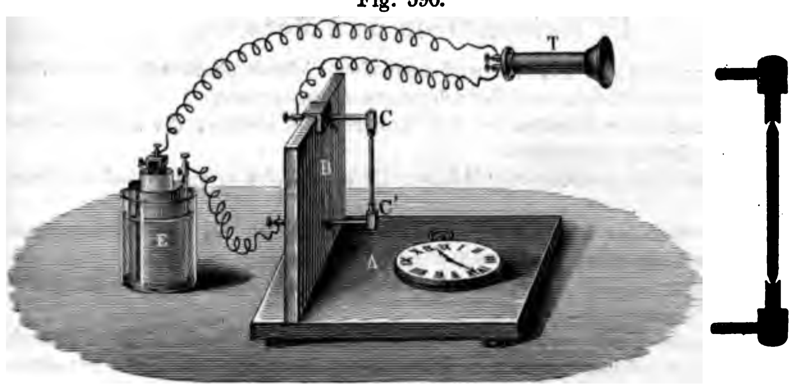


Fig. 590.



Die Durchführung dieses Prinzipes erfährt eine wesentliche Verbesserung, dem die Leitung der Batterie und des Mikrophons mit einer primären Spule rsehen ist, die in einer sekundären Spule ckt; letztere ist in die Leitung einge- haltet, die zum Hörtelephon führt. Indem nz wie beim Schlittenapparate die primäre ule einen verhältnismäfsig starken Strom tet, der in der Sekundärspule in einen ver- ltnismäfsig hochgespannten transformiert rd, vermag dieser in den langen dünnen itungen noch kräftig zu wirken (insbe- ndere auch die nicht mehr verschwindende pazität dieser Leitungen durch die Selbst- luktion der Sekundärspule zu kompen- ren). Aus diesen Umständen erklärt sich ch die Leistungsfähigkeit der Bellschen nrichtung, denn auch die Spule um N_1 ig. 589a, S. 531) stellt eine solche Sekundär- ule dar. — Die gegenwärtig gebräuchliche ısammenstellung von Sprech- und Hör- parat zeigt Fig. 591.

Fig. 591.

Der **Telephonograph** von Poulson 00) verbindet die Leistung der in seinem ımen angedeuteten beiden Apparate insofern, ı **anstatt** der ruhenden Eisenplatte des rechtelephones ein Stahlband an dem Magnetpole vorüberzieht und so hinter- nander Magnetisierungen wechselnder Stärke annimmt. Wird es irgend wann iter an dem Pole eines Hörtelephones vorübergezogen, so erregen in diesem die chselnden Magnetisierungen wieder akustische Schwingungen. — Singende und rechende Bogenlampe (Simon und Duddell, 1900).

Bemerkung: Bells Telephon in seiner ursprünglichen Form ist auch ıofern interessant, als es sozusagen in kleinstem Mafsstabe ein Vorbild der elek-

trischen **Kraftübertragung** darbietet. Das Sprechtelephon entspricht dem Generator, das Hörtelephon dem Motor.

II. Generatoren und Motoren.

Vorbemerkung. Der Verband Deutscher Elektrotechniker hat am 29. Juni 1901 folgende Definitionen und Bezeichnungen angenommen:

Generator oder **Dynamo** ist jede rotierende Maschine, die mechanische in elektrische Leistung verwandelt.

Motor ist jede rotierende Maschine, die elektrische in mechanische Leistung verwandelt.

Motorgenerator ist eine Doppelmaschine, bestehend in der direkten mechanischen Kuppelung eines Motors mit einem Generator.

Umformer ist eine [illegible] lcher die Umformung des Stromes in einem gemeinsamen Anke[illegible]

Wird das Wort e[illegible] chine oder Maschine schlechthin gebraucht, so ist darunter, [illegible] sammenhang, einer der vorgenannten Gegenstände zu verstehen.

Anker ist bei elektrische[illegible] lerjenige Teil, in welchem durch Einwirkungen eines magnetischen [illegible] motorische Kräfte erzeugt werden.

Transformator ist ein A[illegible] Wechselströme ohne bewegte Teile zur Umwandlung elektrischer Leist[illegible] sche Leistung.

Unter **Spannung bei D**[illegible] t die verkettete effektive Spannung (Spannung zwischen je zwei der [illegible] eitungen) zu verstehen.

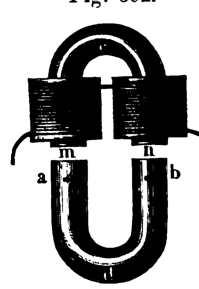
Unter **Übersetzung** bei Transfo[illegible] n ist das Verhältnis der Spannungen bei Leerlauf zu verstehen.

Unter **Frequenz** ist die Anzahl der vollen Perioden in der Sekunde zu verstehen.

§ 162. Generatoren für Gleichstrom (Dynamomaschinen).

Die ältesten Maschinen, in denen durch Rotation von Stromspulen in Magnetfeldern magnetoelektrische Ströme erzeugt wurden, entsprachen der in Fig. 592 dargestellten Anordnung. In den Stromspulen befanden sich Eisenkerne, und indem sie samt den Spulen vor den Polen eines permanenten Stahlmagneten vorübergeführt wurden, wurden die Eisenkerne magnetisch und erregten bei jedem Wechsel ihrer Magnetisierung in den sie umgebenden Drahtwindungen magnetoelektrische Ströme. Diese waren zunächst Wechselströme gewesen; da man aber mit solchen damals und noch auf lange Zeit hinaus nichts anzufangen wuſste, wurde durch eigentümlich angeordnete Kontaktvorrichtungen (die Vorbilder der „Kollektoren" und „Bürsten" an den gegenwärtigen Dynamomaschinen) der Wechselstrom in Gleichstrom verwandelt.

Fig. 592.



Der entscheidende Schritt zur praktischen Verwertung des dargelegten Prinzipes bestand in der Erfindung des Grammeschen Ringes 1871 (Gramme war damals Arbeiter in einer elektrotechnischen Fabrik; schon 1864 hatte Pacinotti den wesentlich gleichen Gedanken veröffentlicht, aber nicht fehlerlos praktisch durchgeführt). — Wir können uns den Grammeschen Ring hervorgegangen denken aus der in Fig. 592 dargestellten Verbindung von Eisenkernen

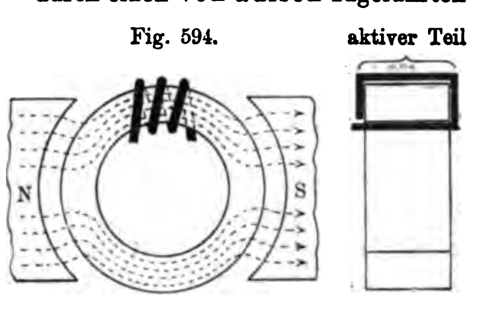
pulen, wenn die Eisenkerne nicht mit parallelen Achsen **nebeneinander**, n in der Weise der Fig. 596 zu einem in sich **geschlossenen Ring** reinander angeordnet werden. — Die konstruktive Schwierigkeit, ja glichkeit, den magnetischen Eisenring innerhalb eines gegen aufsen hin hlossenen und also von aufsen her unzugänglichen Spulenkranzes in bleibender ag zu erhalten, umging GRAMME durch folgende, in Fig. 594 schematisch tellte Anordnung:

Fig. 593.



in Eisenring samt den ihn umgebenden Spulen (**Ringanker**, auch **Anker**) rotiert zwischen den Polschuhen NS eines kräftigen anenten Magnetes (Fig. 593 nach einem Schulmodell) oder Elektromagnetes, den wir uns vorläufig — im Gegensatz zu ens' Prinzip", siehe unten — durch einen von aufsen zugeführten erregt denken. Bei Drehung wird an immer n Stellen des Ringes ıetisierung durch eilung vorübergehend gerufen, und es gleiten gleichsam über diese ı die Spulen ähnlich hinwie es in Fig. 594 dart ist.

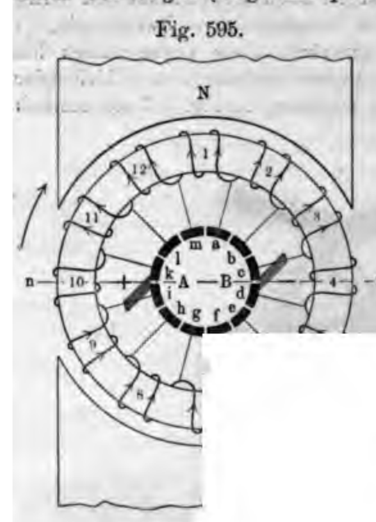
Fig. 594.



.e günstigste Durchführung dieses Prinzipes auf Grund der Kraftlinien ı Kraftlinien des Magnetfeldes NS gehen infolge der grofsen Permeabilität

(magnetischen Leitungsfähigkeit) des Ringankers fast ausschliefslich d
Eisen des Ringes (vergl. die punktierten Linien in Fig. 594) und nur
schwindend kleiner Bruchteil der K
durchsetzt den Luftraum im Innern
ankers (Kraftlinien-Streuung).

Fig. 595.



Der Ring ist nun mit einer An
Spulen isolierten Drahtes bewickelt
eine fortlaufende Windung bilden (F
Die Vereinigungspunkte der einzelne
sind mit den „Lamellen" a, b . .
„Kollektors" verbunden (deren Zahl
grofsen Maschinen 300 bis 400 ist
Lamellen sind gegeneinander isoliert
Welle fest aufgesetzt und dienen zu
bleitung in den äufseren Stromkrei
'igg. 595, 593 und 596.

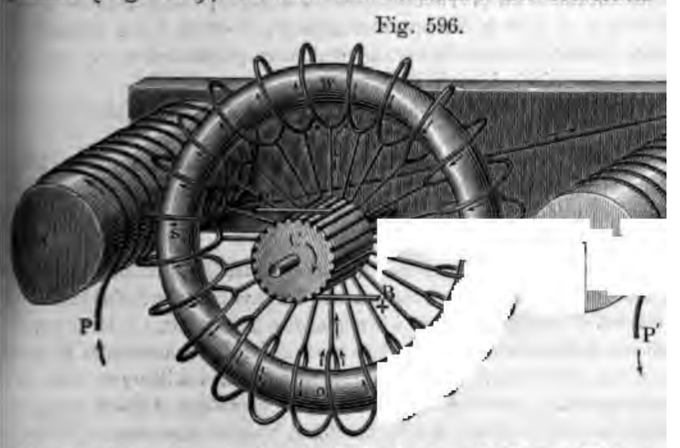
Da durch das Innere des Rin
ar keine Kraftlinien hindurchtrete
uch in den innen liegenden Teilen
ungen eine nur sehr geringe EMK i
n den Stirnflächen des Ringes (z. B
'g. 593 sichtbaren Teilen des Gram
Ringes) liegen zu derjenigen Mittelebene des Magn
(der Zeicheneb), die auf der Drehungsachse norm
infolge dessen ssstücke gar keine Kraftlinien, d. h.
entsteht in dens K. Demnach bleiben für die Er
von Induktionsst nur die Windungsstücke übrig, welche auf der äu
Mantelfläche des Ankers liegen; bei diesen ist aber nur diejenige Bew
komponente wirksam, die normal steht zur Richtung der Kraftlinien. N
Induktionsgesetzen in §§ 150, 151 folgt nun, dafs in den Spulen 1, 2, 3 der
die induzierten Ströme bei der Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung
äufseren Ringfläche vom Beschauer weg, also nach rückwärts fliefsen, wäh
den Spulen 5, 6, 7, 8, 9 an der äufseren Ringfläche die Ströme gegen
schauer fliefsen. Die Ströme der oberen und unteren Ringhälfte verein
bei den Lamellen cd und ki; legt man also an diese Stellen zwei fest
Bürsten (aus Kupferblech oder Kupferdrahtgaze, auch aus Kohle), so ka
durch den äufseren Stromkreis einen konstanten gleichgerichteten Strom l
entspricht dabei die Bürste bei k, i dem $+$-Pole, die Bürste bei c,
$-$-Pole der Maschine.

Gegenüber den ältesten Maschinen (Gramme, Pacinotti, Siemens,
Ladd u. s. w.) mit permanenten Stahlmagneten war die fruchtbarste N
folgende:

Werner von Siemens hatte (schon 1867) vorgeschlagen, a
permanenter Stahlmagnete **Elektromagnete** zu setzen un
durch den von den Bürsten abgeleiteten Strom sel
erregen. Es besitzen nämlich die Eisenkerne dieser Elektrom
wie überhaupt fast jedes Eisenstück, wenigstens eine geringe M
sierung; namentlich bleibt nach einer einmal vorgenommenen E
(durch einige Elemente oder Akkumulatoren) ein schwacher

...nter Magnetismus zurück. Wird nun in diesem schwachen Magnet-
...lde eine GRAMMEscher Ring in Drehung versetzt, so entstehen vorerst
...ur sehr schwache Induktionsströme; werden diese aber im richtigen
Sinne durch die Windungen des Elektromagneten (des „Feldmagneten")
gesendet (Fig. 596), so wird die Polstärke des letzteren wachsen, da-

Fig. 596.



...rch werden aber auch die induzierten Ströme stärker, infolgedessen
...s Magnetfeld weiter gekräftigt u. s. f., bis das Eisen der Feldmagnete
...esättigt" ist; die Maschine ist eine selbsterregende geworden, sie
...eht an". — Erst dieser geniale Gedanke, der unter dem Namen
...IEMENS' **dynamo-elektrisches Prinzip**" bekannt ist, machte
...e **bequeme** und ökonomische Erzeugung elektrischer Ströme von fast
...**begrenzter** Intensität und Spannung praktisch durchführbar.

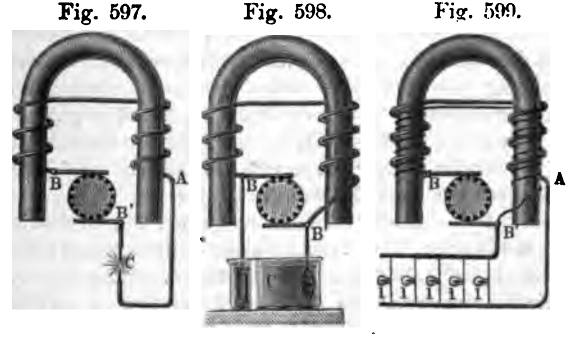
Von da an trat die Elektrotechnik ihren beispiellos schnellen und imponie-
...den **Siegeszug an**; denn jetzt war die Aufgabe einer direkten Umwandlung der
...echanischen **Leistung** in elektrische Leistung gelöst; bis jetzt hat man dabei
...hon **einen elektrischen** Wirkungsgrad bis zu 95 Proz. der zugeführten mecha-
...schen **Energie erzielt.**

Diese „dynamo-elektrischen Maschinen" (kurz „Dynamomaschinen"
...nannt) führen nach der Schaltung ihrer Feldmagnetspulen die Bezeichnungen:

a) **Hauptstrom-**
...aschine (Reihen-
maschine, Serien-
maschine), Fig. 597;
...nkerwindungen, Magnet-
...windungen und äufserer
...tromkreis sind **hinter-**
...inander geschaltet und
...on demselben Strome
...urchflossen (Hauptstrom).

b) **Nebenschlufs-**
maschine (Shunt-

Fig. 597. Fig. 598. Fig. 599.



maschine) Fig. 598; der aus dem Anker kommende Strom spaltet sich bei den Bürsten BB', der gröfsere Teil geht durch den äufseren Stromleiter (z. B. durch das galvanische Bad C), der kleinere in die Magnetwindungen. Diese Magnetwindungen „liegen im Nebenschlufs“ zum Anker; sie und der äufsere Stromkreis sind parallel geschaltet.

c) Compoundmaschine (Verbundmaschine) Fig. 599; die Maschine hat eine Hauptstromwicklung und eine Nebenschlufswicklung; letztere kann parallel zum Anker oder aber parallel zum äufseren Stromkreise geschaltet sein; in beiden Fällen unterstützen sich die beiden Wicklungen.

Über die charakteristischen Eigenschaften dieser drei Maschinengattungen vergl. LA 207.

LA 207.

Von fundamentaler Wichtigkeit ist für jede Dynamomaschine die Beziehung zwischen den magnetischen Gröfsen, den Konstruktionsdaten und der erreichbaren ***EMK***, welche in der „Grundgleichung der Dynamomaschinen“ niedergelegt ist (vergl. LA 205).

LA 205.

Wenn die Wicklungsstücke an der Innenseite des Ringes infolge der sogenannten „Streuung“ der Kraftlinien wirksam werden, rufen sie Induktionsströme der entgegengesetzten Richtung [illegible] wirken also schwächend. Man kann diese Schwächung dadurch fast ganz a[illegible] lafs man den „magnetischen Widerstand“ des Ringankers möglichst klein [illegible] Der Eisenkern des Ringes ist nicht aus einem Stücke hergestellt, sondern bes[illegible] aus einer grofsen Anzahl ringförmiger dünner Eisenblechscheiben [jede etwa 0,3 mm dick], welche zu einem Hohlcylinder aufgebaut sind; bestes Weicheisenblech, sogenanntes Ankerblech mit sehr grofser Permeabilität und geringen Hysteresisverlusten.)

Hefner v. Alteneck (1872 Ingenieur bei Siemens & Halske) setzte an Stelle des Ringankers den „Trommelanker“, damit ein möglichst grofser Teil des aufgewickelten Drahtes die Kraftlinien des Magnetfeldes rechtwinklig schneidet und Ströme liefert (wogegen die Radialstücke der Spulen nicht stromerzeugend sind, sondern nur den inneren Widerstand der Maschine vergröfsern). — Fig. 600.

Fig. 600.



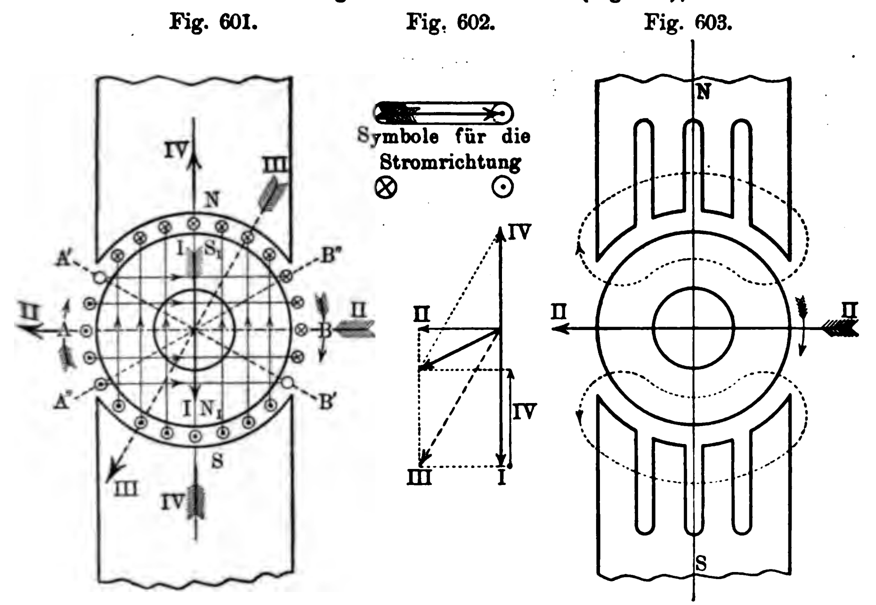
Der Trommelanker ist zusammengesetzt aus einer grofsen Anzahl kr[illegible] förmiger dünner Eisenblechscheiben, welche durch dünne Papierzwischenlagen o[illegible] Schellackanstrich voneinander magnetisch und elektrisch isoliert sind (zur V[illegible] meidung von Wirbelströmen [Foucaultströmen]); auf der Mantelfläche die „Trommelankers“ liegen die Drähte parallel zur Achse; sie sind auf den St[illegible] flächen in geeigneter Weise zu einer fortlaufenden Windung miteinander verbun[illegible] und überdies wieder zu einem „Kollektor“ geführt, auf welchem die Bürs[illegible] schleifen, wie beim Grammeschen Ringe.

Bei den älteren Maschinen wurden die Drahtwindungen sowohl beim Ri[illegible] anker als auch beim Trommelanker einfach auf die Mantelfläche gelegt und du[illegible] „Mitnehmer“ mit dem Anker verbunden. Dadurch wurde ein ziemlich grofser L[illegible] zwischenraum zwischen Anker und Polschuhen geschaffen, welcher einen grof[illegible] magnetischen Widerstand hervorrief und für die Erregung eine grofse Zahl [illegible]

Ampèrewindungen erforderlich machte. Bei den modernen Konstruktionen des Ring- und Trommelankers werden daher die Drähte zumeist in **Nuten** gelegt, welche in der Mantelfläche des Ankers parallel zu dessen Achse dadurch hergestellt werden, daſs jede Blechscheibe auf der „Nutenstanzmaschine“ mit den Einkerbungen versehen wird; werden dann diese Bleche aufeinander geschichtet zusammengepreſst, so erhält der ganze Anker die Form eines Cylinders mit Nuten. Der Luftzwischenraum zwischen dem „Nutenanker“ und den Polschuhen ist jetzt auf ein Minimum herabgedrückt (etwa 2 mm); gleichzeitig können die „Mitnehmer“ entfallen, da die stehenbleibenden Zähne der Scheiben deren Rolle übernehmen.

Ankerreaktion und Bürstenverschiebung. — In Fig. 595 war angenommen, daſs die Bürsten in der sogenannten „neutralen Zone“ aufgelegt werden, nämlich dort, wo keine Magnetisierung durch Verteilung auftritt; diese Stellen liegen bei ruhendem Ring- oder Trommelanker 90° vor den Polen der erregenden Magnete (ein zwei-, nicht mehrpoliges Magnetfeld vorausgesetzt). Wenn nun durch den Anker Strom flieſst, so wird durch diesen Strom der Anker selbst zu einem Magneten, nur ist die Richtung dieses zusätzlichen Magnetfeldes II um 90° gegen das Hauptmagnetfeld I verschoben (Fig. 601); diese beiden Felder setzen sich zu dem resultierenden Magnetfelde III zusammen (Fig. 602); es wird also das

Fig. 601. Fig. 602. Fig. 603.



Magnetfeld durch den stromführenden Anker „verzerrt“; dadurch wird aber auch die neutrale Zone von AB nach $A'B'$ verschoben (Fig. 601), d. h. also, es müssen bei der Dynamomaschine die **Bürsten in der Drehrichtung des Ankers verschoben** werden, wenn eine Funkenbildung unter den Bürsten vermieden werden soll, und zwar um so mehr, je stärker der Strom im Anker ist, je mehr also die Dynamomaschine belastet wird. — Die Windungen ($A'B''$) ($A''B'$) (Fig. 601) bewirken also eine „Quermagnetisierung“ des Ankers. Die Windungen ($A''A'$) ($B''B'$) dagegen magnetisieren den Anker in der Richtung IV, d. h. sie schwächen das Hauptfeld I; man nennt daher diese Windungen „Gegenwindungen“.

Man sieht auch, dafs die Wirkung der Dynamomaschine um so mehr beeinträchtigt wird, je gröfser die Verschiebung der neutralen Zone ist; das Bestreben der Konstrukteure geht daher dahin, diese „Ankerreaktion“ möglichst herabzudrücken, was auch schon in der vollkommensten Weise gelungen ist. Ein vielfach angewendetes Mittel besteht darin, die Polschuhe mit mehreren tiefen Einschnitten zu versehen (Fig. 603 a. v. S.), weil dadurch die Kraftlinien des Magnetfeldes II einen grofsen magnetischen Widerstand finden, der dieses schädliche Querfeld des Ankers schwächt.

Mehrpolige Maschinen. — Dynamomaschinen für grofse Leistungen werden in der modernen Elektrotechnik gewöhnlich mit den Dampfmaschinen oder Turbinen „direkt gekuppelt“ (d. h. ohne Treibriemen, Zahnräder oder dgl., sondern an derselben Welle), sind daher an eine verhältnismäfsig niedrige Tourenzahl gebunden (selten mehr a[illegible] 200 Touren per Minute, gewöhnlich noch w[illegible]iger). Würden solche Maschinen zweipolig [illegible]n Polpaar) ausgeführt, so gelänge es niema[illegible] eine gröfsere EMK zu erzeugen, w[illegible]ht der Anker und die Feldmagnete so g[illegible]nommen würden, dafs die Maschine k[illegible] Dimensionen annähme, daher sehr teuer und die Ankerreaktion viel zu grofs würd[illegible] Nach der Grundgleichung der Dynamomas[illegible]n (LA 205) läfst sich aber durch Verm[illegible] der Polpaare die EMK der Maschine beliebig steigern, ohne dafs die Za[illegible] Ankerdrähte so sehr vermehrt werden müfste. Man gelangt auf diese Weise zu den mehrpoligen Maschinen, welche

LA 205.

Fig. 604.

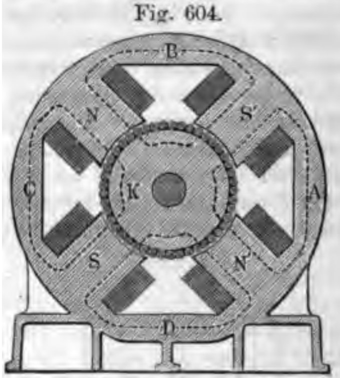


Fig. 605.



weitaus kompendiöser gebaut werden können als die zweipoligen, wenn es sich um grofse Leistungen handelt (Fig. 604 zeigt einen vierpoligen, Fig. 605 einen sechspoligen Gleichstromgenerator).

§ 163. Elektromotoren für Gleichstrom. — Prinzip der elektrischen Kraftübertragung. Elektrische Eisenbahnen.

Bald nach der Entdeckung der elektromagnetischen Erscheinungen ging man dran, Elektromotoren (ältere Bezeichnung: elektrische Triebmaschine, neuestens kurz: Motor) zu bauen. Dabei ahmte z. B. der Motor von PAGE (Fig. 606) die hin und her gehende Bewegung des Kolbens einer Dampfmaschine dadurch nach, dass ein Stab aus weichem Eisen abwechselnd in das eine oder andere zweier Solenoide hineingezogen wurde; den Stromwechsel besorgten Bleche, die an einer exzentrisch ausgeschnittenen Welle schleifen. — Motor von FROMENT (Fig. 607 a, b).

Alle derartigen Motoren waren so lange nicht ökonomisch verwertbar, als der Strom aus Batterien zugeführt wurde; denn der Verbrauch des Zinkes war bei weitem kostspieliger als der der Kohle in den Dampfmaschinen.

Die ökonomische Bedeutung der Elektromotoren datiert seit jener Zeit, da 1. der Strom elektrischen Generatoren entnommen werden konnte, und da 2. als Motoren Maschinen verwendet wurden, die ganz ebenso gebaut sind wie die Generatoren, jedoch in umgekehrter Weise verwendet werden.

Diese Umkehrbarkeit der Wechselbeziehungen zwischen mechanischer und elektrischer Leistung ist eine Anwendung im grofsen der Erregung von Strömen durch Bewegung von Stromleitern und umgekehrt (Schema § 147); die erste Erscheinung entspricht dem Generator, die zweite dem Motor. Vergleiche: 1. Dampfmaschine (Motor), welche umgekehrt bei entsprechender Anordnung der Steuerung als Verdichtungsluftpumpe (Generator) verwendet werden kann. 2. Pumpe (Generator), welche als Wassersäulenmaschine (Motor) verwendet werden kann. 3. Windrad (Motor) und Ventilator (Generator). — Inwieweit entspricht 4. Froments Motor dem mehrpoligen Generator? — Wird an dem Schulapparat Fig. 608 (a. f. S.) der mittlere Magnetstab durch die Hand in drehende Bewegung versetzt, so treten in den Spulen Ströme auf. Werden umgekehrt den Spulen von aufsen in richtigem Wechsel Ströme zugeführt, so gerät der Magnet in drehende Bewegung (wie in den „Drehstrommotoren", § 165).

Beim Generator (Dynamomaschine) wird die zugeführte mechanische Leistung (z. B. an der Riemenscheibe: Umfangskraft × Riemengeschwindigkeit) umgesetzt in elektrische Leistung (*EMK* × Stromstärke im Anker), welche zum geringen Teil zur Deckung der „Verluste" in dem Generator (Stromwärme, Reibung u. s. w.) verbraucht wird, zum überwiegend gröfseren Teile aber (bis etwa 92 Proz.) an den Klemmen der Maschine als elektrische Nutzleistung (= Nutzeffekt in Watt = Klemmenspannung × Stromstärke im äufseren Kreise) zur Verfügung steht. Diese elektrische Nutzleistung läfst sich nun durch eine Leitung einem Elektromotor zuführen; es wird dabei auf dieser Leitung ein „Effektverlust" von einigen Prozenten auftreten (Stromstärke × Spannungsverlust in der Leitung LA 211); LA 211. die noch verfügbare elektrische Leistung hat dann im Motor die Verluste durch Stromwärme, Reibung u. s. w. zu decken, welche aber ebenfalls nur einige Prozente betragen, so dafs der gröfste Teil (etwa 80 bis 85 Proz.) der elektrischen Leistung des Generators dazu verwendet wird, die stromdurchflossenen Ankerdrähte im Magnetfelde des Motors zu bewegen. Es wirkt nämlich seitens des Magnetfeldes auf die Ankerdrähte eine Zugkraft ein, und dieselben bewegen sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit; auf diese Weise ist nun die elektrische Leistung

Fig. 606.

Fig. 607 a.

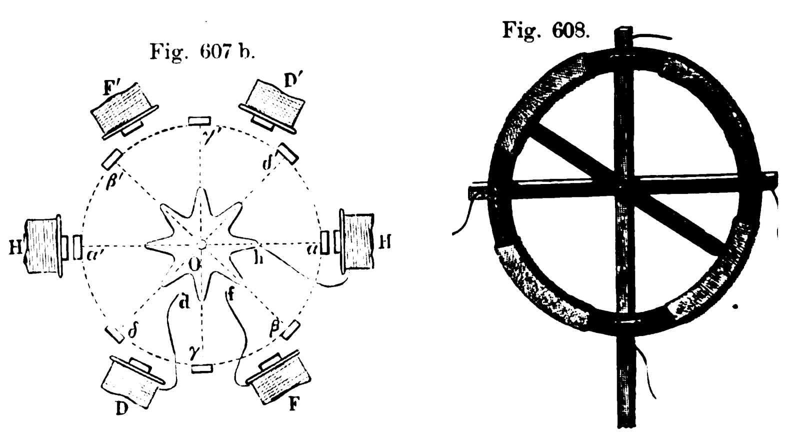


Fig. 607 b.

Fig. 608.

wieder in mechanische Leistung umgewandelt worden (Umfangskraft am Anker × Geschwindigkeit der Ankerdrähte).

Man bezeichnet die Umsetzung einer mechanischen Energie (z. B. Wasserfalles, einer Dampfmaschine . . .) in die elektrische Energie einer Dynamomaschine, ihre Fortleitung in Drähten und ihre Rückverwandlung in mechanische Energie eines Elektromotors als **elektrische Kraftübertragung** (nach der sonstigen physikalischen Terminologie ist Energieübertragung gemeint).

Dieses Prinzip gilt für Gleich- und Wechselstrom; warum bei Kraftübertragung auf größere Entfernungen (so beim Fabrikbetrieb mittelst ferner Wasserkräfte und auch beim elektrischen Fernschnellverkehr) nur Wechselstrom ökonomisch ist, vergl. § 165. Dagegen wird fast ausschließlich Gleichstrom verwendet bei der

Elektrischen Straßenbahn. Der in elektrischen Zentralen („Elektrizitätswerken“) erzeugte Strom wird durch die Speisekabel (gewöhnlich etwa 500 Volt, teils mittels Ober-, teils mittels Unterleitungen, seltener aus Akkumulatorenbatterien, die im Wagen selbst untergebracht sind) den in die Wagen eingebauten Motoren zugeführt, deren Bewegung durch Zahnräder auf die Radwelle übertragen wird.

Der Strom muß entweder durch die Räder und Schienen in die Erde abfließen können (nach Art der „Erdleitung“ bei Telegraphen, indem dann in der Zentrale der eine Pol des Generators mit der Erde verbunden ist), oder er wird neuestens vorteilhafter durch besondere Rückleitungen, die mit den Schienen in Verbindung stehen, in die Zentrale zurückgeführt. — Der Führer des Motorwagens reguliert die Fahrgeschwindigkeit mit der Kurbel des „Kontrollers“, der ähnlich wie ein Walzenumschalter (vergl. § 173) eingerichtet ist und die erforderlichen Umschaltungen in einfacher Weise ermöglicht.

Wird bei einer Dynamomaschine von außen Strom in den Anker und in die Windungen der Feldmagnete gesendet, so beginnt sich der Anker zu drehen; dabei schneiden die Ankerdrähte die Kraftlinien des Magnetfeldes, weshalb in diesen Drähten eine *EMK* induziert wird, die nach dem Lenzschen Gesetze (§ 150) die Bewegung zu hemmen sucht und als elektromotorische Gegenkraft (*EMGK*) bezeichnet wird.

Die frühere Anschauung, welche die *EMGK* als etwas Schädliches hinstellte, ist gänzlich unhaltbar; LA 206. Über Wirkungsweise, Regulierung und Betriebsverhältnisse der Serien- und Nebenschluß-Motoren vergl. LA 207. LA 206. LA 207.

Warum ist es auch beim Elektromotor günstig, die Bürsten (aber gegen die Drehrichtung) zu verschieben, wenn der Motor „belastet“ ist? (Vergl. Ankerreaktion und Bürstenverschiebung bei den Generatoren, § 162, Fig. 601—603).

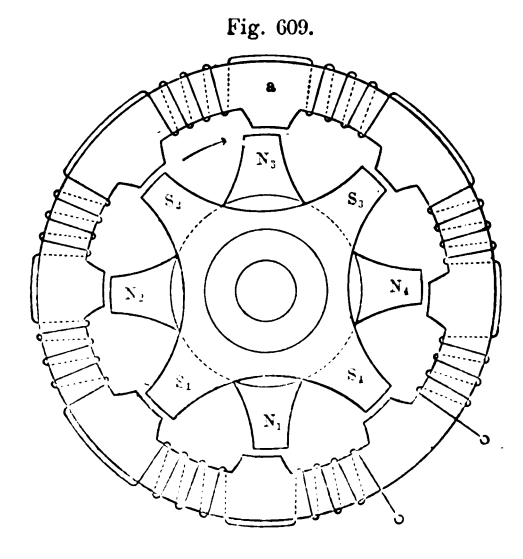
Wenn man zwei ganz gleichgebaute Dynamomaschinen miteinander durch Leitungen verbindet, so daß die eine als Generator, die andere als Motor wirkt, so ist bei Hauptstrommaschinen (Fig. 597, S. 537) die Drehrichtung des Motors die entgegengesetzte von der des Generators, bei Nebenschlußmaschinen (Fig. 598, S. 537) jedoch beim Motor und Generator dieselbe; warum?

§ 164. Generatoren für Wechselstrom.

Vor etwas mehr als einem Jahrzehnt konnte die Elektrotechnik nur bei Verwendung von Gleichströmen auf grofse Erfolge rechnen; das weite Gebiet der Wechselströme war theoretisch und praktisch noch nicht genügend geklärt. Aber die Erfindung der Transformatoren (Gaulard und Gibbs 1884 und Zipernowsky-Déri-Bláthy 1885), des magnetischen Drehfeldes durch Marcel Deprez (1880 bis 1883), und Prof. Ferraris (Turin 1885 bis 1888), sowie die Konstruktion der Mehrphasenwechselstrommotoren durch Nikola Tesla (1887 bis 1891), v. Dolivo-Dobrowolsky (Allg. Elektr.-Ges. Berlin, 1888 bis 1890) und C. E. L. Brown (Masch.-Fabrik Oerlikon bei Zürich) führte schon im Jahre 1891 bei der elektrotechnischen Ausstellung in Frankfurt am Main zur vollständig gelungenen Kraftübertragung mit Hilfe von Dreiphasen-Wechselströmen; es [illegible]rden dabei 300 Pferdestärken (Turbine in Lauffen am Neckar) auf eine En[illegible]ng von 175 km mit einem Gesamtwirkungsgrade von 70 Proz. nac[illegible]t übertragen; die Spannung in der Fernleitung wurde dabei bis [illegible] gesteigert! Kurze Zeit darauf wurde das grofse Elektrizitätswerk a[illegible]in Betrieb gesetzt; auch hier kommen Mehrphasenwechselströme zu[illegible], welche Leistungen von mehr als 120000 Pferdestärken (also [illegible] etwa 200 Lokomotiven) bis auf etwa 32 km (bis zur Stadt Buffa[illegible] In allen Kulturländern wurden mit bestem Erfolge Kraft- und Li[illegible] von kleiner und sehr grofser Ausdehnung nach dem Einphasen- [illegible]hasenwechselstromsystem erbaut; alle diese Anlagen bewähren sich glänzen[illegible]fs jetzt die Wechselstromsysteme dem Gleichstrom vollständig ebenbürtig si[illegible]tzteren sogar entschieden übertreffen, wenn es sich um gröfsere Entfernungen (etwa von 10 km aufwärts) handelt, da dann die Wechselstromsysteme weitaus ökonomischere Resultate liefern.

Bei der praktischen Ausführung von Wechselstrommaschinen wird stets eine gröfsere Anzahl von Magnetpolen erforderlich, wenn die Tourenzahl der Maschinen bei der erforderlichen Periodenzahl des Wechselstromes in realisierbaren Grenzen bleiben soll. Die Wechselstrommaschinen werden daher stets **mehrpolig** gebaut, und zwar mit geringen, rein konstruktiven Abänderungen nach folgendem Typus:

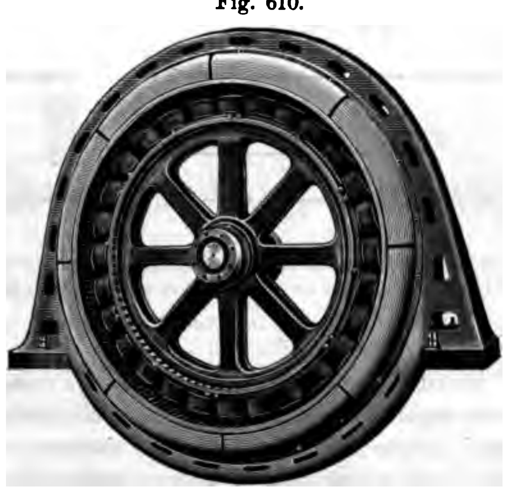
Fig. 609.



Der feststehende äufsere Spulenkranz *a* (Anker, Armatur, Fig. 609) ist mit einer geraden Zahl von Polansätzen *a*, welche nach innen gerichtet sind, ausgerüstet; dieser Kranz wird aus dünnen Eisenblechen zusammengesetzt und mit abwechselnd rechts und links gewickelten Spulen versehen. Innerhalb dieses Kranzes

drehen sich die „Feldmagnete“ $N_1 S_1 N_2 S_2 \ldots$, welche mit Gleichstrom durch entsprechende Wicklung abwechselnd zu Nord- und Südpolen erregt werden; dieser Erregerstrom wird durch zwei Schleifringe von aufsen zugeführt und einer Akkumulatorenbatterie entnommen oder noch häufiger durch eine besondere „Erregermaschine“ erzeugt. Bei der Rotation des inneren Kranzes wird in den feststehenden Spulen des äufseren Kranzes AA ein Wechselstrom induziert, welcher bei den Klemmen abgenommen werden kann. — Die Ausführung im grofsen zeigt Fig. 610.

Fig. 610.



Die Periodenzahl (meist 40 bis 100 per sec) dieses „einphasigen“ Wechselstromes ist gleich der Zahl der Polpaare multipliziert mit der Tourenzahl per sec; die Polwechselzahl ist doppelt so grofs.

Maschinen für Mehrphasenwechselströme.

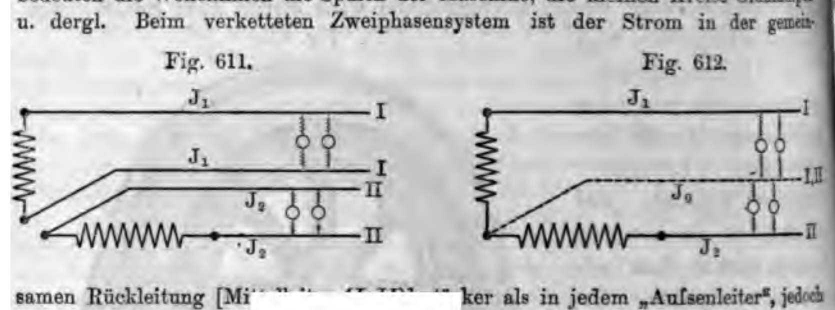
a) Zweiphasenmaschinen. — Denken wir uns zwischen die Pole aa (Fig. 609) des feststehenden Spulenkranzes ebenso viele Pole bb eingefügt, welche in ganz derselben Weise wie aa mit Spulen versehen sind, so wird auch in dieser zweiten Spulengruppe bb, welche zu zwei weiteren Klemmen $K_3 K_4$ führt, ein Wechselstrom II induziert, welcher dieselbe Periodenzahl und dieselbe Kurvenform (Sinuskurve) besitzt wie der Wechselstrom I, nur erreicht er dieselben Werte um eine Viertelperiode später (früher) als der Wechselstrom I; oder: Zwischen den Strömen I und II besteht ein Phasenunterschied von einer Viertelperiode (Phasenverschiebung $= 90^0$).

Wenn nämlich zur Zeit t der Wechselstrom I die Stärke $i_1 = J . sin\, a t = J . sin\, \varphi$ besitzt, so ist in demselben Augenblicke die Stärke des Wechselstromes II: $i_2 = J . sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = - J . cos\, \varphi$. (Bei umgekehrtem Windungssinn der Spulen bb würde $i_2 = J . cos\, \varphi$.)

Diese beiden Ströme I und II lassen sich entweder getrennt verwenden oder aber miteinander kombinieren, und sie bilden dann einen „zweiphasigen Wechselstrom“ (Zweiphasenstrom).

So zeigt Fig. 611 ein offenes (unverkettetes) Zweiphasensystem, Fig. 612 ein „verkettetes" mit gemeinsamer Rückleitung für beide Phasen. In beiden Fällen bedeuten die Wellenlinien die Spulen der Maschine, die kleinen Kreise Glühlampen u. dergl. Beim verketteten Zweiphasensystem ist der Strom in der gemein-

Fig. 611. Fig. 612.



samen Rückleitung [Mi... ker als in jedem „Aufsenleiter", jedoch weniger als doppelt so ... h der Maximalwert J_0 im Mittelleiter: $J_0 = \sqrt{J_1^2 + ...} = 1$ ... bei $J_1 = J_2 = J$ der Maximalwert der Ströme *I* z...

b) Dreip... Es lassen sich aus einer Wechselstrommaschin... chselströme *I, II, III* entnehmen, wenn in den ... chen je zwei Pole *aa* noch die Pole *b* und *c* ein... bewickelt werden, dafs für je einen Zeitpunkt

LA 208, 209.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } i_1 = J \sin\varphi \\ \text{II. } i_2 = J \sin(\varphi - 120^0) \\ \text{III. } i_3 = J \sin(\varphi - 240^0), \end{array}\right|$$

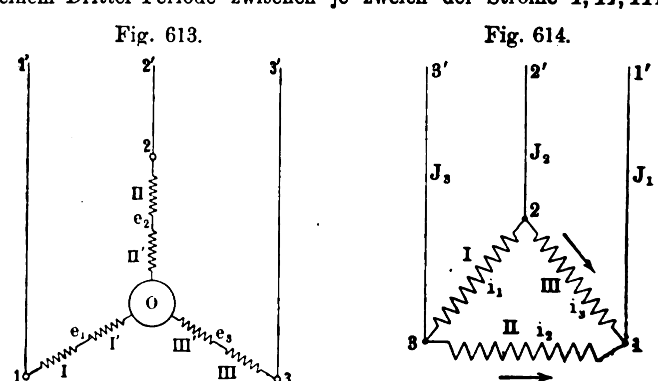
wobei wegen der identischen Gleichung (LA 208, 209),

$$\sin\varphi + \sin(\varphi - 120^0) + \sin(\varphi - 240^0) = 0$$

für jeden Zeitpunkt $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

Dieses **Dreiphasensystem** (drei Wechselströme mit einer Phasenverschiebung gleich einem Drittel Periode zwischen je zweien der Ströme *I, II, III*) verlangt

Fig. 613. Fig. 614.



anscheinend sechs Leitungen. Vereinigt man jedoch die drei Rückleitungen *I' II' III'* zu einer gemeinsamen Leitung, so fliefst durch dieselbe in jedem Zeitmomente die Summe der drei Momentanwerte der Ströme: $i = i_1 + i_2 + i_3 = 0$; wir brauchen deshalb diese Rückleitung überhaupt nicht und lassen

daher weg; nur müssen wir überall, wo wir Strom aus den drei Zuleitungen *I*, *II*, *III* für Glühlampen, Motoren u. s. w. entnehmen, die drei „Phasen" zu einem Vereinigungspunkte, zum sogenannten „Nullpunkte" führen. Wir gelangen so zu der sehr einfachen „Sternschaltung" (Fig. 613). Eine andere oft verwendete Schaltungsanordnung heifst „Dreieckschaltung" (Fig. 614).

Eben diese Entbehrlichkeit der drei Rückleitungen stellt den ersten Umstand dar, der dem Dreiphasensystem die meiste Anwendung verschafft hat (obgleich sich natürlich auch Wechselströme mit beliebig vielen Phasen herstellen lassen; solche brauchen jedoch für jede Phase eine eigene Leitung, wenn das System „symmetrisch" ist; bei unsymmetrischen Systemen kommt dann noch wenigstens eine gemeinschaftliche Rückleitung dazu; und diese vielen Leitungen verbieten ihre praktische Verwertung). Der zweite Umstand, dem von den Mehrphasenwechselströmen besonders der Dreiphasenstrom seine Bedeutung verdankt, liegt in der besonderen Art, wie er den Betrieb der sogenannten Drehstrommotoren ermöglicht; vergl. folg. §.

§ 165. Wechselstrommotoren: Einphasenmotoren und Drehstrommotoren.

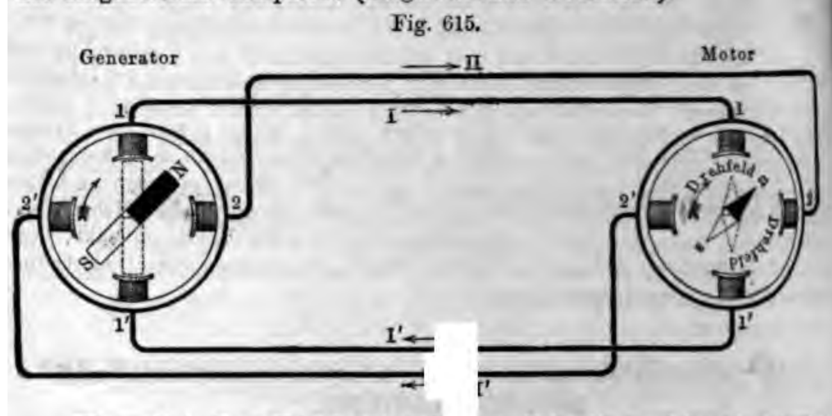
a) Jeder Wechselstromgenerator, der zur Erzeugung einphasigen Wechselstromes bestimmt ist, läfst sich auch als Motor verwenden, wenn dem feststehenden äufseren Spulenkranze *AA* Einphasenwechselstrom, dem Feldmagneten *FF* Gleichstrom zugesendet wird. Ein Drehmoment kann jedoch nur dann abgegeben werden, wenn ein Polwechsel in den Spulen des Motors immer gerade dann eintritt, sobald der vorübergehende Magnet infolge des Stromwechsels im Generator seinen Pol wechselt, d. h. wenn der Motor in „Synchronismus" mit dem zugeführten Wechselstrome läuft; man nennt daher solche Motoren „Einphasensynchron-Motoren". Diese Motoren besitzen praktisch schwerwiegende Nachteile: sie laufen beim Einschalten mit Belastung nicht an, sondern müssen unbelastet zuerst mechanisch oder elektrisch auf synchronen Gang gebracht werden, worauf erst die Motorwelle ein Drehmoment abgeben kann; sie vertragen keine Überlastung, sondern bleiben in einem solchen Falle sofort stehen („fallen aus dem Tritt"). Nur einen Vorzug besitzen sie, nämlich die konstant bleibende Tourenzahl vom Leerlauf an bei allen Belastungen bis zum zulässigen Maximum. Immerhin tun diese Motoren gute Dienste für grofse andauernde Leistungen.

b) Wenn bei einem Gleichstrommotor (Serien- oder Nebenschlufsmotor) die Zuleitungen miteinander vertauscht werden, so ändert sich die Stromrichtung im Anker und in den Feldmagnetwindungen; daher bleibt die Drehrichtung des Motors ungeändert. Es können daher derartige Motoren auch mit einphasigem Wechselstrom betrieben werden, nur macht sich (besonders bei Nebenschlufsmotoren) der Einflufs der Selbstinduktion störend bemerkbar. Solche Motoren sind daher nur für kleine Leistungen verwendbar.

c) Wechselstrommotoren mit magnetischem Drehfeld. — Durch die Spulen 11′ fliefse der Wechselstrom $i_1 = J . \sin\alpha$, durch die Spulen 22′ der Wechselstrom $i_2 = J . \cos\alpha$; beide Ströme haben dieselbe Periodendauer *T* und denselben Maximalwert *J*. Die Spulen 11′ rufen ein Wechselfeld in der Richtung *I*, die Spulen 22′ ein solches in der Richtung *II* hervor. Es scheint dann ein resultierendes

Magnetfeld von **konstanter** Stärke zu rotieren (nach der schematischen Fig. 615), so dafs einer Periode eine volle Umdrehung des Magnetfeldes entspricht (**magnetisches Drehfeld**).

Fig. 615.



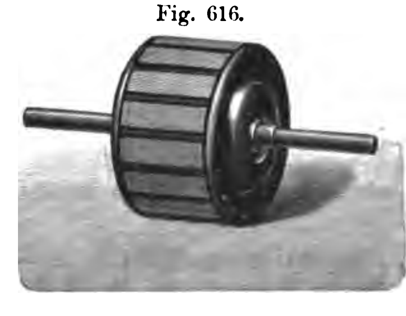
Wegen $i_1^2 + i_2^2 = J_2^2 (sin^2 \alpha t + co$ [illegible] $= J^2$ ist die resultierende Intensität $i = \sqrt{i_1^2 + i_2^2} = J$, also von der Phas [illegible] t unabhängig.

Zur Erzeugung eines solchen Dreh [illegible] können anstatt zweier Wechselströme mit einer Phasendifferenz = ¼ Per [illegible] auch drei Wechselströme (Phasenverschiebung 120°) verwendet werden. [illegible] wei, bezw. drei gemeinsam wirkenden Wechselströme haben den (allerdings [illegible] sehr zweckmäfsigen) Namen „Drehstrom" erhalten; besser ist die im vorigen g[illegible]ebrauchte Bezeichnung „zweiphasiger", bezw. „dreiphasiger" Wechselstrom (**Mehrp**[illegible]**asen-**, speziell **Dreiphasenstrom**).

Befindet sich im „Drehfeld" eine Magnetnadel (so in der schematischen Fig. 615) oder ein durch Gleichstrom erregter Elektromagnet, so wird er mit derselben Tourenzahl umlaufen wie das Magnetfeld und dabei ein mechanisches Drehmoment abgeben können (Synchrone Drehfeldmotoren; Tesla).

Noch weitaus wichtiger und praktisch vorteilhafter sind die sogenannten asynchronen Drehfeldmotoren (Induktionsmotoren oder kurz „**Drehstrommotoren**", v. Dolivo-Dobrowolski, Brown), deren Prinzip folgendes ist:

Fig. 616.



In einem magnetischen Drehfelde ist ein Stromleiter (der im wesentlichen die Gestalt eines Hohlzylinders besitzt und Kurzschlufsanker heifst, Fig. 616) um seine Achse drehbar angebracht. Die Kraftlinien schneiden bei ihrer Rotation diesen Stromleiter und induzieren in demselben Ströme, die dem Drehfelde nachzueilen suchen, so dafs der stromführende Zylinder ein Drehmoment abzugeben vermag.

In einem magnetischen Drehfelde, dessen Intensität konstant ist und welches mit der konstanten Tourenzahl n_1 im Sinne des Pfeiles I (Fig. 617) rotiert, denken

r uns einen Nuten-Trommelanker (vergl. Fig. 600, S. 538), bei welchem jedoch
Ankerdrähte an den beiden Stirnseiten **direkt miteinander verbunden**
id (z. B. durch Kupferringe, Fig. 616, so dafs die ganze Wickelung einem Käfige
nlich sieht, daher „Kurzschlufsanker", „Käfiganker"). Dieser sei vorläufig in
uhe, so dafs bei der Drehung des Magnetfeldes in den Ankerdrähten Ströme
duziert werden. Da es nur auf die relative Bewegung zwischen den Stromleitern
nd dem Magnetfelde ankommt, können wir uns denken, es stehe das Magnetfeld
est und der Anker drehe sich mit derselben Tourenzahl n_1 im Sinne des Pfeiles *II*,
lso in entgegengesetzter Richtung; diese Annahme ermöglicht bequemer die Be-
timmung der Richtung der Induktionsströme in den Ankerdrähten. Nach den
nduktionsregeln in § 150 findet man, dafs in der oberen Ankerhälfte die Ströme
egen den Beschauer hin, in der unteren Ankerhälfte vom Beschauer weg fliefsen;
iese Ströme magnetisieren den Anker in der Querrichtung *CD*. Wenn also in
lem betreffenden Augenblicke das Hauptfeld (Dreh-
eld) bei *A* seinen Nordpol *N*, bei *B* seinen Süd-
ol *S* hatte, so entsteht durch die Induktions-
tröme im Anker bei *D* ein Nordpol *N'*, bei *C* ein
üdpol *S'*; diese beiden letzteren Pole werden um
o stärker sein, je stärker das Hauptfeld und je
röfser die Tourenzahl n_1 desselben ist. Die beiden
elder *NS* und *N'S'* ziehen sich nun gegenseitig
n, so dafs eine Drehung des Ankers in demselben
inne resultiert (Pfeil *III*), in welchem das Dreh-
ld *NS* rotiert; es läuft demnach das Anker-
ld *N'S'* mit einer Tourenzahl n_2 dem Haupt-
de *NS* nach. Würde $n_2 = n_1$, würde sich also
r Anker mit derselben Geschwindigkeit drehen
das Drehfeld, dann würden die Kraftlinien *NS*
Ankerdrähte überhaupt nicht schneiden, so
ständen also keine Induktionsströme und kein
kerfeld, d. h. dann könnte der Anker kein mechanisches Drehmoment abgeben.
n ist aber der Anker stets belastet, wenn auch bei „Leerlauf" nur durch die
bungswiderstände in den Lagern und durch den Luftwiderstand; infolgedessen
fs n_2 kleiner sein als n_1, wenn auch nur verhältnismäfsig wenig kleiner. Ist
och der Anker gezwungen, ein grofses mechanisches Drehmoment abzugeben,
B. zum Antriebe einer Transmission, eines Aufzuges, eines Kranes, eines Bahn-
gens u. s. w., dann wird wegen der erforderlichen grofsen Zugkraft am
kerumfange die Tourenzahl n_2 sinken, da ja die elektrische Leistung, welche
eführt und zur Erzeugung des Drehfeldes verwendet wird, konstant bleibt
nstante mechanische Belastung vorausgesetzt), und weil deshalb auch die
egebene Leistung, welche dem Drehmomente und der Tourenzahl n_2 proportional
ungeändert bleibt. Es bleibt dann der Anker **mehr** hinter dem Drehfelde
ück, wodurch aber **mehr** Kraftlinien des Drehfeldes die Ankerdrähte schneiden
somit das Feld *ns* **verstärkt** wird. Der Anker vermag also dann wirklich
gröfseres Drehmoment abzugeben und zwar um so mehr, je **gröfser** die
ferenz $(n_1 - n_2)$ ist, weil diese Differenz proportional der Zahl der geschnittenen
ftlinien ist. Man bezeichnet diese Differenz als **„Schlüpfung"**; der Name ist
r glücklich gewählt, da gewissermafsen der Anker in dem Drehfelde, welches
selben mit grofser Kraft mitzureifsen sucht, etwas zurückschlüpft und zwar
so mehr, je stärker der Anker mechanisch belastet ist.

Fig. 617.

Diese Drehfeldmotoren (gewöhnlich als „Drehstrommotoren" bezeichnet) führen auch den treffenden Namen „asynchrone Induktionsmotoren", weil die Tourenzahl des Ankers n_2 nicht zusammenfällt mit der Tourenzahl des Drehfeldes n_1 und weil die wirksamen Ströme im Anker erst durch Induktion hervorgerufen werden.

Diese „Drehstrommotoren" (es sei der gebräuchliche Name weiterhin gestattet) haben eine auſserordentliche Bedeutung für die Praxis erlangt, da sie keinen Kollektor brauchen, vielmehr dem drehbaren Teile (dem Anker, auch „Läufer" oder „Rotor" genannt) von auſsen gar kein Strom zugeführt zu werden braucht; nur das feststehende Magnetgestell („Ständer" oder „Stator" genannt), in welchem das Drehfeld entsteht, ist mit unbeweglichen und fix montierten Zuleitungen zu versehen, ein praktisch sehr wichtiger Vorzug vor anderen Motoren. Das Anlaufsdrehmoment ist sehr groſs, der Motor verträgt auch kurz dauernde Überlastungen und Stöſse sehr gut und hat nur einen Nachteil: die schwierige Regulierung der Tourenzahl, wenn es sich um weitere Grenzen derselben handelt.

Drehstrommotoren finden auch bei elektrischen Bahnen in neuester Zeit vorteilhafte Anwendung (Lugano, Gorn gratbahn und Jungfraubahn in der Schweiz u. s. w.); allerdings verlangen mindestens drei Leitungen (z. B. zwei Oberleitungen und die Schienenrückl

Drehstrommotoren für gröſsere ngen werden zumeist nicht mit Kurzschluſsankern, sondern mit dem sogen „Phasenanker" ausgerüstet; letzterer gestattet die Einschaltung eines „ derstandes" beim Anlauf des Motors; eine eingehende Erklärung ist hier öglich.

§ 166. Transformat n und Umformer.

In § 150 wurde jeder Induktionsapp rat als „Transformator im weiteren Sinne" bezeichnet; denn wird in die primä Spule z. B. eines Schlittenapparates ein Strom von der Stärke J_1 und der elektromo orischen Kraft (Klemmenspannung) E_1 geschickt, so verläſst ein Strom von der Stärke J_2 und der Klemmenspannung E_2 die sekundäre Spule, wobei wegen der kleineren Windungszahl und des kleineren Widerstandes der primären im Vergleich zur sekundären Spule $J_1 > J_2$, aber $E_2 > E_1$ ist. Dabei wird die Wirkung durch einen Kern aus weichem Eisen, der sich im Innern der primären und somit auch der sekundären Spule befindet, beträchtlich gesteigert. — Überdies findet aber in dem „Transformator im engeren (elektrotechnischen) Sinn" nicht nur Stromunterbrechung, sondern Stromwechsel statt. — Das Wesentliche dieser Einrichtung können wir nun auch so beschreiben:

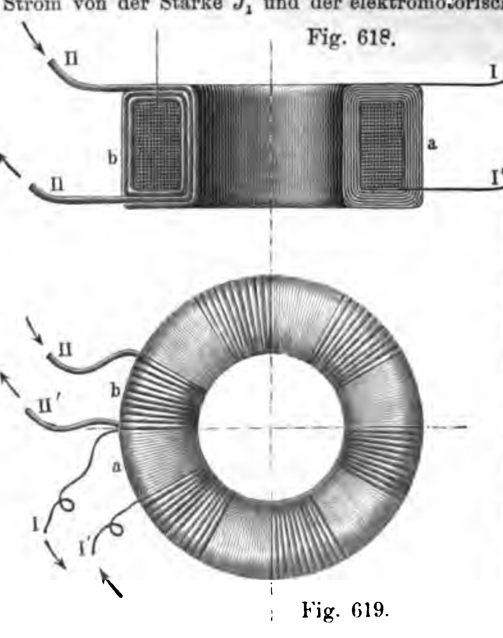


Fig. 618.

Fig. 619.

Um einen Kern aus weichem Eisen gehen zwei Systeme von Drahtwindungen (Figg. 618, 619); wird in die eine ein Strom gesendet, so verläſst die andere ein Strom von im allgemeinen anderer Stärke und Spannung, oder: der eine Strom wird in einen anderen **transformiert.** Dies geschieht in dem ruhenden Apparate durch die Bewegung der Kraftlinien des Magnetfeldes.

Wie bei jeder Induktionswirkung ist für das Entstehen eines sekundären Stromes wesentlich, daſs der primäre Strom nicht stationärer Gleichstrom, sondern entweder Gleichstrom mit wechselnder Stromstärke, speziell mit Stromunterbrechung, oder daſs er Wechselstrom ist. Unter **Transformator** im speziellen elektrotechnischen Sinne versteht man eine Vorrichtung, in der ein Wechselstrom einen anderen Wechselstrom erzeugt.

Die Einrichtung unterscheidet sich von der des Induktionsapparates — auſser durch die oft beträchtlichen Dimensionen (bis 2 m Höhe und 1 m Durchmesser) — im wesentlichen auch dadurch, daſs man nicht einen geraden, sondern einen ringförmig in sich geschlossenen Eisenkern mit beiden Windungen versieht, wodurch die Einrichtung und Wirkungsweise dann so zu beschreiben ist: In einem „geschlossenen magnetischen Kreise“ wird durch einen Wechselstrom *I* von der Stärke J_1 und der Klemmenspannung E_1 ein Wechselstrom *II* von der Stärke J_2 und Klemmenspannung E_2 hervorgerufen. Die Periodenzahl beider Ströme ist dieselbe, und theoretisch ist $J_1 E_1 = J_2 E_2$, da $J_1 : J_2 = Z_2 : Z_1$, $E_1 : E_2 = Z_1 : Z_2$, wo Z_1 und Z_2 die Windungszahlen der primären und sekundären Spule sind. — Praktisch läſst sich jene theoretische Gleichheit des primären und sekundären Effektes $J.E$ nie vollständig erzielen, da Verluste durch Stromwärme der primären und sekundären Spule, sowie durch Hysteresis und Wirbelströme eintreten. Immerhin beträgt aber bei groſsen Transformatoren moderner Konstruktion $J_2 E_2$ bis 96 Proz. von $J_1 E_1$, und Transformatoren mit einem elektrischen Wirkungsgrade von nur 90 Proz. werden schon als schlechte bezeichnet.

Die Transformatoren lassen sich sowohl für einphasigen wie auch für mehrphasigen Wechselstrom anwenden („Wechselstromtransformator“ schlechthin und „Drehstromtransformator“); sie haben für die Praxis die allergröſste Wichtigkeit; denn erst seit ihrer Erfindung kann man die Wechselströme von verhältnismäſsig niedriger Spannung, wie sie die Maschinen liefern (bis etwa 5000 Volt, gewöhnlich aber viel weniger), fast ganz ohne Verluste umwandeln in Ströme von hoher Spannung (etwa 10 000 Volt; es existieren bereits Anlagen mit 40 000 Volt); solche hochgespannten Ströme brauchen nur sehr dünne Leitungen, so daſs eine Übertragung des elektrischen Effektes auf sehr groſse Distanzen noch wirtschaftlich günstige Resultate liefert (Ausnutzung billiger Wasserkräfte). An der Konsumstelle können die hochgespannten Ströme durch Transformatoren wieder auf geringe Spannungen (100 Volt) „heruntertransformiert“ werden, so daſs sie ihre physiologisch gefährlichen Eigenschaften verlieren.

Nach den bisher angegebenen Prinzipien können, wie gesagt, nur Wechselströme in Wechselströme transformiert werden. Da aber Wechselströme zwar ökonomischer zu übertragen sind als Gleichstrom, jedoch z. B. für elektrolytische Zwecke nicht unmittelbar zu verwenden sind, so entsteht die Aufgabe, Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln, **„umzuformen“**; dies leisten die

Motor-Generatoren: Der einem Wechselstrom- oder Drehstromverteilungsnetze entnommene Strom setzt einen Wechselstrom-(Drehstrom-)Motor in Bewegung, der direkt mit einem Gleichstromgenerator gekuppelt ist.

Dieser Gleichstromgenerator ist für die zum jeweiligen besonderen (elektrolytischen, galvanoplastischen . . .) Zwecke erforderliche Stromstärke und Klemmenspannung gebaut. — Die elektrische Leistung des Gleichstromgenerators pflegt um 10 bis 20 Proz. hinter jener des zugeführten Wechselstromes zurückzubleiben.

Bei den **„Umformern“** (im engeren Sinne des Wortes, die von den Transformatoren, trotz der sprachlich gleichen Bedeutung beider Ausdrücke, völlig verschieden sind) wird die Umwandlung von Wechsel- in Gleichstrom in einer Maschine besorgt.

B. Anwendungen d[illegible]nischen Wirkungen.

Vorbemerkung: Eine unmit[illegible]endung der Wärmewirkungen des Stromes, d. h. der in Wärmemengen [illegible] Stromenergie, ist die **„elektrische Heizung“.** Eine solche ist zwar ab[illegible] praktisch durchgeführt (Zimmerheizungen, Kochapparate . . ., auch [illegible] für physikalische Versuche häufig zweckmäfsig): im grofsen wäre [illegible]wendung höchstens dort praktisch, wo grofse Wasserkräfte u. dergl [illegible]s zur Verfügung stehen. Denn da die Elektrizität eine „höher org[illegible] der Energie“ (§ 130, S. 403) ist als die Wärme, so ist es im allgeme[illegible]hwendung, sie unmittelbar in diese niedrigste Form der Energie überzuführen. — [illegible]Elektrisches Schweifsen.**

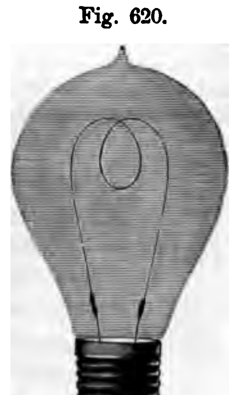
Auch die an sich nützliche Anwendung bei **Minensprengungen** (wo die Verwendung elektrostatischer Entladungen sich im allgemeinen als zweckmäfsiger erwiesen hat als das Glühen von Drähten), bei der **Galvanokaustik** (Abschnüren z. B. von krankhaften Neugebilden mittels elektrisch glühender Drähte) können nicht zu den elektrotechnischen Anwendungen im grofsen gezählt werden. Um so mehr sind das „elektrische Licht“ in seinen beiden wesentlich verschiedenen Formen, als **Glühlicht** und **Bogenlicht,** Anwendungen der Wärmewirkungen im grofsen. Wie hier die Lichtwirkung nur eine sekundäre Folge der Wärmewirkung (§ 156, Eingang), so ist zwar auch die besondere elektrochemische Anwendung des elektrischen Lichtbogens im „elektrischen Ofen“ nicht ein direkt chemischer (elektrolytischer), sondern ein elektrothermischer Vorgang, nämlich eine Dissoziation infolge der sehr hohen Temperatur; sie soll aber wegen ihrer praktischen Ähnlichkeit mit sonstigen elektrochemischen Anwendungen erst im folgenden Abschnitte (§ 169) behandelt werden.

§ 167. Glühlampen.

In einem durch Quecksilberluftpumpen nahezu vollständig evakuierten birnförmigen Glasballon ist ein dünner Kohlenfaden eingeschlossen, dessen beide Enden durch einen elektrolytisch hergestellten Kohlenniederschlag mit den Stromzuleitungsdrähten verbunden sind; die Zuleitungsdrähte sind an der Stelle, wo sie in die Glasbirne eingeschmolzen sind, aus Platin hergestellt, weil Platin nahezu denselben

ärmeausdehnungskoeffizienten besitzt wie Glas; die beiden Enden r Zuleitungsdrähte sind mit dem „Lampensockel" verlötet, der aus ei gegeneinander isolierten Teilen besteht und in der „Fassung" ge-hnlich durch Einschrauben zu befestigen ist dison-Fassung, Fig. 620). Der Kohlenfaden ırde früher durch Verkohlung von Bambusfasern er Papier hergestellt; jetzt werden als Roh-terial Fäden aus Zellulose verwendet, welche Glühöfen unter Luftabschlufs verkohlt und nn durch Dissociation (in einem Bade von nzin, Petroleum) ausgeglichen werden.

Fig. 620.





Sendet man nun einen Strom (Gleich- oder echselstrom) durch diesen Kohlenfaden, so gerät (bei richtigem Widerstand des Fadens und ent-rechender Spannung des Stromes an den Lampen-emmen) in lebhafte Weifsglut, ohne zu ver-ennen, weil ja in der Glasbirne kein Sauerstoff rhanden ist.

Es verbraucht dabei die Glühlampe im Mittel für Hefner-Einheit (§ 117) einen Effekt von 3 Watt, so fs durch eine 16 kerzige Glühlampe bei 100 Volt Span-ng eine Stromstärke von rund $^1/_2$ Ampère fliefst; eine kerzige Glühlampe braucht also bei 100 Volt etwa Ampère Stromstärke. Der Arbeitsverbrauch einer kerzigen Glühlampe beträgt daher in einer Stunde: Wattstunden = nahezu $^1/_2$ Hektowattstunde = unge-ır $^1/_{15}$ Pferdestärkenstunde. (LA 210.)

LA 210.

Die Glühlampe ist für Gleichstrom oder Wechselstrom in gleicher Weise rwendbar, weil die erzeugte Wärmemenge, daher auch die Lichtemission, vom adrate der Stromstärke abhängt, welches vom Vorzeichen des Stromes, also n seiner Richtung, unabhängig ist.

Erfinder der Glühlampe mit Kohlenfaden (statt des anfänglich versuchten tindrahtes) ist nicht, wie meist geglaubt wird, Edison, sondern ein Deutscher mens Goebel, dem die Ergebnisse jahrelanger und schliefslich erfolgreicher rsuche durch eine mit Edison verbundene Gesellschaft abgekauft wurden.

Bei der Glühlampe nach dem System Nernst werden sogenannte „Leiter eiter Klasse" (insbesondere Magnesiastäbchen), die bei gewöhnlicher Temperatur Isolatoren zu betrachten sind, durch eine elektrische Heizvorrichtung vor-wärmt, wodurch sie zu Leitern werden, so dafs der nun durchfliefsende Strom in lebhafter Weifsglut zu erhalten vermag; dabei ist nur etwa 1 Watt pro fner-Einheit erforderlich.

Die Auer-Osmium-Lampe verwendet statt des Kohlenfadens einen Draht s Osmium, das noch schwerer schmelzbar ist als Platin, daher höhere Tempera-en verträgt und so bei höchster Weifsglut noch reicher an leuchtenden (nicht rwiegend wärmenden) Strahlen ist.

§ 168. Bogenlampen.

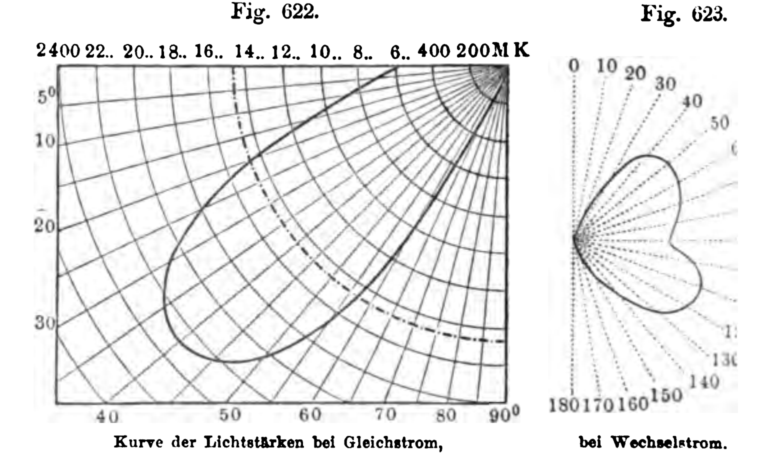
Sir HUMPHRY DAVY (1821) erzielte durch einen Batteriestrom von hoher und Spannung, den er durch zwei einander berührende und dann bis auf Millimeter Abstand voneinander gebrachte Kohlenstäbe gehen liefs, das s bis dahin bekannte künstliche Licht, das bis heute vorwiegend gemeint ist vom „elektrischen Licht“ schlechtweg geredet wird. Gegenwärtig wir der in Gleich- oder Wechselstromgeneratoren erzielte Strom dazu verwende wesentliche Vorgang dabei ist:

Fig. 621.

Zwei Stäbe aus Gaskohle (geprefste Kohle, Fig werden einander bis zur Berührung genähert, und der gehende Strom erzeugt an der Berührungsstelle als den des höchsten Widerstandes intensive Gelbglut der K spitzen. Werden die Spitzen bis auf wenige Millimeter A voneinander entfernt, so werden Kohlenteilchen losgeriss eine leitende Brücke für den Strom bilden, ihm aber noch höheren Widerstand entgegensetzen, so dafs die ratur in diesem **elektrischen Lichtbogen** auf 3500 bis steigt. Das von diesem Lichtbogen ausgesandte Licht i an kurzwelligen (auch ultravioletten) Strahlen und zeigt f bläuliche und violette Farbe. Der Gesamteindruck von und Bogen ist der des blendend weifsen Lichtes.

Dafs das Spektrum des Bogenlichtes ein kontinuierliches ist, bew die Licht emittierenden Kohlenteilchen noch im festen Zustande sind (d **Abbrennen sich bildende Kohlendioxydgas kommt nicht als lichtgeben tracht). — Die Intensität des ausgestrahlten Lichtes ist nicht nach allen Ri**

Fig. 622. Fig. 623.



Kurve der Lichtstärken bei Gleichstrom, bei Wechselstrom.

gleich grofs, sondern beträchtlich kleiner in der Richtung normal zur A Kohlenstäbe als unter einem Winkel von 45° gegen diese Richtung (I weshalb die Kohlenstäbe manchmal (z. B. im Skioptikon) schief aufgestellt damit nach wagrechter Richtung möglichst intensives Licht ausgesendet



Fig. 624.

Lichtbogen verhält sich wie der Sitz
tromotorischen Gegenkraft, indem
inen Gleichstrombogen von etwa 2 mm
Spannungsdifferenz von rund 45 Volt
ı ist, damit diese EMGK überwunden
om aufrecht erhalten wird; bei Wechsel-
nur etwa 30 Volt nötig. — Die Kohlen-
nen allmählich ab, da (mit Ausnahme
e Kohlen fast luftdicht in eine Glasglocke
nden Lampen) die Luft ungehindert Zu-
Bei Gleichstrom brennt die + Kohle
elt so rasch ab als die — Kohle; bei
om ist der Abbrand bei beiden Kohlen
. — Durch den Kohlenabbrand wird der
länger und seine EMGK steigt, wodurch
tärke sinkt, bis endlich der Lichtbogen
d die Lampe erlischt. Es müssen daher
stets einander genähert werden, was
ler automatisch wirkenden **Bogenlicht-
en** (Bogenlampen - Regulierwerke) ge-
Dabei kommen stets zwei Kräfte zur
1. Eine vom **Hauptstrome** durchflossene
wirkt durch Anziehung eines Eisenkernes
tfernung der beiden Kohlen und eine
er ein Gewicht nähert dieselben einander
nlampe); diese Lampe verlangt konstante
e, wenn sie ruhig brennen soll; sie ist
inzellichter brauchbar (Leuchttürme
2. Eine von einem Zweigstrome durch-
ule nähert die Kohlen, welche von der
inander gezogen werden (Nebenschlufs-
ese Lampe verlangt konstante Klemmen-
hier können durch **Parallelschaltung**
ele Lampen gleichzeitig in Betrieb sein
e von ihnen aufser Betrieb, ohne dafs
ıtritt des Stromes in die übrigen stört).
Differentiallampe (Hefner von Alt-
zik) nähert eine Nebenschlufsspule die
len einander und eine Hauptstromspule
voneinander. Diese Lampe hält durch
ıg der beiden Spulen ihren Widerstand
dafs sie gleich gut für Serienschaltung
lschaltung anwendbar ist.

Bedeutung der elektrischen Beleuchtung (Glüh- und Bogenlicht) nimmt
ı Jahr zu, und nur die im Vergleich zu anderen Lichtquellen (nament-
cht) höheren Kosten verzögern seine allgemeine Einführung. Deshalb
ıeuesten Bestrebungen dahin, durch Verringerung des Wattverbrauches
-Einheit (bei Glühlampen etwa 3 Watt, bei Bogenlampen etwa 1 Watt)
auch und Kosten zu verringern. — Beim „Bremerlicht" (Effektbogen-

lampen) sind den Kohlen Metallsalze beigemengt (— bis 40%, und zwar für Gelb Na und Ca, für Rot Sr, für Weiß Mg); indem die Stromenergie sich mehr in diese gelbliche, optisch wirksamste Strahlung umsetzt, entspricht demselben Stromverbrauch ein bis 4 mal so großer Lichtstärke als beim Davyschen Lichtbogen.

Über Teslas „Licht der Zukunft" („kaltes Licht") vergl. § 156.

C. Anwendungen der elektrochemischen Wirkungen.

§ 169. Galvanostegie und Galvanoplastik.

Wird Gleichstrom durch eine Lösung von Kupfer-, Nickel-, Gold-, Silber- . . . Salzen gesendet und mit der Kathode ein leitender (oder durch Graphitüberzug an der Oberfläche leitend gemachter) Körper verbunden, so scheiden [illegible] an seiner Oberfläche Schichten jener Metalle ab. — Beim galv[illegible]chen Verkupfern, Vernickeln, Ver-

Fig. [illegible]25.

golden, Versilbern, Verstählen . . . (**Galvanostegie**, Fig. 625) müsse[n] diese Schichten fest haften; dagegen verlangt die **Galvanoplastik** Ab-lösbarkeit der aus Kupfersulfat niedergeschlagenen Kupferschichte[n].

Damit die Salzlösungen konzentriert bleiben, müssen an der Anode über-schüssige Mengen der genannten Metalle vorhanden sein, die dann durch sekundä[re] Prozesse sich mit den elektronegativen Resten der zersetzten Salze wieder ve[r]-binden; so daß es den Anschein hat, als wanderten diese Metalle allmählich von d[er] Anode durch die Flüssigkeit zur Kathode (über die wirklichen Vorgänge vergl. § 15[illegible]

Wichtigkeit der Galvanoplastik für das Schonen der Originalplatten v[on] Kupferstichen u. s. w. — Negative Abdrücke (Matrizen), positive Abdrücke.

Die Gewinnung reiner Metalle (Kupfer, Aluminium . . .) g[e]-schieht teils selbst wieder auf elektrolytischem Wege oder in de[n] neuestens zu großer Bedeutung gelangten **elektrischen Ofen**, [in] welchem durch die Hitzegrade des elektrischen Lichtbogens chemisc[he] Verbindungen, Metallerze u. s. w. dissoziiert werden.

Die Hauptschwierigkeit besteht hier in der Herstellung der den Lichtbogen umgebenden Wärmeschutzmassen (Magnesia, Böcks Gemenge aus Sand und Magnesia...), die den ungeheueren Hitzegraden widerstehen.

§ 170. Akkumulatoren (Sekundärbatterie, Stromsammler).

Um den *Versuch* § 154, Fig. 557 in gröfserem Mafsstabe auszuführen, seien in einem Gefäfse aus Glas, Zelluloid u. s. w. zwei Platinplatten P_1, P_2 einander gegenüber in verdünnter Schwefelsäure gestellt. Leitet man durch diesen Apparat den Strom einer galvanischen Batterie B oder einer Gleichstrom-Dynamomaschine, so wird der Elektrolyt zersetzt und es scheidet sich an der positiven Platte Sauerstoff (O), an der negativen Platte Wasserstoff (H) ab, wobei beide Platten in den Zustand der galvanischen Polarisation geraten. Unterbricht man dann den „Ladungsstrom" der Stromquelle B und verbindet man dann die beiden Platten P_1, P_2 durch einen Draht miteinander, so zeigt es sich, dafs ein „Entladungsstrom" („Polarisationsstrom") in entgegengesetzter Richtung durch dieses Sekundärelement fliefst und zwar so lange, bis wieder der Wasserstoff, bezw. Sauerstoff mit dem nun an neuem an den Platten entstehenden Sauerstoff, bezw. Wasserstoff sich zu Wasser verbunden hat. Das Aufhören dieses Stromes zeigt die vollständige „Entladung" des Sekundärelementes an. Eine neuerliche Ladung bringt dann dieselben Erscheinungen hervor.

Gaston Planté (1860) verwendet zwei Bleiplatten (statt der Platinplatten). Bei der Ladung entsteht dann an der positiven Platte durch den frei werdenden Sauerstoff Bleisuperoxyd (PbO_2), während an der negativen Bleiplatte der Wasserstoff frei entweicht, so dafs die Platte ungeändert bleibt. Der Entladungsstrom läfst dann an der Bleisuperoxydplatte infolge seiner entgegengesetzten Richtung Wasserstoff entstehen, welcher das Bleisuperoxyd zu Blei reduziert.

Die chemischen Vorgänge sind in Wirklichkeit sehr verwickelt; doch gelten (namentlich für schon in Gebrauch gewesene Akkumulatoren) folgende Formeln:

I. Ladung: $PbO + 2H_2SO_4 + PbO = Pb + 2H_2SO_4 + PbO_2$.

II. Entladung: $Pb + 2H_2SO_4 + PbO_2 = PbO + 2H_2SO_4 + PbO$.

Nach anderer Ansicht geht die Ladung und Entladung so vor sich:

I.*: Ladung: $PbSO_4 + 2H_2O + PbSO_4 = Pb + 2H_2SO_4 + PbO_2$.

II.*: Entladung: $Pb + 2H_2SO_4 + PbO_2 = PbSO_4 + 2H_2O + PbSO_4$.

Faure (1881) bestreicht die Platten von vornherein mit Bleisuperoxyd, Bleioxyd (Mennige); diese Bleisalze werden durch den Strom reduziert, so dafs sich eine schwammige, äufserst poröse Bleischicht auf den Platten bildet, wodurch ebenfalls die wirksame Oberfläche sehr vergröfsert wird (gepastete Platten).

Beide Methoden, der Planté-Prozefs und der Faure-Prozefs, finden bei den modernen Akkumulatorkonstruktionen vielfache Anwendung. — Durch Anbringung vieler Plattenpaare (entsprechend dem Nebeneinanderschalten von galvanischen Elementen) nehmen die Akkumulatoren die in Fig. 626 (a. f. S.) dargestellte Gestalt an.

Das Herausfallen der „aktiven" Masse beim Faure-Prozefs wird durch Rippen, Häkchen und Gitter, welche die Oberflächen der Platten tragen, verhindert.

Der Name „Akkumulatoren" ist nicht so zu verstehen, als ob sie die Aufspeicherung der elektrischen Energie selbst gestatteten, sondern sie verwandeln nur dieselbe in chemische Energie und ermöglichen dann die Rückverwandlung in elektrische Energie. — Die „Kapazität" (das Aufspeicherungsvermögen) eines Akkumulators ist um so gröfser, je mehr Sauerstoff 1 kg der positiven Platten zur Bildung von Bleisuperoxyd heranziehen kann; es ist daher die Oberfläche der positiven Platten durch geeignete Mittel möglichst grofs zu machen (Grofsoberflächen-Platten); die Platten werden daher zumeist mit Rippen versehen oder als Gitterplatten ausgebildet.

Fig. 626.



\ ein Akkumulator bis zur Grenze seines . aahmevermögens geladen, so wird eine gewi romstärke durch eine bestimmte Zeit hind wirksam sein müssen; die Kapazität läfst laher in Ampère-Stunden ausdrücken; dies fse stellt nichts anderes als eine Ladu enge (Elektrizitätsmenge) dar.

Die vollständige Ladu dators erkennt man daran, dafs die frei werdenden Gase (H un r chemische Verbindungen eingehen, sondern entweichen; der Akkun ht"; die Fortsetzung der Ladung ist dann nutzlos, unter Umständen ch.

Der voll geladene Akkum e Spannung von etwa 2,05 Volt, die jedoch sehr rasch auf etwa 1,95 Volt sinkt; dann sinkt die Spannung nur sehr langsam bis auf etwa 1,85 Volt herab und nimmt dann rasch bis Null ab; die praktisch verwertbaren Grenzen sind 1,95 bis 1,85 Volt. — Beim Laden steigt die Spannung fast plötzlich von 1,85 auf 2,1 Volt, nimmt dann sehr langsam zu und erreicht gegen Ende der Ladung rasch den Wert 2,6 Volt; nach dem Ausschalten des Ladestromes sinkt die Spannung auf etwa 2,05 Volt.

Wenn zur Ladung A_1 Volt-Ampèrestunden **erforderlich sind und wenn** dem Akkumulator A_2 Volt-Ampèrestunden **entnommen werden können, so ist** der Wirkungsgrad: $\eta = A_2 : A_1$. — **Bei guten Konstruktionen schwankt** η **zwischen** 75 und 85 Proz. Die Lebensdauer eines **guten Akkumulators kann mit etwa** 10 Jahren angenommen werden.

Der Nachteil der Blei-Akkumulatoren, **ihr grofses Gewicht (das ihrer** allgemeinen Verwendung in elektrischen Bahnen **hinderlich ist) führten zu vielen** Versuchen mit anderen Plattenmaterialien **(Zink, Kupfer, Aluminium u. s. w.)**; jedoch hat sich bis jetzt keine dieser **Konstruktionen in der Praxis auf die Dauer** bewährt.

D. Leitungen. — Mefs- und andere Nebenapparate.

§ 171. Leitungen. — Schutzvorrichtungen.

Zur Verbindung der Stromquellen mit den **Apparaten und Maschinen, welche** die elektrische Energie in andere **Energieformen (mechanische Leistung, Wärme,** Licht u. s. f.) umsetzen, dienen die **elektrischen Leitungen. — Als Leitungs-**

rial dient dafür fast ausschliefslich Kupfer höchster Leitungsfähigkeit (Elektkupfer); nämlich etwa 60, bezogen auf Quecksilber.

Fig. 627.

Die Leitungen müssen, um Stromuste durch Ableitung und Überleitung benachbarte Stromleiter zu verhindern, ihrer ganzen Länge isoliert wer-. Bei den „Freileitungen" wird die t als Isolationsmaterial verwendet bei den Unterstützungspunkten der tungsdrähte kommen die bekannten zellan-Glocken-Isolatoren (Fig. 627) zur wendung. — Leitungen, die zur Verung in der Erde und im Wasser beimmt sind, werden auf ihrer ganzen nge durch Umpressung einer nahtlosen ttaperchahülle isoliert und durch Umspinnung mit imprägnierter Jute, Baumlle u. s. w., sowie durch Umpressung eines Bleimantels, nochmalige Umspinnung d endlich durch Armierung mit Eisenbändern oder endrähten (mechanischer Schutz) gegen die Einflüsse r Feuchtigkeit u. s. w. geschützt; man nennt solche itungen **Kabel** (Figg. 628 bis 630). — Für Wechselom und Drehstrom werden jetzt fast ausschliefslich ncentrische Kabel verwendet, welche die Hin- und ckleitung, bei Drehstrom alle drei Leitungen enthalten; rch diese Anordnung wird die magnetische Wirkung Leiter nach aufsen hin aufgehoben. Bei langen chselstromleitungen spielt auch die Kapazität der Kabel e wichtige Rolle (teils störend, teils günstig). - LA 211.

Fig. 628.



LA 211.

Fig. 629.

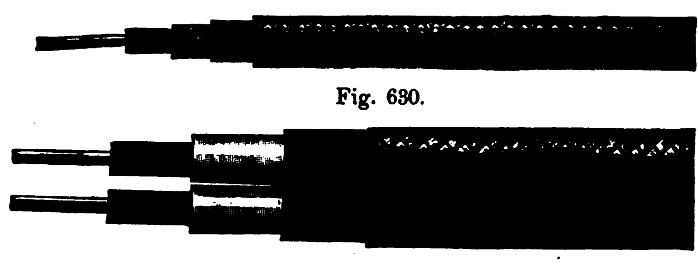


Fig. 630.

Sicherungen. — Um die Leitungen vor zu hoher Stromstärke und der urch hervorgerufenen grofsen Erwärmung zu schützen, bringt man (ähnlich Sicherheitsventilen beim Dampfkessel) künstliche schwache Stellen an, welche Bleistreifen bestehen, die beim zulässigen Maximum der Stromstärke abnelzen (**Bleisicherungen**). Auch automatische Starkstromausschalter werden fach für denselben Zweck verwendet.

Insbesondere müssen die Freileitungen gegen atmosphärische Entladungen hützt werden. Die **Blitzschutzvorrichtungen**, welche zu diesem Zwecke koniert wurden, beruhen alle darauf, dafs die atmosphärischen Entladungen leichter e Luftstrecken (wenige Millimeter) überspringen, als dafs sie die Windungen Apparate und Maschinen passieren; der Grund hierfür liegt darin, dafs der

Blitz als **oszillatorische Entladung** von überaus hoher Spannung und Schw
gungszahl anzusehen ist, für welche infolge der großen Selbstinduktion der W
dungen die zu schützenden Apparate und Maschinen einen außerordentlich ho
induktiven Widerstand (
= $2\pi \times$ Periodenzahl
sec $\times$ Selbstinduktionsk
zient) darbieten. Es sind
im Prinzip die Blitzsch
vorrichtungen nach Fig.
anzuordnen. Diese soger
ten Blitzplatten genüge
dieser einfachen Anord
vollkommen für die
nannten „Schwachstr
lagen" (Telegraphie,
phonie, Signalwesen u.
Bei den Starkstroma
hingegen müssen die
schutzvorrichtungen derart angeordnet werden, daß zwischen den Leitun
und L' und der Erde ein dauernder Kurzschluß verhindert wird, welcher
den zwischen LE und EL' stehen bleibenden Lichtbogen gebildet würde; e

Fig. 631.

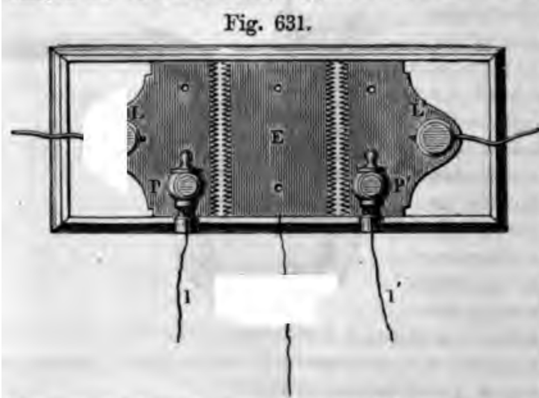


Fig. 632.

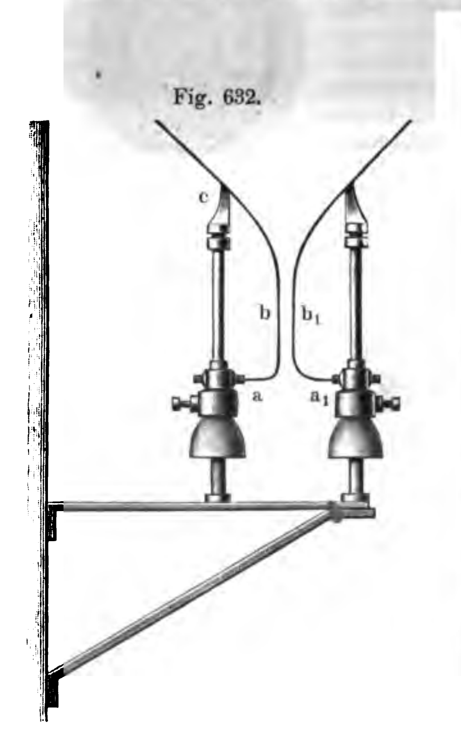


Fig. 633.



r Maschinenstrom der leitenden Brücke, welche der Blitz zwischen LEL' stellt hat, und hält diese unerwünschte Kurzschliefsung in Form eines Licht-s aufrecht. Die gebräuchlichen Mittel zur Abhilfe sind folgende: 1. Der Blitz nachfolgende Maschinenstrom erregt einen Elektromagneten, welcher mechanische Trennung der drei Platten bewirkt, so dafs der Lichtbogen :lslich „abreifst“, worauf die Platten in die ursprüngliche Lage zurückkehren. ir hohe Spannungen genügt nach den Versuchen von Siemens & Halske die rmung der Luft, unterstützt durch die auftretende elektrodynamische Wirkung, len Lichtbogen zwischen den hornähnlich gekrümmten Drähten $b\,b_1$ (Fig. 632) lfzutreiben, bis er endlich zerreifst. Die Drähte sind dabei auf Isolatoren $a\,a_1$ tigt, und für jede Leitung ist eine derartige Blitzschutzsicherung vorgesehen. hohen Spannungen bildet der durch Blitzschläge eingeleitete Lichtbogen des schlufsstromes eine mächtige und imposante Flammenerscheinung (Fig. 633). ich dem Vorschlage von Elihu Thomson (Amerika) wird der Lichtbogen die Einwirkung eines Elektromagneten „ausgeblasen“.

Dasselbe Prinzip der „magnetischen Funkenlöschung“ findet auch viel-Anwendung bei Schaltvorrichtungen (Ausschaltern, Umschaltern u. s. w., roller“ bei elektrischen Bahnen) für Starkstromanlagen zur Verhütung des rennens“ der Kontaktflächen durch den Lichtbogen („Unterbrechungsfunken“).

§ 172. Mefsinstrumente.

I. Ampèremeter. Die in der Elektrotechnik gebräuchlichen mmefsinstrumente (d. h. zur Messung der Stromstärke) lassen nach ihrer Einrichtung einteilen in folgende Gruppen:

Fig. 634.



Fig. 635.



1. Elektromagnetische Ampèremeter (vgl. die Apparate nach Figg. 634 bis 636), bei denen eine feststehende Spule, welche von dem zu messenden Strome durchflossen wird, auf einen beweglichen permanenten Magneten (Torsionsgalvanometer von Siemens) oder auf ein Stück Weicheisen einwirkt (Ampèremeter von rausch [Fig. 634], Siemens, Schuckert [Fig. 635] u. s. w.), oder bei en eine bewegliche Spule sich im Felde eines permanenten

Fig. 636.



Magneten befindet (System d'Arsonval, besonders in (tisch vollendeten Kon von Weston, Fig. 636).

2. Elektrodyna Strommefsinstrumente, chen eine feste Spule bewegliche Spule einwi Spulen sind von dem z den Strome durchfloss trodynamometer von W Siemens, Fig. 637).

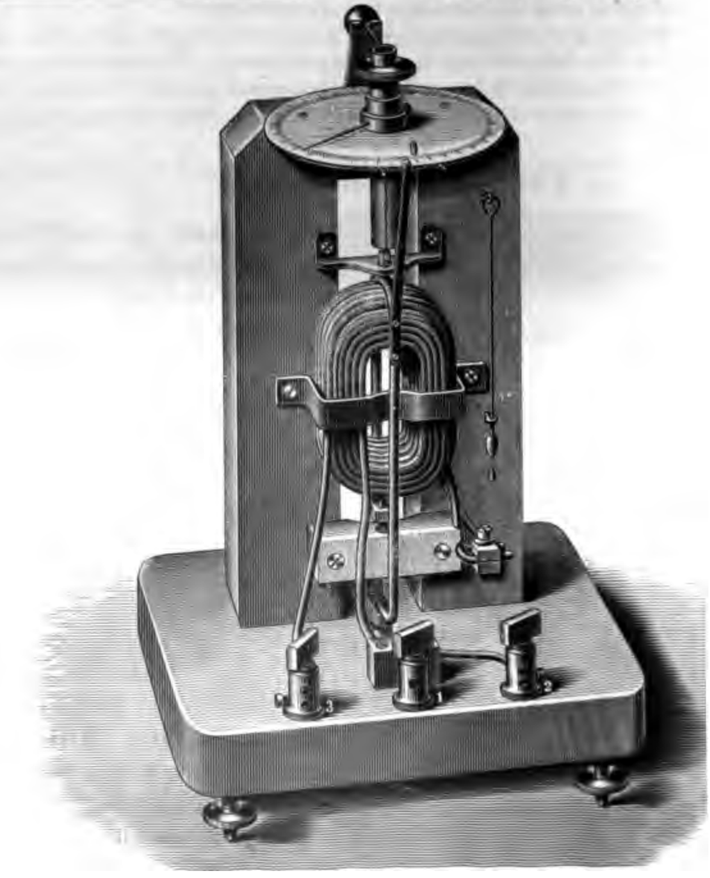


Fig. 637. Elektrodynameter (für Amp.).

3. Kalorische Strommefsinstrumente (Hitzdrahtinstrur Cardew, Hartmann & Braun). Bei diesen wird die Ausdehn

Drahtes zur Messung der Intensität des Stromes benutzt, der seine Wärmewirkung in diesem Drahte eine Verlängerung ɔringt. — Sie sind für Gleich- und Wechselstrom verwendbar.

r Eichung dieser Ampèremeter wird zumeist das Kupfervoltameter und ›ervoltameter (§ 154) benutzt, also die elektrochemische Wirkung des

le jene Instrumente, bei welchen permanente Magnete zur Anwendung ı, sind nur für Gleichstrom brauchbar, während die übrigen auch bei elstrom verwendet werden können, so z. B. die Elektrodynamometer, da n Spulen der Strom zugleich die Richtung wechselt, also immer dieselbe ng stattfindet.

Voltmeter dienen zur Messung von Spannungs-(Potential-) ızen; Einrichtung und Theorie sind in § 149 erklärt worden. — lie Elektrometer (§ 131, § 136) werden in der Elektrotechnik stimmung der Potentiale und Potentialdifferenzen verwendet.



Fig. 638. Wattmeter (Ganz & Co.).

III. **Wattmeter** dienen zur Messung des elektrischen Ef (Fig. 638 a. v. S.). Sie kommen ihrem Bau nach einem Elektrodynam gleich; die feststehende Spule aus dickem Draht wird von dem strome J durchflossen, die bewegliche Spule aus dünnem Draht d von einem Zweigstrome i, welcher de samen Spannungsdifferenz E proportio die gegenseitige Einwirkung hängt dal dem Produkte $(E.J)$ Watt ab.

Fig. 639.

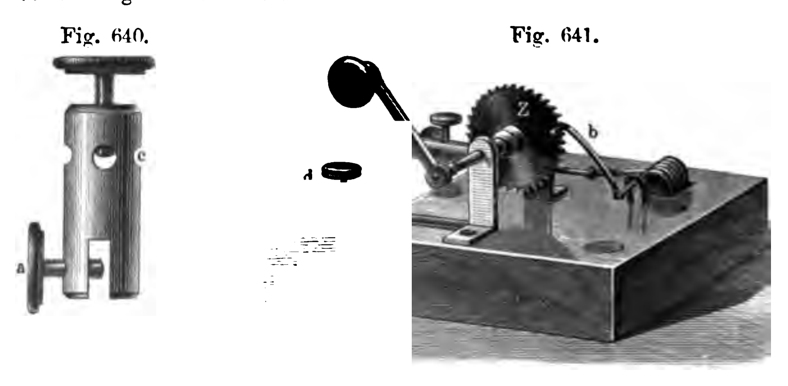


IV. Die Messung der elektrischen Ar folgt mit Hilfe der **Elektrizitätszähler** (el. Ve messer, Fig. 639), deren Angaben in Watts (§ 22, Ende; Hektowattstunden, Kilowattstun folgen. Diese Instrumente sind im Prinzip anderes als Wattmeter, welche aber den g Effekt (Watt) aufserdem noch mit der Zeit (multiplizieren, während welcher dieser Effekt wurde; mit Hilfe eines Zählwerkes werden messenen Wattstunden addiert und es kö Summen an den Zeigern des Zählwerkes s werden. Die Angaben dieser Elektrizitätszä Verbrauchsmesser) bilden die Grundlage für rechnung des Strompreises, den die Elektrizit von ihren Konsumenten einheben.

§ 173. Elektrische und elektrotechnische Nebenapp

Eine grofse Zahl mannigfacher Formen von Nebenvorrichtungen (z. B. schrauben", Fig. 640) pafst sich den besonderen Anforderungen vers physikalischer Experimente über Elektrizität und insbesondere den ele nischen Anwendungen an. Im folgenden werden nur einige wenige solch vorrichtungen beschrieben.

Fig. 640. Fig. 641.

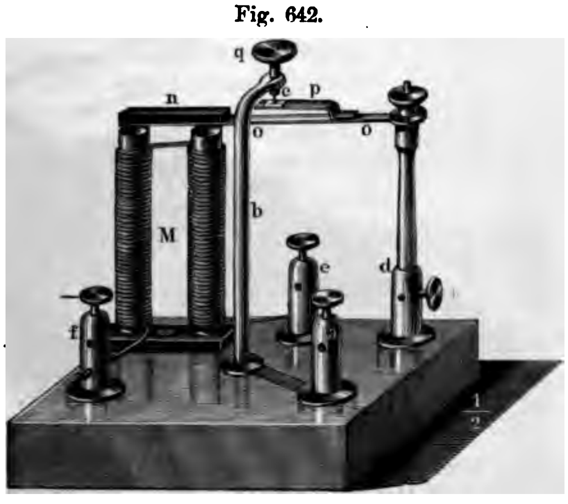


Unterbrecher, Selbstunterbrecher ändern nur die stärke (womöglich von Null bis zum Maximum in sehr kurz nicht die Stromrichtung.

Das **Unterbrechungsrad** (Fig. 641) wird durch die Kurbel gedreht; jedem ...ng eines Zahnes von Z an die Feder b entspricht ein Schliefsen des Stromes; ...rde namentlich zu physiologischen Zwecken verwendet.

... **Der Selbstunter...cher** (erfunden von ...ARIVE und unab...gig von ihm durch ...GNER 1836; daher ...gnerscher Ham...r, unpassend häufig ...fischer Hammer ge...nt) beruht auf dem...ben Prinzip, das wir ... der elektrischen ...gel (Fig. 588, S. 530) Anwendung fanden. ...r Batteriestrom tritt ... Klemme a (Fig. 642) ..., bei f aus (von ...mme d geht er z. B. in ein Induktorium und kommt von da nach e ...ück); der Strom geht von a über b durch die Kontaktschraube q ...n Kontaktplättchen c und von hier über p, o, o, d—e in die Win...gen des Elektromagneten M nach f. — Wird der Anker n (Hammer...f) durch M angezogen, so wird der Kontakt bei c gelöst, M wird ...agnetisch, durch die Elastizität der Feder oo (Hammerstiel) wird ... Kontakt bei c wiederhergestellt u. s. f.

Fig. 642.



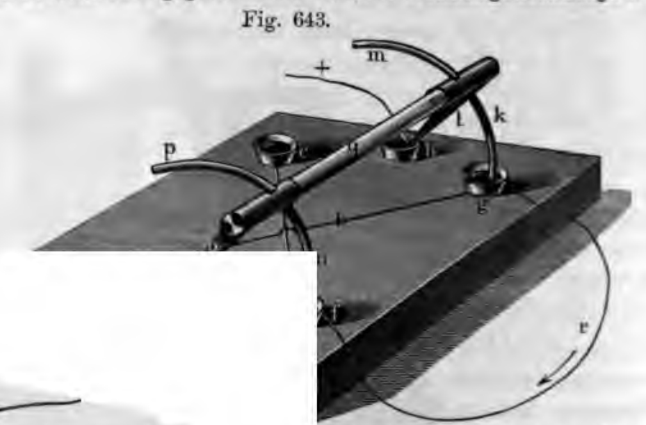
Meist sind solche Selbstunterbrecher mit Induktorien zu einem Ganzen ver...gt, wobei häufig der Elektromagnet M ersetzt ist durch das Bündel von Eisen...hten im Innern der Primärspule.

Theoretisch interessant ist die Frage, warum die Schwingungen dieses ...mmers sich erhalten, solange der Strom fliefst, und warum nicht der Hammer ... Gleichgewichtsstellung zwischen den ihm durch die Kontaktschraube q ... die elastische Kraft der Feder oo angewiesenen Grenzlagen nach einigen ...wingungen einnimmt (ähnlich wie ein Pendel trotz der immer wirkenden ...werkraft infolge der Bewegungshindernisse nach und nach zur Ruhe kommt — ...egen beim Uhrpendel das sinkende Gewicht dem Sperrrad immer Anstöfse im ...chen Sinne erteilt). — Die Antwort erfordert die Mitberücksichtigung der beim ...en und Schliefsen des Kontaktes c den Primärstrom begleitenden Extra...öme sowie der Hysteresis des Eisenkernes des Elektromagneten; beide ...rn nämlich die Symmetrie der Kräfte beim Auf- und Abgehen des Hammers ...er Weise ab, dafs vom Augenblicke der Unterbrechung an (der Trennung des ...merstieles von der Kontaktschraube) die Bewegung des Hammerkopfes zum ...nkern hin in einem etwas stärkeren Kraftfelde erfolgt als beim Rückgange.

Stromwender, Wippen, Kommutatoren ändern die Strom...tung (und nur vorübergehend die Stromstärke).

Die **Pohlsche Wippe** (Fig. 643) findet nicht nur in der Physik, sondern auch in der Elektrotechnik als Laboratoriumsapparat häufig Anwendung. An einer Platte aus Hartgummi (Holz) sind sechs mit Quecksilber gefüllte Vertiefungen angebracht, in welchen zwei gegeneinander isolierte dreiarmige Metallbügel so ein-

Fig. 643.



gesenkt werden können, daſs [illegible] Verbindungen bg und fe, das andere Mal die Verbindungen bc und [illegible] ellt werden können; die Quecksilbernäpfe c und f, bezw. d und g sind [illegible] zwei Drähte dauernd über Kreuz verbunden. — Ähnlich die Poggendorffs[illegible] ecksilberwippe.

Ausschalter dienen dem dauernden Offen-, bezw. Geschlossenhalten von Strömen; sie werden ein- und zweipolig (bei Drehstrom dreipolig) gebaut.

Fig. 644.



Da es sich dabei zumeist um hohe Stromstärken und auch oft um hohe Spannungen handelt, müssen die Kontaktflächen reichlich bemessen werden (für etwa 0,3 Amp. je 1 mm^2 Berührungsfläche); als Kontakte werden fast immer Schleiffedern aus Kupfer oder Messing verwendet, weil solche Kontakte sich durch den Gebrauch selbst rein halten. Da der beim Unterbrechen stets auftretende Lichtbogen die Kontakte verbrennt, werden die Ausschalter oft als „Momentausschalter“ (Fig. 644) ausgebildet, bei denen die Unterbrechungsgeschwindigkeit unabhängig ist von der Geschwindigkeit, mit welcher der Schalthebel bewegt wird. Bei hohen Spannungen wird oft eine „Funkenentzieh-Vorrichtung“ angebracht, bei welcher der Lichtbogen

einem leicht auswechselbaren Kontaktstück (gewöhnlich aus Kohle) n; ferner wird dabei oft der Lichtbogen durch einen Elektromagneten ", ähnlich wie bei den Blitzschutzvorrichtungen.

alter sind in derselben Weise für Starkstromanlagen eingerichtet; azu, um von einer Stromquelle (Dynamomaschine u. s. w.) den Strom in zwei oder mehrere verschiedene Stromkreise senden zu können.

schalter. Da die EMGK einer Akkumulatorenbatterie bei der Ladung ebenso die EMK bei der Entladung sinkt, hält man die Klemmen- r Akkumulatorenbatterie (innerhalb der Grenze von etwa 2 Volt) kon- man die Anzahl der Batteriezellen verringert oder vermehrt (Fig. 645).

Fig. 645.

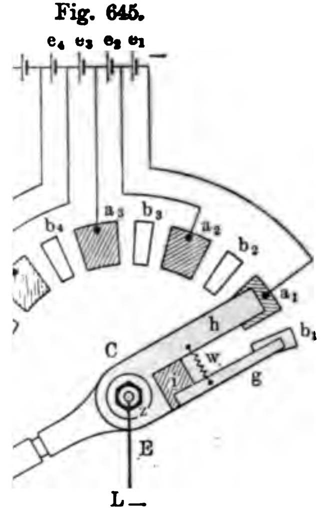
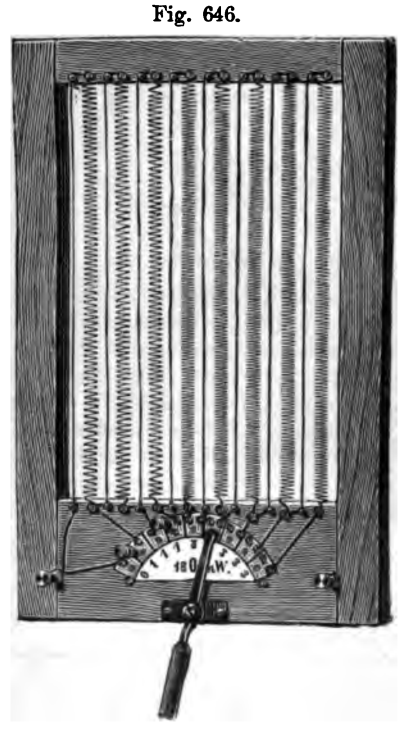


Fig. 646.



- und Regulierwider- . Dynamomaschinen wird die in den Erregerwindungen lierwiderstände (Rheostaten. gl. § 149) konstant gehalten, lieben geändert. Bei Elektro- en ähnliche Widerstände zum und zur Regulierung der

die Zellenschalter als auch die Regulier- und Anlafswiderstände werden natischen Antrieb eingerichtet.

al- und Minimalautomaten. Die Überschreitung, bezw. Unter- bestimmter Stromstärken läfst sich durch Ausschalter verhindern, zu grofser, bezw. zu geringer Stromstärke sich automatisch öffnen; sonders beim Betriebe der elektrischen Bahnen allgemeine Anwendung.

eine elektrische Licht- oder Kraftanlage erforderlichen Mefsinstru- apparate und Reguliervorrichtungen werden auf dem „Schaltbrette" Schaltwand, Schaltbühne bei grofsen Anlagen) übersichtlich zusammen- die Bedienung und Kontrolle der Anlage möglichst zu erleichtern; bretter" werden zumeist aus Marmor hergestellt (Fig. 647 a. f. S.).

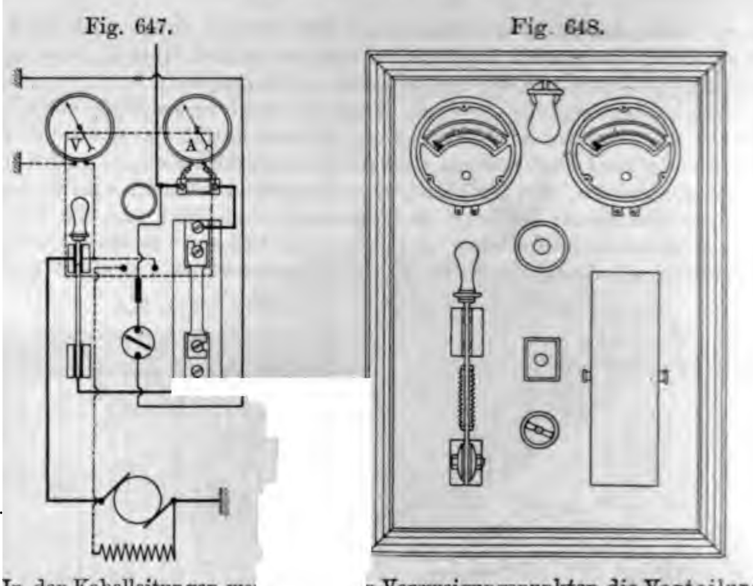


Fig. 647. Fig. 648.

In den Kabelleitungen we[illegible] n Verzweigungspunkten die **Verteilung** **kasten** eingebaut, welche zur [illegible] die Bleisicherungen für die abzweigend **Leitungen** enthalten; grofse [illegible] eser Art führen den Namen „**Kabe** **brunnen**“. Bei der Einführu [illegible] Lichtleitungen in die Häuser finden d sogenannten „Hausanschlüsse“ [illegible] ung; sie enthalten stets auch die Haup bleisicherungen für die betreffende „Hausinstallation“.

Aufserdem finden in der Elektrotechnik für besondere Fälle noch verschieden Spezialkonstruktionen Anwendung, die jedoch nicht von allgemeinem Interesse sind und daher hier übergangen werden können.



Vierter Teil:

ische, meteorologische, ische Erscheinungen.

us der Astronomie.

tlicher Überblick (Rück- und Vorblick).

reicht die „alte Zeit" bis **Kopernikus (1473 bis 1543),**
System (meist das „ptolemäische" **genannt) durch das**
und dadurch eine „neue Zeit" **aller astronomischen** Vor-
der wir noch jetzt leben. —. **Innerhalb des vorkoperni-**
·s ist — unbeschadet grofser **Verdienste der Chinesen,**
älterer Griechen, namentlich der pythagoreischen Schule
5 v. Chr.) der Vater der **wissenschaftlichen Astronomie**
nerhalb der nachkopernikanischen Zeit **ist Newton** (1643
physischen Astronomie, welche die Erscheinungen
ls ein besonderes Anwendungsgebiet der für das Welt-
setze verstehen lehrte.
geschichtlichen Zeiten reichen im Denken der Menschen,
ng, Archäologie ... bezeugt wird, die Vorstellungen von
lern, vom **Tierkreis,** von den **Planeten** im Unterschiede
ι **Tag, Woche, Jahr** ... zurück. Noch vor Hipparch
itz namentlich der babylonischen und der griechischen
ıantitativ schon recht genaue Kenntnis folgender astrono-
ıveränderliche Lage der „Fixsterne" in Bezug aufeinander;
es **Fixsternhimmels in Bezug auf die Erde um die**
Ost-(Süd-) West binnen 24 Sonnenstunden *minus*
›rauseilen des Fixsternhimmels in Bezug auf die Sonne
:h fast 4 Minuten; die hierin gegebene Bewegung der
Fixsternhimmel im Sinne West-(Süd-)Ost um täglich fast
ährlich 360°, d. h. die **Bewegung der Sonne im Laufe**
Sonnentagen, in einer auf den Fixsternhimmel sich pro-
kliptik", welche als ein durch bestimmte Sternbilder, den

„Tierkreis“, gehender gröfster Kreis erkannt war, gegen den die Weltachse um 66½° geneigt ist. — Das Zurückbleiben des Mondes hinter den Fixsternen um täglich 50 Zeitminuten oder 13° und die binnen je einem „siderischen Monat“ von 27⅓ Tagen im Sinne WSO in einer Bahn nahe der Ekliptik sich vollziehende Wiederkehr des Mondes zu denselben Fixsternen, sowie des binnen einem „synodischen Monat“ von 29½ Tagen sich abspielenden Wechsel der „Phasen“ (Neumond 🌑, erstes Viertel 🌓, Vollmond 🌕, letztes Viertel 🌗). — Die überwiegend ebenfalls west-(süd-)östliche, zum Teil aber auch im entgegengesetzten („rückläufigen“, d. i. ost-süd-westlichen) Sinne erfolgende Bewegung von Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn, ebenfalls in der Nähe der Ekliptik, und die Perioden ihrer annähernden Wiederkehr zu denselben Fixsternen und der Sonne. — Alle diese Erkenntnisse sind mehr oder minder genaue Beschreibungen der der Beobachtung sich darbietenden Tatsachen; es sind dies die Konstatierungen, die auch heute die allerersten und unentbehrlichsten Grundzüge der deskriptiven und also auch jeder erklärenden Astronomie bilden. Aufser diesen Beschreibungen waren aber auch erklärende Sätze bereits um jene Zeit richtig aufgestellt und von den Denkern angenommen: so der Satz von der Kugelgestalt der Erde, für den schon Aristoteles dieselben „Beweise“ vorträgt, welche sich noch heute in den Elementarbüchern finden (natürlich ausgenommen den aus den Weltumseglungen), und auch das Prinzip, die Gröfse der Erde aus der Verbindung von Winkelmessungen am Himmel und Längenmessungen auf der Erde zu bestimmen, wurde erkannt und (u. a. von Eratosthenes) praktisch durchgeführt. — Desgleichen war die Kugelgestalt des Mondes und die Ursache seiner Lichtphasen scharfsinnig aus der richtigen Beobachtung erschlossen worden, dafs die Grenze zwischen dem hellen und dunklen Teil immer die Gestalt von Halbellipsen (inkl. Kreis und Gerade) zeigt.

Dafs unbeschadet dieses Reichtums astronomischer Einzelerkenntnisse erst Hipparch das Verdienst einer wissenschaftlichen Behandlung im gegenwärtigen Sinne zuerkannt wird, ist darin begründet, wie er die Aufgabe einer exakt mathematischen Beschreibung der himmlischen Bewegungen erfafste (wie viel später Galilei die für die Bewegung fallender und geworfener Körper auf der Erde). Hipparch löste diese Aufgabe für Sonne und Mond, und Ptolemäus (bis 150 n. Chr.) nach der nämlichen Methode auch für die Planeten.

Speziell für die Sonne lautet die Aufgabe (in der Sprache der gegenwärtigen Phoronomie, vergl. § 3): Das Weg-Zeit-Gesetz für die Bewegung der Sonne längs der Ekliptik anzugeben. Hipparch hatte erkannt, dafs die Winkelgeschwindigkeit der Sonne innerhalb der Zeit eines Jahres veränderlich ist (als Scheitel des Sehwinkels das Auge des Beobachters an irgend einem Punkte auf oder in der Erde angenommen); nämlich bezogen auf die heutige Zeitrechnung legt die Sonne am 1. Januar den gröfsten, am 2. Juli den kleinsten Bogen in der Ekliptik zurück; diese Bogen und daher auch die Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich wie 61 : 57. Da nun Hipparch, wie alle Alten und wie selbst noch Kopernikus, an der vorgefafsten Meinung festhielt, dafs die Bahn jedes Gestirnes ein reiner Kreis und die Bahngeschwindigkeit eine konstante sei (da andere minder einfache Bewegungen der himmlischen Körper „nicht würdig“ wären), so gestaltete sich seine Aufgabe dahin: Aus einer endlichen Zahl wirklich beobachteter Örter der Sonne diejenige exzentrische Stelle für die Erde innerhalb der als Kreis angenommenen Sonnenbahn zu ermitteln, für welche auch alle übrigen, früher beobachteten und künftig zu beobachtenden Örter der Sonne mit den aus diesem „exzentrischen Kreis“

in Form von „Sonnentafeln“ berechneten übereinstimmen. Trotz der Irrigkeit der (erst durch KEPLERS Ellipsen berichtigten) Grundannahme entsprachen HIPPARCHS numerische Angaben mit übrigens bestmöglicher Annäherung den Beobachtungen für mehr als ein Jahrtausend. (LA 220.) LA 220.

Auch für den Mond löste HIPPARCH die analoge Aufgabe, wiewohl diese noch bei weitem schwieriger war, indem der Mond zahlreiche **„Ungleichheiten“** aufweist (für welche erst die aus NEWTONS Gravitationsgesetz folgende Theorie der Störungen, § 21 II, die einheitliche Beschreibung zusammen mit ihrer Erklärung erlaubte). — Auch für die **Präzession der Nachtgleichen** fand schon HIPPARCH das richtige deskriptive Gesetz (Bewegung der Himmelspole in Kreisen, die der Ekliptik in $66^1/_2{}^\circ$ Abstand parallel sind).

Während für Sonne und Mond die mathematische Darstellung der Bahnform und des Weg-Zeit-Gesetzes möglich gewesen war, indem nur der Erde eine exzentrische Stellung in der Ebene der angenommenen Kreisbahnen angewiesen wurde, war eine solche verhältnismäfsig einfache Annahme nicht mehr ausreichend, um die Veränderlichkeit der Geschwindigkeiten und die zeitweiligen Rückläufigkeiten (Zacken- und Schlingenbildung) in den Bahnen der **Planeten** Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn mathematisch zu beschreiben. Dies leistete des PTOLEMÄUS' vielgenannte „epizyklische Theorie der Planetenbewegungen“, und zwar mit wesentlich demselben mathematischen Mittel „exzentrischer Kreise“, welches Hipparch anzuwenden gelehrt hatte: nur mufste Ptolemäus annehmen, dafs auf der Peripherie des zu jedem Planeten konstruierten „exzentrischen Kreises“ (Deferent) nicht der Planet selbst sich bewege, sondern der Mittelpunkt eines kleinen Kreises, des „Epizykels“, auf dessen Peripherie erst der Planet gleichförmig fortschreitet. Ganz wie dem Hipparch durch glückliche Spezialisierung der verfügbaren Gröfsen die Bestimmung der exzentrischen Lage der Erde, gelang auch dem Ptolemäus durch eine den Beobachtungen möglichst sich anpassende Wahl der relativen Gröfse und gegenseitigen Lage von Deferenten und Epizykel, sowie der verhältnismäfsigen Geschwindigkeiten der beiden letzteren Bewegungen, eine so gute „Theorie der Planetenbewegung“ in Form von Tafeln herzustellen, dafs die Angabe dieser seiner μεγάλη σύνταξις, von den Arabern Almagest genannt, noch ein Jahrtausend später in leidlicher Übereinstimmung mit den immer erneuerten Beobachtungen standen. — Freilich mufste aber jene Theorie, um sie den feineren Einzelheiten der Bewegungen anzupassen, immer mehr mit Hülfshypothesen belastet werden, indem zu jenen Epizyklen noch weitere Epizyklen zweiter Ordnung angenommen wurden. (Indem am Himmel nur die Projektion aller dieser fingierten gleichförmigen Kreisungen beobachtet werden, kommt diese Hipparch-Ptolemäische Methode der mathematischen Beschreibung durch Kreisbewegungen auf die Ersetzung einer gegebenen Funktion durch eine Reihe von Sinus, also auf die durch Fourier begründete, und in der modernen Physik für die verschiedensten Kapitel der Physik überaus fruchtbare, ja unentbehrlich gewordene mathematische Methode hinaus; vergl. mathem. Anhang, Nr. 20. Anh. 20.

Die zunehmende Verwickelung der Planetentheorie gab den letzten Anstofs zur Umgestaltung unseres gesamten Weltbildes durch KOPERNIKUS (1543), dessen System die zwei Hauptsätze enthält:

I. Hauptsatz: **Die Erde dreht sich binnen einem Sterntag um ihre Achse** (tägliche Rotation der Erde).

II. Hauptsatz: **Die Erde läuft binnen einem Jahre um die Sonne** (jährliche Revolution der Erde).

Durch den I. Satz wird die tägliche Bewegung des **Fixsternhimmels** in Bezug auf die Erde, durch den II. Satz die jährliche Bewegung der **Sonne** in Bezug auf den Fixsternhimmel und die Erde erklärt. Aus dem II. Satz erklären sich dann auch speziell die Bewegungen der **Planeten** als unmittelbare Folge, ohne eine besondere Hypothese oder Hülfshypothese zu erfordern, indem jene Zacken und Schlingen sich als die parallaktischen (§ 183) Abbilder der Erdbahn ergaben. Wieder blieb nach diesen Grundgedanken als weitere Aufgabe nur die rein mathematische Ausgestaltung der Theorie. Um z. B. zu erklären, warum die Epizykel für Jupiter kleiner sind als die für Mars, genügt es anzunehmen, dafs Jupiter von der Erde entfernter ist als Mars; und umgekehrt läfst sich aus dem Verhältnisse jener Gröfsen und der Häufigkeit des Auftretens von Schleifen bei je einem Umlaufe der genannten Planeten um den ganzen Fixsternhimmel nächst der Ekliptik das Verhältnis der Abstände zwischen Sonne und Erde, bezw. Mars und Jupiter ermitteln; ähnlich aus der Weite der Schlingen in der Richtung normal zur Ekliptik auch die Lage der Bahnebene [illegible] [E]rde, Mars und Jupiter. — Für die richtige Würdigung von Kopernikus' [illegible]werk (er hatte jener rechnerischen Ausgestaltung seiner beiden Hauptsätze [illegible] als 30 Jahre seines Lebens gewidmet und empfing die Druckbogen seines Ha[illegible]kes *„De revolutionibus orbium coelestium“* auf seinem Sterbebette 15[illegible] denkwürdig, dafs Kopernikus jene beiden Grundgedanken nicht selbst [illegible] sondern, wie er selbst berichtet, von den Pythagoreern Philolaus, Arist[illegible] Samos ... überkommen hat. Aber was bei diesen nur genialer Einf[illegible][wu]rde eben erst in der quantitativen Ausgestaltung durch Kopernikus z[illegible][wis]senschaftlichen Theorie. — Wiewohl aber auch diese Theorie wieder mit [illegible] [zu]m Grunde gelegten und den aus ihr weiterhin vorausberechneten Beoba[illegible] so guter Übereinstimmung war, als es bei Festhaltung der Hipparchsc[illegible] [A]nnahme rein **kreisförmiger** Bahnen und rein **gleichförmiger** Bewegungen möglich war, so erwies sich wieder durch feinere Abweichungen zwischen der hierauf gegründeten Rechnung und der wirklichen Beobachtung jene Annahme als Vorurteil, und zwar als ein mit den Tatsachen unverträgliches.

Erst Kepler (1571 bis 1631), welcher vom Beginne seiner astronomischen Studien an sich zur kopernikanischen Theorie bekannt hatte, verbesserte durch die beiden ersten der nach ihm benannten „Gesetze“ jenen Mangel, indem er als Form der Bahn der Planeten die **Ellipse** und als Gesetz der Geschwindigkeit das der **konstanten Flächenräume** erwies. Diese beiden Gesetze hat Kepler induziert aus vieljährigen Beobachtungen, welche Tycho Brahe (ein älterer Zeitgenosse Keplers, Gegner der kopernikanischen Lehre) über die Örter des Mars angestellt und welche Kepler fortgesetzt hatte, und erst nach dem mühevollsten Durchprobieren einer langen Reihe hypothetischer Gesetze (deren einzelne bis auf Differenzen von 8′ mit den Beobachtungen stimmten, ohne dafs sich Kepler hiermit zufrieden gegeben hätte) konnte er jene beiden Gesetze als durch die besten Ergebnisse der damaligen Beobachtungskunst verifiziert verkünden (1609, *„De motibus stellae Martis“*); worauf durch ihn bald ihre Bestätigung auch für die übrigen Planeten und den Mond erfolgte. — Während jene beiden ersten Gesetze die Bewegungen jedes **einzelnen** Planeten beschreiben, gibt das „dritte Keplersche Gesetz“ eine Beziehung zwischen den Entfernungen der verschiedenen Planeten von der Sonne. Eine solche Beziehung hatte Kepler bereits in seiner Erstlingsschrift (*Mysterium kosmographicum*, 1596) gefunden zu haben vermeint (in einer uns heute höchst abenteuerlich dünkenden Beziehung der Gröfsen der Bahnen zu den Gröfsen der fünf regulären Polyeder). Aber erst 23 Jahre später (1619, *Har-*

monice mundi) fand Kepler das wahre Gesetz: es war nicht ein solches zwischen den Entfernungen allein (eine annähernde Gesetzmäſsigkeit dieses Inhalts bildet die „Titius-Bodesche Regel", welche aber nicht in demselben Range mit Keplers Gesetzen steht), sondern zwischen den mittleren Entfernungen und den Umlaufszeiten ($a_1^3 : a_2^3 = T_1^2 : T_2^2$). Auch dieses Gesetz war durch direkte Induktion gefunden worden. — Durch die drei Gesetze Keplers war das uralte Problem einer exakten Beschreibung der Planetenbewegungen mit einer bis dahin nie erreichten Annäherung (auch jene drei Gesetze sind eben nur Annäherungen an die Wirklichkeit) gelöst. Die volle historische und logische Bedeutung jener Induktionen Keplers konnte aber erst ermessen werden, nachdem sie sich als die gerade notwendige und ausreichende Bedingung für die Erklärung jener Erscheinungen aus den Prinzipien der Galilei-Newtonschen Mechanik erwiesen hatten: die Grundlinien von Newtons Gedankengang werden in § 21 („Allgemeine Gravitation") entwickelt.

Vorstehender Überblick über die Entwickelung astronomischer Beobachtungen und Theorieen gibt ein Beispiel im groſsen aus der Geschichte der Wissenschaft, wie die möglichst genaue Beschreibung der Einzelerscheinungen allen zusammenfassenden Erklärungen notwendig vorausgehen muſs — wie aber durch solche Zusammenfassungen auch die feinere Ausgestaltung der Beschreibungen immer wieder neue Anregung bekommt. — Im folgenden werden einige dieser Beschreibungen und Erklärungen noch näher ausgeführt, wobei die bloſsen Beschreibungen der relativen Bewegungen sowohl nach dem alten geozentrischen wie nach dem heliozentrischen System dargestellt werden können. Denn es bleibt immer zu bedenken, daſs unbeschadet der gegenwärtig unverbrüchlichen Überzeugung aller Gebildeten von der Richtigkeit des kopernikanischen Systems die genaue Auffassung der täglichen, vor unsern Augen sich abspielenden Vorgänge am Himmel nach dem geozentrischen System (leicht irreführend häufig als „scheinbare Bewegungen" bezeichnet) jetzt nicht minder als in den ältesten Zeiten die erste Voraussetzung für alle theoretische Um- und Ausdeutung der astronomischen Tatsachen bildet.

A. Beschreibung der Bewegungen von Fixsternen, Sonne und Erde in Bezug aufeinander.

§ 175. Die drei Himmels-Koordinatensysteme. — System des Horizontes.

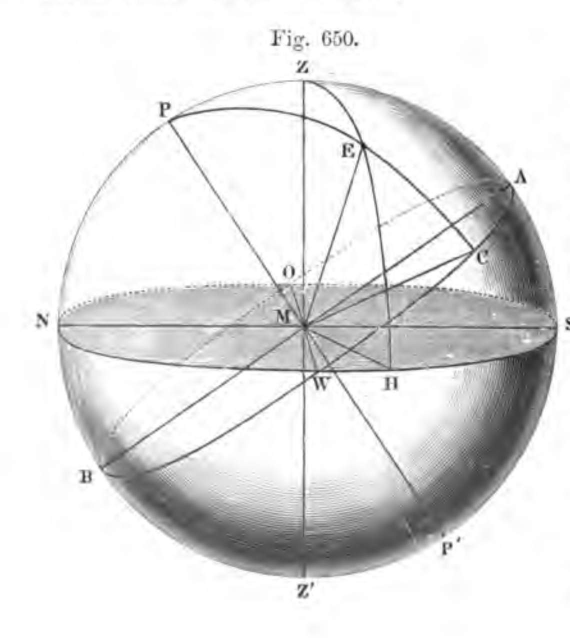
Vorbemerkung. Da wir durch alsbald sich aufdrängende Schlüsse (Genaueres in § 182) erkennen, daſs die scheinbare Entfernung von Sternen, Sonne und Mond, wie sie sich beim naiven Anblick des „Himmelsgewölbes" uns darstellen, den wirklichen Gröſsenverhältnissen und absoluten Gröſsen bei weitem nicht entsprechen können (z. B. scheint dem Kinde, wenn es durch eine lange Gasse geht, der Mond nachzulaufen), so werden alle Lagebestimmungen der am Himmel sichtbaren Gebilde zunächst nicht in Längen-, sondern nur in Winkelmaſs gegeben (entsprechend den Kreisbögen der Teilkreise an allen astronomischen Meſsinstrumenten). Um das Auge des Beobachters (bezw. bei Beobachtungen durch das Fernrohr um den optischen Mittelpunkt des Okulars, manchmal auch des Objektivs, § 112) ist mit beliebigem Halbmesser eine Kugel gelegt gedacht und

die Lage je dreier Punkte am Himmel durch ein **sphärisches Dreieck** (Anhang Nr. 18) auf dieser Kugel dargestellt; wobei wie bei jedem sphärischen Dreieck nur die Kantenwinkel („Seiten“) und Flächenwinkel („Winkel“) derjenigen **körperlichen Ecke**, deren Scheitel den Beobachtungsort darstellt, nicht aber der Kugelhalbmesser, bezw. die Kantenlänge wesentlich sind. In diesem Sinne sind auch alle folgenden Angaben über die „Abstände“ je zweier Gestirne am „Himmelsgewölbe“, über die „Bahnen“, welche Himmelskörper dort beschreiben, ferner über **Hauptkreise** (gröſste Kreise) und **Nebenkreise** an der **„Himmelskugel“** zu verstehen; desgleichen, wenn diese abgebildet wird auf „**Himmelsgloben**“ von beliebigem Halbmesser, und wenn die ganze Himmelskugel oder Teile von ihr nachgebildet werden durch **Sternkarten** (nach denselben Projektionsmethoden wie der Erdglobus auf Landkarten).

Wie auf den Erdkugeln, bezw. den Erdgloben jeder Punkt der Erdoberfläche durch die Koordinaten der [illegible]phischen Länge (als Abszisse) und **geographischen Breite** (als O[illegible] angegeben wird, so wird auch jeder Punkt am Himmel bezogen auf ein[illegible] rei **Himmelskoordinatensysteme**.

Jedes derselben ist char[illegible] je einen **Grundkreis**, nach welchem sie unterschieden werden als [illegible] des **Horizontes**, **des Äquators** und der **Ekliptik**; ferner durch [illegible] Grundkreise festgesetzten **Anfangspunkt** und den Sinn der [illegible]neten **Abszissen**; normal zu diesen werden die **Ordinaten** ge[illegible]ellung dieser Systeme erfolgt im Hinblick auf ganz bestimmte [illegible] astronomische Erscheinungen, nämlich das des Horizontes im H[illegible]ilot und **Libelle** (§ 20), das des Äquators im Hinblick auf [illegible] **Umdrehung des Fixsternhimmels** (§ 176), das der Ekliptik i[illegible] den **jährlichen Umlauf der Sonne** am Fixsternhimmel (§ 177). — Im fo[illegible] werden jene Systeme im Zusammenhange mit diesen Erscheinungen selbst und den zu ihrer exakten Messung dienenden Instrumenten kurz beschrieben.

Fig. 650.



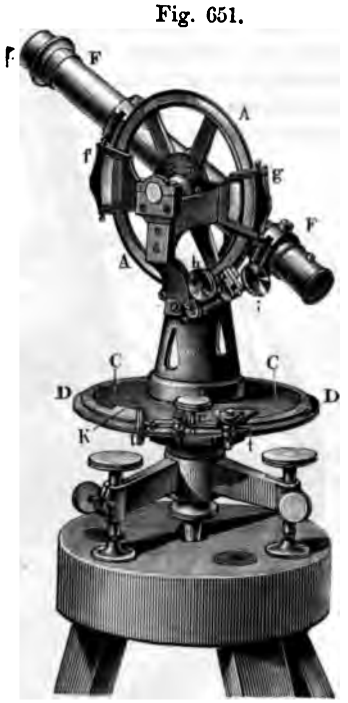
I. **System des Horizontes.** Sein Grundkreis ist der **Horizont** (und zwar zunächst der sogenannte „**scheinbare**“, d. i. die durch das Auge des Beobachters gehende horizontale Ebene, wie sie durch die **Libelle** angegeben wird; wogegen als der zu jenem Beobachtungsort gehörige „**wahre**“ **Horizont** die zum scheinbaren parallel durch den Erdmittelpunkt, § 178, gelegte Ebene bezeichnet wird). Der von allen Punkten des Hori-

zontes um 90° gegen oben abstehende Punkt heifst **Scheitelpunkt** oder **Zenit**, *Z*, Fig. 650 (sein „Gegenpunkt" Nadir, *Z'*); auf diesen weist das Bleilot.

Der Nullpunkt im Horizontkreis ist der **Südpunkt** *S*, d. i. derjenige Punkt des Horizontes, über welchem die Fixsterne (und annähernd auch die Sonne) bei ihrem täglichen Umlaufe „kulminieren" (vergl. den folg. §).

Die Lage eines Punktes *E* wird im System des Horizontes bestimmt durch das **Azimut** *SH* (vom Südpunkt im Sinne SWNOS gezählt von 0° bis 360°) und durch die **Höhe** *HE* (vom Horizont gezählt bis zum Zenit als positiv, bis zum Nadir als negativ).

Fig. 651.



Zur Beobachtung dieser Gröfsen dient das Altazimut (Theodolit, Universalinstrument, Fig. 651), im wesentlichen bestehend in einem Fernrohr (oder auch blofs einem Diopter) mit zwei Teilkreisen, einem horizontalen (Azimutalkreis) und einem vertikalen (Höhenkreis). — Da es meistens nicht beabsichtigt ist, den Theodoliten ein für allemal so aufzustellen, dafs der Nullpunkt des Horizontalkreises selbst nach dem Südpunkt orientiert ist, so pflegt von einem als „Mire" dienenden festen Punkt in der Nähe des Horizontes (einer Kirchturmspitze, einem Triangulierungszeichen) ein für allemal das Azimut bestimmt zu werden, von dem aus dann bei beliebiger Stellung des Theodoliten leicht die Azimute aller übrigen Punkte bestimmt werden.

Aus den Verschiedenheiten der Horizonte, bezw. Zenite verschiedener Beobachtungsorte und ihrer verschiedenen Lage in bezug auf den Fixsternhimmel ergibt sich die nichtebene Gestalt der Erdoberfläche, § 178.

§ 176. System des Äquators. — Die tägliche Drehung des Fixsternhimmels, bezw. der Erde.

Hat man sich durch die Beobachtung des Sternhimmels zu verschiedenen Zeiten des Jahres und verschiedenen Stunden je einer Nacht eine vorläufige Kenntnis davon erworben, wo je ein bestimmtes Sternbild oder ein einzelner Stern zu finden ist, so lassen sich diese Lagenänderungen dieser „Fixsterne" in bezug auf die Erde zusammenfassend so beschreiben:

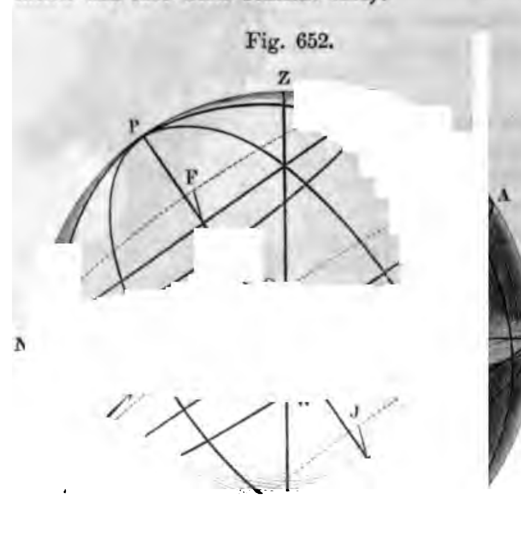
Vorkopernikanisch: Der Fixsternhimmel als Ganzes dreht sich um die **Weltachse** im Drehungssinne **OSW**; oder

kopernikanisch: Die Erde dreht sich um die **Erdachse** im Sinne **WSO.**

Diese Beschreibung der relativen Bewegung von Fixsternen und Erde ergibt sich aber nicht schon hinreichend genau aus jenem allgemeinen Anblick, sondern

erst aus bestimmten Messungen der Bewegung einzelner „Fundamentalsterne“, sowie der in erster Annäherung (vergl. § 188) unveränderlich bleibenden Winkelabstände der übrigen von jenen Sternen, in welcher Unveränderlichkeit der **gegenseitigen** Lage weitaus der meisten Sterne, unbeschadet ihrer täglichen und jährlichen Bewegung in Bezug auf die Erde und Sonne, erst der Begriff der **„Fixsterne“** liegt. Für freies Auge mittlerer Schärfe sind deren in Mitteleuropa 3000 bis 4000 sichtbar, davon 14 erster, 54 zweiter „Gröſse“ bis zur sechsten; für das Fernrohr noch solche der sechzehnten Gröſse. — Jenen Winkelmessungen und in unmittelbarem Zusammenhang mit ihnen auch den exaktesten Zeitmessungen, welche wir auf eben jene Drehung des Sternhimmels gründen, dienen die unten zu beschreibenden Instrumente; und auf diese Messungen gründen sich dann folgende Begriffe (nach denen auch die Instrumente und ihre Teile benannt sind):

Fig. 652.



Himmelspole (Nordpol, Südpol, P, P', Fig. 652) heiſsen diejenigen beiden Punkte des Fixsternhimmels, welche bei dessen täglicher Drehung keine Lagenänderung in bezug auf den Horizont (also weder in Azimut noch Höhe) aufweisen. Die die beiden Himmelspole verbindende Gerade heiſst die **Weltachse**, der durch den Erdmittelpunkt gehende Teil der Weltachse **Erdachse**, ihre Endpunkte an der Erdoberfläche die **Erdpole** (Nordpol, Südpol).

Derjenige gröſste Kreis der Himmelskugel, dessen Punkte von den Himmelspolen 90° Abstand haben, heiſst der **Himmelsäquator**, $AWBOA$; alle diesem Hauptkreis entsprechenden Nebenkreise heiſsen Himmelsparallelkreise (z. B. ND, SH).

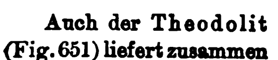
Denken wir uns nun dieses System von Äquator, Nebenkreisen und Polen mit dem System des Horizontes starr verbunden (Figg. 650 und 652), so bewegt sich je ein Fixstern, der in einem bestimmten Nebenkreise (inkl. der Grenzfälle Äquator und Pol) gestanden war, zu allen Zeiten eines Tages oder Jahres in dem nämlichen Nebenkreise. — Dieser Tatsache gemäſs eingerichtet (und daher auch zu ihrer Veranschaulichung am besten geeignet) ist das

Äquatoreal („parallaktisch montiertes“ Fernrohr, Fig. 653): Mit den Fundamenten des Gebäudes sind möglichst starr verbunden die Lager einer zylindrischen Achse A, die um eine geometrische Achse von der unveränderlichen Rich-

ung der Weltachse mittels eines Uhrwerkes während der Sternbeobachtungen m Sinne OSW gleichförmig gedreht wird, mit solcher Geschwindigkeit, daſs sie innen einem Sterntag (annähernd gleich einem Sonnentag *minus* 4 Minuten) ine volle Umdrehung gemacht hätte. An diese sich drehende Achse kann das Fernrohr unter verschiedenen Winkeln von 0° bis 90° mit der Ebene des Äquators geklemmt werden. Ist es dann auf einen bestimmten Stern eingestellt gewesen, so **bleibt** dieser trotz der **Drehung** des Fernrohres **ruhig** im Gesichtsfelde des Fernrohres. — Solche Fernrohre sind es denn auch, welche der während der letzten zwei Jahrzehnte zu umfassendster Wichtigkeit entwickelten **Himmelsphotographie** dienen. Es wird dabei an Stelle des Okulars die lichtempfindliche Platte und zwar in die Brennebene des Fernrohrobjektivs gebracht (§ 112). Nur wenn das Fernrohr genau den Gang des Fixsternes mitmacht, sind die Bilder der Fixsterne **Punkte** (die der Planeten Strichlein). Da selten ein Uhrwerk so genau gleichförmig geht, muſs für längere Expositionen die Stellung des Fernrohres durch einen Beobachter von Zeit zu Zeit nachkorrigiert werden. (Bei weitem kompliziertere Vorrichtungen für Expositionen auf Planeten und den Mond; z. B. wurden für Mondphotographieen Uhrwerke mit 112 Rädern angewendet.)

Fig. 653.





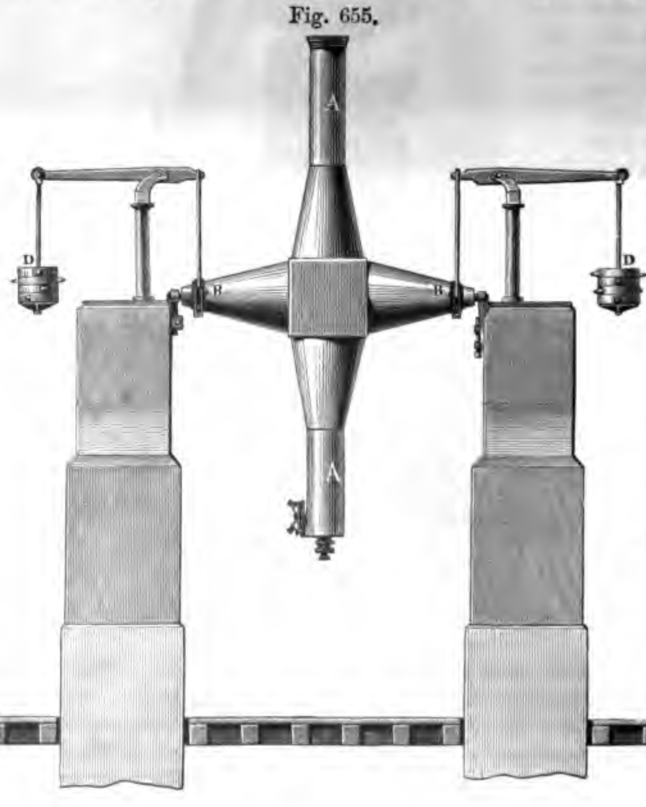
Auch der **Theodolit** (Fig. 651) liefert zusammen mit einer genauen Pendeluhr oder einem Chronometer die Beobachtungsdaten, aus welchen sich durch Rechnung (der sphärischen Trigonometrie) alle Stellungen der Fixsterne in Bezug aufeinander und auf das System des Horizontes ergeben. — Speziell die Lage der **Himmelspole** ergibt sich mittels Theodolit, indem dessen Fernrohr auf einen Stern (für den Himmelsnordpol am besten auf den Polarstern)

eingestellt und nun die gröfste und (12 Stunden später) die kleinste Höhe dieses Sternes, ebenso auch (6, bezw. 18 Stunden später) seine östlichste und westlichste Stellung beobachtet werden.

Fig. 654.

Die durch den Pol und den Beobachtungsort gehende Vertikalebene (auch ihre Schnittlinie mit dem „Himmelsgewölbe" und mit der Horizontebene) heifst der **astronomische Meridian** dieses Ortes ($SADZPNBHZ'P'S$), seine Schnittpunkte mit dem Horizont heifsen der **Nord-** und der **Südpunkt** (N, S). In dieser Meridianebene haben alle Fixsterne ihre obere Kulmination (in dem Kreisbogen vom Südpunkt bis zum Pol, z. B. A, D, Z) und ihre untere Kulmination. Sterne (vom Pol bis zum Nordpunkt), welche beide Kulminationen über dem Horizont haben (nicht in ihm „auf- und untergehen"), heifsen **Zirkumpolarsterne** (in der Kugelkappe $NEDFN$). Solche sind für unsere Breiten die Sterne des Grofsen Bären, der Cassiopeia u. s. f. — Lage des Himmelsnordpoles $1^1/_2{}^0$ (d. i. drei Vollmondbreiten) vom „Polarstern" (in der Richtung gegen ε des Grofsen Bären Fig. 654; der Polarstern P ist der letzte Schweifstern des Kleinen Bären).

Fig. 655.



Speziell für die Beobachtungen dieser oberen und

unteren Kulminationen (und im Zusammenhang damit ihrer Rektaszensionen und Deklinationen siehe unten) ist eingerichtet das Meridianinstrument (Fig. 655): ein Fernrohr, das mit einer genau wagrechten, in der Richtung OW auf festen Lagern drehbaren Achse unter einem rechten Winkel fest verbunden ist und sich also nur in der Meridianebene drehen kann. Dieses Instrument gibt 1. die Pole des Beobachtungsortes: es wird wieder ein dem Pole naher Stern in der oberen und unteren Kulmination beobachtet und das arithmetische Mittel beider Höhen gezogen. 2. Die Lage des Himmelsäquators, indem dessen höchster Punkt 90° vom Pol absteht. Durch diesen Punkt und die Punkte O und W des Horizontes ist dann die Ebene des Äquators bestimmt. 3. Die **„Deklination“** irgend eines Punktes (z. B. eines Sternes), d. i. seinen Winkelabstand vom Äquator: es wird nämlich die Kulmination des Sternes im Fernrohr beobachtet und dann der Winkelabstand dieser Stellung des Fernrohres von der Äquatorstellung abgelesen. 4. Zeitbestimmungen: Es sei das Rohr auf einen Stern S_1 zunächst des Äquators gerichtet und nach einer genauen Pendeluhr werden die Zeiten je zweier aufeinander folgender Durchgänge dieses Sternes durch den Mittelfaden im Gesichtsfelde des Fernrohres beobachtet. Es stellen sich dann nicht nur diese Zeiten als untereinander genau gleich (psychol. Anh., Nr. 41) Anh. 41. heraus, sondern auch, wenn das Rohr auf was immer für Sterne $S S' S''$ nördlich oder südlich vom Äquator eingestellt worden war und nun die Zeiten dieser Durchgänge beobachtet werden. Diese Zeit je zweier aufeinander folgender Kulminationen was immer für eines Sternes heifst **Sterntag.** Auf sie erst bezieht dann der Astronom die als „bürgerliche Zeit“ dienende „mittlere Sonnenzeit“ (vergl. § 181) und richtet daher auch seine Pendeluhren nicht nach bürgerlicher Zeit, sondern nach Sternzeit. Es sind auch in vorliegendem § unter Stunden, Minuten, Sekunden immer solche der Sternzeit gemeint. — 5. Steht von zwei Sternen S_1 und S_2 letzterer östlich von S_1, so erfolgt die Kulmination von S_2 um eine bestimmte Zahl t von Sekunden später als die von S_1. Da nun einer Umdrehung des Himmels um 360° eine Zeit $T = 24^h$ entspricht, so entsprechen umgekehrt $1^h = 360^\circ : 24 = 15^\circ$, ebenso $1^{min} = 15^\circ : 60 = 15'$ und $1^{sec} = 15' : 60 = 15''$. Diese Angaben in „Stunden, Minuten und Sekunden“ sind in der Astronomie nicht nur als Zeit-, sondern geradezu als Winkelmafs gebräuchlich. — 6. Als Nullpunkt der astronomischen Zeit (Sternzeit, über Orts- und Weltzeit vergl. § 181) ist angenommen die Zeit der Kulmination eines bestimmten Punktes des Äquators, des **Frühlingspunktes** (seine Definition als Durchschnittspunkt zwischen Äquator und Ekliptik vergl. im folgenden §).

Dieser Frühlingspunkt bildet ebenso den Nullpunkt im System des Äquators, wie der Südpunkt den im System des Horizontes; und es ergeben sich somit aus den bisher beschriebenen Erscheinungen und Messungen die folgenden Definitionen:

Im System des Äquators ist Grundkreis der **Himmelsäquator.** Der Nullpunkt ist der Frühlingspunkt. Von ihm aus werden längs des Äquators gezählt die **Rektaszensionen** (AR, *ascensio recta*, gerade Aufsteigung, gemessen nach der Zeit vom Durchgang des Frühlingspunktes bis zum Durchgang eines Sternes durch das Fadenkreuz) im Sinne WSO von 0° bis 360° (oder die **Stunden** im Sinne eines Winkelmafses, $1^h = 15^\circ$, siehe oben). Vom Äquator gegen die Pole hin werden längs der Himmelsmeridiane gezählt die **Deklinationen,**

nördlich oder positiv von 0° bis 90° gegen den Himmelsnordpol, südlich oder negativ von 0° bis 90° gegen den Himmelssüdpol.

Dementsprechend heifsen auch die beiden Teilkreise am Äquatoreal Stunden-(Rektaszensions-)kreis DD (Nullpunkt im Meridian) und Deklinationskreis BB. Ist z. B. von einem Fixstern oder Nebel ein für allemal im Sternkataloge, bezw. von der Sonne, dem Monde, einem Planeten in den Ephemeriden (d. i. Tafeln, welche von den grofsen Sternwarten in Greenwich, Berlin u. s. f. Jahr für Jahr vorausberechnet werden) Rektaszension und Deklination eines Gestirnes für Tag und Stunde gegeben, so kann hiernach das Äquatoreal nach den beiden Teilkreisen eingestellt werden und es mufs sich jenes Gestirn im Gesichtsfeld vorfinden.

§ 177. System der Ekliptik. — Der jährliche Umlauf der Sonne, bezw. der Erde.

Von der Erde aus betrachtet, [illegible] e **Sonne** nicht immer dieselbe Lage in Bezug auf die Fixsterne ein, [illegible] daher ein „Planet" im vorkopernikanischen Sinne. Die unmittelb[illegible] chtung dieser Ortsveränderung ist zwar dadurch sehr erschwert, d[illegible] neben der blendenden Sonne nicht die Sterne sichtbar sind; w[illegible] liefsen wir jene Bewegungen so: Schon bei einer einigermal[illegible] en Beobachtung des Sternhimmels während eines halben Monates [illegible] onate fällt auf, dafs dieselben Sternbilder immer früher auf-, b[illegible] wobei „früher" nach der Tages-, also Sonnenzeit gemeint ist [illegible] Vorten: die Sterne bewegen sich in Bezug auf die Sonne im [illegible] daher **die Sonne in Bezug auf die Sterne im Sinne WSO.** Gena[illegible] hungen zeigen, dafs die Sonne zu ihrer täglichen Bewegung in Bezug auf die Erde um fast 4 Minuten länger braucht als der Sternhimmel, dafs sie also in 2, 3 . . . 15 . . . 30 Tagen um je 8, 12 . . . 60 . . . 120 Minuten von O gegen W zurückbleibt; oder: **die Rektaszension der Sonne wächst pro Tag um rund $4^{min} = 1°$,** in 1 Monat um $2^h = 30°$, in 12 Monaten um $24^h = 360°$, oder: **die Sonne macht binnen einem Jahre einen vollen Umlauf am Sternhimmel im Sinne WSO.** — Dabei ist mit der in jenen Zeitunterschieden sich kundgebenden Rektaszensionsbewegung gesetzmäfsig verbunden eine Deklinationsbewegung, wie sich für die kunstlose Beobachtung schon aus dem tiefen Stand der Sonne im Winter, dem mittleren im Frühjahr und Herbst, und dem hohen im Sommer zeigt. Zweimal im Jahre mufs dabei der Mittelpunkt der Sonne die Ebene des Himmelsäquators passieren. Diejenigen Punkte des Äquators, in welchen das geschieht, heifsen der **Frühlingspunkt** und **Herbstpunkt** (Äquinoktialpunkte), die entsprechenden Zeitpunkte Frühlingsanfang und Herbstanfang (Äquinoktien). — [In der klaren Luft und bei der kurzen Dämmerung in Babylon, Ägypten, Griechenland konnte man kurz vor Sonnenaufgang und nach Sonnenuntergang die der Sonne jeweilig nächsten Fixsterne wirklich sehen und so mehrere der nur durch die angegebenen Schlüsse festzulegenden genauen Begriffe in guten Annäherungen unmittelbar anschaulich gewinnen. Daher wurde dort namentlich der „heliakische Aufgang eines Sternes", z. B. des Sirius oder „Hundssternes" in den Hundstagen des August, mit besonderer Sorgfalt und Feierlichkeit beobachtet. So erklärt sich auch die früher viel mehr als gegenwärtig verbreitete Kenntnis des „Fixsternhimmels".]

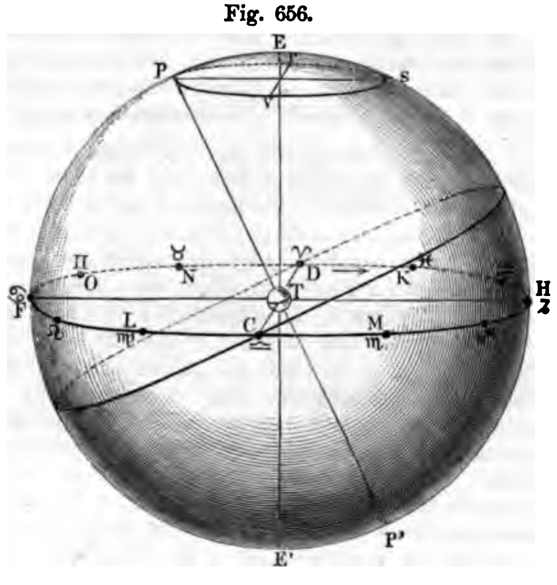
Um nun die genaue Form der Bahn, längs welcher die Sonne sich während des ganzen Jahres bewegt, zu ermitteln, ist es nötig, für möglichst viele Zeitpunkte die jeweilige Rektaszension AR und die zugehörige Deklination δ direkt

zu messen, was wieder am besten zur Zeit der Kulminationen der Sonne (astronomischer Mittag) mittels des Meridianinstrumentes geschieht, indem man den Zeitunterschied zwischen den Durchgängen der Sonne und des Frühlingspunktes durch den Meridian ermittelt. Betrachtet man dann je ein Paar zusammengehöriger AR und δ als Katheten eines rechtwinkligen, sphärischen Dreiecks, so ergibt sich (math. Anh., Nr. 18, LA 212) als dessen dem Äquator anliegender spitzer Winkel für alle Tage des Jahres derselbe Wert $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 10'' \doteq 23\frac{1}{2}^\circ$ (erst im Verlauf säkularer Zeiträume ändert sich dieser Wert, indem er zwischen den Grenzen $\varepsilon = 24^\circ\ 35'\ 58''$ und $21^\circ\ 58'\ 36''$ schwankt). Für die beschriebenen Tatsachen und Messungen sind folgende Begriffe und Sätze der kurze Ausdruck:

Anh. 18. LA 212.

Die Sonne (genauer: der Mittelpunkt der Sonnen-„Scheibe") bewegt sich, von der Erde aus gesehen, im Laufe eines Jahres in Bezug auf den Fixsternhimmel in einem gröfsten Kreise, der **Ekliptik** (im Sinne des geocentrischen Systems — über die Ableitung des Namens „Ekliptik" von ἔκλειψις, Finsternis, vergl. § 184), deren Ebene mit der des Äquators einen Winkel von rund $\varepsilon = 23\frac{1}{2}^0$ **(Schiefe der Ekliptik)** einschliefst — Fig. 656.

Fig. 656.



Im System der Ekliptik bildet (wie im System des Äquators, vergl. vorigen §) den Anfangspunkt der **Frühlingspunkt** (♈), d. i. derjenige Schnittpunkt von Äquator und Ekliptik, wo die Ekliptik nordwärts vom Äquator abzweigt. Vom Frühlingspunkt an werden im Sinne WSO die **Längen** (von 0⁰ bis 360⁰) und normal zu ihnen die **Breiten** nördlich und südlich bis zu den beiden **Polen der Ekliptik** gezählt. Diese liegen (unbeschadet der Präcessionsbewegung des Fixsternhimmels binnen 26 000 Jahren, § 170), immer bei denselben Fixsternen, und zwar der nördliche Pol der Ekliptik im Sternbild des Drachens.

Der mit dem Frühlingspunkte beginnende Bogen der Ekliptik von 30⁰ (Länge 0⁰ bis 30⁰) heifst Tierzeichen des Widders, ihm folgt (Länge 30⁰ bis 60⁰) das Tierzeichen des Stiers u. s. f. nach den Gedächtnisversen

Sunt: *aries*, *taurus*, *gemini*, *cancer*, *leo*, *virgo*,
*Libra*que, *scorpius*, *arcitenens*, *caper*, *amphora*, *pisces*.

Die für die Anfangspunkte dieser Bogen gebräuchlichen Zeichen (in vielen **Kalendern** z. B. unter dem Titel „Mondlauf" ersichtlich) sind:

oder ♈ ♉ ♊ ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐ ♑ ♒ ♓

Unter Verwendung dieser Ausdrücke ist dann die Bewegung der Sonne in **Bezug** auf das System der Ekliptik so zu beschreiben: Die Länge der Sonne **ändert** sich vom 21. März an im Laufe eines Jahres von 0° bis 360°; und zwar **tritt** die Sonne am 21/III in ♈, am 21/VI in ♋, am 23/IX in ♎, am 21/XII in ♑. **Die Breite der Sonne ist an allen Tagen des Jahres gleich 0°.** —

In Bezug auf das System des Äquators ist dieselbe Bewegung so zu beschreiben: Für die Sonne ist

im Frühlingsanfang	(Frühlingsäquinoktium 21/III)	AR = 0°,	δ = 0°,
in der Sommersonnenwende	(Sommersolstitium 21/VI)	AR = 90°,	$\delta = +23\frac{1}{2}°$,
im Herbstanfang	(Herb... n 23/IX)	AR = 180°,	δ = 0°,
in der Wintersonnenwende	(Wintersolsti... 21/XII)	AR = 270°,	$\delta = -23\frac{1}{2}°$.

Durch Einführung des Begriffes Ek... vereinfacht sich die Beschreibung **der Bewegung** der Sonne in Bezug auf d... de. Ohne Verwendung des Begriffes **Ekliptik** lautet nämlich die Beschr... : Die Sonne geht am 21. März um 6 **Uhr** morgens im Ostpunkt auf (La... hebt sich im astronomischen Mittag **für einen** Ort unter $\varphi°$ geogr. Br. ... $\varphi°$ über den Südpunkt, geht um 6 **Uhr** abends im Westpunkt ... sten Tage ist ihr Aufgangspunkt **etwas** von O gegen N hin weg... hebt sich mittags um etwas mehr **als 90°** — $\varphi°$ über den Südpunkt, ge... ehr im W, sondern etwas gegen N **hin unter** u. s. f.: im Laufe des ganzen ... s macht sie in Bezug auf die Erde **eine Schraubenbewegung.** Eben diese ... gung der Sonne in Bezug auf die Erde läfst sich nun zerlegen in eine der Sonne in Bezug auf den Fixsternhimmel und in eine des Fixsternhimmels samt der Ekliptik **in Bezug auf** die Erde. Es bedarf dann nur einer festen Vorstellung davon, wie die mit der Himmelsachse unter einem Winkel von $90° - 23\frac{1}{2} = 66\frac{1}{2}°$ fest verbunden zu denkende Ebene der Ekliptik mit der Ebene des Horizontes im Laufe je eines Tages Winkel von $(90° - \varphi°) + 23\frac{1}{2}°$ bis $(90° - \varphi°) - 23\frac{1}{2}°$ einschliefst und an welchen Punkten der Ekliptik die Sonne zu verschiedenen Tagen des Jahres, namentlich in den Solstitien und Äquinoktien, zu stehen kommt: und es ergeben sich dann hieraus alle Verschiedenheiten der Auf- und Untergangspunkte und der Mittagshöhen, sowie die Tageslängen, die Tiefe des Standes um Mitternacht u. s. f. — Das Bisherige zusammenfassend können wir also sagen:

LA 213.

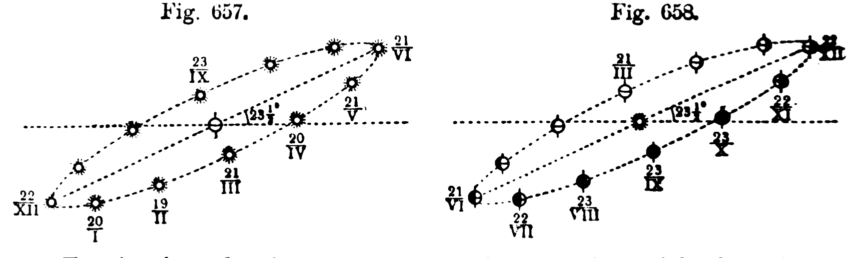


Fig. 657. Fig. 658.

Für je einen bestimmten Ort der Erde ergeben sich die **Tages- und Jahreszeiten** aus der Lage des Himmelsäquators gegen den Horizont und der Stellung der Sonne a) in der jährlichen **Schrauben-**

bahn der Sonne, b) in der Ekliptik (Fig. 657), beides nach dem geozentrischen System.

Nach dem heliozentrischen System bezeichnet **„Ekliptik"** die **Bahn der Erde um die Sonne.** Die Tages- und Jahreszeiten ergeben sich dann c) aus der Stellung der Erde in den verschiedenen Punkten dieser Bahn, und der konstanten Neigung der Erdachse (die im Fixsternraum zu sich parallel bleibt, § 180) gegen die Ebene der Ekliptik (Fig. 658).

Da es im Weltraum keine „oben" und „unten" gibt, so ist es wissenschaftlich gleichgiltig, ob man in Zeichnungen und Modellen (Tellurien) die Ebene der Erdbahn wagrecht oder irgendwie anders annimmt; didaktisch zweckmäfsig ist es, in solchen Darstellungen die Erdachse als vertikal und daher die Ebene der Ekliptik als unter $23\frac{1}{2}^{\circ}$ gegen den Horizont geneigt zu denken. Es entspricht dann die Stellung der Erde im „höchsten" Punkte der Ekliptik dem Winter der nördlichen Erdhälfte, indem hier die Südhalbkugel für die Einstrahlung seitens der Sonne begünstigt ist. Allgemein sind die Tages- und Jahreszeiten an verschiedenen Punkten der Erde mit abhängig von deren Gestalt.

§ 178. Gestalt und Gröfse der Erde.

Die populären sogenannten „Beweise für die Kugelgestalt der Erde" sind: 1. Der Horizont erscheint (von Bodenerhebungen abgesehen) allenthalben kreisrund. 2. Höheren Standpunkten entspricht ein gröfserer Horizont. 3. Von einem aus der Ferne kommenden Schiffe werden zuerst die Spitzen der Masten, zuletzt der Rumpf sichtbar. 4. Mondfinsternisse lassen erkennen, dafs der Erdschatten bei beliebiger Stellung der Erde gegen die Sonnenstrahlen einen kreisrunden Querschnitt hat. (Diese vier Beweise waren schon im Altertum bekannt; mögliche Einwürfe LA 214). 5. Weltumseglungen. 6. Neuestens erkannte man, dafs Berge, die untergehende Sonne... in Meeren und grofsen Seen Konvexspiegelbilder geben.

Fig. 659.

40° B B' 20° 60° 20 (100000 m ...) O

LA 214.

Alle wissenschaftlich strengen Messungen der wahren Gestalt und zugleich der Gröfse der Erde bestehen in einer Verbindung von Winkel- und Längenmessungen (solche hat schon Erathosthenes ausgeführt und den Umfang der Erde = 250 000 Stadien gefunden; 150 Jahre später gab Hipparch 275 000 Stadien an). Diesen Messungen liegt die Voraussetzung zu Grunde, dafs die von einem Fixstern zu was immer für Punkten der Erde (sogar diametral abstehenden) gezogenen Geraden als parallel aufgefafst werden dürfen; über die Berechtigung dieser Annahme vergl. folgenden §. Die Messungen der Krümmung der Erdoberfläche gliedern sich in I. Meridian(Breiten-)gradmessungen zum Nachweise der nord-südlichen Krümmung und II. Längengradmessungen zum Nachweise der ost-westlichen Krümmung.

I. Gesetzt, es sei für zwei Orte B und B' (Fig. 659) unter demselben Meridian die Kulmination desselben Sternes mit 40°, bezw. 60°

und durch Längenmessungen die Bogenlänge $BB' = 2220$ km gefunden worden. Es folgt dann, dafs die Lotlinien der beiden Orte einen Winkel von 20^0 einschliefsen, und daher — vorläufig wieder erst nur angenommen, der Meridian habe überall die gleiche Krümmung — entfällt dann auf einen Meridiangrad 2220 km : 20 = 111 km. Da nun bei zahlreichen Meridiangradmessungen in der Tat die Winkelabstände desselben Sternes vom Zenit den Bogenabständen verschiedener Orte desselben Meridians in erster Annäherung proportional befunden wurden, ist jene Annahme kreisförmiger Meridiane in erster Annäherung als bestätigt anzusehen.

II. Reist man von einem Punkte der Erdoberfläche, durch dessen Zenit der Himmelsäquator geht (d. h. von einem Punkte des Erdäquators, vergl. den folgend [illegible] 222 ... km weit genau östlich, so zeigt eine Uhr, die am [illegible] rt als richtig gehend befunden worden war, dafs Sonne u [illegible] je 4, 8 ... Minuten früher auf- und untergehen. Au [illegible] Zeitunterschieden folgt, dafs die Horizonte der Orte verschie [illegible] eographischer Länge eine verschiedene Neigung gegen die [illegible] Gestirnen parallel einfallenden Strahlen haben müssen, und [illegible] eist sich zunächst der Äquator kreisförmig. Die gleichen Z [illegible] schiede ergeben sich dann auch für die Parallelkreise.

Wären nun die angegebenen Be[illegible]ngen zwischen Winkel- und Bogenlängen genau, so würde daraus folgen, dafs die Erde eine **Kugel** sei, an welcher je ein **Bogengrad eines gröfsten Kreises 111 km** beträgt, daher der Umfang eines gröfsten Kreises, gleichviel, ob Meridian oder Äquator, $u = 111 . 360 \doteq 40\,000$ km, daher der Radius der Erde $r = u : 2\pi \doteq 6370$ km. — Erst um die Mitte des XVII. Jahrhunderts ergaben sich bei neuen, immer sorgfältigeren Meridiangradmessungen Abweichungen von der einfachen Proportionalität zwischen den Winkelunterschieden und den Bogenlängen, aus welchen dann auf Abweichungen der wahren Gestalt der Erde von der Kugelgestalt geschlossen wurde, LA 215. (Die Abweichungen sind so gering, dafs man anfänglich auf Grund von Meridianmessungen in Frankreich und von Rechnungen, die sich später als fehlerhaft herausstellten, die Erde für ein Ellipsoid ähnlich einer Pflaume hielt, in dessen Meridianen die Erdachse die grofse Achse darstelle.) Schon vorher hatten Huygens und Newton aus der Erwägung, dafs die Erde feuerflüssig gewesen sei und sich bei der Rotation abgeplattet habe, auf ein Ellipsoid geschlossen, in dem die Erdachse die kleine Achse darstelle. Diese Vermutung wurde entgiltig bestätigt durch die französischen Messungen in Peru und Lappland um die Mitte des XVIII. Jahrhunderts. Wir können also sagen: [LA 215.]

Die Erde ist in erster Annäherung eine **Kugel** vom Radius $r = 6370$ km; in zweiter Annäherung ein **Rotationsellipsoid,** dessen grofse Halbachse vom Äquator $a = 6377{,}39$ km, die kleine Halbachse vom Nordpole $b = 6356{,}08$ km ist (LA 215). [LA 215.]

In Wahrheit haben sich alle einzelnen Meridian- und Längengradmessungen aber auch wieder nicht mit der Annahme eines Rotationsellipsoides, ja überhaupt

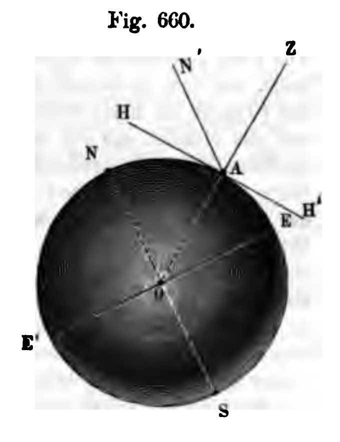
nicht mit der irgend eines vorher rein mathematisch definierten Körpers in Einklang bringen lassen: sondern man nennt **Geoid** die tatsächliche Gestalt der Erde (genauer: die Gestalt eines die Erde rings umgebend gedachten Meeres, das aber nicht durch seine eigenen Schwerewirkungen die des wirklichen Erdballes beeinflufst — vergl. die fingierten Meeresschichten über dem System Erde — Mond, Fig. 75), und man ist noch immer damit beschäftigt, Messungen zu seiner möglichst genauen Beschreibung mit immer feineren Mitteln durchzuführen; es ist dies eine Aufgabe der „höheren Geodäsie". Im folgenden kehren wir wieder zu obiger erster Annäherung zurück.

§ 179. Das Gradnetz der Erdkugel.

Indem wir die Mittelpunkte der Erd- und Himmelskugel zusammenfallend und von jedem Punkte des Gradnetzes der Himmelskugel nach dem System des Äquators Gerade durch die Oberfläche der Erde zu deren Mittelpunkt gezogen denken, entspricht jedem gröfsten Kreis am Himmel (Äquator, Meridiane) ein solcher auf der Erde; ähnlich die Parallelkreise und die Pole. Speziell gelten die Definitionen und Beziehungen:

Die geographische Breite eines Ortes ist gleich der Polhöhe. Sie ist 0° für den **Äquator**, 90° für die Pole. Wurde z. B. (mittels des Theodolit oder des Meridianinstrumentes, oder auf der See mittels des Spiegelsextanten) beobachtet, dafs der Himmelsnordpol um den Winkel $HAN' = \varphi^0$ (Fig. 660) über dem Nordpunkte (H) des Horizontes stehe, so kommt diesem Orte eine geographische Breite $EOA = \varphi^0$ zu. Spezielle Schilderung des Fixsternhimmels und des Sonnenlaufes für $\varphi = 0°$, $\pm 23^1/_2{}^0$ **(Wendekreise)**, $+45°$, $66^1/_2{}^0$ **(Polarkreise)**, $\pm$ 90° (Nord-, Südpol). Die nördlichsten erreichten Orte der Erde liegen 86° 4′ (Nansen 1896), 86° 34′ (Herzog der Abruzzen 1900).

Fig. 660.



Als **Nullmeridian** für die Zählung der **geographischen Längen** (östlich, westlich bis je 180°) ist jetzt meist der durch das Mittagsfernrohr von Greenwich gehende angenommen. (Meridiane von Ferro, Paris.)

Der **Zonenzeit** liegt eine Abgrenzung der Erdoberfläche durch die Meridiane 15°, 30°, 45° u. s. w. östlich und westlich von Greenwich zu Grunde, welche gegeneinander Differenzen von je 1^h mittlerer Sonnenzeit haben. — Über Ortszeit, „mitteleuropäische Zeit", Weltzeit, Datumgrenze vergl. § 181.

Wie man sich das Gradnetz der fingierten Himmelskugel (nachgebildet durch die „Armillarsphäre") auf der wirklichen Erdkugel abgebildet denkt, bildet man deren Gradnetz wieder auf dem Erdglobus ab. Da aber die Erde nur in erster Annäherung eine Kugel, in zweiter ein Ellipsoid ist, so bedarf die Feststellung des Gradnetzes auf einem solchen feinerer Begriffsbestimmungen (LA 215). LA 215.

Von speziell physikalischem Interesse sind die 1889 in Berlin begonnenen (in Honolulu, rund 180° von Berlin, bestätigten) Beobachtungen, dafs die

Polhöhe desselben Ortes der Erde kleinen Schwankungen unterliegt, welche auf Grund des Satzes „Polhöhe = geographische Breite“ zeigen, dafs die Erdachse innerhalb des Erdkörpers ihre Lage änderte, allerdings nur um Winkel von etwa 0° 0′ 0,6″, also an der Erdoberfläche um etwa 20 m (längs einer unregelmäfsigen Linie). Als Ursache werden Massenverschiebungen an und unter der Erdoberfläche vermutet. — Von diesen Änderungen der Lage der Erdachse in Bezug auf den Erdkörper sind zu unterscheiden die im folgenden § zu beschreibenden Änderungen der Lage der Erdachse in Bezug auf den Fixsternhimmel.

§ 180. Rückschreiten der Tag- und Nachtgleichenpunkte; Vorschreiten der Tag- und Nachtgleichen (Präzession).

Sucht man auf einem Himmelsglobus oder einer Sternkarte z. B. das „Tierzeichen des Widders“ auf, welches sich [illegible] Frühlingspunkt dreifsig Grade längs der Ekliptik im Sinne WSO erstr[illegible] so findet man dieses „Tierzeichen des Widders“ nicht im Sternbild[illegible] Widders, sondern im Sternbilde der Fische. Desgleichen liegt das Tierzeich[illegible]tiers im Sternbilde des Widders u. s. w. Vor etwa 2000 Jahren dagegen deckte sich [illegible]es Tierzeichen mit demjenigen Sternbilde, von dem es damals den Namen e[illegible] Da nun das Vorwärtszählen längs der Ekliptik im Sinne WSO stattfindet [illegible]enn auch die Bewegungen der Sonne und des Mondes und die überwiegen[illegible]gung der Planeten nahe der Ekliptik im Sinne WSO als rechtläufig, d[illegible]ngeren Bewegungen der Planeten im Sinne OSW als rückläufig bezeic[illegible]t[illegible]en, § 183, so mufs man das während der 2000 Jahre eingetretene Fortrücken des Frühlingspunktes vom Sternbild des Widders in das Sternbild der Fische einen Rückgang des Frühlingspunktes nennen. Gleiches gilt von den Verschiebungen des Herbstpunktes. — Weil dieser **Rückgang der Äquinoktialpunkte** schon binnen 72 Jahren 1° **beträgt**, so darf er bei keiner einigermafsen genauen astronomischen Beobachtung und Rechnung vernachlässigt werden, zumal ja alle Rektaszensionen (und Längen) vom Frühlingspunkt gezählt werden und also Sternkarten, welche z. B. für die „Epoche 1900“ angefertigt sind, schon nach etwa 7 Jahren mit den dann zu beobachtenden Rektaszensionen um $^1/_{10}$ Grad (nach 1 Jahr um 60′ : 72 = 50″) differieren. Daraus wird zwar auch begreiflich, dafs schon HIPPARCH diesen Rückgang der Äquinoktialpunkte bemerkte; es bleibt aber erstaunlich, dafs er die Erscheinung als eine über die von ihm auf etwa 36 000 Jahre berechnete ungeheure Zeit periodisch sich erstreckende erkannt hat. — In den Sprachen des heliocentrischen Systems lautet die zusammenfassende Beschreibung der ganzen Tatsache so:

Die Erdachse, d. i. die Achse der täglichen Drehung der Erde, bleibt zwar beim Umlauf der Erde um die Sonne binnen eines oder einiger weniger Jahre sehr annähernd **parallel** (beschreibt einen Cylindermantel, wie wir aus der annähernd konstanten Stellung des Himmelspoles während eines ganzen Jahres und einiger aufeinander folgender Jahre annehmen müssen). Im Laufe von 26 000 Jahren beschreibt aber die Erdachse (oder die Achse jenes Cylinders) einen **Kegelmantel,** dessen geometrische Achse gegen den Pol der Ekliptik gerichtet bleibt und dessen Seite mit dieser Achse einen Winkel von $23^1/_2{}^0$ einschliefst. Es besitzt also die Erdachse während ihrer Um-

laufsbewegung zwar immer dieselbe Neigung gegen jene Achse ($23^1/_2{}^0$) und gegen die Ebene der Ekliptik ($66^1/_2{}^0$), aber die Erdachse weist dabei auf immer andere Sterne eines Kreises am Himmel, der durch den gegenwärtigen Himmelsnordpol geht und dessen Mittelpunkt der Pol der Ekliptik ist (Fig. 656). — In etwa 13000 Jahren wird daher Wega Polarstern sein; vor 2000 Jahren lag der Himmelsnordpol über den Kopf des kleinen Bären, während jetzt der Polarstern der letzte im Schweif des kleinen Bären ist).

Während dieser Bewegungen bleibt die Ekliptik ungeändert (geht durch die nämlichen Sterne hindurch), aber die erweiterte Ebene des Erdäquators, d. i. der **Himmelsäquator, schneidet die Ekliptik in immer anderen Punkten.**

Die Erde besitzt also die Bewegungen eines Kreisels (vergl. § 34; dort auch die Erklärung der im vorigen nur beschriebenen Bewegungen). — Dafs man diese Bewegungen kurz als **„Präzession“** (Vorschreiten) bezeichnet, wiewohl sie oben als ein Rückgang der Äquinoktialpunkte beschrieben werden mufste, rührt daher, dafs diese Bewegung ein Vorrücken der Äquinoktien, d. i. der Tage, an denen die Sonne gleich lange über und unter dem Horizonte steht, zur Folge hätte, falls man das „siderische Jahr“ und nicht vielmehr das auf jenen Rückgang des Frühlingspunkt schon Rücksicht nehmende tropische Jahr der Zeitrechnung zu Grunde legte. (Näheres im folgenden §.)

Zu der hier in erster Annäherung beschriebenen Erscheinung der Präzession kommt noch die der **Nutation:** der beschriebene Kegelmantel ist nämlich sozusagen fein gefältelt, oder: die vom Himmelspol beschriebene Linie kein Kreis, sondern eine cykloidenartige Kurve. Zur dynamischen Erklärung dieser Nebenerscheinung vergl. ebenfalls § 34.

§ 181. Zeitrechnung. Siderisches und tropisches Jahr. Zeitgleichung. Ortzeit, Zonenzeit, Weltzeit; Datumgrenze.

Der im bisherigen überall als bekannt vorausgesetzte Begriff des Jahres bedarf noch genauer Definitionen. Die volkstümliche Bedeutung dieses Wortes ist nur: „Zeitraum, binnen dessen sich je ein Wechsel der Jahreszeiten vollzieht (— neue Kalender ausgegeben werden u. dergl.)“. — Der wissenschaftliche Begriff ist:

Das **Jahr** ist der Zeitraum, binnen dem die **Sonne** einen Umlauf längs der Ekliptik (dieses Wort im geocentrischen Sinne) oder binnen dem die **Erde einen Umlauf längs der Ekliptik** (dieses Wort im heliocentrischen Sinne) zurückgelegt hat.

Dafs ein solcher Umlauf vollendet sei, erkennt man daran, dafs zur selben Tageszeit, diese bestimmt nach der Sonne, die Fixsterne dieselbe Stellung zur Erde (und zur Sonne) einnehmen wie „vor einem Jahr“. — Dies gibt also zuerst nur die Nominaldefinition (log. Anh., Nr. 38): Ein Jahr ist der Zeitraum von x Sonnentagen $= x + 1$ Sterntagen; und es gilt nun, den genauen Wert von x aus den Erscheinungen abzuleiten (dies wird voraussichtlich nicht eine ganze, überhaupt keine einfache rationale Zahl sein; denn die Rotationsdauer der Erde $=$ 1 Sterntag steht zur Revolutionsdauer $=$ 1 Jahr in keiner inneren Beziehung). Anh. 38.

— In roher Annäherung ist 1 Jahr = 360 Tage, denn das tägliche Zurückbleiben der Sonne hinter den Fixsternen um rund 1° = 4 Min. ergibt, daſs 360 Sonnentage = 361 Sterntage. Genauer sind 365¼ Sonnentage = 366¼ Sterntage. Durch die Vernachlässigung dieses ¼ Tages hatte die Annahme der ganzen Zahl 365 schon binnen 4 Jahren zu einer Differenz von einem Tage, binnen eines Jahrhunderts zu einem von 25 Tagen, also fast einem Monat führen und sich in den Abweichungen der Zeitrechnung gegenüber dem Charakter der Jahreszeit verraten müssen. Die hieraus entstandenen Verwirrungen wurden von Julius Cäsar im **julianischen Kalender** berichtigt, der jedes vierte Jahr als Schaltjahr mit 366 Tagen ansetzte.

Aber auch die Zahl $x = 365\frac{1}{4}$ ist nur eine annähernde. Der genaue Wert von x ergibt sich verschieden, je nachdem der Begriff „ein Umlauf der Erde, bezw. der Sonne“ verstanden wird. Es kann nämlich gemeint sein die Wiederkehr der Sonne zum selben Punkt des Fixsternhimmels (der Ekliptik): diese Zeitstrecke heiſst ein **siderisches Jahr;** [illegible] es kann gemeint sein die Wiederkehr zum jeweiligen Frühlingspunk[illegible] binnen einem Jahr infolge der Präzession und Nutation um rund 50″ [illegible]t über Süd gegen West gewandert ist: diese Zeitstrecke heiſst ein **tropi[illegible]r.** (Dieser Name hängt zusammen mit τρέπω, ich wende; gemeint is[illegible]hen der gröſsten nördlichen und südlichen Deklination der Sonne in [illegible]ial- oder **Wendepunkten** am Himmel, denen dann infolge der täglichen [illegible]g die **Wende**kreise auf der Erdkugel entsprechen [daher auch [illegible]r u[illegible]m“, „tropisches Klima“ u. s. w.]. Von diesen Punkten liegt der F[illegible] je 90° ab.) Da sich die astronomischen Bedürfnisse des bürgerlichen [illegible] den Jahreszeiten, diese aber nach der Stellung der Sonne zum Frühling[illegible]chten, so ergeben sich schlieſslich die folgenden Definitionen und Gröſsen[illegible]

Dem westeuropäischen Kalender liegt zu Grunde das **mittlere tropische Jahr** von $365^d\ 5^h\ 46^m\ 51^s = 365{,}24222$ Tagen mittlerer Sonnenzeit ($= 366^d\ 5^h\ 48^m\ 45{,}91^s = 366{,}24222$ Sterntagen). Da das tropische Jahr sehr annähernd $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$ Tage zählt, so sind alle Jahre, deren Jahreszahl durch 4 teilbar ist, ausgenommen die durch 100, wieder nicht aber die durch 400 teilbaren, **Schaltjahre**, in denen im Februar ein Schalttag eingefügt wird, so daſs in ihnen der Februar statt 28 Tage 29 Tage zählt.

Die Feststellung des mittleren tropischen Jahres ist deshalb schwierig, weil der Frühlingspunkt ungleichförmig längs der Ekliptik rückschreitet und so z. B. schon innerhalb der vier Jahre von 1881 bis 1885 die tropischen Jahre untereinander Abweichungen bis zu 8 Zeitminuten aufweisen. Das mittlere tropische Jahr wird daher als das Mittel aus den innerhalb säkularer Zeiträume bestimmten Frühlingsanfängen, d. h. Rückkehr der Sonne zum Frühlingspunkt, bestimmt. — Die **Gregorianische Kalenderreform** 1582 bestand darin, daſs diejenigen Schalttage, welche nach dem Julianischen Kalender auf jedes vierte Jahr entfielen, in den genannten Jahrhundertzahlen weggelassen wurden; und diese sinnreiche Berücksichtigung der Abweichung des mittleren tropischen vom Julianischen Jahr bewährte sich so gut, daſs erst nach mehr als 3000 Jahren die Einfügung eines weiteren Schalttages nötig werden wird. Die Zeitrechnung nach dem Julianischen

Kalender (z. B. die russische) ist gegenwärtig um 13 Tage hinter dem Gregorianischen zurück.

Das bürgerliche Jahr beginnt am 1. Jänner, der bürgerliche Tag um Mitternacht (Zählung von 12^h Mitternacht bis 12^h Mittag und wieder bis 12^h Mitternacht; in der Eisenbahnzeit mancher Länder, z. B. Italien, von 0^h bis 24^h = Mitternacht). — Die Astronomen zählen von 0^h bis 24^h Sternzeit, und zwar je von der oberen Kulmination des Frühlingspunktes; dieser Zeitpunkt bildet zu allen Zeiten des Jahres den Anfang des Sterntages, fällt aber nur im Frühling um die Mittagszeit, im Sommer um die Abendzeit u. s. f.

Zeitgleichung. Es wird im Publikum nicht selten die Meinung geäufsert, dafs es die vollständigste Regulierung der Uhren wäre, wenn man sie täglich um 12 Uhr mittags nach der Sonnenuhr stellte (bezw. nach dem Gnomon, der den astronomischen Mittag dadurch angibt, dafs auf einer wagrechten Ebene der Schatten eines vertikalen Stabes die kleinste Länge und die Richtung nach Norden hat). Diese Meinung erweist sich aber als irrig aufs auffälligste am 2. November, da an diesem Tage zur Zeit des höchsten Sonnenstandes, d. i. des astronomischen Mittags eine die bürgerliche Zeit möglichst genau angebende Uhr schon $12^h\ 16\frac{1}{2}^m$ zeigt. Dagegen tritt am 11. Februar der astronomische Mittag schon $14\frac{1}{2}^m$ vor 12^h (um $11^h\ 45\frac{1}{2}^m$) bürgerlicher Zeit ein. Diese Abweichungen werden als **Zeitgleichung** bezeichnet und sind in der Tafel graphisch dargestellt. (Nur am 16. April, 14. Juni, 1. September und 24. Dezember ist die Abweichung Null.) Diese Nichtübereinstimmung der Räder- und Sonnenuhren setzt sich aus zwei geometrisch-phoronomischen Gründen zusammen: 1. Die Sonne bewegt sich längs ihrer Bahn mit veränderlicher Geschwindigkeit, so dafs die Zeitstrecke zwischen zwei Kulminationen der Sonne um den 1. Jänner kleiner ist als um den 2. Juli (vergl. § 174). Dieser Umstand wird aber noch weit überwogen von dem, dafs 2. selbst wenn die Bewegung der Sonne längs der Ekliptik eine gleichförmige wäre, die Projektionen gleicher Bogenstücke der Ekliptik auf den Himmelsäquator nicht einander gleich, sondern dafs diese Projektionen in der Nähe der Solstitien gröfser sind als in der Nähe der Äquinoktien.

Ortszeit, Zonenzeit, Weltzeit. — Nach § 178 ist die **Ortszeit** nur für Orte desselben Meridians dieselbe; dagegen entsprechen

Unterschieden der geogr. Länge	von je	1^0,	15^0,	90^0,	180^0,	270^0,	360^0
Unterschiede „ Ortszeit	„ „	4^m,	1^h,	6^h,	12^h,	18^h,	24^h.

Der um 1892 in England, Deutschland, Frankreich . . . eingeführten **Zonenzeit** liegt die Ortszeit von Greenwich in der Weise zu Grunde, dafs diese auch für alle Orte bis 15^0 östlich von Greenwich (d. i. bis zum Meridian von Stargard) gilt; von hier weitere 15^0 die um eine Stunde frühere **mitteleuropäische Zeit** u. s. w.

Die **Weltzeit** bestünde darin, dafs alle Orte der Erde unabhängig von ihrer eigenen Ortszeit die von Greenwich annähmen. Diese einschneidendste Änderung hätte sich jedenfalls nur für den internationalen Verkehr (Eisenbahn, Schiffahrt, Telegraphie . . .) empfohlen, wogegen neben der Weltzeit für die lokalen Vorgänge (Beginn der täglichen Geschäfte, Mahlzeiten . . .) die Ortszeit jedenfalls in

Gebrauch geblieben wäre (es hätten etwa die Uhren für jeden Ort eigene Doppelzeiger von bestimmtem Winkelabstand erhalten müssen; Zahlenbeispiele für **Stunden-** wie Minutenzeiger, LA 216). — Das Hauptbedenken gegen die Einführung der Weltzeit war die Lage der **Datumgrenze**, da der Meridian 180° östlich und westlich von Greenwich durch bewohnte Länder geht, in denen dann wahrscheinlich beständige Unsicherheit um einen Tag der Zählung eingetreten wäre. Wie muſs das Passieren dieser Datumgrenze bei Fahrten gegen Westen und gegen Osten in Rechnung gezogen werden?

LA. 216.

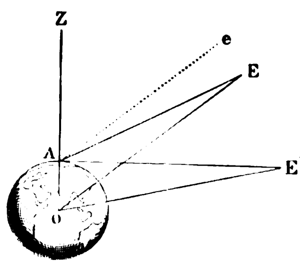
§ 182. Messungen kosmischer Distanzen.

Bekanntlich **projiziert** sich die Spitze eines Uhrzeigers an Stellen des Zifferblattes, die um so mehr verschieden sind, je mehr Spitze und Zifferblatt voneinander abstehen und je mehr das Auge sich [illegible] 'er durch die Spitze zum Zifferblatt gelegten Normalen entfernt. Ähnliche [illegible] allaktische Fehler" bei Barometerablesungen u. dergl.

Alle astronomischen Streckenmes[illegible] n erfolgen auf Grund von „**parallaktischen**" Beobachtungen und Re[illegible] deren Prinzip in der folgenden trigonometrischen Grundaufgabe liegt:

Ist eine Standlinie AB = [illegible] **m entweder direkt (durch Maſsstäbe) oder indirekt (selbst w**[illegible] **trigonometrisch) gemessen, und bilden die Visierlinien AC u**[illegible] **zu einem Punkte C die meſsbaren Winkel α und β, so** [illegible] **n sich aus dem $\triangle ABC$ die übrigen Strecken gemäſs dem A**[illegible]**ungsfalle c, α, β. Der Winkel γ heiſst dann die Parallaxe der Strecke c in Bezug auf den Punkt C.**

Fig. 661.



Schon mit Rücksicht auf die kugelige (ellipsoidische) Krümmung der Erde erweitert sich dieses Prinzip dahin, daſs für die **gerade** Standlinie AB auch Kreisbogen von gemessener Länge und Krümmung eintreten können. — Wäre die (aus Längen- und Breitengradmessungen, § 179, bekannte) Gröſse der Erde wirklich verschwindend gegen **alle** kosmischen Distanzen, wie dies in erster Annäherung häufig angenommen wird, so müſste ein Auge im Erdmittelpunkt O (Fig. 661) ein Gestirn E in derselben Sehrichtung erblicken, wie wenn das Auge von dem Oberflächenpunkte A längs Ae blickt. Läſst sich dagegen der Winkel $eAE = AEO$ als von Null verschieden ermitteln, so wissen wir, daſs umgekehrt von dem Punkte E des Weltraumes aus der Erdhalbmesser OA unter dem endlichen Winkel $OEA = EAe$ erscheinen würde. Es ist also dieser Winkel die Parallaxe der Strecke OA in Bezug auf den Punkt E oder kurz die **Parallaxe** des Punktes E. Für einen Punkt E', der denselben Abstand von O hat wie E, für den aber $E'A \perp AO$, d. h. der in der zu A gehörigen Horizontalen liegt, ist offenbar $\measuredangle OE'A > OEA$. Da also dieser Winkel die gröſste unter allen Parallaxen für Punkte desselben Abstandes vom Erdmittelpunkte ist, so wählt man diese **Horizontalparallaxe**, d. i. den gröſsten Sehwinkel, unter dem ein Erdhalbmesser von einem gegebenen Punkte des Weltraumes aus erscheint, zur Grundgröſse für alle parallaktischen Angaben der Astronomie.

Auch die gröſsten auf der Erde noch herstellbaren geraden oder :ummen Standlinien genügen nur für die Messungen des Abstandes :r Erde vom Monde (LA 217) und von den der Erde zunächst ommenden Planeten (Venus in Konjunktion mit der Sonne, namentch bei „Venusdurchgängen“, siehe unten; ferner Mars in Opposition ıd neuestens der Asteroid Eros, vergl. § 183). LA 217.

Dagegen stellt sich der Abınd **Erde — Sonne = 1 Erdweite** .ch den sogleich zu besprechenden ethoden als so groſs heraus, daſs ɔh zu ihm sogar die gröſste auf :den denkbare Standlinie, nämlich ır Erddurchmesser, verhält wie z. B. ır Abstand der Augen = 8 cm zu ıem Abstande von etwa 1,8 km; icken wir aber nach einem so tfernten Gegenstande abwechselnd it dem rechten und linken Auge, sind die Sehrichtungen nur noch ımerklich verschieden. Ebenso ird niemand von den Enden eines 80 cm langen Fensterbrettes als andlinie den Abstand eines 18 km entfernten Punktes trigonometrisch estimmen wollen. — Ohne Kenntnis des Abstandes Erde — Sonne ssen sich zwar die Abstände der verschiedenen Körper des Sonnenstems voneinander nach mannigfaltigen Methoden sehr genau in :lativem Maſse angeben, wobei die Erdweite als astronomische ängeneinheit dient. — So ergibt sich z. B. der Halbmesser ɔr Venusbahn annähernd gleich $^3/_4$, genauer 0,723 Erdweiten 183 und LA 218). — Auf Grund dieser Zahl läſst sich aber auch i **Venusdurchgängen** die Länge der Erdweite in Meilen oder ilometern nach einer Methode bestimmen, deren Prinzip folgendes ; (Fig. 662): LA 218.

Fig. 662.

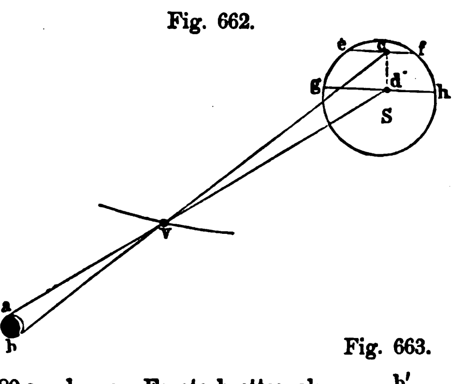
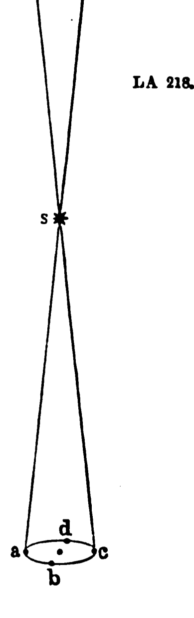


Fig. 663.



Wird von zwei möglichst weit abstehenden Orten a und b der ·doberfläche, für die der Planet Venus v sich auf die Sonnenɦeibe so projiziert, daſs er längs der Bahnen ecf, gdh durch die heibe hindurchzugehen scheint, so gilt die Proportion $cd : ab =$ '23 : (1 — 0,723), woraus folgt $cd = 2{,}6\,ab$. Dabei läſst sich die recke cd entweder direkt in Bruchteilen des scheinbaren Sonnenrchmessers (mittels des „Heliometers“) bestimmen oder aus den Sehnen und gh (als Differenz der Centralabstände dieser Sehnen) berechnen. :trägt nun z. B. die gerade Verbindung auf der Erde 10000 km, her $cd = 26000$ km, so läſst sich hieraus weiter berechnen, unter :lchem Winkel irgend eine Strecke auf der Erde von irgend einem ınkte der Sonnenoberfläche aus gesehen erscheinen müſste. So hat ın aus Beobachtungen vom Venusdurchgang von 1769 auf eine **orizontalparallaxe der Sonne** 0° 0′ 8,6″ und aus den letzten Venus:rchgängen (1874 und 1882) auf eine 8,8″ geschlossen, woraus sich gab:

Eine Erdweite = 23,440 Erdhalbmesser = 20 Millionen Meilen = 148,5 Millionen Kilometer; daher als **Erdbahndurchmesser** = 2 Erdweiten ≠ **3.10⁸ km.**

Für die Abstände aller nicht unserem Planetensystem angehörigen Körper ist als Standlinie nur dieser Durchmesser der Erdbahn (*ac*, *bd*, Fig. 663, oder eine andere hinreichend grofse Sehne der Bahnellipse) verwendbar. Aber auch für diese ungeheure Standlinie sind bis jetzt nur an etwa 50 Sternen die jährlichen Parallaxen bestimmt. Die fünf gröfsten jährlichen Parallaxen und somit die verhältnismäfsig kleinsten Abstände von Fixsternen sind annähernd folgende:

	α Centauri	Lalande 21 185	61 Cygni	η Herkulis	Sirius
Parallaxe . . .	0,75″	0,5[illegible]	0,40″	0,40″	0,39″
Erdweiten . .	275 000	413 000	[illegible]16 000	516 000	530 000
Lichtjahre . .	4,4	6,6	8,2	8,2	8,5

Von diesen Sternen war der [illegible]gni, für den Bessel (1838) die jährliche Parallaxe 0,36″ bei einem wahrs[illegible]hen Fehler von 0,02″ fand (mit Hülfe des Heliometers). — Über die vergeblichen [illegible]emühungen Bradleys, eine Fixsternparallaxe zu messen, die aber zur Er[illegible]g der Aberration führten, § 186.

Denkt man sich also durch de[illegible]ten Fixstern, dessen Parallaxe eben noch nachweisbar oder schätzbar ist, [illegible]ugelfläche, in deren Mittelpunkt die Sonne oder (was hier dasselbe ist) die [illegible] steht, gelegt, so sind die linearen Abstände der aufserhalb dieser Kuge[illegible]egenden Gestirne für uns schlechterdings unmefsbar; namentlich darf uns der Schein nicht verleiten, die gröfseren Sterne ohne weiteres für näher, die kleineren für ferner zu erklären. Immerhin aber können uns Wahrscheinlichkeitsschlüsse noch zu weiteren Schätzungen führen. Angenommen nämlich, dafs trotz sehr verschieden grofser Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne in allen Teilen des Weltraumes dieselben Durchschnittswerte jener beiden Gröfsen gelten, so können wir die wahrscheinlichen Abstände verkehrt proportional den durchschnittlichen Helligkeiten und Eigenbewegungen setzen, bezw. diese Abstände selbst wieder als Vielfache der gröfsten parallaktisch bestimmten Abstände schätzen.

Denken wir von dem Weltbilde eines „unendlichen Universums“, das uns seit der allgemeinen Annahme des kopernikanischen Systems zur Gewohnheit geworden ist, zurück an die vorkopernikanischen Vorstellungen von den kosmischen Dimensionen, so begreifen wir, dafs es lange Zeit einen der stärksten Einwände gegen das kopernikanische System gebildet hat, es müfsten ja alle Fixsterne eine beträchtliche Parallaxe zeigen (wiewohl damals der Abstand Sonne — Erde noch 20- bis 100mal zu gering geschätzt wurde). Die Dimensionen, welche Kopernikus, um diesem Einwurfe zu begegnen, dem Weltall zuschreiben mufste, waren so ungeheure, das seine Tat einem Sprengen des antiken und mittelalterlichen Nestchens, in das sich die Menschheit gebettet glaubte, gleichkam. Dennoch hatte dieses instinktive Widerstreben gegen eine unermefsliche Erweiterung aller unserer auf irdische Räume gehenden anschaulichen Raumvorstellungen nicht einmal ein ganzes Jahrhundert standhalten können gegen die Gründe, die Kopernikus für seine Geistestat ausschliefslich den Erscheinungen der Planetenbewegungen entnommen hat.

B. Beschreibung der Bewegungen von Planeten und Monden.

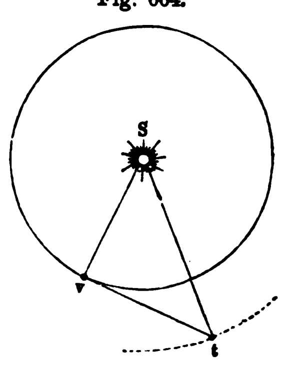
§ 183. Planeten.

In den vorkopernikanischen Zeiten bezeichnete der Name **Planet** („bewegliches Gestirn; πλανάομαι, ich irre herum) **jedes Gestirn, das seine Lage in bezug auf die Fixsterne ändert.** Im Gegensatz hierzu bezeichnete das Wort **Fixstern** die weit überwiegende Zahl derjenigen **Gestirne, die ihre Lage in bezug aufeinander nicht ändern,** sondern feste Konstellationen (**Sternbilder**) zeigen. Die tägliche und jährliche Bewegung, welcher dieser ganze „Fixsternhimmel" im Sinne OSW in bezug auf die Erde besitzt, machen auch die Planeten im ganzen mit, zeigen jedoch überdies mehr oder minder geschwinde Bewegungen in bezug auf die Fixsterne, und zwar in der Nähe der Ekliptik; diese Bewegungen erfolgen im ganzen im Sinne WSO (**rechtläufige Bewegung**), für kürzere Zeiten aber auch im Sinne OSW (**rückläufige Bewegung**).

Unter jenen vorkopernikanischen Begriff von „Planeten" fielen sieben Gestirne: *Mond* (1), Merkur (2), Venus (3), *Sonne* (4), Mars (5), Jupiter (6), Saturn (7). Sie sind hier geordnet nach der kürzeren oder längeren Zeit (beim Mond rund $27^1/_3$ Tage, bei Saturn rund 29 Jahre), binnen deren sie einen Umlauf in oder nahe der Ekliptik zurückgelegt haben. Dafs diese Ordnung schon in uralten Zeiten bemerkt worden war, bezeugen u. a. die Namen der sieben Wochentage, welche der Reihenfolge 1, 5; 2, 6; 3, 7; 4 entsprechen. (Auch in der übrigens sinnlosen Bezeichnung „Jahresregent" und dem mit ihr zusammenhängenden „hundertjährigen Knauerschen Kalender", der in Wahrheit auch nur ein siebenjähriger ist, die noch heute in keinem Kalender zu fehlen pflegen, hat sich die Erinnerung an jenen vorkopernikanischen Begriff des „Planeten" erhalten.)

Seit Kopernikus bezeichnet der Name **Planet** jedes **Gestirn, welches einen Umlauf um die Sonne** ausführt (von Kometen hier abgesehen). Unter den so umgebildeten Begriff des Planeten fallen dann von den dem Kopernikus bekannten Gestirnen: Merkur, Venus, *Erde*, Mars, Jupiter, Saturn; geordnet nach ihren Umlaufszeiten (und zugleich ihren Abständen von der Sonne).

Fig. 664.



Im Sinne des kopernikanischen heliozentrischen Systems werden Merkur und Venus als **innere,** Mars, Jupiter und Saturn als **äufsere Planeten** bezeichnet, indem die Bahnen der beiden ersteren innerhalb, die der anderen aufserhalb der Erdbahn liegen.

Schon unabhängig von der Entscheidung für das kopernikanische System fällt nämlich an Merkur und Venus auf, dafs sie sich immer nur bis auf bestimmte Winkelabstände von der

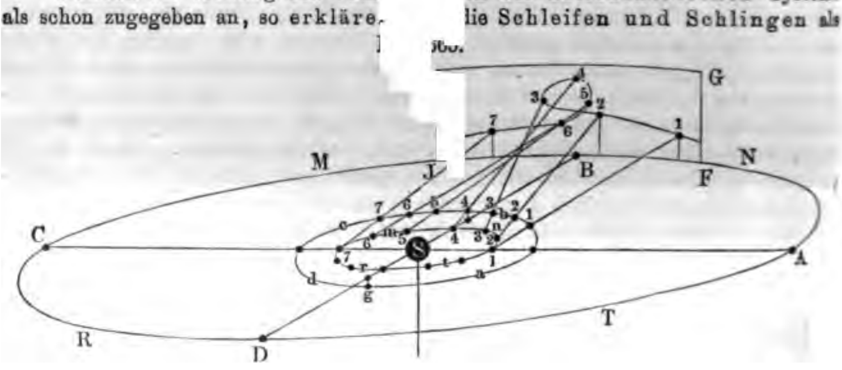
Sonne entfernen — Merkur bis auf 22°, Venus bis auf 48° östlicher (Fig. 664), bezw. westlicher Elongation — daher auch bald nach der Sonne untergehen als Abendsterne oder kurz vor der Sonne aufgehen als Morgensterne. — Deshalb waren Merkur und Venus schon in einem alten Weltsystem (das bei den Römern unter dem Namen des „ägyptischen" populär war und zu dem auch noch TYCHO BRAHE sich bekannte, als um die Sonne umlaufend angenommen worden. Aus jenen Winkelabständen läfst sich auch leicht das Verhältnis ihrer Abstände von der Sonne im Vergleiche zum Abstand der Erde von der Sonne berechnen (LA 218).

LA 218.

Die äufseren Planeten zeigen sich in allen Winkelabständen von der Sonne von 0° bis 360° (0° **Konjunktion,** 90° und 270° **Quadratur,** 180° **Opposition**). — Bei den zwei inneren Planeten heifst die Stellung zwischen Erde und Sonne **untere Konjunktion,** die jenseits der Sonne **obere Konjunktion.**

Die bisher beschriebenen Ersche... ...n der wechselnden Stellungen aller Planeten in bezug auf den Fixsternhimm... ...ilden das Tatsachenmaterial, welches PTOLEMÄUS ebenso wie KOPERNIKUS ... ...heorieen" — der geozentrischen wie der heliozentrischen — gemeinsam z... ...legten.

Nehmen wir vorläufig den Gru... ...en des heliozentrischen Systems als schon zugegeben an, so erkläre... ...die Schleifen und Schlingen als



parallaktische Abbilder der Erdbahn. So zeigt das Modell **Fig.** 665: Wenn die Erde einen ganzen Umlauf längs des inneren Kreises (*t, terra,* 1, 2, 3 . . . 7 . . .) binnen einem Erdjahre, und Mars im äufseren Kreise (*abcdg*) binnen derselben Zeit eines Erdjahres nur einen Teil des Umfanges durchläuft — und wenn überdies die Ebenen beider Bahnen etwas (in der Figur übertrieben) gegeneinander geneigt sind, aber beide durch die Sonne *S* gehen —: so müssen sich auf dem hinreichend fern gedachten Himmelsgewölbe *FGHJ* die von der Erde aus gesehenen Örter des Mars längs einer Schleife 1234567 projizieren. — Offenbar lassen sich alle Einzelheiten der Gestalt dieser verwickelten Bahn konstruieren und berechnen, wenn die Dimensionen und die gegenseitige Lage von Erd- und Marsbahn gegeben sind.

Die Aufgabe, vor der Kopernikus stand, als er das heliozentrische System gemäfs den Beobachtungen des Ptolemäus und Späterer numerisch auszugestalten und eben hiermit erst zu beweisen hatte, war die noch bei weitem schwierigere inverse Aufgabe: Aus den verwickelten Bahnen und Weg-Zeit-Gesetzen der bis dahin bekannten Planeten (siehe Tafel IX) die verhältnismäfsigen Gröfsen und Lagen der einzelnen Bahnen und der Umlaufszeiten dieser Planeten einschliefslich der Erde zu ermitteln. — Dieselbe Aufgabe hatte in der Sprache des

geozentrischen Systems gelautet: Wie bestimmt man das numerische Verhältnis zwischen den Grössen der **epizyklischen** Bewegung (annähernd gegeben durch die Länge der Schleifen, d. h. durch den zur Ekliptik parallelen Abstand der beiden Punkte des Stationärwerdens, d. h. des Überganges aus Recht- in Rückläufigkeit und aus Rück- in Rechtläufigkeit) und der **deferierenden** Bewegung (annähernd gegeben durch das Vorrücken der Örter am Fixsternhimmel, bei denen die Schleifenbildung stattfindet)? Vergl. Taf. X.

Die Lösung war für PTOLEMÄUS wie für KOPERNIKUS am leichtesten beim „obersten Planeten“, dem Saturn; denn es fällt sogleich auf, dafs für aufeinander folgende Jahre die Schleifen gleich grofs sind und dafs sie jedes Jahr nah der Ekliptik um gleiche Stücke weiter rücken. — Schon die Bahn des Jupiter zeigt zwar ein ähnliches Bild, aber sowohl die Schleifen wie die Abstände des Vorrückens sind gröfser; noch gröfser die für Mars. — Nehmen wir dazu die im XVIII. und XIX. Jahrhundert entdeckten teleskopischen Planeten Uranus und Neptun (sowie die sämtlichen Asteroiden), so gilt für alle diese äufseren Planeten, dafs **je gröfser die epizyklischen Umlaufszeiten** (in Tagen, d), **desto kleiner die Längen der Schleifen** sind; nämlich (annähernd für 1903):

Mars 780^d	Jupiter 399^d	Saturn 378^d	Uranus 369^d	Neptun 367^d
$18°$	$9° 5'$	$6° 45'$	$4° 20'$	$3°$

Überdies fällt auf, dafs die Zahl 367^d schon sehr nahe gleich dem Erdjahr ist, wie es ja sein mufs, wenn Neptun als ein sehr entfernter Körper angenommen wird; auch der kleine Schleifendurchmesser von $3°$ stimmt dazu. Aus beiden Gründen sind dann die anderen Planeten der Reihe nach als minder entfernt zu denken.

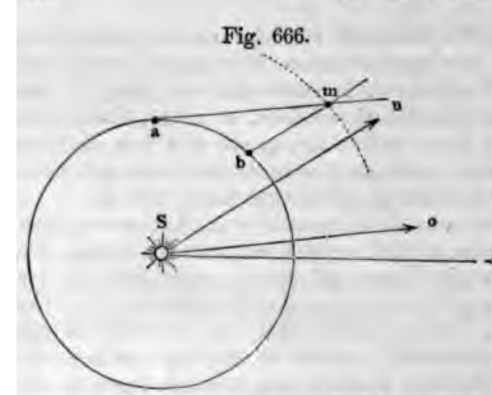
Der strenge, rechnerische Beweis aber, dafs wirklich alle Erscheinungen an den Planeten parallaktische Bilder einer und derselben Bewegung, der der Erde, seien, kann erst erbracht werden, wenn wir für jeden Planeten, unabhängig von den anderen und unabhängig von der Stelle der Bahn, von wo aus wir Erdbewohner den Planeten gerade betrachten, 1. einen Ort des Planeten im Fixsternraum in Bezug auf die Sonne angeben können. Auch ergibt sich erst hieraus 2. die wahre Gestalt der Erdbahn in Bezug auf die Sonne. Überdies haben wir 3. die wahre Umlaufszeit T jedes Planeten zu ermitteln; dies geschieht (analog der bekannten Uhrzeigeraufgabe LA 219) nach der Gleichung LA 219.

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{J} - \frac{1}{S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wobei J die Länge des Erdjahres, S die synodische Umlaufszeit des Planeten, z. B. von einer Opposition bis zur nächsten, bedeutet. — Es setzt aber diese Gleichung schon voraus, was erst zu beweisen ist, dafs nämlich auch der Erde eine bestimmte Zeit J des „Umlaufs um die Sonne“ zukomme, und dafs diese Zeit nichts anderes als das aus dem geozentrischen System bekannte Jahr sei (von dem Unterschiede zwischen siderischem und tropischem Jahre sei im folgenden abgesehen). Zu diesem Beweis gehört 4. eine Methode zur Ermittelung der wahren Umlaufszeit T jedes Planeten, die von Gleichung (1) unabhängig ist.

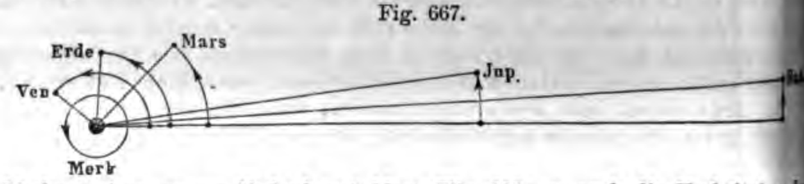
Die Lösung dieser vier Aufgaben geht zunächst davon aus, dafs die Ebene der Erdbahn sowie die Ebene jedes Planeten durch die Sonne hindurchgeht (wie dies in Ptolemäus' und Kopernikus' Annahme „exzentrischer Kreise“ und später im ersten Keplerschen Gesetz mit eingeschlossen ist, indem die Sonne im Brennpunkte jeder Bahnellipse, also in deren Ebene liegt; speziell für die Erdbahn ist dies dadurch gegeben, dafs die Ekliptik im geozentrischen Sinne gröfster Kreis am Himmel ist). —

Fig. 666.



Zu 4: Wiewohl z. B. der P… Mars (m, Fig. 666) von versch… denen Stellungen der Erde a, b … gesehen sich auf Stellen des Him… melsgewölbes projiziert, aus de… im allgemeinen nicht zu entnehm… ist, was davon auf Rechnung sein… eigenen wechselnden Stellung un… der der Erde kommt, so ist de… der Zeitpunkt des Hindurch… gehens durch den (aufstei… genden) Knoten ein solcher, vo… dem wir wissen können, daſs sich der Planet nicht nur scheinbar, sondern wirklich in diesem (aufsteigenden) Knoten befinden müsse, von welch… Punkte der Erdbahn aus wir ihn auch beobachten mögen. — In der Tat stellt … auch die Zeit für je zwei aufeinander folgende Durchgänge durch de… selben **Knoten** als eine konstante dar und zwar ist dies eben die wahr… **Umlaufszeit T des Planeten.** Es ergeben sich nach dieser unabhängigen Meth… die Umlaufszeiten für die inneren und äuſseren Planeten nach Tafel VII. — … anschaulicheres Bild geben noch die Bogen (bezw. Winkel und Winkelgeschwindi… keiten), die die Planeten binnen derselben Zeit zurücklegen, in der der schnellst…

Fig. 667.



Merkur, einen ganzen Umlauf zurücklegt (Fig. 667, wo auch die Verhältnisse d… Abstände eingehalten sind).

Zu 3: Aus den beobachteten synodischen Zeiten und aus der Annahme, daſs das Jahr in geozentrischem Sinne (beobachteter Umlauf der Sonne in der Ekliptik) zugleich das Jahr in heliozentrischem Sinne (d. i. die Umlaufszeit der Erde um die Sonne) sei, ergeben sich die folgenden Zahlen

Synodische Umlaufszeiten in Erdjahren

	Merkur	Venus	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
beobachtet:	0,327	1,620	2,140	1,090	1,042	1,010	1,004
berechnet:	0,316	1,630	2,130	1,090	1,040	1,019	1,004

In der sehr guten Übereinstimmung der nach 4 und 3 sich ergebenden Wer… von T liegt hiermit der eigentliche Beweis des kopernikanischen Systems.

Zu 2 und 1: Ein Durchgang des Mars durch den aufsteigenden Knot… wurde z. B. am 1. Januar 1846 von der in Bezug auf Sonne und Fixsterne in… befindlichen Erde aus beobachtet und das nächstemal am 19. November 18… von b aus. Denken wir uns die Erdbahn nicht als Kreis, sondern als eine e… zu bestimmende Kurve und legen wir die Strecke Sa als Längeneinheit … Grunde (sie ist der kleinste Abstand Erde-Sonne, da diese am 1. Januar dur… das Perihel geht), so sind von einem ebenen Viereck $Samb$ auſser dieser Sa noch bekannt drei Winkel: Sam als Längenunterschied von Sonne und … barem Marsort; ebenso Winkel Sbm; endlich Winkel aSb. (Dabei pfle…

Tafel IX.

Adler

Fuhrmann

Perseus

Andromeda

Triangel

Widder

Fische

Stier

Walfisch

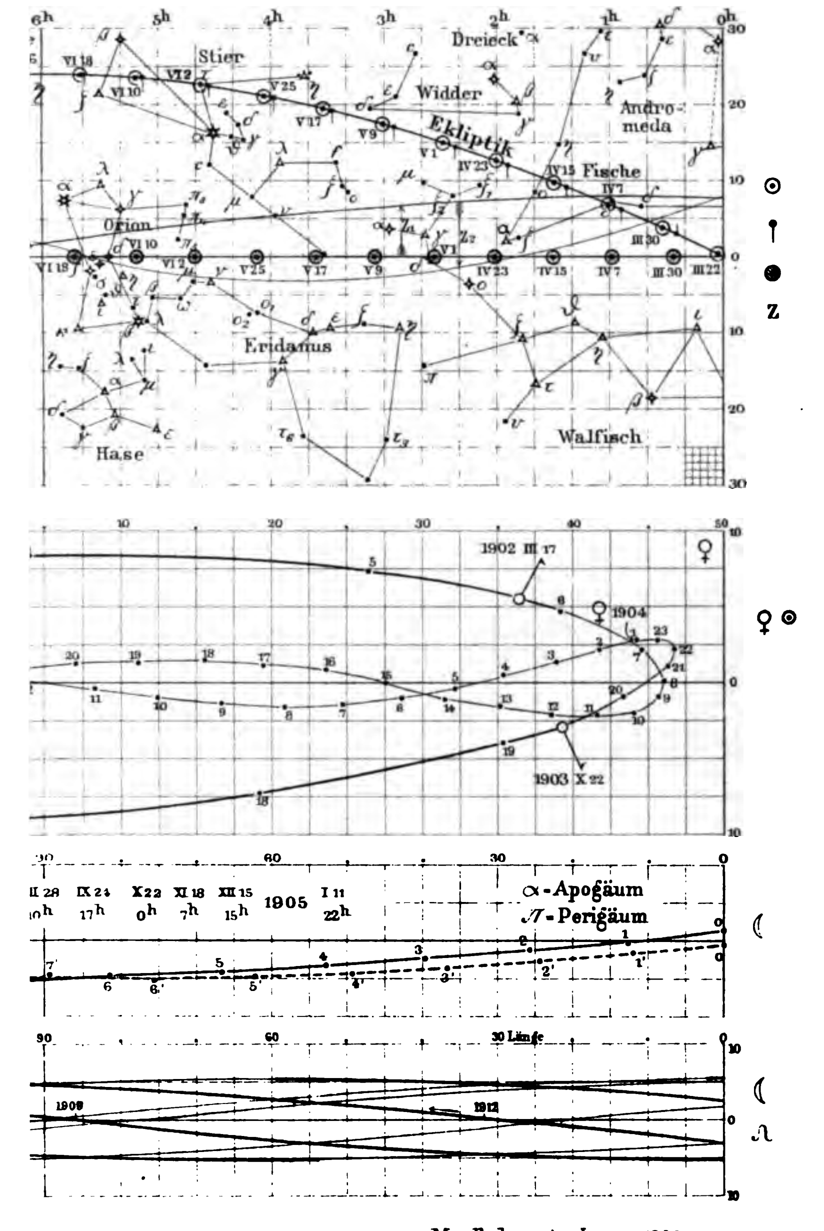
Orion

Eridanus

Januar I — Juni VI — Mai V — April IV — März III

rückläufig

1900 vom III 17 bis VIII 16
1901 „ III 20 „ VIII 21
1902 „ III 25 „ VIII 26
1903 „ III 30 „ VIII 31
1904 „ IV 5 „ IX 4



⊙
♀ ⊙
☾
☾ ☊

. ⊙ u. ☾ bei Neumond
nisse nach 18 Jahren 11 Tagen
nde nach 19 Jahren 0 Tagen
Jahren
nde im folgenden Jahre mit

Zu XI: Mondbahnen im Januar 1900, 1903, 1906, 1909, 1912, 1915, 1918. In 18,8 Jahren macht der ☊ einen Umlauf, die Bahn nimmt ihre Lage am Fixsternhimmel wieder ein.

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
8	V 24	VI 9	VI 25	VII 11	VII 27	VIII 12	VIII 28	IX 13	IX 29	X 15	X 31	XI 16	XII 2	XII 18	XII 32
9	V 25	VI 10	VI 26	VII 12	VII 28	VIII 13	VIII 29	IX 14	IX 30	X 16	XI 1	XI 17	XII 3	XII 19	XII 31
7	V 23	VI 8	VI 24	VII 10	VII 26	VIII 11	VIII 27	IX 12	IX 28	X 14	X 30	XI 15	XII 1	XII 17	XII 31

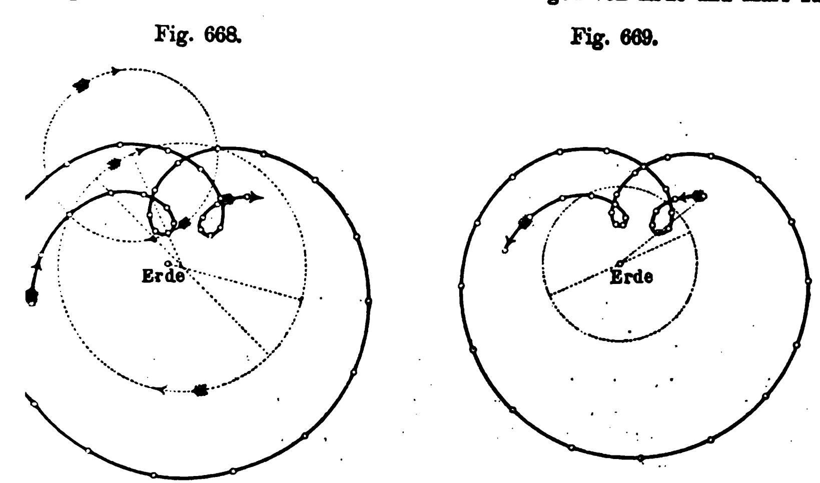


Sehrichtungen z. B. *am* parallel zu sich durch die Sonne verlegt zu denken, :. nach *So* und diese Richtung $am = so$ durch den Winkel gegen die Gerade der Sonne zum Frühlingspunkte *S* ♈, d. i. durch die heliozentrische Länge Mars an jenem Tage auszudrücken.) LA 221.

LA 221.

Nach dieser Methode hat KEPLER sehr genau die elliptische Form der lbahn und die Stellung der Sonne *S* im Brennpunkte dieser Bahn festellt. — Nachdem hiermit die Lage und (relative) Länge aller Standlinien für Beobachtungen von Planetenörtern bekannt waren, konnte Kepler auch die n aller übrigen Planeten feststellen, was im **ersten und zweiten Keplerschen** etze ausgesprochen ist (1609). Figg. 668 und 669 zeigen, in wie guter Anerung auch schon Ptolemäus die relativen Stellungen von Erde und Mars zu

Fig. 668. Fig. 669.



hreiben vermocht hat — wie aber doch die Ersetzung der Hipparch-Ptoleschen exzentrischen Kreise durch Keplers Ellipsen auch schon diese :iven Bewegungen etwas anders (durch verschieden grofse epizyklische eifen) darstellt.

Zwischen den hiermit erkannten grofsen Halbachsen der Bahnellipsen und nach 3 und 4 erkannten wahren Umlaufszeiten bemerkte sodann Kepler vernismäfsig spät (1619) auch die im **dritten Gesetz** ausgesprochene Beziehung.

KEPLERS Zeitgenosse GALILEI hatte fast gleichzeitig mit der Entdeckung der en ersten Keplerschen Gesetze (mit denen sich aber bezeichnenderweise sogar ILEI selbst nicht zu befreunden vermochte) durch die Erfindung des Fernes der kopernikanischen Lehre zu augenscheinlichen Beweisen verholfen, iner zunächst die Phasen der **Venus** und die verschiedene Gröfse ihrer ibe beobachtete. Es war nämlich öfters als Grund gegen dieses System anhrt worden, dafs dann Venus, indem sie der Erde bis auf 1 Viertel des Erdlhalbmessers nahe kommt (in der unteren Konjunktion Venus — Sonne) und sich 7 Viertel Erdbahnhalbmesser von der Erde entfernt (in der oberen Konjunk- ı in Gröfsen erscheinen müfste, die sich wie 7 : 1 verhalten. Dieser Einwurf e aber übersehen, dafs die kleinste Venusscheibe voll beleuchtet, die gröfste nicht beleuchtet ist. — Die von GALILEI beobachteten Veränderungen von :se und Gestalt der Venusscheibe bezw. -sichel stimmen vollständig mit allen

Forderungen der kopernikanischen Annahme, wenn ebenfalls wieder die Venus wie der Mond, als Kugel angenommen wurde.

Über Galileis Entdeckung von vier Monden des **Jupiter** vergl. folg. §.

An **Saturn** beobachtete Galilei durch sein noch sehr mangelhaftes Fernrohr zwei scheinbar an ihm klebende lichte Körper, die nach einiger Vervollkommnung des Fernrohres eine Zeitlang als „Henkel" gedeutet wurden, bis erst Huygens den

Fig. 671.

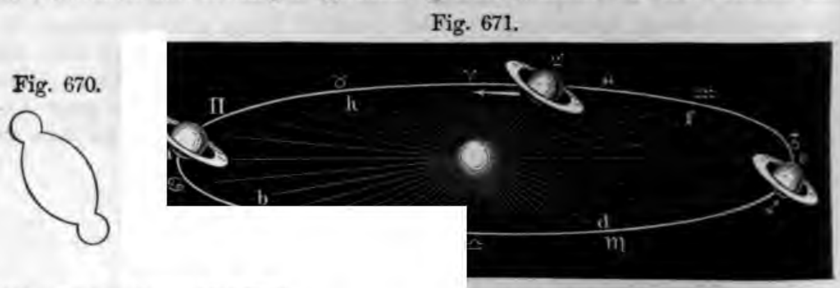


Fig. 670.

Saturnring erkannte (Fig. 67 … wurde er als mehrfach geteilt beobachtet. — Maxwell zeigte … Gründen, dafs diese Ringe keine starren Systeme sein können, … llosen kleinen Körpern, gleichsam Monden, bestehen müssen (da ein … nder Ring bersten müfste; neuestens wurde diese Theorie photomet … oskopisch bestätigt).

Noch anderthalb Jahrhu… … pler und Galilei war die Zahl bekannter Planeten auf die auch … Kopernikus bekannten beschränkt. Durch das Teleskop fand Herschel … n **Uranus.** In der Neujahrsnacht 1801 wurde der erste der **Asteroide** … (Ceres genannt), von denen jetzt an 500 bekannt sind, und die sämtlich in dem Gürtel zwischen Mars und Jupiter sich bewegen, bis auf den 1897 entdeckten Eros, der im Perihel der Erde näher kommt als Mars. — Über die Entdeckung des **Neptun** (des äufsersten bis jetzt bekannten Gliedes unseres Planetensystemes) durch Leverrier 1846 vergl. § 21.

§ 184. Monde.

„Mond" war bis zu Galileis Beobachtung der vier Begleiter des Jupiter und der nachmals entdeckten Saturn-, Mars-, Uranusmonde u. s. f. kein Gattungs-, sondern ein Eigenname für den Begleiter der Erde. Hinsichtlich seiner hatte das kopernikanische System nichts an der Annahme der Alten zu ändern.

Die Beschreibung der Erscheinungen, die der Mond dem Beobachter auf der Erde darbietet, gliedert sich in die der Mondphasen und der Bewegungen des Mondes in Bezug auf den Fixsternhimmel. Wiederholende Beschreibung nach Fig. 672, die in ihr dargestellten „wirklichen" Bewegungen und Beleuchtungen sind aus den im folgenden kurz geschilderten „scheinbaren" abgeleitet:

Der Mond ist unsichtbar als **Neumond,** indem er dann zwischen Erde und Sonne steht und also der Erde die unbeleuchtete Seite zuwendet. Schon einen Tag später zeigt er sich kurz nach Sonnenuntergang nahe dem Westhorizont, indem er als schmale Sichel die konvexe Seite der Sonne zuwendet. Indem er binnen je einem Tage um rund 13° im Sinne WSO in bezug auf den Fixsternhimmel nahe der Ekliptik (bis auf höchstens etwa 5° südlich oder nördlich

von ihr) fortrückt, legt er binnen einem **siderischen Monat** von **$27^1/_3$ Tagen** (genauer: $27^d\ 7^h\ 43^m\ 11{,}5^s$) einen Umlauf in Bezug auf den Himmel zurück und zeigt dabei in einem **synodischen Monat** von **$29^1/_2$ Tagen** (genauer: $29^d\ 12^h\ 44^m\ 2{,}8^s$) einen vollen Wechsel der

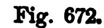
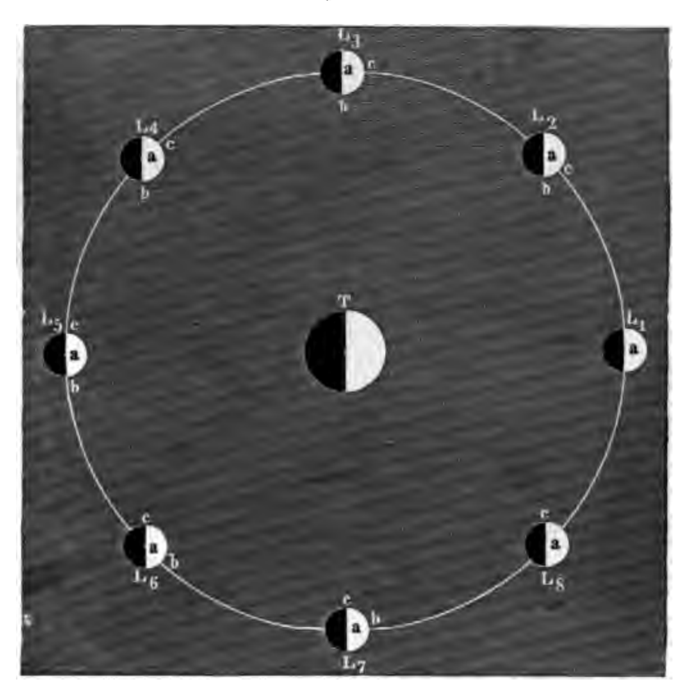


Fig. 672.



Phasen, indem er nach rund je einer Woche (die als siebentägige Periode zweifellos eben hierin ihren Ursprung hat) **Neumond, erstes Viertel, Vollmond, letztes Viertel** wird. — Erklärung des Zeitunterschiedes der beiderlei Monate analog der Uhrzeigeraufgabe (LA 219). LA 219.

Die hiermit nur in erster Annäherung beschriebene Bewegung des Mondes ist in Wahrheit eine überaus verwickelte; gleichwohl vermochte schon Hipparch diese Bewegungen in bewunderungswürdiger Annäherung zu beschreiben, indem er eine Bewegung ähnlich der der Sonne in der Ekliptik, aber längs einer Bahn, die gegen die Ekliptik um 5° geneigt ist, zu Grunde legte und dann die Abweichungen von dieser Bahn und deren fortwährende Veränderungen (infolge deren sie im ganzen ein dichtes Netzwerk um jene mittlere Bahn darstellt) in mehrere „Ungleichheiten“ auflöste. Heute verstehen wir alle diese und andere Abweichungen als durch das Newtonsche Gravitationsgesetz notwendig gefordert. Steht z. B. der Mond als Neumond in demjenigen Teil seiner Bahn, der am meisten, also um 5°, von der Ekliptik als scheinbarer Sonnenbahn absteht, so wird die Sonne den Mond in die gerade Linie Erde—Mond—Sonne hereinzuziehen suchen. Es werden also schon deshalb die „Knoten“ der Mondbahn längs der



Ekliptik wandern müssen. Die genaueste Kenntnis der Lage dieser Knoten ist unentbehrlich für die Berechnung der **Sonnen- und Mondfinsternisse** (Fig. 673), da diese eben nur dann eintreten, wenn der Mond den Knoten zur Zeit des Neumondes (Sonnenfinsternis), bezw. des Vollmondes (Mondfinsternis) passiert. (Daher auch der Name Ekliptik, d. h. Linie der Finsternisse, ἐκλίψεις.) Eben deshalb können auch in einem Jahre nicht mehr als höchstens fünf Finsternisse stattfinden, und zwar folgt nicht selten binnen einem halben synodischen Monat auf die Sonnen- eine Mond- … und umgekehrt.

…r Mond kehrt der Erde an- …l immer „dieselbe Seite" zu. …uer seiner Umdrehung (Ro- … um eine zur Mondbahn normale … ist also gleich der seines Um- … (Translation, § 26) um die Erde. … aber die Umdrehung mit konstan- …hwindigkeit erfolgt, der Umlauf da- …emäfs dem I. und II. Keplerschen …lso in einer Ellipse und ungleich- förmig, so bekommen wir noch 7° 53′ auf jeder Seite der Mondscheibe mehr als nur die uns zugewendete Hälfte der Mondkugel zu sehen (Libration, und zwar „optische" — hierzu noch die sehr kleine „physische" Libration).

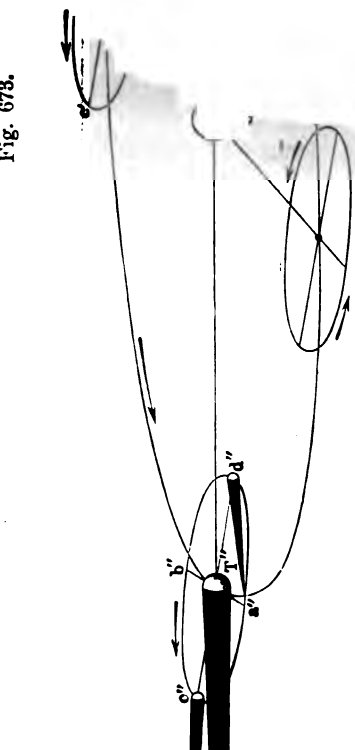


Fig. 673.

Galileis Entdeckung von **vier** Begleitern des Jupiter (Fig. 674 a. f. S.) gab das erste direkt beobachtete Beispiel dafür, dafs auch um andere Körper als die Erde Gestirne umlaufen, und jene Beobachtungen waren deshalb ein überaus gewichtiges Argument zu Gunsten der von Kopernikus aufgestellten antigeozentrischen Hypothese. Erst 1891 wurde noch ein dem Jupiter sehr naher fünfter Begleiter beobachtet. — Mars hat **zwei** ganz kleine Monde, Saturn deren **acht**. Alle diese Monde oder Trabanten umkreisen ihren Hauptplaneten im Sinne WSO, also in demselben, der in allen Bewegungen des Planetensystems herrscht. Nur der Mond des Neptun zeigt überraschenderweise den entgegengesetzten Sinn des Umlaufes, und die vier Monde des

Uranus stellen einen Übergang hierzu dar, indem die Neigungen ihrer Bahnen etwa 98° betragen (— wichtig als Ausnahme von der der KANT-LAPLACEschen Theorie ursprünglich zu Grunde gelegten Tatsache des gemeinschaftlichen Umlaufsinnes).

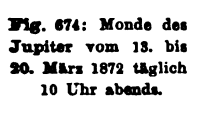
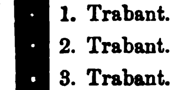
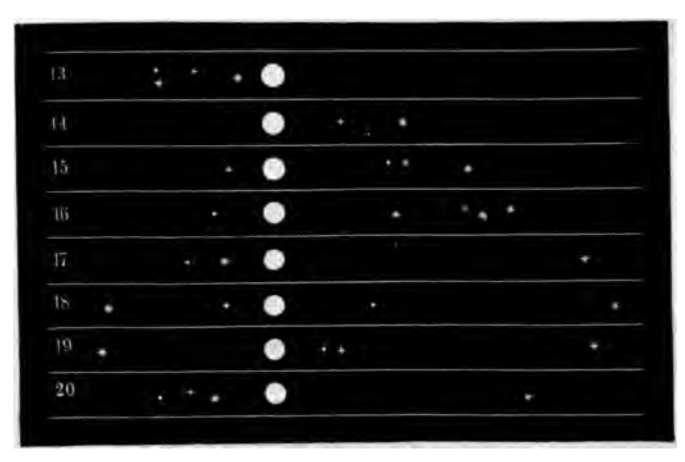


Fig. 674: Monde des Jupiter vom 13. bis 20. März 1872 täglich 10 Uhr abends.



(Am 14. März standen der 2. und 4. Trabant hinter, am 16. der 1. vor, am 17. der 1. hinter dem Jupiter.)



§. 185. Kometen, Sternschnuppen, Meteoriten.

Von jeher erregte das ziemlich seltene Schauspiel grofser, lichtstarker Kometen allgemeine Aufmerksamkeit, ja Schrecken. Seit Erfindung lichtstarker Teleskope hat sich die Zahl der alljährlich entdeckten und beobachteten Kometen auf durchschnittlich 4—5 gesteigert.

Im Gegensatze zu den Planeten, welche sich alle nahe der Ekliptik halten, durchkreuzen die Kometen unser Sonnensystem nach allen Richtungen. Sie werden unterschieden in **periodische** und **nichtperiodische**; erstere beschreiben geschlossene Bahnen, nämlich (abgesehen von den für die Kometen oft sehr beträchtlichen Störungen, namentlich durch die gröfseren Planeten) Ellipsen; die nichtperiodischen bewegen sich in Parabeln und Hyperbeln. In den Brennpunkten aller dieser Kegelschnitte steht die Sonne als Zentralkörper, und es gelten überhaupt für sie die (für Parabel und Hyperbel erweiterten) Keplerschen Gesetze, wie NEWTON erkannt hat.

Das Aussehen der Kometen ist ein sehr mannigfaltiges; nicht alle sind, wie ihr Name es sagt, „Haarsterne“ (Schweifsterne), an denen sich deutlich ein Kern und ein Schweif aus weniger stark leuchtender Materie unterscheiden läfst; einiges über die physische Konstitution der Kometen im § 187. Unabhängig von den hierüber aufgestellten Hypothesen ist die Tatsache, dafs bei den Kometen mit Schweifbildung diese am stärksten in der Nähe des Perihels zu sein pflegt und dafs der Schweif von der Sonne meistens abgewendet ist (was die Hypothese elektrischer Abstofsungen oder anderer elektromagnetischer Einwirkungen nahe legt). — Fig. 675 a. f. S.

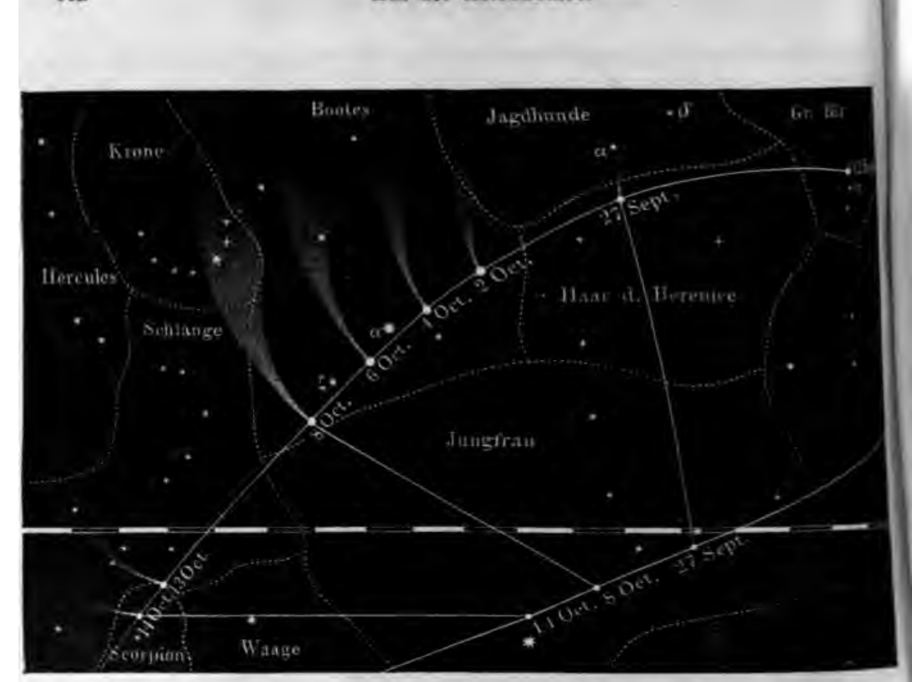


Fig. 675. Donatis Komet. — Stellungen der Sonne am 27. September, 8. und 14. Oktober.

Meteore (Feuerkugeln, Boliden, Sternschnuppen) nennt man plötzlich aufleuchtende und unter sekunden- bis minutenlangem Nachleuchten ihrer Spur wieder verschwindende Himmelskörper. Von einzelnen ist ihr Niederfallen auf die Erde direkt beobachtet worden.

Als Chladni (der Entdecker der Klangfiguren, § 88) vor erst einem Jahrhundert behauptete, jene flüchtigen Lichterscheinungen rühren von Weltkörperchen her, die in der Atmosphäre der Erde glühend geworden seien, und die häufig an der Erdoberfläche oder einige Meter unter ihr vorgefundenen Eisenmassen von oft eigentümlicher krystallinischer Struktur seien solche kosmischen Körper, stiefs diese Lehre auf härtesten Widerspruch. Auch direkt beobachtete Meteorfälle suchte man damals noch wegzudeuten. Gegenwärtig ist nicht nur der kosmische Ursprung dieser Körper aufser Zweifel, sondern es fügt sich auch die Berechnung ihres Laufes vor dem Eindringen in die Atmosphäre ebenfalls den Keplerschen Gesetzen. — Insbesondere für **Sternschnuppenschwärme,** deren prächtigste der Laurentiusstrom (um den 12. bis 14. August) und der Leonidenschwarm (um den 15. November) sind, ist die **Identität** mit Kometen sichergestellt. — Für die Beobachtung einzelner Meteore ist den Astronomen die Mitwirkung gebildeter Laien erwünscht. Es sind namentlich die Orte, an welchen das Meteor aufleuchtet und verlischt, durch Beachtung benachbarter Fixsterne im Gedächtnis zu behalten, sowie die Zeitpunkte jener Erscheinungen bezw. die Dauer der Sichtbarkeit. Sind solche Beobachtungen an zwei hinreichend weit entfernten Orten gemacht worden, so läfst sich daraus der Ort, bezw. aus mehreren Paaren solcher Beobachtungen die Bahn des Meteors berechnen.

C. Aus der physischen Astronomie.

§. 186. Körperlichkeit der Gestirne. — Geschwindigkeit des Sternenlichtes.

Geschichtliches. Die gesamte antike Astronomie und gröfstenteils auch noch die des Kopernikus und Kepler war eine wesentlich mathematische, nämlich geometrisch-phoronomische, indem die Beschreibungen der Bewegungen der himmlischen Lichter unabhängig blieben von den manchmal sehr abenteuerlichen Vorstellungen über deren physische Beschaffenheit. So war vielfach der Fixsternhimmel für eine krystallene Sphäre gehalten worden, durch deren Löcher ein ewiges Feuer, das Empyreum, hereinleuchte. Noch Kopernikus hielt das Fixsternlicht für reflektiertes Sonnenlicht (wie wir heute nur mehr das Licht der Planeten und Monde und zum Teil der Kometen). Erst von Giordano Bruno († 1600) wurde mit Entschiedenheit behauptet, dafs alle Gestirne „Weltkörper" seien. — Nicht nur im allgemeinen die Körperlichkeit der Gestirne, sondern die Einordnung namentlich ihres mechanischen (thermischen und optischen) Verhaltens unter die allgemeinen Gesetze der Physik, wurde über alle Zweifel erhoben erst durch die mit Newton beginnende Anwendung der Dynamik auf die Astronomie. — Im folgenden nur einige wenige Mittheilungen aus dem unerschöpflich reichen und reizvollen Gebiete der physischen Astronomie.

Da wir mit keinem einzigen Himmelskörper, auch dem uns nächsten, dem Mond nicht, in direkten Verkehr zu treten vermochten, so sind wir mit all unserem Wissen um die stoffliche Beschaffenheit der Himmelskörper auf die uns durch Strahlung zugesendete Energie angewiesen. Sie gibt sich uns zunächst kund als Sternen**licht**; doch sind es seit der während der letzten zwei bis drei Jahrzehnte einen mächtigen Aufschwung nehmenden Himmelsphotographie keineswegs mehr nur die optisch, sondern auch die blofs **chemisch** wirksamen Strahlen, denen wir solche Aufschlüsse verdanken. (Was folgt daraus, dafs z. B. Photographieen von Nebelflecken oft stark von sorgfältigen Zeichnungen nach dem Bilde im Fernrohr abweichen?) Hierzu kommen dann auch die **Wärme**strahlen, welche uns freilich nur für die Sonnenstrahlung und nur mit feinsten Bolometern auch für die reflektierte Mondstrahlung, nicht aber für die Planeten und Fixsterne merkliche Wärmemengen anzeigen.

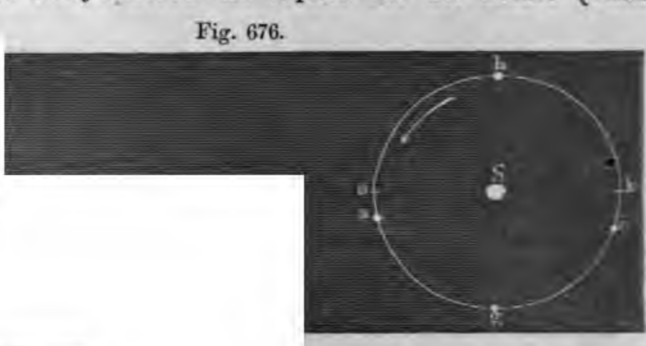
Alle diese Strahlen geben uns durch ihre Richtung über den **Ort** (freilich für weitaus die meisten nur in Winkel-, nicht in Längenangaben § 182) und durch ihre Brechbarkeit über die **Temperatur** und die **chemische Beschaffenheit** der Himmelskörper (durch Spektralanalyse und Photometrie) Aufschlüsse.

Der Gedanke, dafs wir von den Sternen fast nur durch ihr Licht wissen (und hieraus unmittelbar von manchen dunklen, z. B. vom Sirius-, vom Algol-Begleiter), gewinnt noch vertieftes physikalisches (ja erkenntnistheoretisches, Anh., Nr. 39) Interesse, wenn wir bedenken, dafs manche von den Sternen, die wir direkt „sehen", dennoch vielleicht gar nicht mehr existieren: dies mit Rücksicht auf die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes. Es mögen sogleich hier die beiden astronomischen Methoden (über die terrestrischen vergl. § 122) zur Bestimmung dieser Geschwindigkeit des Lichtes folgen:

Anh. 39.

1. **Olaf Römer** (1675) hatte zur Zeit der **Opposition** des Jupiter [Fig. 676, Stellung der Erde in *a*)] einige aufeinander folgende Verfinsterungen des innersten Jupitermondes beobachtet, und aus der hier immer gleichen Zwischenzeit von $42^h\ 28^m\ 36^s$ den Eintritt der Verfinsterungen für etwas mehr als ein halbes Jahr später, nämlich bis zur Zeit der **Konjunktion** des Jupiter mit der Sonne (Stellung

Fig. 676.



der Erde in *c*) voraus[illegible]rden aber jetzt die Verfinsterungen um 986 Sekun[illegible]n später sichtbar, als erwartet war. Römer schloſs, d[illegible]ei, die das Licht zum Zurücklegen des Erdbahndurchmesser[illegible] Dieser, als 40 Mill. Meilen angenommen, ergibt als kosmische L[illegible]tgeschwindigkeit rund 40 000 **Meilen per Sekunde = 300 000 km-sec^{-1}.**

Die Verspätungen, bezw. Verfrühungen von einer **Verfinsterung zur nächsten** sind sehr klein sowohl in Opposition wie Konjunktion, da sich die Erde fast normal zur Geraden Jupiter — Erde — Sonne — Erde bewegt, dagegen am gröſsten nahe den Quadraturen (LA 222). — Römers Schlüsse auf eine endliche Geschwindigkeit des Lichtes waren zu ihrer Zeit so überraschend, daſs sie allgemeinen Glauben erst fanden, als sie ein halbes Jahrhundert später von Bradley auf ganz davon unabhängigem Wege, nämlich dem der Aberration, bestätigt wurden.

LA 222.

2. Bradley (1727) bemühte sich durch feinste Messungen festzustellen, ob es Fixsterne mit meſsbaren Parallaxen gebe (über die Bedeutung dieser Frage vergl. § 182). Er wählte hierfür einen Stern nahe dem Pol der Ekliptik (γ im Drachen), der dann binnen einem Erdjahr ein parallaktisches Abbild der Erdbahn WSONW im selben Sinne *onwso* hätte beschreiben müssen und zwar so, daſs, wenn vier beliebige um je 90° voneinander abstehende Punkte der Erdbahn mit W, S, O, N bezeichnet werden, der Stern von W aus gesehen in *o*, von S aus gesehen in *n* u. s. f. hätte erscheinen müssen. In der Tat nun zeigte jener Stern zwar wirklich eine Bewegung im Sinne *wsonw*, wider Erwarten aber erschien er von W aus gesehen in *w*, von S aus gesehen in *s* u. s. w., also immer an den gerade entgegengesetzten Stellen der Bahn. Die Ursache der Erscheinung muſste also eine ganz andere sein als eine parallaktische. — Bradley geriet auf die richtige Erklärung, als er auf einem Schiffe fahrend den Wimpel eine Zwischenstellung zwischen der Richtung der Fahrt und der des Windes einnehmen sah: er nannte dann jene Abweichung des Fixsternlichtes jährliche **Aberration** und den Halbmesser jenes kleinen Kreises ($\alpha = 0°\ 0'\ 21''$) den **Aberrationswinkel**.

Bradleys richtige und durch alle späteren Beobachtungen anderer Sterne bestätigte Erklärung (Sterne nahe der Ekliptik beschreiben nämlich nur schmale Ellipsen, deren grofse Halbachsen parallel der Ekliptik liegen und ebenfalls 0° 0′ 21″ betragen) läfst sich auf mehrfache Art veranschaulichen; z. B.: Marschieren auf der Strafse nahe hintereinander breite Soldatenkolonnen, so mufs man, um zwischen ihnen hindurchzukommen, nicht normal zur Richtung der Strafse, sondern unter einem schiefen Winkel hinübergehen. Desgleichen: Fiele ein Meteor vertikal auf ein Schiff, so dafs es durch Deck und Unterdeck Löcher schlägt, so liegen diese nur beim ruhenden Schiff vertikal untereinander, nicht aber beim bewegten. Vergl. die schiefen Regenstreifen nach Fig. 23. — Wer bei vertikal fallendem Regen läuft, mufs den Regenschirm schief vor sich halten. — Noch unmittelbarer: Ist das Fernrohr (Fig. 677) normal zur Ebene der Ekliptik auf den Stern gerichtet, so hat binnen der Zeit, die das Licht vom Objektiv bis zum Okular braucht, das Okular schon ein Stückchen der Erdbahn zurückgelegt. Da nun in dem Geschwindigkeitsdreieck CBA die Seite CB der Geschwindigkeit der Erde längs ihrer Bahn $c = 4$ Meilen-sec^{-1} entspricht und da $ctg\, 0° 0' 21'' \doteq 10\,000$ ist, so ist die der Seite AB entsprechenden Geschwindigkeit $C = 40\,000$ Meilen-sec^{-1}.

Fig. 677.

Die hier nach zwei astronomischen Methoden bestimmte Lichtgeschwindigkeit, welche anderthalb Jahrhunderte später durch die beiden terrestrischen Methoden (§ 122) glänzend bestätigt wurde, gestattet es, von kosmischen Distanzen übersichtlichere Vorstellungen zu geben als durch die direkten Längenangaben. So braucht das Licht vom Mond auf die Erde 1¼ Sekunden, von der Sonne 8 Minuten, von dem uns nächsten Fixstern (*α* Centauri, § 182) 4,4 Jahre!

§. 187. Physikalische Eigenschaften der Planeten, Monde und Kometen.

Die Körperlichkeit des Mondes war schon dem Altertum bekannt und geläufig, da hier die wechselnde Gestalt der Lichtgrenze einen strengen Schlufs auf seine Kugelgestalt zuliefs. — Lange rätselhaft war die Natur der Mondflecken (die Namen „*mare imbrium*“, „*mare serenitatis*“ u. dergl. bedeuten nicht wirkliche „Meere“); sie sind seit der Entdeckung des Fernrohres zum Teil als die Schatten der Mondgebirge erkannt, zum Teil aus der verschiedenen Färbung, d. h. Reflexionsfähigkeit des Gesteines erklärt.

Auch an der Erdoberfläche müfsten ja vom Weltraum aus z. B. Kreidefelsen heller erscheinen als Humus. — Gegenwärtig ist die Oberflächenbeschaffenheit des Mondes so eingehend erforscht, dafs sich die „Selenographie“ eines fortgeschritteneren Zustandes erfreut als selbst mancher Teil der Geographie. Freilich gilt dies um so weniger von der der Erde für immer abgekehrten Seite des Mondes (§ 184); immerhin weifs man aber auch von dieser, dafs sie z. B. nicht die Form etwa eines von der Erde weit wegragenden Stiles oder dergleichen haben und überhaupt nicht allzu weit von der der Halbkugel abweichen kann, da sich solche Abnormitäten durch pendelnde Bewegungen des ganzen Mondkörpers u. dergl. verraten müfsten.

Da bei „Sternbedeckungen“ bis zum Augenblick des Verschwindens des Sternes hinter der Mondscheibe keine Brechung und Farbenänderung des Sternlichtes zu beobachten ist, müssen wir schließen, daſs der Mond entweder keine Atmosphäre oder nur eine unmerklich dünne besitze. Daraus folgt weiter, daſs er auch ebenso wenig Wasser besitzt; denn dieses müſste ins Leere alsbald verdunsten. Daher sind auch die während der je vierzehntägigen Einstrahlung seitens der Sonne und ebenso langen Ausstrahlung in den Weltraum an jedem Punkt der Mondoberfläche eintretenden Temperaturdifferenzen jedenfalls sehr beträchtlich; was ein weiterer Grund dafür ist, daſs ein organisches Leben auch nur annähernd ähnlich dem irdischen auf dem Mond fehlen muſs.

Über die Oberflächenbeschaffenheit der der Erde näheren Planeten geben uns die Fernrohre unserer Zeit reichlichen Aufschluſs; hier nur wenige Beispiele:

An **Mars** sind seit langem die weiſsen Polarflecken beobachtet, welche zu derjenigen Zeit gröſser werden, wann für den betreffenden Pol des Mars infolge seiner Rotation und Stellung der Achse zur Sonne Winter ist. Hiermit ist das Vorhandensein von Wasser auf dem Mars wahrscheinlich — und hiermit auch das eines organischen Lebens; dieses brauchte von dem der Erde nicht einmal wesentlich verschieden zu sein, da die Einstrahlung seitens der Sonne infolge des Verhältnisses der Abstände 1 : 1·5 nur im Verhältnis 1 : 2·25 geringer ist.

Die vieljährigen Beobachtungen Schiaparellis haben höchst merkwürdige Zeichnungen der Marsoberfläche erkennen lassen. Auch hier spricht man von Kontinenten und Meeren, ohne daſs hiermit die physische Beschaffenheit zweifellos richtig bezeichnet wäre, und überdies von Kanälen, die sich in Ausdehnungen von Tausenden von Kilometern durch die Kontinente hinziehen und mannigfach kreuzen. Die besonders überraschenden Verdoppelungen dieser Kanäle (welche zu abenteuerlichen Annahmen groſsartiger Schleusenwerke u. dergl. geführt haben) lassen sich vielleicht als Beugungserscheinungen im Fernrohre erklären.

Jupiter zeigt schon beim direkten Anblick durch ein schwach vergröſserndes Fernrohr deutlich eine Abplattung, wie sie bei der Erde nur aus Meridiangradmessungen erschlossen werden kann.

Senkrecht gegen die hieraus zu erschlieſsende Rotationsachse verlaufen deutliche Streifen längs des Äquators und der Parallelkreise des Jupiter (ähnlich wie die verschiedene Bewölkung der Erde in den Tropen, Kalmen, gemäſsigten Zonen u. s. w. der Erde vom Weltraum aus erscheinen müſste). Auffällig sind überdies einzelne Gebilde, wie der groſse ovale rote Fleck, vielleicht eine Art Wunde in der Rinde Jupiters, durch die Feurigflüssiges aus dem Inneren ausgetreten ist.

Über **Saturn** und seinen **Ring** vergl. § 184.

Wie schon die vorstehende Auswahl aus unserem sehr reichhaltig gewordenen Wissen über die physische Konstitution der Planeten zeigt, sind die Sehwinkel und hiermit die linearen Gröſsen vieler von ihnen noch sehr wohl meſsbar (bisher unmeſsbar allerdings die meisten von den kleineren Planeten). Daher sind auch ihre Volumina bekannt und hieraus wieder zusammen mit den auf Grund des Gravitationsgesetzes erschlossenen Massen (§ 21) ihre mittleren Dichten; eine Zusammenstellung einiger dieser Daten, zusammen mit denen für Sonne und Erdmond, in der Tafel auf der folgenden Seite:

	Mittlere Abstände von der Sonne			Umlaufszeit		Masse		Volumen		Dichte	
	in Millionen		in Erdweiten	wahre (siderische)	synodische	Erde = 1	Sonne = 1	Erde = 1	10^{12} km³	Erde = 1	Wasser = 1
	geogr. Meilen	Kilometer									
Sonne . . .						324 439	1	1 283 700	1 390 600	0,25	1,4
				a d h	a d h						
Merkur . .	7,8	58	0,39	— 88 —	— 115 21	0,061	$\frac{1}{7\,636\,440}$	0,052	0,056 27	1,17	6,552
Venus . . .	14,6	108	0,72	— 225 —	1 218 16	0,787	$\frac{1}{412\,150}$	0,975	1,056 1	0,81	4,536
Erde . . .	20,0	149	1,00	1=365 —	— — —	1	$\frac{1}{324\,000}$	1	1,083 2	1	5,6
Mars . . .	30,6	227	1,52	1 322 —	2 48 23	0,105	$\frac{1}{3\,100\,000}$	0,147	0,159 2	0,71	3,976
Jupiter . .	104,7	777	5,20	11 315 —	1 33 15	309,816	$\frac{1}{1047}$	1279,412	1 386	0,24	1,344
Saturn . .	192,0	1424	9,54	29 167 —	1 12 20	91,919	$\frac{1}{3500}$	718,883	778,7	0,13	0,728
Uranus . .	386,0	2864	19,18	84 7 —	1 4 7	13,518	$\frac{1}{24\,000}$	69,237	75	0,20	1,12
Neptun . .	604,7	4487	30,05	164 280 —	1 2 6	16,469	$\frac{1}{19\,700}$	54,955	59,51	0,30	1,68
Erdmond .	—	—	—	$27^d\,7^h\,43^m\,11,5^s$	$29^d\,12^h\,44^m\,2,9^s$	$\frac{1}{80}$		$\frac{1}{50}$		$\frac{5}{8}$	

§ 188. Physikalische Eigenschaften der Fixsterne und Nebel.

Der längst zum Gemeingut gewordene Satz: **Alle Fixsterne sind Sonnen**, ähnlich dem Zentralkörper unseres Planetensystemes, hat sich seit der Erfindung der Spektralanalyse und ihrer Anwendung speziell auf die Untersuchung des Fixsternlichtes zu folgenden Bestimmungen vertieft: Die Fixsterne lassen sich nach ihren Spektren in natürliche Klassen bringen (die allerdings auch mancherlei Übergänge aufweisen), indem die folgenden nach VOGEL zugleich über das Stadium der Entwickelung (d. h. hier: Abkühlung und sonstige Energieverluste durch Strahlung in den leeren Weltraum) Aufschlufs geben; nämlich:

Sterne der I. Klasse: [illegible] eifs (Sirius, Wega . . .).

Im Spektrum sind alle, auc [illegible] baren Farben, in ähnlichem Stärkeverhältnis vertreten wie bei [illegible] n festen und flüssigen Körpern. Die metallischen Absorptions [illegible] weder ganz oder sind nur zart angedeutet. Dagegen sind die [illegible] für Wasserstoff breit und dunkel; bei einigen wenigen noch zu I. [illegible] en (β Lyrae und γ Cassiopeiae) treten die Wasserstoff- und Heliumli [illegible] Emissions-, nicht als dunkle Absorptionslinien hervor; bei einigen [illegible] Helium-, aber keine Wasserstofflinien zu sehen. — Wir schliefsen, daß [illegible] e im Zustande höchsten Glühens seien, umgeben von mächtigen [illegible] eifsen Wasserstoff- und Heliumgasen.

Sterne der II. Klasse. [illegible] d gelblich (Capella, Pollux, Arktur . . .); zu ihnen gehört auch unsere Sonne.

Im Spektrum haben die brechbareren Teile etwas geringere Intensität; die Metalllinien sind zahlreich und **intensiv**, die **Wasserstofflinien weniger verbreitert**. Diese Sterne glühen **weniger intensiv** als die der **I. Klasse**.

Sterne der III. Klasse: Sie sind rötlich (**α Orionis**, **α Herculis**...).

Im Spektrum überwiegen die **weniger brechbaren Farben**, wie bei **rotglühenden** Körpern; verwaschene dunkle **Absorptionsbänder** weisen auf **chemische** Verbindungen hin; es herrscht also **nicht mehr so hohe Temperatur, dafs** sofort Dissoziation einträte. — **Die Unterklasse IIIb umfafst einige wenige** rotgefärbte Sterne von geringerer Helligkeit (**meist unter 6. Gröfse**), **bei denen** die Absorptionsbänder so breit sind, dafs die **Reste des kontinuierlichen Spektrums** fast wie helle Linien erscheinen. Diese sind dem **Ausglühen und Verlöschen nahe**.

Es sind also die Sterne der III. Klasse **als** die **„ältesten“**, die **der I. als** die „jugendlichsten“ anzunehmen; wobei es sich natürlich nur um die **Entwickelungsphasen** je eines Sternes handelt, ohne dafs zu schliefsen wäre, **es müfsten** durchschnittlich alle Sterne der I. Klasse seit kürzerer Zeit **bestehen als die der** III. — Einige Sterne der III. Klasse zeigen einen **nichtperiodischen Lichtwechsel**; sie mögen wie ein dem Erlöschen nahes Feuer noch manchmal **aufflackern**. — Die sogenannten **„neuen Sterne“**, welche manchmal binnen **wenigen Tagen** hohe Lichtstärken erreichen (so TYCHO BRAHES Stern, der 1572 von **scharfen Augen** sogar um die Mittagszeit gesehen werden konnte, der Stern im **Fuhrmann** 1892, der Stern im Perseus 1901), gehören sämtlich der II. Klasse **an**. Da die **breiten**, dunklen Wasserstofflinien noch von schmalen, hellen durchzogen sind, so ist zu

schliefsen, dafs dem Absorptionsspektrum dieser Sonnensterne noch die Emissionsspektra heftiger Ausbrüche glühender Gase überlagert sind. Es mögen also solche sogenannte „neue“ Sterne in Wahrheit sehr alte sein, an denen die Erstarrungsrinde vom feurigflüssigen Inneren durchbrochen wurde, was mit heftigen Gasausbrüchen zusammentrifft. Noch wahrscheinlicher erfolgt das Erglühen als Folge des Zusammenstofses der Sterne mit Wolken „kosmischen Staubes“. Solche neue Sterne verblassen manchmal sehr bald, manche lösen sich in glühende Gasbälle auf.

Die eigentlichen **Nebelflecke** erweisen sich durch ihr aus hellen Linien bestehendes Spektrum als glühende Gasmassen. Nur scheinbare Nebel sind dagegen diejenigen **Sternhaufen,** deren einzelne Glieder durch das Fernrohr nicht mehr voneinander unterscheidbar sind, die aber zusammen im Spektroskop eines der beschriebenen Fixsternspektra oder eine Übereinanderlagerung solcher zeigen.

Doppelsterne heifsen zwei unter sehr kleinem Winkelabstand erscheinende Fixsterne. Sie werden unterschieden in blofs optische und physische; letztere als zusammengehörig daran zu erkennen, dafs sie gemäfs den Keplerschen Gesetzen umeinander kreisen (§ 21, II).

Auch drei-, vier- und mehrfache Fixsterne sind beobachtet; bei manchen weisen die verschiedenen Glieder eines solchen Systems verschiedene Farbe auf.

Veränderliche Sterne zeigen regelmäfsigen (periodischen) Lichtwechsel (so Algol in Perseus mit einer Periode von 2^d 21^h), der bei manchen mit gröfster Wahrscheinlichkeit daraus zu erklären ist, dafs um den helleren Stern ein dunkler Begleiter kreist (also analog zu unseren Sonnenfinsternissen).

Der alte Begriff des „Fixsternes“ als eines seine Stellung zu allen übrigen beibehaltenden Sternes (§ 183) ist durch mehrere der angeführten Tatsachen schon modifiziert; ja es kann vielmehr gegenwärtig gesagt werden, dafs auch alle Fixsterne höchst wahrscheinlich in verschiedenen gegenseitigen Bewegungen begriffen sind (so dafs z. B. nach 50 000 Jahren die sieben Sterne des grofsen Bären einen von dem heutigen wesentlich verschiedenen Gesamtanblick gewähren werden); und zwar können nicht nur die Bewegungen der Fixsterne normal zur Gesichtslinie direkt beobachtet werden (sie werden dargestellt durch Ermittelung ihrer jeweiligen Verbindungsstrecke und des „Positionswinkels“, den jene Strecke mit der Richtung des Himmelsäquators einschliefst); sondern auch Bewegungen längs der Gesichtslinie zum und vom Auge weg verrät das Spektroskop durch Verschiebungen der Spektrallinien gegen das violette, bezw. rote Ende hin (gemäfs dem Dopplerschen Prinzip vergl. § 91 und LA 157). LA 157.

Es drängen sich angesichts dieser einst ungeahnten Erweiterungen unseres Wissens immer wieder neue Fragen auf: Erfolgen auch diese Bewegungen analog denen der Planeten um unsere Sonne, um einen oder um einige Zentralkörper? Ist die Anzahl dieser Körper eine für uns zählbare oder gar eine im strengen Sinne unendliche (ist also die Welt nicht nur dem Raum, sondern auch der ihn erfüllenden Materie nach unendlich? Bisher hat jede Steigerung der Leistungsfähigkeit unserer Fernrohre die Zahl sichtbarer Sterne noch erhöht). Im ganzen

stellen die kosmischen Massen mit ihren im Vergleich zur eigenen Gröſse noch bei weitem gröſseren Abständen dasselbe Gesamtbild im Gröſsten dar, wie wir es uns von den Molekülen eines Gases (§ 83), den Atomen (§ 209 — und „Elektronen", § 154) im Kleinsten machen. Dies legt auch den Gedanken nahe, daſs es ab und zu zwischen den Weltkörpern Zusammenstöſse geben werde, was in manchen Fällen ebenfalls eine Ursache des Aufleuchtens „neuer Sterne" sein mag (neben den oben angeführten Hypothesen).

Für unser Wissen von den **Anfängen** der Entwickelungen ist es bedeutsam, daſs eine weit über den von vornherein wahrscheinlichen Durchschnitt gehende Zahl von Nebeln **Spiralform** aufweist, was auf besondere physikalische Bedingungen für die Verdichtung solcher Nebel zu flüssigen und festen Kernen (nach der Kant-Laplaceschen Hypothese) deuten mag. — Wie schon die Sternhaufen beweisen (da sie ebenfalls viel zu zahlreich und zu reich an einzelnen Gliedern sind, als daſs sie sich als optische Zufälligkeiten erklären lieſsen), sind die Fixsternwelten in einzelne Systeme gegliedert, deren einem unsere **Sonne** zusammen mit der **Milchstraſse** angehört. Innerhalb dieses Systemes besitzt unsere Sonne samt allen Planeten eine Geschwindigkeit (geschätzt auf 15 bis 50 $km\text{-}sec^{-1}$) in der Richtung gegen das Sternbild des Herkules hin; wie zum teil daraus erschlossen werden kann, daſs die Sterne des Herkules perspektivisch auseinander, die am entgegengesetzten Teil des Himmels liegenden zusammenrücken — viel auffälliger noch aber daraus, daſs die um 90° von den beiden genannten Stellen des Himmels abliegenden Sterne eine gemeinschaftliche Eigenbewegung in parallelen Richtungen aufweisen (der ganze Komplex von Erscheinungen also ähnlich dem, daſs die Bäume einer Allee, die wir durchfahren, vor uns auseinander-, hinter uns zusammenrücken, viel auffälliger noch aber die Bäume neben uns der Richtung der Fahrt entgegen vorüberzufliegen scheinen). Ob aber diese Bewegung des Sonnensystemes nur eine in der augenblicklichen Tangente der Bahn um einen Zentralkörper sei, wird sich erst nach Jahrhunderten erkennen lassen, wenn jener Zielpunkt nicht mehr Herkules sein, sondern sich gesetzmäſsig am Himmel ändern sollte. — Ob schlieſslich der Fixsternhimmel als ganzer trotz der gegenseitigen Bewegungen seiner Teile im Weltraume ruhend oder in irgend einer Richtung mit irgend einer Geschwindigkeit sich bewegend anzunehmen sei, streift schon das philosophische Problem (Anh., Nr. 41), ob eine solche **absolute Bewegung** überhaupt **denkbar** sei; direkt **erkennbar** wird jene Richtung und Geschwindigkeit wohl niemals sein.

Anh. 41.

Aus der Meteorologie.

§ 189. Meteorologie. Wetterkunde und Klimatologie. — Meteorologische Elemente.

Was die gewöhnliche Sprache als **„Wetter“**, insbesondere als „schlechtes“ und „gutes Wetter“ bezeichnet, ist für den Nichtmeteorologen erschöpft einerseits durch das Bild von Regengüssen, Nafskälte, Sturm, anderseits von blauem Himmel, Sonnenschein, Windstille oder mäfsiger Luftbewegung u. dergl. Von denjenigen Tatsachen und Begriffen, die für die gegenwärtige wissenschaftliche Meteorologie (nach Aristoteles: *τὰ μετέωρα* = die Dinge über der Erde) grundlegend sind, z. B. von barometrischen Minimis, von Cyklonen, aufsteigenden und hierbei sich abkühlenden Luftströmen, welche die Kondensation der Wasserdünste herbeiführen, weifs das Volk nichts. Da aber jene sinnenfälligen Erscheinungen nicht nur die Behaglichkeit des Alltagslebens wesentlich beeinflussen, sondern in der Ernte des Landmannes, in Verheerungen durch Hochwässer u. dergl. die empfindlichsten wirtschaftlichen Interessen berühren, so griff von jeher der Ungebildete und greift noch heute der sogenannte Gebildete zu den absonderlichsten Mitteln, sich das Wetter auf kürzere oder längere Zeit prophezeien zu lassen. So werden z. B. noch immer diejenigen Kalender weniger gekauft, in denen die Wetterprophezeiungen nach „Knauers hundertjährigem Kalender“ fehlen, die aber in Wahrheit unverändert aus dem Kalender vor sieben (!) Jahren abgeschrieben sind und sich auf die vorkopernikanische Ansicht von den sieben Planeten (darunter also auch Sonne und Mond) als „Jahresregenten“ gründen.

Die wissenschaftliche Meteorologie sieht in der Wetterprognose nur einen kleinen Teil ihrer Aufgabe und weifs ganz wohl, dafs sie diese Aufgabe erst in einer vielleicht noch fernen Zukunft so wird lösen können, wie es die aufserwissenschaftlichen Bedürfnisse des Landwirtes, des Touristen u. s. f. wünschen. — Eine viel näher liegende Aufgabe als die Voraussage des Wetters bildet das Erklären schon eingetretener Erscheinungen. So wurde die auffallend anhaltende strenge Kälte im Winter 1838 zurückgeführt auf das ungewöhnlich hohe und ausgebreitete barometrische Maximum über Sibirien. Einzelne auffallende „Wetterstürze“ lassen sich befriedigend aus dem Herankommen einer barometrischen Depression erklären. Seit der Mitte des XIX. Jahrhunderts weifs man, dafs das **Wetter** als Komplex der meteorologischen Elemente: **Luftdruck, Temperatur, Feuchtigkeit, Windrichtung** und **Windstärke, Bewölkung, Niederschläge**, bestimmt sei, sobald man nur von einem derselben, dem Luftdruck, die Verteilung über einem gröfseren Gebiete in der betreffenden Zeit kennt; deshalb dienen auch die Isobarenkarten (§ 190) als „Wetterkarten“.

Nebst dem Wetter ist es von den in das Bereich der Meteorologie fallenden Erscheinungskomplexen **das Klima**, an welchem das praktische Leben aufs stärkste interessiert ist. Hann definiert Klima als „die Gesamtheit der meteorologischen

Erscheinungen, welche den mittleren Zustand der Atmosphäre an irgend einer Stelle der Erdoberfläche charakterisieren. Was wir Witterung nennen, ist nur eine Phase, ein einzelner Akt aus der Aufeinanderfolge der Erscheinungen, deren voller, Jahr für Jahr mehr oder minder gleichartiger Ablauf das Klima eines Ortes bildet... Man sagt z. B.: Die Witterung in Mitteleuropa war sehr kalt im Dezember 1879 oder regnerisch im August 1880; hingegen: Das Klima von England ist im Dezember mild und feucht, obgleich auch dort der Dezember 1879 sehr kalt war".

Wetterkunde und **Klimatologie** sind nur ein Teil der **Meteorologie** im weiteren Sinne, die gegenwärtig definiert wird als **Physik der Atmosphäre.** Aufgabe der Meteorologie im engeren Sinne ist es, „die einzelnen atmosphärischen Erscheinungen auf bekannte physikalische Gesetze zurückzuführen und den kausalen Zusammenhang in der Aufeinanderfolge der atmosphärischen Vorgänge aufzudecken".

Geschichtliches. Die Erfindung der Barometer und Thermometer im XVII. Jahrhundert wurde erst Anlaſs zu systematischen Beobachtungen der entsprechenden meteorologischen Elemente. Das erste meteorologische Beobachtungsnetz wurde damals von Herzog Ferdinand von Toscana begründet, von da an wurde der Beobachtungsdienst meist von Privatleuten, Lehrern u. a. versehen. Die am weitesten, bis über 200 Jahre, zurückreichenden meteorologischen Beobachtungsreihen verdankt man den Sternwarten, die von je an hellem oder trübem Wetter wesentlich interessiert waren. Als die Bearbeitung und Veröffentlichung dieser Beobachtungen die Kräfte der Sternwarten zu übersteigen anfing, wurden eigene staatliche Zentralanstalten für Meteorologie begründet und in ihnen die Beobachtungen der einzelnen Stationen gesammelt und verarbeitet, an welchen alle oder die meisten der meteorologischen Elemente regelmäſsig dreimal im Laufe des Tages, gewöhnlich um 7^h, 2^h, 9^h beobachtet werden. Solche Stationen besitzt Österreich an 500, Deutschland über 300, die Schweiz etwa 100 u. s. f. Einzelne sind besonders wertvoll für Witterungsprognosen und Sturmwarnungsdienst. Hervorragende Wichtigkeit haben neuestens die Gipfelstationen erlangt; von ihnen ist gegenwärtig die auf dem Sonnblick in den hohen Tauern (3105 m) die höchste, ständig bewohnte, die vermöge ihrer günstigen Lage und überraschenden Ergebnisse eine erste Stelle einnimmt. Hierzu kommen die Beobachtungen im Luftballon; so haben Berson und Süring am 31. Juli 1901 die Höhe von 10500 m erreicht. Ferner werden unbemannte Registrierballons seit einigen Jahren nach einem zwischen zahlreichen Kulturstaaten vereinbarten Plane an je einem bestimmten Tage jedes Monats steigen gelassen. Über eine neueste wichtige Verbesserung solcher Ballons durch Assmann vergl. S. 637; einer erreichte im Mai 1902 25000 m Höhe. Hierzu kommen neuestens Aufstiege von Drachen ebenfalls mit Registrierinstrumenten. — Zu hoffen ist die Ausdehnung solcher Beobachtungen auf die Ozeane, denn der „gegenwärtige Zustand völliger Unkenntnis der Verhältnisse der Atmosphäre über dem Ozean, die bei der ganz abweichenden Erwärmung und Abkühlung des Wassers sehr verschieden sein müssen, ist beschämend und auf die Dauer unhaltbar" (Bezold). —

Für die im folgenden eingehaltene Reihenfolge der Abschnitte war zunächst der äuſsere Umstand des Anschlusses an die Abschnitte Aeromechanik (hierzu §§ 190, 191), Wärmelehre (hierzu §§ 192 bis 196) u. s. f. bestimmend. Diese

Reihenfolge entspricht aber auch im ganzen dem Vordringen von der Beschreibung der Erscheinungen selbst zu deren Erklärung; z. B.: Das Barometer zeigt uns die nach Ort und Zeit wechselnde Gröfse des Luftdruckes, das Thermometer die gleichfalls wechselnden Lufttemperaturen; umgekehrt sind aber diese Verschiedenheiten der Luftwärme die Ursachen der Luftströmungen; noch weiter zurückgehend finden wir jene Temperaturverschiedenheiten verursacht von der verschiedenen Einstrahlung seitens der Sonne, der Absorption in der Luft und im Erdboden (§ 196) u. s. f.

A. Aeromechanische Zustände und Vorgänge im Luftmeere an und über der Erdoberfläche.

§ 190. Aerostatische Verteilung des Luftdruckes zu je einem Zeitpunkte.

Denken wir uns in einem bestimmten Zeitpunkte, z. B. heute 7^h früh, allenthalben an und über der Erdoberfläche Barometerablesungen vorgenommen. Es würden sich dann von je einem Punkte, z. B. in 1000 m Meereshöhe über Wien, falls daselbst ein Luftdruck von 720 mm herrscht, in der Umgebung jenes Punktes weitere Punkte auffinden lassen, die ebenfalls 720 mm Druck haben; sie kommen aber im allgemeinen teils etwas höher, teils weniger hoch zu liegen als ersterer. So kann man sich in je einem bestimmten Zeitpunkte die ganze Erde von Flächen gleichen Druckes umgeben denken.

Wäre die Erde genau eine Kugel (ohne Berge und Täler) und ruhend (ohne Achsendrehung), ferner überall von gleicher Temperatur (ohne verschiedene Bestrahlung seitens der Sonne je nach Tages- und Jahreszeit und von gleicher spezifischer Wärme und Leitungsfähigkeit des Erdbodens und der Gewässer), so würde sich im Luftmeere ein Gleichgewichtszustand herstellen, vermöge dessen die Flächen gleichen Druckes zur Erde konzentrische Kugelflächen wären. In Wirklichkeit wird dieses einfachste Schema durch alle genannten Umstände zu verschiedenen Zeiten in verschiedenem Mafse gestört, und die Flächen gleichen Druckes zeigen einerseits die mannigfachsten Ein- und Ausbiegungen (gegen den Erdmittelpunkt hin und von ihm weg), anderseits ändert sich die Gestalt dieser Flächen unaufhörlich, wie sich an dem immer wechselnden Barometerstande was immer für eines Ortes an und über der Erdoberfläche kundgibt. Sowohl ihre jeweilige Gestalt wie ihr Wandel von Tag zu Tag läfst sich entnehmen aus den **Isobarenkarten**, die von den meteorologischen Zentralanstalten nach den täglich um 7^h früh vorgenommenen, auf den Meeresspiegel reduzierten und noch im Laufe des Vormittags zu synoptischen Darstellungen vereinigten Ablesungen herausgegeben werden. Zum Verständnis solcher Karten folgendes:

a) Die Reduktion des Barometerstandes auf den Meeresspiegel und auf 0° C. — Statt der schematischen Formel (§ 46) für die

barometrische Höhenmessung: $h_m - h_n = \frac{h}{-lg\,q}(lg\,b_m - lg\,b_n)$

dient für einigermafsen genaue wirkliche Anwendungen die

HALLEYsche Formel: $H = 18400 \left(1 + 2\frac{t + t'}{1000}\right) (lg\,b' - lg\,b)$, worin t und t' die Lufttemperaturen an dem unteren, bezw. oberen Beobachtungsorte, b und b' die auf 0° C reduzierten Barometerstände daselbst bedeuten.

Auf Grund solcher Formeln sind ein für allemal Tabellen berechnet, die angeben, dafs, wenn z. B. an einer Station von bekannter Höhenlage H ein Barometerstand b' herrscht, der auf den Meeresspiegel **reduzierte Barometerstand** b ist.

b) **Die Isobaren als Durchschnittslinien der Flächen gleichen Drucks mit dem Meeresspiegel.** Denken wir uns drei benachbarte Punkte A, B, C der Landkarte, welche die Projektionen von Örtern a, b, c der wirklichen Erdoberfläche auf den Meeresspiegel darstellt und in welche die Isobaren eingetragen sind (Fig. 678). Ist z. B.

Fig. 678.



in A der reduzierte Barometerstand 755, in B 750, in C 745 mm, so würden wir bei hinreichender vertikaler Erhebung über A wieder auf Stellen von 750, 745 mm treffen, von denen die Flächen gleichen Drucks gegen B, bezw. C hin abfallen. Denken wir uns dann umgekehrt wieder z. B. zwischen A und B eine Bodenerhebung, so wird auch diese von den Flächen gleichen Druckes geschnitten werden und so wieder an ihrer Oberfläche die allmähliche Abnahme des Druckes mit der Höhe zeigen.

Wo wir also auf einer Isobarenkarte, z. B. die geschlossene Linie um ein barometrisches Minimum, erblicken, sind die Flächen gleichen Druckes nach abwärts eingebogen und über einem Maximum nach aufwärts ausgebogen zu denken (veranschaulicht in Figg. 683, 684, S. 618).

c) Als eine Fläche gleichen Druckes, nämlich des Luftdruckes 0, liefse sich auch die „obere Grenze der Atmosphäre" auffassen. Da aber wirkliche Barometerbeobachtungen in solchen Höhen wohl für immer unmöglich bleiben werden, so mufs jener Begriff selbst erst noch auf Grund anderer Erscheinungen näher bestimmt werden. Wählt man hierzu die atmosphärische Strahlenbrechung (§ 197), so ergibt sich als Höhe der Atmosphäre etwa 80 km, indem die noch höheren Schichten so dünn sind, dafs sie zu den Dämmerungserscheinungen nichts Merkliches beitragen. Dagegen zeigt das Aufleuchten von Meteoren, Sternschnuppen, die Höhe des Nordlichtes auch noch in 300 km genügend viel Luft, um das Glühen der Meteoriten durch

Reibung an der Luft, die Elektrolumineszenz u. dergl. möglich zu machen.

d) Die Kenntnis der tatsächlichen Lage und Veränderung der Flächen gleichen Druckes ist bisher zum überwiegenden Teile auf Schlüsse aus den täglichen dreimaligen Beobachtungen des Barometerstandes an der Erdoberfläche angewiesen. Zu ihnen kommen aber die Beobachtungen der Gipfelstationen, der Registrierballons und Drachenaufstiege. Dabei haben z. B. die Ballonfahrten gezeigt, daſs nicht selten barometrische Maxima und Minima, die an der Erdoberfläche beobachtet worden waren, in etwas gröſseren Höhen unmerklich werden, welche Erfahrungen nun z. B. in der Reduktion des Barometerstandes auf den Meeresspiegel so zu berücksichtigen sind, daſs manche Maxima nur ein Temperatureffekt der untersten Schichten darstellen.

e) Mittlere Verteilung des Luftdruckes: Am Äquator findet sich ein Gürtel niederen Druckes, in etwa 35° n. und s. Br. (Roſsbreiten) ein Gürtel hohen Druckes und in 60° Br. wieder niederer Druck, der von da zu den Polen wahrscheinlich zunimmt. — Von dem hiermit als örtlicher Durchschnitt gegebenen Schema sind die auffallendsten Abweichungen diese, daſs im Sommer das Land niederen, das Meer hohen Luftdruck hat; umgekehrt im Winter.

Hierin zeigt sich ein deutlicher Einfluſs der ungleichen Erwärmung auf den Luftdruck, die auch überhaupt jene Hebungen der Flächen gleichen Druckes bewirkt, von der dann weiter die Bildung der Zyklone und Antizyklone mit all ihren Folgen für trübes und heiteres Wetter u. s. f. abhängt; welche Abhängigkeiten aber erst im folgenden Abschnitte zu betrachten sind (§ 192 ff.).

Den Übergang von den bisher betrachteten **aerostatischen** zu den **aerokinetischen** Erscheinungen macht vor allem der

f) „tägliche und jährliche Gang des Luftdrucks“, wie er sich namentlich aus den Barogrammen selbstregistrierender Apparate, z. B. des Richardschen, ergibt. Trotz der völligen Unregelmäſsigkeit nämlich, welche eine längere Folge der wöchentlichen Barogramme zu zeigen scheint, fällt bei genauer Betrachtung namentlich zu Zeiten wenig veränderlichen, meist hohen Luftdruckes auf, daſs oft drei, vier, fünf Tage nacheinander die Barometerkurven eine doppelte Welle darstellen mit einem tieferen Minimum um etwa 3^h nachmittags, einem weniger tiefen um 3^h früh, einem Maximum um 9^h abends und einem zweiten um 9^h vormittags. Hann hat gezeigt, daſs auf der ganzen Erde der Gang des Luftdrucks sich aus zwei derartigen Wellen zusammensetzt (ähnlich wie solche Zusammensetzungen zwischen Wellen eines Grundtones und denen der Obertöne stattfinden, §§ 65, 90), und daſs insbesondere die doppelte, meist auch gröſsere Welle überall eine merkwürdige Gesetzmäſsigkeit aufweise. Ihre Amplitude (welche am Äquator etwa 1 mm beträgt) nimmt regelmäſsig mit der Breite und (proportional dem Luftdruck) mit der Seehöhe ab; die Eintrittszeit der Maxima fällt aber fast überall auf etwa $9^h\ 40^{min}$ vormittags und abends. — Inwiefern die Erwärmung der Luft und die dadurch bewirkte Drucksteigerung die Ursachen auch dieser Erscheinungen sind, vergl. § 196.

Während diese Veränderungen in der Luftdruckverteilung aber doch alle so allmählich erfolgen, daſs sie nicht so sehr Bewegungs- als sozusagen veränder-

liche Gleichgewichtszustände darstellen, sind die auffälligsten Bewegungsernungen in der Atmosphäre die Winde, Stürme, Orkane; sie bilden ab einen besonderen Fall der im engeren Sinne aerokinetischen Vorgän Luftmeere, die sich unter die beiden Typen der Strömungen und Wi bewegungen (§ 42) verteilen.

§ 191. Strömungen und Wirbelbewegungen im Luftm

An dem sprichwörtlich „regellosen" Wechseln in den Richtungen und St der Winde zeigen sich doch schon der kunstlosen Beobachtung alsbald seh fallende Regelmäfsigkeiten: so das Umschlagen des Talwindes in Bergw des Landwindes in Seewind und umgekehrt je nach der Tageszeit un grofsen die den Schiffern von jeher wichtigen Passatwinde. — Um die des XIX. Jahrhunderts unternahm es Dove, sämtliche Luftströmungen als G der einen grofsen Zirkulation der Atmosphäre über der ganzen



Fig. 680. Robinsons Schalenkreuz.

Fig. 679. Windfahne mit Stärketafel.

kugel zu erklären; hiernach sollten aus dem Äquato und Polarstrom sich nicht nur die einförmigen scheinungen der Passate, sondern aus gegensei Stauungen beider Ströme auch die wechselvollen gänge in den mittleren und höheren Breiten erk lassen. Seit den sechziger Jahren erkannte man durch das Studium der synoptischen Wetterkarten, vielmehr die über kleineren Bezirken herrschenden t metrischen Maxima und Minima überwiegend deutung für die Windrichtungen und die sonstigen W erscheinungen haben, und erst in den achtziger Jahren entwickelte W v. Siemens Theorieen darüber, wie auch diese Maxima und Minima mittelba jener allgemeinen Zirkulation abhängen mögen.

Voraussetzung aller solcher Theorieen ist die messende Beschreibung der an je einem Orte herrschenden Luftströmung; sie gliedert sich in die Angabe 1. der Windrichtung, 2. der Windstärke.

Die Windrichtung wird mittels der **Windfahne** (Fig. 679) angegeben, gewöhnlich nach den 16 Richtungen der Windrose (N, NNW, NW, WNW, W, WSW u. s. f., Ost wird durch E bezeichnet); für die Winde sind, z. B. unter den Schiffern, zahlreiche besondere Namen in Gebrauch (z. B. Scirocco, Maestral, Bora, Samum, Harmattan u. s. f.).

Die Windstärke wird gemessen mittels der **Anemometer** (Fig. 680); diese weisen für die zwölfstufige Skala (von Windstille bis Orkan) z. B. folgende Stärken aus: Wind (2—6) bis 15 m sec^{-1}, Sturm (7—11) bis 33 m sec^{-1}, Orkan bis 50 m sec^{-1}.

Die Erklärung des Eintretens und Fortbestehens von Winden bestimmter Richtung und Stärke ergibt sich aus zweierlei Kräften: 1. **Druckverschiedenheiten**, deren Maſs das **Druckgefälle** (der Gradient) heiſst; 2. die **„ablenkende Kraft der Erdrotation“** (LA 109). LA 109.

Zu 1. Daſs zwischen zwei Stellen verschiedenen Druckes im Luftmeere ein Strömen von der Stelle höheren zu der Stelle niederen Druckes stattfindet, ist nur ein besonderer Fall des allgemeinen hydro- und aerokinetischen Hauptgesetzes (§ 49); und zwar ist zwischen Orten verschiedenen Barometerstandes nicht die verschiedene Spannkraft, sondern das Gewicht, also das Fallbestreben der Luft die überwiegende Ursache der Bewegung.

Als Einheit des **horizontalen Gradienten** ist angenommen die Verschiedenheit des Druckes um 1 mm Quecksilberdruck zwischen zwei im selben Niveau um 111 km (d. i. die Länge eines Äquatorgrades) voneinander abstehenden Orten. Einem solchen Gradienten entspricht dann eine Windgeschwindigkeit von 3 bis 5 m sec^{-1}. — Überdies miſst man den vertikalen Gradienten durch den Unterschied zwischen der Druckabnahme für je ein 1 m Höhe und dem Gewicht der entsprechenden Luftsäule.

Zu 2. Während die Druckverschiedenheiten allein ein geradliniges Strömen der Luft von der Stelle höheren zur Stelle niederen Druckes bewirken würden, zeigen die Luftströmungen gesetzmäſsige Ablenkungen von diesen geraden Linien, und zwar so, daſs sie sich alle aus der relativen Bewegung der Luft gegen die Erde auf dieselbe Art erklären lassen wie die Drehung der Schwingungsebene des Foucaultschen Pendels (§ 34). Statt daſs also z. B. die Luft gegen ein barometrisches Minimum radial hinströmt, umkreist sie es in dem aus Fig. 681 und Fig. 683 (a. f. S.) ersichtlichen Sinne und bildet eine **Zyklone** (im weiteren Sinne — von ihr zu unterscheiden „der Zyklon“ im engeren Sinne, s. u. Fig. 686). — Ebenso bildet die aus einem barometrischen Maximum abströmende Luft eine **Antizyklone**.

Zu diesen horizontalen Bewegungen (Luftwirbel mit vertikaler Achse) kommen aber noch vertikale Strömungen, und zwar so, daſs über einem barometrischen Minimum ein vom Boden aus

aufsteigender, über einem **Maximum** ein zum Boden **absteigender Strom** eintritt (Figg. 683a und 683b).

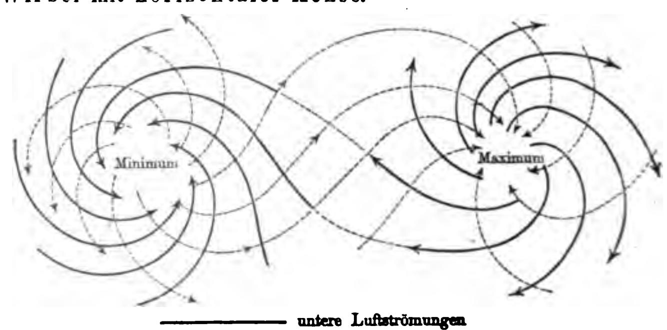
Fig. 681. Fig. 682.

Min. Max.

Fig. 683a. Fig. 683b.

Figg. 681 bis 683b. Nördliche Erdhälfte.

Verfolgen wir überdies die in der Zyklone aufgestiegene Luft noch auf ihrem Rückwege nach abwärts, so erkennen wir in diesen Bewegungen im ganzen vertikale Wirbel mit horizontaler Achse.



——————— untere Luftströmungen
- - - - - - - - - obere Luftströmungen

Fig. 684. Untere und obere Luftströmungen im barometrischen Maximum und Minimum der nördlichen Erdhälfte.

Als solche Wirbel im gröſsten Maſsstabe kann man auch den über dem Äquator aufsteigenden, gegen die höheren Breiten in den oberen Schichten der Atmosphäre abflieſsenden und von hier an der Erdoberfläche wieder zum Äquator zurückkehrenden Luftstrom ansehen (Fig. 684), wobei die (erst in § 196 näher zu

besprechende) stärkste Erwärmung der Erdkugel am Äquator die ganze Bewegung einleitet und unterhält. Zu ihrer näheren Beschreibung noch folgendes:

Da die Luft über dem Äquator wärmer und daher spezifisch leichter ist, bildet sie zunächst eine Art vertikaler Aufblähung, die dann horizontal gegen die Pole hin abfliefst. (Nähere Erklärung aus der Hebung der Flächen gleichen Druckes, § 196.)

Schematisch hätte ein Luftteilchen über der Meeresfläche am Äquator eine vertikale Bewegung von höchstens der Dicke der Atmosphäre (80 km), dann eine horizontale längs des Meridians polwärts höchstens in der Länge des Meridianquadranten (40 000 km), und es würde schliefslich wieder zum Ausgangspunkte auf gleich langen Wegen zurückkehren. Daher müfste (insoweit beide Bewegungskomponenten gleiche Zeiten brauchen) die Geschwindigkeit in horizontaler Richtung in der Gröfsenordnung 40 000 : 80, also etwa 500 mal so grofs sein als die Geschwindigkeit der auf- und absteigenden Ströme. — Dieses Schema erleidet eine wesentliche Abänderung dadurch, dafs jene Strömungen bei weitem nicht die ganzen Breiten, bezw. Höhen durchmessen und dafs insbesondere von dem Gürtel hohen Druckes um den 35. Breitenkreis („Rofsbreiten") nach beiden Seiten hin die Luft abströmt. Dieser Gürtel erklärt sich daraus, dafs, weil mit wachsenden Breiten die Parallelkreise immer kürzer werden, in den mittleren Breiten die polwärts gerichtete Oberströmung sich staut und daher zum Teil senkt.

Indem ferner zu den vertikal und meridional gerichteten Bewegungen die Ablenkungen infolge Erdrotation hinzutreten (und zwar viel ausgiebiger bei den geschwinden meridionalen als den langsamen vertikalen Bewegungen), ist das ganze tatsächliche Windsystem in den Hauptzügen erklärt.

Fig. 685 läfst auch sofort erkennen, warum die von West gegen Ost gerichteten Oberströmungen durchschnittlich gröfsere Geschwindigkeit haben als die von West gegen Ost gerichteten Unterströmungen. — Das allgemeine Schema ist nun aber überdies auf das mannigfachste abgeändert durch die Ungleichheiten der Erwärmung über den Meeren und Kontinenten und den hieraus sich ergebenden Ungleichheiten des Luftdruckes, worüber einiges noch in § 196.

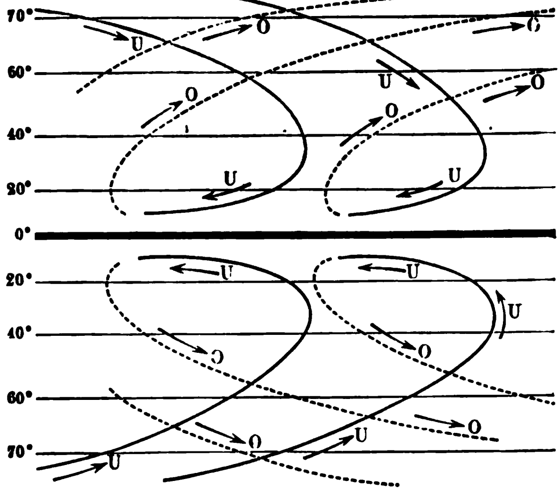


Fig. 685. Allgemeines Windsystem der Erde nach Oberbeck.

Von der aeromechanischen Theorie ist nicht nur diese Zirkulation und Wirbelbewegung der Atmosphäre im gröfsten Mafsstabe gefordert, sondern es gehören auch lokale Erscheinungen von Wirbel-

bewegungen noch zu den mächtigsten Naturereignissen. **Luftwirbel** zeigen sich schon in unseren Breiten manchmal als **Sand- und Wasserhosen** (Fig. 686), in den Tropen bilden sie die gefürchteten **Zyklone** (im engeren Sinne: die Tromben, Tornados und, wenn ihre horizontale Ausdehnung die vertikale übertrifft, Teifune). In der Erklärung der ungeheuren Geschwindigkeit und hiermit der verheerenden kinetischen Energie solcher Orkane ergibt sich zunächst die große Winkelgeschwindigkeit nahe der Achse des Zyklons einfach aus der Erhaltung der Bahngeschwindigkeit infolge der Trägheit bei immer kleiner

Fig. 686.



werdendem Bahnradius (nachzuahmen durch die Bewegung der Kugel beim Hemmungspendel, Fig. 74, S. 103, wenn sich dieses um den Stift herumschlingt). Hierzu kommt aber die sogenannte Zentrifugalkraft, welche die das Zentrum des Zyklons umkreisenden Luftteilchen auswärts schleudert, hierdurch die Verdünnung steigert, daher die Geschwindigkeit des Einströmens neuer Luft von außen und unten her noch vergrößert u. s. f. In der Tat wird bei den Tromben und Tornados die Zentrifugalkraft sogar größer als die einwärts gerichtete Gradientkraft; bei den Zyklonen unserer Breiten bleibt zwar die Zentrifugalkraft kleiner, aber sie ist es doch, die den Gebieten tiefen Druckes zu längerem Bestande verhilft, wiewohl die umgebende Luft sie auszufüllen sucht.

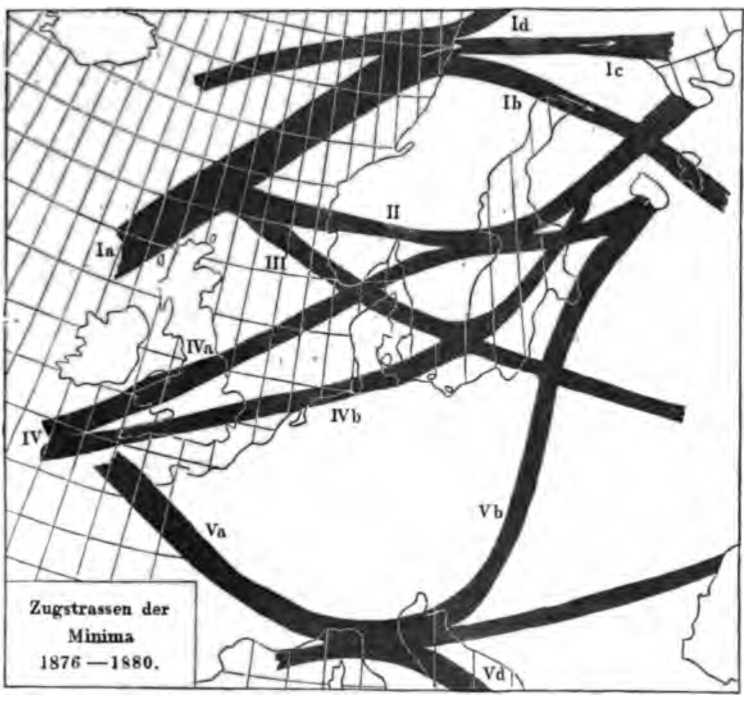
Die aus den Figg. 681 und 682 ersichtliche **Abhängigkeit der Windrichtung von Druckunterschied und Ablenkung infolge der Erdrotation** ist zusammenfassend ausgesprochen in Buys-Ballots **Gesetz** (1857):

Wer auf der nördlichen Erdhalbkugel die Gegend niederen Druckes zur Linken etwas vorne hat, hat den Wind im Rücken.

Um hiernach angesichts einer für einen bestimmten Zeitpunkt aufgenommenen Isobarenkarte die Windrichtung in der nächsten Zeit (d. h. solange die Luftdruckverteilung dieselbe bleibt) für einen beliebigen Ort anzugeben oder vorauszusagen, denke man sich zwischen zwei Isobaren so Aufstellung nehmend, daſs man die Linie niederen Druckes links etwas vor sich, die Linie höheren Druckes rechts etwas hinter sich hat: der Wind wird dann den Namen derjenigen Weltgegend führen, der man den Rücken zuwendet. Erprobung dieser Regel für verschiedene Punkte der Isobarenkarten (vergl. die Tafeln bei S. 654).

Zugstraſsen barometrischer Minima. Bisher wurden die Luftströmungen unter der Voraussetzung untersucht, daſs die Maxima und Minima eine gegebene Stellung zueinander einnehmen. Tatsächlich verschieben sich aber die Stellen jeweilig höchsten bezw. niedrigsten Druckes selbst über die Erdoberfläche hin, so daſs also je ein Minimum sich wie ein selbständiges Gebilde längere Zeit hindurch erhält und fortbewegt (— ähnlich sieht man, wenn sich unter dem

Fig. 687.



Ruder Wasserwirbel gebildet haben, diese manchmal eine Strecke weit über das Wasser hinziehen; diese Tendenz, sich zu erhalten, kommt den Wirbeln und insbesondere Wirbelringen, § 42, aus den namentlich

durch Thomson und Helmholtz theoretisch erforschten Gründen zu). — Dabei ist es eine Eigentümlichkeit der Minima, dafs sie bestimmte Zugstrafsen einhalten, so dafs, wenn z. B. vom Atlantischen Ozean her ein Minimum sich dem Nordwesten Europas genähert hat, man mit ziemlich grofser Wahrscheinlichkeit voraussagen kann, welchen Weg es weiterhin nehmen werde.

Die in Fig. 688 a. v. S. dargestellten Zugstrafsen hat van Bebber aus langen Beobachtungen abgeleitet und sie weiterhin bestätigt gefunden; sie sind zu einem wichtigen Behelfe namentlich für die Sturmwarnungen an den Nordwestküsten Europas geworden.

Aus diesen und ähnlichen zusammenfassenden Erfahrungen über die Wechsel der Luftdruckverteilung zusammen mit Buys-Ballots Gesetz erklärt sich nun auch die seit langem bekannte Erfahrung, dafs in unseren Gegenden (Mitteleuropa) auf Winde aus S solche aus SW, dann solche aus W, dann aus NW, N, NO, O, SO, S zu folgen pflegen, welche Erfahrungen Dove in das nach ihm benannte (aber ähnlich auch schon von Mariotte und Kant aufgestellte) **Winddrehungsgesetz** zusammengefafst hat, nach welchem die von einem und demselben Orte aus gezogenen Richtungslinien der (binnen einiger oder mehrerer Tage) aufeinander folgenden Winde sich im Sinne des Zeigers einer Uhr drehen, deren Zifferblatt wagerecht und nach oben gewendet ist. Denkt man sich nämlich über den nördlichen Teil einer Karte Europas die Fig. 681 von West gegen Ost hingeschoben, so streicht über einen Punkt in Mitteleuropa zuerst ein aus Süden kommender Luftstromfaden, dann ein aus Westen kommender u. s. w. hin.

Die bisher beschriebenen und zum Teil erklärten Tatsachen der Strömungen und Wirbelbewegungen in der Atmosphäre drängen aber zur Frage nach den weiter zurückliegenden Ursachen, vor allem der Ungleichheiten in der Luftdruckverteilung selbst, sodann nach dem Auftreten der Maxima und Minima u. s. f. Diese Ursachen liegen, wie für das Aufsteigen über dem Äquator, auch sonst durchweg in der ungleichen Erwärmung des Luftmeeres infolge ungleicher Einstrahlung seitens der Sonne und ungleicher Absorption in trockener und feuchter Luft am Festlande und in den Meeren. Einiges hierüber im nächstfolgenden Abschnitt.

B. Wärmeerscheinungen in der Atmosphäre. — Die Niederschläge im weitesten Sinne (Hydrometeore).

Vorbemerkung: Dafs die Einstrahlung seitens der Sonne durch das Luftmeer der Erde und die Erwärmung der Erdoberfläche die erste Ursache aller unaufhörlichen Veränderungen im Luftmeere und der Verschiedenheiten ihrer Klimate sei, drängt sich schon vor jeder näheren quantitativen Untersuchung dieser Verhältnisse auf: wolkenloser Himmel läfst es bei Tage warm oder heifs (bei Nacht freilich infolge Ausstrahlung seitens der Erde in den Weltraum kühl oder kalt) werden; hoher Sonnenstand (im Sommer, am Äquator) bringt kräftigere Erwärmung als tiefer u. s. f. — Dennoch gehört die nähere Beschreibung der Schicksale, welche die Strahlen bei ihrem Durchgange von den obersten bis zu den untersten Schichten

der Luft und im Erdboden erfahren, speziell das Mafs der **Absorption** der einzelnen Strahlengattungen, zu den schwierigsten und am spätesten gelösten Problemen der Meteorologie; dementsprechend sollen auch die in der Atmosphäre und in ihren verschiedenen Teilen vorfindlichen Wärmemengen bis zu ihrem letzten Ursprung aus den Sonnenstrahlen erst in § 196 zurückverfolgt werden.

Was uns in den Beobachtungen verhältnismäfsig am unmittelbarsten gegeben ist, ist die **Lufttemperatur.** Von ihr, dem jeweiligen Druck und dem Feuchtigkeitsgehalt hängen dann die Durchsichtigkeit oder Trübung der Luft und die Niederschläge (im weiteren Sinne des Wortes, nämlich nicht nur Schnee und Regen, sondern auch Wolken, Nebel, also alle Kondensation des in klarer Luft gasförmigen und unsichtbaren Wassers) ab. Erst aus den Gesetzen des namentlich bei diesen Kondensationen eintretenden Wärmeverbrauches erklärt sich dann u. a. auch die Abnahme der Temperatur nach oben.

§ 192. Die Lufttemperatur.

Für die Feststellung des jeweiligen Wärmezustandes der Atmosphäre bilden die täglichen Thermometerablesungen, bezw. die Thermogramme selbstregistrierender Thermometer ebenso den Ausgangspunkt wie für den Luftdruck die Ablesungen des Barometerstandes. Hierbei sind durchweg Ablesungen „im Schatten" (genauer: unter Ausschliefsung eines direkten Einflusses der Strahlung, Absorption und diffusen Reflexion, § 196) vorauszusetzen. Die Einzelbeobachtungen führen dann zu folgenden zusammenfassenden Beschreibungen:

1. Täglicher Temperaturgang. Fast überall zeigt die Lufttemperatur ein Minimum je nach Jahreszeit und Witterung zwischen 4^h und 8^h früh, hierauf ein rasches Ansteigen bis zum Maximum zwischen 2^h und 4^h nachmittags, von wo an sie allmählich und immer langsamer bis zu jenem Minimum wieder abnimmt. Dabei ist die Differenz zwischen dem höchsten und tiefsten Werte der Temperatur, die Amplitude, sehr grofs bei hellem, sehr klein bei trübem Himmel, grofs bei Orten im Innern eines Kontinents (besonders in engen Tälern), klein auf dem Ozean (und auf hohen Bergen); und die ganze Kurve dieses periodischen Temperaturwechsels liegt natürlich höher in der warmen, tiefer in der kalten Jahreszeit.

Aus diesen täglichen Thermometerablesungen lassen sich dann die Monatsmittel ableiten und aus diesen wieder als

2. jährlicher Temperaturgang die allbekannten Unterschiede hoher Temperatur im Sommer und in niederen Breiten, niedriger Temperatur im Winter und in hohen Breiten. Hierzu kommen im besonderen die sehr kleinen Amplituden des Seeklimas und die sehr grofsen des Landklimas; z. B. die das ganze Jahr nahezu konstante Temperatur auf der Insel Jaluit (6° n. Br., 169° östl. L. von Greenwich) und die bis zu 75° betragenden Temperaturkontraste zwischen Sommer und Winter in Nertschinsk (52° n. Br., 120° östl. L.). Der „Kältepol" der Erde ist Werchojansk in Sibirien.

Wieder werden alle diese Verhältnisse aufs übersichtlichste dargestellt durch **Isothermenkarten,** welche nicht nur die Mittel für je ein Jahr, sondern für möglichst lange Reihen von Jahren darbieten. (Über die Darstellung durch „Thermoisoplethen" vergl. LA 223.) Sind so die Mittel für einige Zentralstationen gewonnen, so genügen auch für Stationen in 100 km Abstand schon die Mittel von 12 Jahren, um nach besonderen Interpolationsmethoden die wahren Werte bis auf 0,1° C genau zu erhalten. Werden nicht die Mittel für das ganze Jahr, sondern speziell für Januar und Juli eingetragen, so ergeben sich Sommer- und Winterisothermen (**Isotheren** und **Isochimenen,** Fig. 688).

LA 223

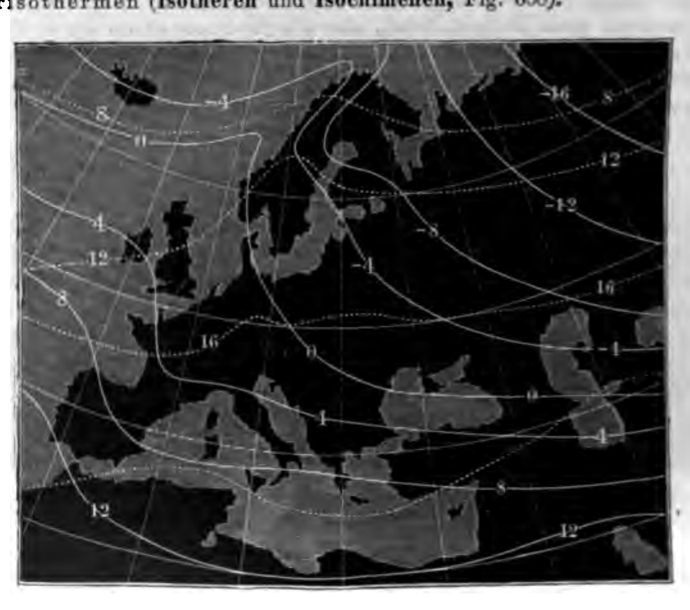


Fig. 688. Isotheren ······ / Isochimenen —— von 4° zu 4° R (5° zu 5° C).

Wären nun nicht die Ungleichheiten in der Verteilung von Festland und Meer, so müßten alle Isothermen Parallelkreise sein. Erheben wir uns ferner über verschiedene Punkte je eines Parallelkreises um 1000 m, 2000 m, 3000 m ..., so müßten auch hier überall gleiche Lufttemperaturen herrschen, die nach allbekannten Erfahrungen (— ihre Erklärung erst in §§ 195 und 196) nach oben immer niedriger sind. — Stellen wir uns zunächst unter dieser vereinfachenden Annahme wieder (ähnlich wie bei der Deutung der Isobaren als Durchschnittslinien der Flächen gleichen Druckes mit der Meeresoberfläche, § 190) über einem Orte A in der Meeresfläche am Äquator, B unter 30° n. Br., C unter 60° n. Br., z. B. die Jahresmittel von rund 25°, 20°, 0° C aufgetragen vor, so würde es bei hinreichender Erhebung über A auch hier Stellen von 20° und 0° C geben; diese Stellen liegen dann mit B und C in derselben Fläche gleicher Temperatur (— sie müßten unter jenen Annahmen Rotationsflächen um die Erdachse als Rotationsachse sein). Auch die höchst unregelmäßigen wirklichen Isothermen, die z. B. längs der Westküste von Skandinavien sich fast von Süd nach Nord (statt von Ost nach West) erstrecken, haben wir uns so als Durchschnitte der Flächen gleicher Temperatur mit der Erdoberfläche vorzustellen. — Wo

ie Fläche für 0° die Erdoberfläche schneidet, ist die **Schneegrenze;** und zwar ies sowohl bei Durchschnitt eines gröfseren Ländergebietes, wie für einzelne Erebungen, Bergketten oder Einzelberge, welche nur mit ihren Gipfeln durch die 'läche von 0° hindurchdringen. Die durchschnittliche Schneegrenze liegt in den 'ropen höher als 5000 m und senkt sich etwa unter 60° n. Br. bis an den Meeresspiegel. [Veranschaulichung solcher Flächen gleicher Temperatur an dem Wärmeustande eines Zimmers, das nach starker Kälte durch einen eisernen Ofen rasch eheizt wird: das Thermometer (das hierbei vor direkter Strahlung zu schützen st) wird in der Nähe des Ofens bald z. B. 20° in der Höhe von 2 m über dem 'ufsboden zeigen; in gröfserem Abstande vom Ofen werden die 20° erst in 3 m Iöhe eintreten, und die kalte Schicht am Fufsboden ist dicker fern vom Ofen als ıahe bei ihm. Im ganzen werden sich also die Flächen gleicher Temperatur vom ıeifsen Ofen weg erheben, oder: sie haben über dem Ofen eine Einbuchtung nach ıbwärts. Wird mit dem Heizen bald aufgehört, so dafs nicht durch Luftzirkulation lie Temperatur des ganzen Zimmers sich annähernd ausgeglichen hat, so nehmen ılle Schichten allmählich wagerechte Lage an oder: die Flächen gleicher Tem›eratur werden parallel dem Fufsboden und der Decke. — Hierbei bieten auch lie Temperaturen verschiedener Orte des Zimmers das nächstliegende Beispiel einer ›ffenbar richtungslosen Gröfse (also Skalengröfse, nicht Vektorgröfse); und lie Schichtung der Flächen gleicher Temperatur gibt auch ein besonders anschauiches Vorbild für die der mechanischen, elektrischen .... Äquipotentialflächen.]

Von der Wärmeverteilung in vertikaler Richtung war von jeher ›ekannt, **dafs im ganzen die Lufttemperatur nach der Höhe abıehme;** auf hohen Bergen ist es ja (wenn direkte Sonnenstrahlung lurch einen Felsschatten, eine Wolke abgehalten wird) empfindlich kalt.

Genaueres über die Stärke der Temperaturabnahme haben erst die Ballonıhrten der allerletzten Jahre gelehrt (wogegen frühere, da die Thermometer nicht usreichend gegen Sonnenstrahlung geschützt waren, Angaben lieferten, die sich ɛtzt als um 14° C zu hoch herausstellten). — Das Hauptergebnis ist:

Einer Steigung um je 100 m entspricht als **vertikaler Tem›eraturgradient** in einer ersten Schicht von 0 m bis etwa 4000 m Seehöhe eine Abnahme um rund $^1/_2$° C. — Der oberen Grenze der Volken entspricht die sogenannte Störungsschicht von nur 00 bis 300 m Dicke, in der die Temperatur konstant bleibt. In ler dritten Schicht von etwa 4000 m Seehöhe nähert sich die Abıahme einer Grenze von rund 1° C (und zwar von 4000 bis 7000 m Iöhe um 0·66° C, von 7000 bis 9000 m um 0·81° C auf je 100 m Erhebung). — Jüngst (1902) wurde durch unbemannte Registrierballons n Höhen von 10 000 bis 15 000 m eine Wiederzunahme der Tem›eratur und erst darüber hinaus eine Wiederabnahme festgestellt.

Dabei bleiben in gröfseren Höhen das jährliche Kälte- und Wärmemaximum eträchtlich hinter denen der Ebene (Januar, Juli) zurück. So wurde durch Registrierballons über Paris in 10 000 m Höhe als kältester Monat der März mit - 53° C, als mindest kalter der August mit — 44° C gefunden.

Was nun die Ursachen dieser Temperaturabnahme betrifft, so ist es eine egelmäfsige Frage der Unkundigen, warum es denn nicht vielmehr gegen oben in immer wärmer werde, denn die höheren Luftschichten seien ja „der Sonne

näher"? Auch wenn, wie diese Frage stillschweigend voraussetzt, die Lufttemperatur zweier Orte einfach von ihrem Abstande von der Sonne abhinge, wären im Vergleich zu dem ungeheuren Abstande der Sonne von der Erde alle Abstände innerhalb der Atmosphäre doch so verschwindend klein, dafs dann überhaupt alle Teile der Atmosphäre nur unmerklich verschiedene Wärmegrade haben könnten. — Wenn aber auch seit langem bekannt war, dafs sich die Luft erst an dem durch Absorption dunkler Strahlen erwärmten Erdboden erwärme und daſs diese Erwärmung nur zum geringsten Teile durch Wärmeleitung erfolge (denn Luft ist ein Schlechtleiter der Wärme), im überwiegenden Maſse aber durch Fortführung in den Luftströmungen (**Konvektion**) erfolge, so blieb mit hiermit doch noch unerklärt, warum in den unteren Schichten die Temperaturabnahme rund $1/2°$ C per 100 m, in den oberen rund 1° C per 100 m Erhebung betrage. Der Umstand, dafs diese Zahlen ganz dieselben sind wie die für die Abkühlung infolge Wärmeverbrauches von aufsteigenden Strömen feuchter, bezw. trockener Luft, läfst erkennen, dafs auch jene fehlende Erklärung erst durch Anwendung der mechanischen Wärmetheorie zu geben sei, von der die moderne Föhntheorie das typische Beispiel ist; § 195.

§ 193. Absolute und relative Feuchtigkeit. Hygrometer.

Der atmosphärischen Luft ist fast immer und überall aufser den Bestandteilen „trockener Luft" (Sauerstoff, Stickstoff, Argon u. s. w., vergl. Chemie, § 220) auch Wasser beigemengt, und zwar teils als unsichtbarer Wasserdampf, teils kondensiert, wobei dann die Tröpfchen als die im folgenden Paragraphen zu besprechenden Gebilde: Nebel, Wolken u. s. w. sichtbar werden. Im vorliegenden Paragraphen ist unter „Wassergehalt" der Luft der an Wasserdampf (Dunst im wissenschaftlichen Sinne, nicht im vorwissenschaftlichen, § 77, I) verstanden. — Auf die Begriffe des mit Dampf gesättigten bezw. nicht gesättigten Raumes (kürzer auch: gesättigter und ungesättigter Dampf, § 77, III) gründen sich folgende meteorologische Mafsbestimmungen:

1. Als **absolute Feuchtigkeit** der Luft bezeichnet man die Anzahl Gramm gasförmigen Wassers per Kubikmeter des Gemenges von Luft und Dunst. Sie geht von geringen Mengen bis etwa 25 g.

Um diesen Wassergehalt zu bestimmen, läfst man ein bestimmtes Volumen Luft durch Chlorcalciumröhren streichen, die vor- und nachher gewogen werden; den Luftstrom unterhält ein „Aspirator" (oder eine Wasserluftpumpe).

2. Als **relative Feuchtigkeit** der Luft bezeichnet man das in Prozenten auszudrückende Verhältnis des absoluten Wassergehaltes zu derjenigen Menge Wasserdampf, die bei dem gegebenen Druck und der gegebenen Temperatur als gesättigter Dampf sich erhalten könnte.

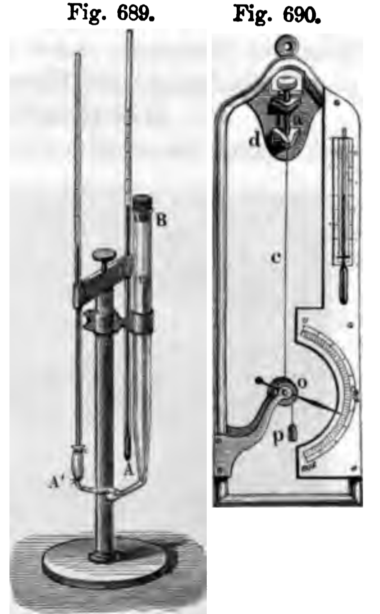
Diese beiden Begriffe sind zur vollständigen Beschreibung des Feuchtigkeitszustandes der Luft notwendig und theoretisch ausreichend. Doch sind aufser ihnen praktisch noch folgende Begriffe im Gebrauch: 3. Der **Dampfdruck**; er gibt in Millimetern Quecksilberhöhe bei gegebener Temperatur die absolute Feuchtigkeit (wie 1) an. 4. Das **Sättigungsdefizit**, d. i. die absolute Feuchtigkeit, die noch zu der in einem Kubikmeter vorhandenen hinzukommen müfste, damit der Raum mit Wasserdunst gesättigt wäre. 5. Der **Taupunkt**, d. i. die Temperatur, auf die

i gegebener relativer Feuchtigkeit der Raum abgekühlt werden müfste, damit ttigung einträte.

Hygrometer und **Psychrometer** geben nach verschiedenen Me- oden mittelbar die relative Feuchtigkeit an.

DANIELLS Hygrometer, das je nach der Feuchtigkeit Betauung einer zum il vergoldeten Kugel zeigt, ist gegenwärtig weniger verwendet als

AUGUSTS Psychrometer (Fig. 689); eses besteht aus zwei gleichen Thermo- etern, deren eines *A'* (mittels einer n *B* aus mit Wasser getränkten Hülle) ucht erhalten wird und daher „Nafs- ilte", also tieferen Stand als das ɔckene Thermometer *A* anzeigt. Dieser ɜmperaturunterschied wird nur gering in, wenn die äufsere Luft der Sätti- ɪng schon sehr nahe war.


Fig. 689. Fig. 690.

Gegenwärtig ist das verläfslichste Instru- ɜnt für die Angabe der Feuchtigkeit Ass- NNS Aspirationspsychrometer (Fig. 697; ist darauf auch in § 196 näher zurückzu- mmen, weil sein erster Zweck die Abhaltung ɪes störenden Einflusses der Wärmestrah- ɑg auf die Bestimmung der Lufttempe- ɪur ist).

Nach dem Vorbilde der primitiven Schön- d Schlechtwetteranzeiger, in denen eine bei ockener Luft sich zusammenziehende, bei ɪchter Luft sich verlängernde Darmsaite eine Scheibe mit Figürchen in Bewegung zt, sind die Haarhygrometer (Fig. 690) von SAUSSURE, KOPPE, LAMBRECHT gerichtet; in diesen setzen hygroskopische Stoffe (Haare, die Grannen des Storch- ɪnabels ...) Zeiger oder Schreibstifte (so beim selbstregistrierenden Hygrographen ı RICHARD) in Bewegung, welche direkt die relative Feuchtigkeit angeben.

§ 194. Nebel, Wolken, Regen, Schnee, Hagel, Tau, Reif.

Wird infolge Abnahme der Temperatur (oder Zunahme des Druckes) bei der relativen Feuchtigkeit von 100 Proz. erreichte Sättigungspunkt chter Luft überschritten, so scheiden sich die über diese 100 Proz. hinausgehen- ı Wassermengen in Form von Tröpfchen aus (indem die für die Tröpfchen- dung nach AITKEN ebenfalls wesentliche Bedingung fester Kondensationskerne, '7, IV b, in der atmosphärischen Luft fast immer und überall erfüllt ist).

Solange die bei Kondensation des atmosphärischen Wasserdunstes h bildenden Tröpfchen hinreichend klein sind, bilden sie zusammen t der zwischen sie eingebetteten feuchten Luft die **Wolke**, die für n innerhalb der Wolke selbst befindlichen Beschauer sich als **Nebel** rstellt (gleichviel, ob dieser nahe dem Erdboden oder auf einer

Bergspitze oder im freien Luftmeer sich befindet; Durchquerung von Wolken mittels des Luftballons). Bei reichlicher Ausscheidung vereinigen sich die Tröpfchen zu gröfseren Tropfen, die als **Regen** niederfallen (Sprühregen bis Platzregen, Wolkenbruch; Strichregen, Landregen ...). — In einer Temperatur unter 0° C bilden sich entweder Eiskristalle, so in den Cirruswolken (siehe unten), im **Schnee** (wo die Schneeflocken aus lockeren, die Graupeln aus dichter geballten Kristallen bestehen); oder das Wasser bleibt unterkaltet, worin eine Teilbedingung der Eisregen und des **Hagels** liegt.

Nach dem äufseren Anblick werden **Feder-, Haufen-, Schichten- und Regenwolken** unterschieden (Fig. 691).

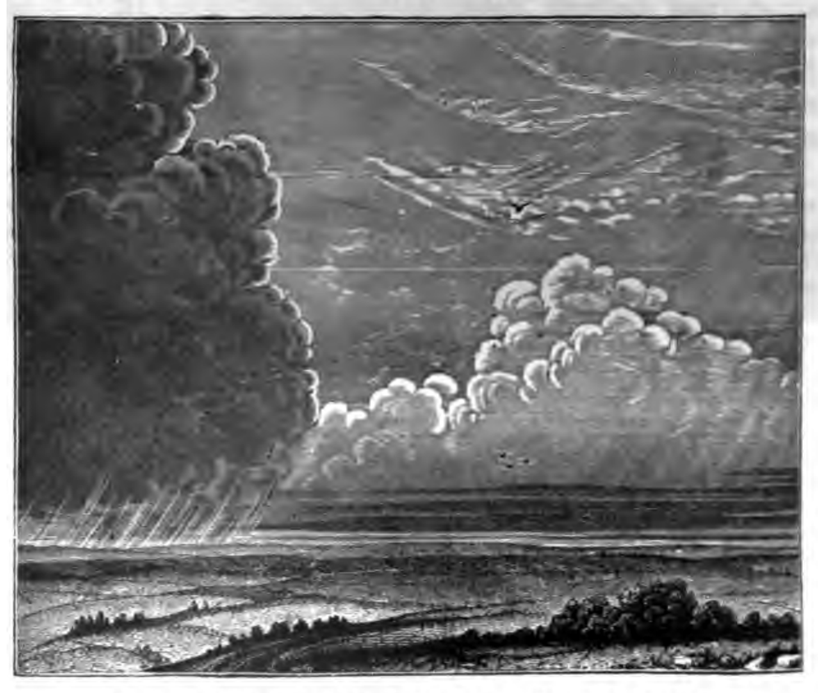


Fig. 691. Schichtwolke (*stratus*, 1 Vogel), Federwolke (cirrus, 2 Vögel), Haufenwolke (cumulus, 3 Vögel), Regenwolke (*nimbus*, 4 Vögel).

Diesen durch HOWARD aufgestellten und durch GOETHE populär gemachten vier Typen werden noch sechs andere Kombinationen (z. B. Cirrocumulus = Schäfchenwolke, Cumulonimbus = dunkle massige Gewitterwolke u. s. f.) zugesellt. — Diese deskriptiven Einteilungen sind deshalb nicht ohne wissenschaftlichen Wert, weil sie im ganzen Grofsen auch wesentlichen Unterschieden in der Art der Entstehung der Wolken entsprechen. Da deren Gesetze in einem noch vor zwei Jahrzehnten kaum geahnten innigen Zusammenhange mit den Gesetzen der mechanischen Wärmetheorie stehen, seien sie im folgenden Paragraphen besonders besprochen. Hier noch einiges von dem rein beschreibenden Tatsachenmaterial, das

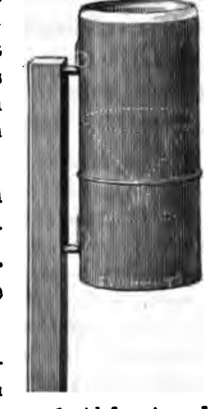
zum Teil erst durch die Registrierballons während der jüngsten Jahre gewonnen wurde und durch das die Forderungen jener Theorie glänzend bestätigt wurden: Den verschiedenen Formen der Wolken entsprechen die wesentlich verschiedenen durchschnittlichen Höhen, die mit der geographischen Breite und mit der Jahreszeit verschieden sind. Folgende Höhen ergaben sich aus trigonometrischen Messungen seitens je zweier Beobachter an den Enden einer bestimmten Standlinie: 50 bis 1000 m Stratus, 1000 bis 4000 m Stratocumulus, Cumulus, Cumulonimbus, Nimbus, 4000 bis 6000 m Altostratus, Altocumulus, 6000 bis 8000 m Cirrocumulus, 8000 bis 10000 m Cirrus, Cirrostratus.

Im Sommer und in wärmeren Gegenden sind die durchschnittlichen Höhen gröfser, im Winter und in kälteren Gegenden geringer.

Man ist nach dem äufseren Anblick gewohnt, die Wolke als ein Gebilde zu betrachten, das eine selbständige Masse darstellt und in der Luft schwimmend deren Bewegung im ganzen mitmacht. Um dabei zu erklären, warum die Wasserteilchen der Wolke nicht sinken, nahm man lange Zeit an, dafs sie nicht Tröpfchen, sondern Bläschen bilden, und sprach so von „Nebelbläschen"; doch wurde diese Annahme namentlich durch Beugungsversuche von Kiessling widerlegt. In der Tat sind denn auch die meisten Wolken nicht in der Weise bleibende Gebilde wie je eine Masse, sondern wie je eine Welle (vergl. § 60, über den Gegensatz zwischen Massenbewegungen und Wellenbewegungen). Es kann sich nämlich eine Wolke an der Unterseite auflösen, indem die sinkenden Tröpfchen in wärmere Schichten gelangen und an der oberen Seite sich neue bilden, indem dort Kondensation an den kälteren Schichten eintritt. Auch zeigen sich im Gebirge Wolken, die scheinbar unbeweglich an Bergen hängen, wiewohl sie von heftigem Sturme durchbraust sind.

Geradezu als **Wogenwolken** oder **Wolkenwogen** bezeichnet Helmholtz jene regelmäfsigen Wolkenstreifen, von denen die Cirruswolken die kürzeste Wellenlänge (bis etwa 200 m), die als böiges Wetter auffälligen Wechsel von hellem Himmel und Regengüssen Wellen bis 15 und 30 km Länge darstellen (über den Grundgedanken von Helmholtz' Erklärung dieser Erscheinungen vergl. folg. Paragraphen). In der Tat wurde einige Jahre nach Helmholtz' Tode (1894) bei einer Ballonfahrt am Boden eine kalte ruhende Luftschicht von 2·7°, in etwa 200 m Höhe eine Temperatur von 9·2° und eine Windstärke beobachtet, die den Ballon mit 12·5 m sec^{-1} dahintrieb. Senkrecht zur Fahrtrichtung zeigten sich dicht über der Erdoberfläche parallele Nebelrollen, deren 15 längs 7·5 km gezählt wurden. Die beobachtete Wellenlänge von 640 m stimmte sehr gut mit den nach Helmholtz' Gleichungen berechneten Wellenlängen.

Fig. 692.



Zur Bestimmung der Niederschlagsmengen dienen die Regenmesser: kubizierte Gefäfse mit Einlafsöffnungen von bestimmtem Querschnitt (Fig. 692).

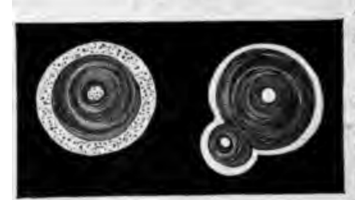
Verschiedene Orte haben sehr verschiedene Jahresmittel der Niederschlagsmenge.

Die gröfste wurde in Cherapunjie in Bengalen beobachtet, nämlich als zehnjähriges Mittel 14·8 m, d. h. wenn über einer bestimmten wagerechten Fläche alles Abfliefsen und Abdunsten des gefallenen Regens (und Zufliefsen von seitwärts) abgehalten worden wäre, hätte sich binnen einem Jahre eine Wasserschicht von 14·8 m Höhe angesammelt. An

einem Junitage fielen dort sogar 1·04 m. Dagegen gibt es fast niederschlagslose Zonen, so die Rofsbreiten (um 35° n. und s. Br.). Die Erklärung dieser grofsen Verschiedenheiten liegt in dem Vorherrschen niederen bezw. hohen Barometerstandes; einiges darüber im folgenden § 195.

An der Erscheinung des **Hagels** fordern mehrere Einzelheiten Erklärung: so die häufig schichtenförmige Struktur (Fig. 693), das lange Verweilen der Hagelkörner in der Luft trotz ihrer oft beträchtlichen Gröfse (bis zu der von Tauben- und Hühnereiern, ja von mehr als 1 kg), die starken elektrischen Begleiterscheinungen.

Fig. 693.



Eine allseits befriedigende Theorie der Hagelbildung gibt es noch nicht; Beiträge zu ihr sind jedenfalls die Unterkaltung des Wassers (§ 76), aus der sich dann das Gefrieren binnen sehr kurzer Zeit erklärt; ferner sehr rasch aufsteigende Luftströme, was im Einklange ist mit den grofsen Mengen kondensierten Wassers, und häufig auch absteigende Ströme, also Luftwirbel mit horizontalen Achsen. — Das öfters wiederholte Auf- und Absteigen durch mehr und weniger warme und wasserreiche Luftschichten würde dann das lange Verweilen und die Schichtung erklären (— beides hat Volta aus entgegengesetzten Ladungen von Wolken zu erklären versucht, zwischen denen die sich bildenden Hagelkörner hin und her geworfen werden). — Neuestens versucht man wieder (mit nicht unbestrittenem Erfolg) der Bildung schwerer Hagelwolken durch „Wetterschiefsen" vorzubeugen.

Tau und Reif. Nach hellen Nächten zeigt sich morgens die Pflanzendecke im Sommer mit **Tau**, im Winter mit **Reif** bedeckt. Dieser kann nicht in der Weise wie Regen und Schnee aus der Luft auf die Erdoberfläche herabgefallen sein, sondern hat sich aus der die festen Körper an der Erdoberfläche unmittelbar umgebenden Luft an ihnen kondensiert. Bedingung hierfür ist, dafs diese Körper durch Ausstrahlung in den Weltraum ihre Temperatur unter den Taupunkt erniedrigt haben, was eben nur bei unbedecktem Himmel möglich ist, wogegen eine Wolken- (oder auch eine künstlich erzeugte Rauch-) decke die Strahlen wieder zur Erde zurückwirft.

Diese Theorie der Tau- und Reifbildung hat Wells gegeben, und sie ist insoweit noch gegenwärtig anerkannt. Dagegen wurde die weitere Annahme von Wells, dafs das zu kondensierende Wasser allein aus der Luft stamme, durch die Beobachtung von Aitken widerlegt, dafs Steine bei Taubildung nicht oben, sondern an der Unterseite nafs waren, der Wasserdampf also auch aus dem Boden stamme. Insbesondere sind es die Pflanzen, die während der Nacht Wasser aus dem Boden aufnehmen und an die benachbarten Luftschichten abgeben. So wurde auch gezeigt, dafs namentlich über bewachsenem Boden im Innern von umgestürzten Gefäfsen sich reichlich Tau ausscheidet.

Durchschnittlich beträgt die Taubildung des ganzen Jahres nur 1 Proz. der Regenmenge. — Viel ausgiebiger ist häufig der Reif; er setzt sich als Rauhreif oft in dichten Klumpen an die Bäume an. Da er infolge der grofsen Absorptions-

fläche viel Ammoniak aus der Luft aufnimmt, dürfte er im Pflanzenleben von wesentlicher Bedeutung sein.

§ 195. Erklärung einiger Luftströmungs- und Niederschlagserscheinungen aus der mechanischen Wärmetheorie.

Nach älteren Theorien (so von HUTTON, die sich vom Ende des XVIII. bis Ende des XIX. Jahrhunderts erhielt) sollte die Bildung aller Niederschläge im weiteren Sinne (sowohl Nebel, Wolken, wie Regen) durch die Mischung ungleich warmer mit Wasserdämpfen gesättigter Luftmengen bedingt sein. Warum aus solchen Mischungen sich aber höchstens leichte Wolkenbildungen, keineswegs ausgiebige Regen erklären lassen, vergl. LA 224. LA 224.

Die seit etwa zwei Jahrzehnten ausgebildete und angenommene Theorie der Niederschlagsbildung baut die Erklärung wesentlich auf die mechanische Wärmetheorie, namentlich auf die mechanische Arbeit, die von aufsteigenden und dabei sich abkühlenden Luftströmungen zu leisten ist. Diese Theorie wurde von HANN zuerst im Hinblick auf die auffallende Erscheinung des Föhns der Alpen entwickelt. Man hatte bis dahin diesen heifsen, trockenen Wind für als aus der Sahara kommend erklärt; doch wies HANN darauf hin, dafs der Föhn gerade im Sommer, wo von der Sahara die heifseste Luft aufsteigt, in den Alpen nur ausnahmsweise beobachtet wird. Überdies wurden Winde ganz ähnlichen Charakters an vielen Orten, zum Teil auch als von Norden kommend, beobachtet. Das Gemeinschaftliche ist vielmehr, dafs ein feuchter Wind über die eine Seite (Luvseite) eines Gebirges emporgetrieben wird, wobei er sich um so mehr kalt und nafs zeigt, je höher er steigt, worauf er dann an der Rückseite des Gebirges (Leeseite, Windschattenseite) um so mehr warm und trocken wird, je tiefer er herabgesunken ist. Da dieses Föhnphänomen und seine gegenwärtige Erklärung ein typisches Beispiel einer meteorologischen Beschreibung und Erklärung gibt, so soll im folgenden zuerst etwas eingehender die Beschreibung und erst dann die erklärende Theorie folgen.

Föhn heifst der heifse, trockene Wind, der in der Regel im Frühjahr und Herbst von dem Hauptkamme der Alpen in die nordwärts von ihm gelegenen Täler herabstreicht und in einzelnen hierfür günstig gelegenen Tälern (z. B. von Innsbruck) zu grofser Stärke anwächst. Über dem Kamme (z. B. des Brenner) lagern Wolkenschleier, die sich später zur Föhnmauer verdichten. Der Wind beginnt mit einzelnen Stöfsen, nimmt rasch an Temperatur und Geschwindigkeit zu und steigert sich manchmal bis zum Orkan. Hitze und Trockenheit bewirken Ausdörren alles Holzwerkes (so dafs die Herdfeuer gelöscht werden müssen), bei vielen Menschen Übelbefinden; im Frühjahr schmilzt der Schnee rasch weg. Diese Wirkungen erstrecken sich bis ins Alpenvorland.

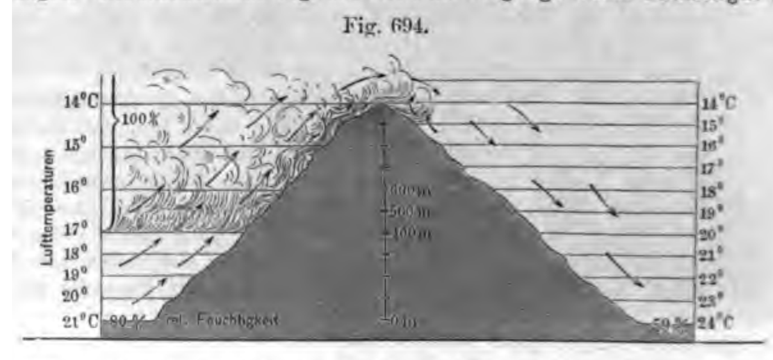
Die Erklärung der Hitze und Trockenheit ergibt sich so: Beim Emporsteigen des feuchten Windes an der Südseite des Gebirges entgegen dem Widerstande der darüber lagernden Luft wird mechanische Arbeit **verbraucht**, die Luft kühlt sich ab (wie beim „Blasen" mit gespitzten Lippen — im Gegensatz zum warmen „Hauch").

und in bestimmter Höhe erreichen die Wasserdünste den **Kondensationspunkt.** — Ist dann bis zur Höhe des Gebirgskammes das Wasser in Regengüssen herausgefallen, so wird durch das Gewicht der herabsinkenden Luft **mechanische Arbeit geleistet,** die **Luft erhitzt sich** (wie im pneumatischen Feuerzeug) und zeigt nun, da ohnedies die **absolute Feuchtigkeit geringer** geworden ist, eine noch um so **geringere relative Feuchtigkeit.**

Diese Erklärung stimmt nicht nur in diesen ihren allgemeinen Zügen, sondern auch in den numerischen Werten mit den durch die mechanische Theorie der Wärme und den durch die spezifische Wärme trockener Luft und des Wasserdampfes geforderten quantitativen Daten (LA 225) mit den Beobachtungen und Messungen. Die schematische Fig. 694 stellt die Vorgänge beim Übersteigen eines

LA 225.

Fig. 694.



nur 1000 m über die Talsole (0 m) sich erhebenden Gebirgskammes dar. Ein Luftstrom, der im Tale 21° C und 80 Proz. relative Feuchtigkeit hat, d. i. 12,2 g Wasserdampf in 1 kg Luft, wogegen erst bei 15 g Sättigung stattfände, kühlt sich bei der durch die Berglehne erzwungenen Emporsteigung **um je 100 m Hebung um fast genau 1° C ab.** Bei 400 m haben daher Luft und Wasserdunst nur mehr 17° C, was für jene absolute Feuchtigkeit der Sättigungspunkt ist. Indem nun bei weiterem Emporsteigen das sich kondensierende Wasser durch seine **freiwerdende Dampfwärme** einen Beitrag zu der die Hebearbeit verrichtenden Wärme liefert, kommt **erst auf rund 200 m Hebung** eine weitere **Temperaturerniedrigung von 1° C.** Deshalb ist auf der Kammhöhe von 1000 m die Temperatur auf 14° gesunken. Da bei dieser Temperatur die absolute Feuchtigkeit nur noch 10,8 g Wasserdampf in 1 kg Luft beträgt, so müssen aus den über 400 m sich ballenden Wolken 12,2 — 10,8 = 1,4 g Wasser als Regenguß herausfallen. — Jenseits der Kammhöhe entspricht wieder einem **Sinken um nur 100 m eine Erwärmung um 1° C,** welche Zahl beim **Sinken** in erster Annäherung sowohl für **gesättigte** wie **ungesättigte** (auch ganz **trockene**) Luft gilt. Der Wind hat daher beim Eintreffen im ursprünglichen Niveau 24° C (gegen 21° C) und die relative Feuchtigkeit von 59 Proz. (gegen 80 Proz.) erreicht. — Wäre die Kammhöhe des Gebirges 2500 m, so würden die 24° C auf 32° zunehmen, die 59 Proz. relative Feuchtigkeit auf 27 Proz. abnehmen.

Die hier an dem besonderen Beispiele des Föhns durchgeführten quantitativen Betrachtungen leiten nun auch zur Antwort auf die viel allgemeinere und schon der alltäglichen Erfahrung sich aufdrängende Frage:

Warum entspricht in der Regel **hohem** Barometerstande **helles, tiefem** Barometerstande **trübes** Wetter? — Antw.: Die in ein barometrisches Minimum von aufsen (in erster Annäherung radial, genauer spiralig) einströmende Luft bildet über der Stelle geringen Druckes einen aufsteigenden Strom (vergl. Fig. 683, S. 618). Infolge des Verrichtens mechanischer Arbeit unter Wärmeverbrauch wird die Luft kühler (und zwar dies viel ausgiebiger als blofs infolge Berührung mit den höheren und dabei kälteren Schichten); und dieser Abkühlung entspricht Kondensation, d. h. zunächst Trübung, dann Nebel- und Wolkenbildung, endlich Regen.

Dagegen bildet die Luft, ehe sie von einem barometrischen Maximum (oder auch von ausgebreiteten Stellen hohen Druckes) nach aufsen hin abströmt, zuerst absteigende Ströme, die infolge der hierbei gewonnenen und sich in Wärme umsetzenden mechanischen Arbeit Temperaturerhöhung und Entwölkung bewirken.

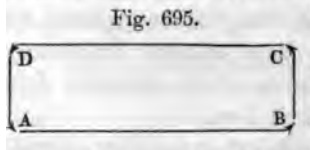
Diese zuerst nur theoretisch erschlossenen Beziehungen konnten von Hann durch Beobachtungen auf dem Sonnblick besonders im Winter bestätigt werden, indem in diesen Höhen wirklich der Luftstrom der Zyklone kalt, der der Antizyklone verhältnismäfsig warm ist. Auch die neuesten Ballon- und Drachenbeobachtungen haben dies glänzend bestätigt.

Ferner sind in der Tat die Gürtel hohen Druckes in etwa 35° nördlicher wie südlicher Breite zugleich die Regionen des fast immer klaren Himmels. — Umgekehrt erklärt sich das regnerische Klima z. B. von Salzburg daraus, dafs die herrschenden Westwinde ungehindert über die bayrische Ebene streichen und dann an dem unvermittelt aus der Ebene sich erhebenden Hochgebirge emporzusteigen gezwungen sind. — Ferner: Dem Hochgebirgstouristen ist die Erscheinung geläufig, dafs früh morgens Himmel und Berge wolkenlos sind und schon kurz nach Bestrahlung durch die Sonne über einzelnen Gipfeln sich unscheinbare Wölkchen zeigen, die sich alsbald zu dichten Wolkenhauben vergröfsern. Wenn hier die bei Erwärmung durch die Sonne aufsteigenden Ströme so bald zum Anfang von Kondensationen führen konnten, mufs die Luft dem Sättigungspunkte nahe gewesen sein. — Ebenso: Nach bekannten Wetterregeln zeigt es gutes Wetter an, wenn sich die „Herbstnebel senken", dagegen schlechtes, wenn sie „steigen" und sich in einzelnen Wolkenfetzen am Himmel festzusetzen scheinen; dies infolge aufsteigender, jenes infolge absteigender Luftströme. — Ebenso: Um Sonnenuntergang klärt sich sehr häufig der Himmel: denn das Aufsteigen der Luft hört auf und es beginnt eine absteigende Strömung, die mehr Wärme entwickelt, als von den Wolken aus der um die Abendzeit ohnedies schwächeren Sonnenstrahlung aufgenommen worden wäre.

Als umfassende Anwendungen des in diesem § erläuterten Zusammenhanges zwischen Erwärmung und Abkühlung auf Grund der mechanischen Wärmetheorie werden im folgenden § die früher nur mangelhaft aus Strahlung, Absorption und Konvektion erklärte Temperaturabnahme mit der Höhe und die paradoxe Erscheinung der Temperaturumkehr erörtert werden. Dagegen ergibt sich schon jetzt ebenfalls als Anwendung jenes Prinzips die Antwort auf die noch weiter zurückgehende Frage: Wenn fast alle Veränderungen des Wetters von dem Wechsel der barometrischen Maxima und Minima abhängen — woher

kommt dann dieser Wechsel der Maxima und Minima selbst? Hierauf antwortet folgende **Hypothese von der Ausbildung barometrischer Maxima und Minima** (nach EGON OPPOLZER): Haben zwei nicht allzu entfernte Orte A und B (Fig. 695) anfänglich einen nur wenig verschiedenen Luftdruck, und zwar etwa über A ein schwaches relatives Maximum, über B ein schwaches Minimum, so tritt ein absteigender Strom DA und ein aufsteigender BC ein; also zusammen mit den Strömen von A nach B, von C nach D, eine **Zirkulation**, falls nur die jene kleinen Druckunterschiede bedingenden Kräfte (in der Regel selbst wieder Temperaturunterschiede, s. u.) fortbestehen. Wäre dabei die Luft überall trocken, so entspräche dem Absteigen wie Aufsteigen um je 100 m eine Erwärmung bezw. Abkühlung um je 1° C. Ist aber die Luft, wie in der Regel, feucht, so entspricht zwar dem **Absteigen** über A um 100 m noch immer ein **Erwärmen** um 1°, dagegen dem **Aufsteigen** über B um 100 m nur ein **Abkühlen** um $^1/_2$°. Da also die über A sinkende Luft wärmer und somit weniger dicht ist als die über B steigende, so werden von A aus durch denselben Querschnitt nach B hin allmählich immer kleinere Luftmengen abfliefsen als von B über CD nach A zufliefsen. Somit wird über A eine Anhäufung von Luft, ein **barometrisches Maximum**, eine **Anticyklone** entstehen, über B ein Defizit an Luft, ein **Minimum**, eine **Cyklone**.

Fig. 695.



Hiermit ist also das Anwachsen zu grofsen Druckdifferenzen aus anfänglich kleinen erklärt. Diese anfänglich kleinen Differenzen selbst werden sich in der Regel erklären als die „Hebungen bezw. Senkungen der Flächen gleichen Druckes", die ihrerseits wieder durch Temperaturunterschiede verursacht sind, wie im folgenden Paragraphen, II., gezeigt wird.

§ 196. Einstrahlung seitens der Sonne. Absorption und diffuse Reflexion in der Luft und im Erdboden. Die Sonnenwärme als bewegende Kraft in der Atmosphäre.

Da die Energie, die sich in den atmosphärischen Erscheinungen, insbesondere in der lebendigen Kraft der Luftströmungen, der Dampfwärme der verdunsteten Wassermengen, der Erwärmung des Erdbodens und der Luft äufsert, fast ganz der **Einstrahlung** seitens der Sonne auf die Erde zu verdanken ist, so erhebt sich vor allem die Frage nach der Menge der in das Luftmeer der Erde eindringenden Energie; das Mafs hierfür bildet die

Solarkonstante; sie ist definiert als die Anzahl **Kalorien**, die an der **oberen Grenze der Atmosphäre** durch 1 cm² bei senkrechter Einstrahlung per Minute hindurchgeht; sie beträgt nach LANGLEY etwa 3 Cal. — Bei solcher Einstrahlung würde binnen einem Jahre eine 50 m dicke Eisdecke auf der Erde (oder ein 200 m dicker Eishimmel um die Sonne als Mittelpunkt mit der Erdweite = 20 000 000 Meilen als Halbmesser) abschmelzen. LA 226.

LA 226.

Die Ermittelung dieser Gröfse ist mit mannigfachen Schwierigkeiten verbunden, denn sie kann nur **erschlossen** werden aus den auf dem Grunde des Luftmeeres (oder in geringen Erhebungen über der Erdoberfläche) eintreffenden Energiemengen. Diese Menge wird gemessen mittels des **Pyrheliometers**.

696, in welchem eine berufste Platte *vv* alle einfallenden Strahlen (oder doch durch Korrekturen zu ermittelnden Betrag von ihnen) absorbiert und ärme umsetzt, so dafs die das Innere Apparates erfüllende Wassermenge um bestimmten Temperaturbetrag erwärmt — Dafs die Strahlen auf *vv* normal fallen sind, läfst sich leicht kontrollieren, ı auf der Platte *dd* ein konzentrischer ten von *vv* sich zeigen mufs. — Wenn t zu werden pflegt, das Pyrheliometer die Menge der Wärmestrahlung der an, so ist also dies nur in dem Sinne g, in dem überhaupt von „strahlender me" die Rede sein kann: nämlich dafs nergie der Strahlen erst nach der Abion im Rufs als Wärme auftritt. — Um aus den Angaben des Pyrheliometers anderer „Aktinometer" = Strahlungsır, unter denen die neueren „Bolor" Temperaturunterschiede erab zu 1 Milliontel Centianzeigen) auf die Solarante schliefsen zu können, ı bedenken, dafs von den e Atmosphäre gelangenden len jedenfalls ein bestimmter l durch **Absorption**, und zwar sehr g in der Luft, viel mehr in dem eigemengten Wasserdampf und der nsäure zurückgehalten wird. Ein eins Mittel, diesen Betrag zu schätzen, die Messung bei verschieden hohen enständen dar, indem bei dem Stande der Sonne im Zenit die kürzeste, em Stande im Horizont die längste Strecke von den Sonnenstrahlen in der ülle zurückzulegen ist. Um was also das Aktinometer bei niederem Stande ;er Wärme aufweist, das entfällt auf die gröfsere Absorption längs der ren Strecke. Nach Pouillet entspricht einer Sonnenhöhe von 10° nur $^1/_4$ der rahlung von der Sonne im Zenit.

Fig. 696.

Langley schätzt aus Messungen in verschiedenen Seehöhen die Strahlungsie, die in der Atmosphäre auch unter den günstigsten Bedingungen zurückten wird, auf $^1/_4$ der eingestrahlten. Diese Schätzungen gründen sich auf sorgfältige Unterscheidung der verschiedenen Qualitäten von Strahlen, der Lage der ihnen entsprechenden Linien im sichtbaren, im ultraroten und ltravioletten Teil des Spektrums, bezw. den zugehörigen Wellenlängen, wie ıs Fig. 417, S. 376 und Tafel V, ersichtlich ist. Denn nur wenn darauf Rückgenommen wird, dafs **langwellige Strahlen vollständiger durch die sphäre gehen als die kurzwelligen** (wofür die nächstliegende Erfahrung ötliche Färbung der tiefstehenden Sonne ist), kann zu der durch ktinometer nachgewiesenen Strahlung noch ein kleinerer Betrag langwelliger, röfserer kurzwelliger Strahlen zugerechnet werden, die auf dem Wege von

der oberen bis zu der unteren Grenze der Atmosphäre **absorbiert** oder auch diffus **reflektiert** (kurz: **diffundiert**) worden sind. — Die numerischen Bestimmungen der Solarkonstante sind noch nicht einmal so genau, daſs man eine merklich gröſsere Einstrahlung im Perihel (1. Januar) als im Aphel (2. Juli) hätte direkt nachweisen können; ebenso wenig einen Einfluſs der Sonnenflecken.

Dagegen folgt aus der Gröſse der Einstrahlung sofort die der Ausstrahlung aus der Sonnenoberfläche (unter der Annahme, daſs sich zwischen Sonne und Erdatmosphäre kein absorbierender Stoff finde). Man schätzt gegenwärtig die durch 1 cm² der Sonnenoberfläche per Minute ausgesendete Energie auf 150 000 Cal. und hieraus die Temperatur an der Sonnenoberfläche auf etwa **6700° C** (vorausgesetzt, daſs die Emissionsvermögen der Sonne nicht wesentlich geringer sei als das der Kohle oder des Ruſses; mit Rücksicht auf die Absorption und Diffusion in den Gashüllen der Sonne ist die Temperatur des flüssigen oder festen Kernes der Sonne auf Hunderttausende von Graden geschätzt worden).

Fig. 697.



Insoweit bekannt ist, wie groſse Mengen von jeder Strahlenart einerseits in die Atmosphäre eindringen und wieviel von ihnen anderseits in diese und an der unteren Grenze des Luftmeeres durch die verschiedenen hier befindlichen Stoffe (Luft, Wasserdampf, Meeresflächen, die verschiedenen Gesteinsarten des Bodens, Pflanzenwuchs) absorbiert und reflektiert werden, läſst sich hieraus und aus den durch die Astronomie bekannten Einfallswinkeln und der Dauer der Bestrahlung für jeden Punkt an und über der Erdoberfläche die aus der Sonnenstrahlung hervorgehende **Wärmemenge** berechnen. — Von allen diesen Umständen abhängig ist sodann der auf die Sonnenstrahlung zurückzuführende **Wärmegrad** je einer bestimmten Stelle der Atmosphäre; dieser ist es, der kurz als Lufttemperatur bezeichnet wird, deren tatsächliche Verteilung nach geographischer Breite, Höhenlage, Tages- und Jahreszeit in § 192 beschrieben worden ist.

Wie fremd der vorwissenschaftlichen Auffassung die hier gebotenen Unterscheidungen sind, zeigt die landläufige Gegenüberstellung einer „Temperatur in der Sonne“ gegen die „Temperatur im Schatten“. Entgegen der Denk- und Sprechweise der Nichtphysiker ist es nämlich überhaupt „ganz unrichtig, von einer Temperatur in der Sonne zu sprechen, denn **die Luft hat hier die gleiche Temperatur wie im Schatten.** Vielmehr zeigt das Thermometer, das von der Sonne bestrahlt wird, unrichtig, nämlich zu hoch, aber je nach der Glassorte in verschiedenem Maſse“. Die Aufgabe einer richtigen Bestimmung der Lufttemperatur unabhängig von der Bestrahlung wurde erst durch ASSMANNs Thermometer (Fig. 697) gelöst, das als Aspirationspsychrometer bezeichnet wird, weil in ihm mittels eines Uhrwerkes ein Luftstrom von etwa 3 m sec^{-1} hergestellt wird, und weil mit dem trockenen Thermometer auch ein befeuchtetes (ähnlich wie in Augusts Psychrometer, Fig. 689) verbunden ist. Indem die Thermometergefäſse von zwei blank polierten Metallröhren umgeben sind, von denen schon die äuſsere sich infolge starker Reflexion sogar bei direkter Bestrahlung nur wenig erwärmt, wird die Lufttemperatur, gleichviel ob „in der Sonne“ oder im Schatten, bis auf $^1/_{10}{}^0$ C genau angegeben. Erst mit diesem Instrumente konnten unter anderem die in § 192 mitgeteilten Gesetze der Temperaturabnahme (oder -zunahme) mit der Höhe bei Fahrten mit bemannten Ballons einwurfsfrei ermittelt werden. Speziell bei unbemannten Registrierballons wird neuestens für den Luftstrom durch das sinnreiche Mittel gesorgt, daſs der Ballon aus sehr dehnbarem Gummi hergestellt ist, sich also in höheren Schichten stärker ausdehnt und so überall eine beträchtliche, nahezu gleichförmige Steiggeschwindigkeit hat; das Thermometer ist ebenfalls in zwei blank polierte Metallröhren eingeschlossen, durch die beim Steigen der Luftstrom von oben nach unten — und wenn der Ballon geplatzt ist und der Registrierapparat mittels Fallschirmes sinkt, von unten nach oben hindurchstreift. —

Die den **Erdboden** treffenden und schon in seinen obersten Schichten absorbierten Strahlen erwärmen infolge von Wärmeleitung auch die tieferen Schichten. Indem dann der Boden bei klarem Himmel seine Wärme wieder in den Weltraum ausstrahlt, wäre zunächst Gleichheit der Ein- und Ausstrahlung für die Zeit der Äquinoktien, ein Überschuſs an Wärme für das Sommerhalbjahr (März—September), eine Abkühlung unter das Jahresmittel für das Winterhalbjahr (September—März) zu erwarten. Bekanntlich verschiebt sich aber das Wärmemaximum von der Zeit des Sommersolstitiums bis gegen Juli oder August (Hundstage, so vom „Hundsstern“, d. i. Sirius, benannt, der um diese Zeit wieder vor der Sonne aufgeht), das Kältemaximum vom Dezember in den Januar (weshalb auch der Beginn der astronomischen Jahreszeiten später angesetzt wird, nämlich z. B. auf den 21. Juni nicht die Mitte, sondern der Anfang des Sommers). Diese zeitliche Verschiebung erklärt sich aus der allmählichen Anhäufung der täglichen Überschüsse an Einstrahlung gegen die Ausstrahlung im Sommerhalbjahr, umgekehrt im Winterhalbjahr.

Das Eindringen der Wärme in den Boden erfolgt dabei so langsam, daſs in 3 m Tiefe das dem Juli entsprechende Wärmemaximum der Lufttemperatur erst im September, in 6 m Tiefe gar erst im November sich zeigt. Es hat also diese

„Wärmewelle“ eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von nur $1^1/_2$ m per Monat. — In einer Tiefe von etwa 15 m ist ein jährlicher Wechsel der Temperatur überhaupt nicht mehr nachzuweisen und daher um so weniger der tägliche. Schon in Kellern von mäſsiger Tiefe scheint es zusammen mit dem subjektiven Wärmekontrast im Sommer kalt, im Winter warm.

Von jener Tiefe abwärts zeigt sich eine Temperatursteigerung von etwa 3° pro 100 m, die auf hohe Temperaturen des Erdinnern hinweist und zur Annahme eines feurig flüssigen Zustandes des ganzen Erdkörpers mit Ausnahme einer verhältnismäſsig ganz dünnen Kruste geführt hat. Doch sind bei den hierauf bezüglichen Hypothesen nicht die ungeheuren Drucke zu vergessen, die die Verflüssigung aufhalten können — umgekehrt aber freilich auch schon für sich allein ohne hohe Temperaturen feste Körper verflüssigen können. — Unabhängig von solchen Hypothesen läſst sich sagen, daſs die Temperatur an der Oberfläche der Erde durch das heiſse Erdinnere nicht merklich beeinfluſst wird (bis auf die heiſsen Quellen und Vulkane), wie eben jene fast ganz der Ein- und Ausstrahlung seitens der Sonne folgenden Temperaturen der obersten Erdschichten beweisen. —

Um den Nachweis vollständig zu machen, daſs die in der Atmosphäre vorfindlichen Wärmemengen wirklich fast ganz der Sonnenstrahlung zu verdanken sind, haben wir nebst der unteren Begrenzung des Luftmeeres durch die Erdoberfläche auch deren obere in Betracht zu ziehen, d. h. den angrenzenden „leeren Weltraum“, nämlich:

Als **„Temperatur des Weltraumes“**, d. h. des „leeren“ (nur vom Äther erfüllten) Raumes nahm man früher etwa — 140° an. Gegenwärtig wird dem leeren Weltraum der absolute Nullpunkt der Temperatur zugeschrieben (wobei festzuhalten bleibt, daſs diese Verwendung der Zahl — 273° nur eine fiktive ist, § 74). Dies heiſst aber nur, daſs der Raum für sich ohne ihn erfüllenden Stoff natürlich auch keine Temperatur hat, was aber nicht hindert, daſs ein an irgend eine Stelle des Raumes gebrachter Körper gemäſs der Einstrahlung von seiten der ihm näheren Gestirne und vermöge seines Absorptionsvermögens beliebig hohe Temperaturen annehmen kann. Tatsächlich haben aber aktinometrische Messungen sogar von seiten des uns nächsten Gestirnes, des Mondes, eine uns kaum merkliche, von seiten der Planeten und der Fixsterne gar keine merkliche Einstrahlung ergeben, die sich als „Wärmestrahlung“ verriete. — Dies ein Grund dafür, daſs speziell für meteorologische Zwecke im vorliegenden Abschnitte die Wärmestrahlung von der im nächsten Abschnitte zu behandelnden Lichtstrahlung abgetrennt werden konnte — unbeschadet der Wesensgleichheit von beiderlei Strahlen (§ 118).

Nach diesen tatsächlichen Feststellungen über die Herkunft des Wärmeinhaltes der Atmosphäre lassen sich nun auch seine näheren und ferneren meteorologischen Wirkungen im Zusammenhange verstehen. Als Ergänzung der in den vorausgegangenen Paragraphen schon gröſstenteils beschriebenen Erscheinungen noch folgende Erklärungen:

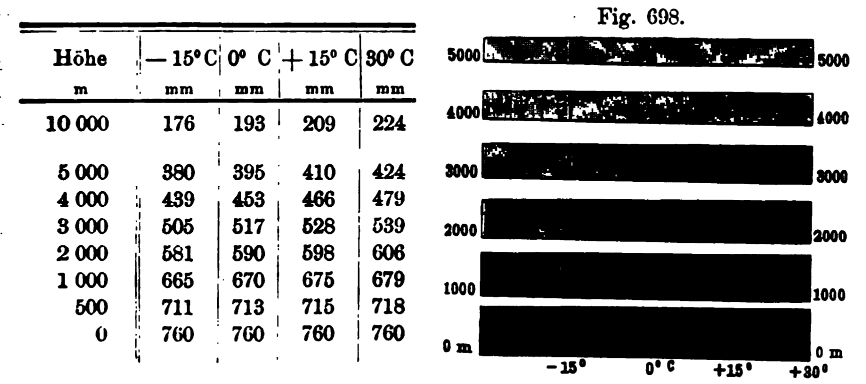
1. Die Hebung der Flächen gleichen Druckes bei Erwärmung der Luft (§ 190): Ist an einem Orte M in der Höhe h m über der Erdoberfläche der augenblickliche Barometerstand b cm und wird die unter M befindliche Luft erwärmt, so dehnt sie sich aus, und es muſs sich ein Teil dieser Luft über diesen Punkt M erheben, so daſs hier der Druck von b auf $(b + \beta)$ cm wächst. Umgekehrt bei Temperaturabnahme.

Die Beträge der Hebung bezw. Senkung sind aus folgender Tabelle und der entsprechenden graphischen Darstellung ersichtlich:

Luftdruck in verschiedenen Höhen bei verschiedenen Temperaturen:

Höhe m	−15° C mm	0° C mm	+15° C mm	30° C mm
10 000	176	193	209	224
5 000	380	395	410	424
4 000	439	453	466	479
3 000	505	517	528	539
2 000	581	590	598	606
1 000	665	670	675	679
500	711	713	715	718
0	760	760	760	760

Fig. 698.



Aus dieser allgemeinen Abhängigkeit zwischen Wärme- und Luftdruckverteilung erklärt sich ferner:

2. Im Sommer hat das Land niederen, das Meer hohen Luftdruck; denn es ist im Sommer das Festland durchschnittlich wärmer als das Meer. Es fliefst also die Luft gleichsam über die Flächen gleichen Druckes vom Festland gegen das Meer hin ab. Somit kommen zu den aus dem allgemeinen Zirkulationssystem der Luft über der ganzen Erdoberfläche (Fig. 685, S. 619) hervorgehenden Winden (den Passaten u. s. w.) noch mehr oder minder regelmäfsige **Land-** und **Seewinde.** Im kleineren Mafsstabe entsprechen solche auch schon dem täglichen Wechsel von Tag und Nacht, der auf dem Festlande selbst wieder den Wechsel der **Berg-** und **Talwinde** zur Folge hat.

Der in den Begriffen **Land-** und **Seeklima** festgehaltene Gegensatz betrifft zunächst die verhältnismäfsig grofsen Temperaturgegensätze (Amplituden) über dem Festlande, die geringen über dem Meere. Diese wieder erklären sich vorwiegend aus der hohen spezifischen Wärme des Wassers im Vergleich zu der des Erdbodens (§ 72), ferner aber auch daraus, dafs noch grofse Wärmemengen zur Verdunstung des Meerwassers in Anspruch genommen werden (wie auch in kleinerem Mafsstabe auf dem Festlande ein stärkerer Wärmeverbrauch und daher kleinere Temperaturunterschiede über bewaldetem als über nacktem Boden statthaben). Auch dringen die Sonnenstrahlen in das Wasser noch ein, während sie am Boden nur die Oberfläche treffen.

Von wohltätigster Folge für die Wärmeökonomie der Erde ist das Dichtigkeitsmaximum des Wassers (rund 4° C, § 73) oberhalb seines Gefrierpunktes (0° C). Denn wenn bei Herannahen des Winters die Luft und das Wasser z. B. eines Teiches sich an der Oberfläche auf 6°, 5°, 4° abgekühlt hat, so sinkt die kältere oberste Schicht in dem übrigen spezifisch leichteren Wasser unter. Kühlt sich aber später die Luft auf 3°, 2°, 1°, 0° und unter 0° ab, so nimmt nur mehr die oberste Schicht diese niederen Temperaturen an und alles tiefer gelegene Wasser behält so lange 4° C, bis ohne Strömungen, blofs durch die viel langsamere

Wärmeleitung (von unten nach oben), weitere Abkühlung (von oben gegen unten) eintritt. Insbesondere schwimmt eine **Eisdecke** und schützt als Schlechtleiter der Wärme das Wasser und die in ihnen lebenden Organismen für längere Zeit. —

3. Auch die im § 190 geschilderte Regelmäfsigkeit im **täglichen Gange des Barometers**, wie sie sich bei Zerlegung in Sinuskurven ergibt, läfst sich schliefslich aus den durch die Sonnenstrahlung herbeigeführten „**Schwingungen der Atmosphäre**" erklären. Da die Lufthülle der Erde eine begrenzte Höhe hat, so mufs jede Störung ihres Gleichgewichtes Schwingungen, ähnlich denen der Luft in einer Pfeife (§ 89), anregen, und zwar im allgemeinen mehrere Teilschwingungen. Nach MARGULES hat nun eine der mit den Dimensionen der Erdhülle verträgliche Schwingung eine Schwingungsdauer von 11,94^h, also sehr annähernd gleich der Dauer eines halben Tages; nach dem Doppelten dieser Zeit aber bringt die Sonnenstrahlung infolge des Wechsels von Tag und Nacht in der Tat immer wieder neue Impulse zu Bewegungen in der Atmosphäre hervor, so dafs also die Kugels[illegible] auf diese ganztägigen Impulse gestimmter Resonator [illegible]. — Ähnliche Erklärungen konnten auch schon für andere [illegible]chen und jährlichen scheinbar so unregelmäfsigen Ganges des Barome[illegible]n werden.

4. Die Erscheinung d[illegible]urumkehr. So nennt man die Tatsache, dafs im Winter [illegible] Barometerstand, wo man also schönes Wetter erwarten mö[illegible]lern und Ebenen oft andauernd kaltes und nebliges Wett[illegible] der Höhe viel wärmeres.

So wurden in den ungewöh[illegible]n Wintern 1879/80 und 1880/81 in Klagenfurt — 13° C, auf dem un[illegible] höher gelegenen Obir — 1,2° C beobachtet; ebenso in Ischl — 7,3° C, auf [illegible] 1310 m höheren Schafberge + 0,6° C. — Die Erklärung ist folgende: Der hohe Barometerstand führt zwar auch in der Ebene zuerst klaren Himmel herbei, und es erfolgt nachts starke Ausstrahlung gegen den Weltraum, die durch die viel kürzere Einstrahlung bei Tage nicht ersetzt wird. Daher erfolgt Abkühlung des Bodens, und es bildet sich eine **Nebelschicht**, die, wenn sie auch nur 50 bis 100 m dick ist, schon die weitere Einstrahlung verhindert, infolgedessen der Boden und die angrenzende Luft noch immer weiter sich abkühlen und die Dicke der Nebelschicht wächst. Der gleichmäfsig hohe Barometerstand läfst es auch nicht zu Winden kommen, die die Wolkendecke vertreiben würden: daher das gleichmäfsig trübe, kalte Wetter. Von den höher gelegenen Berggipfeln dagegen fliefst die ebenfalls abgekühlte Luft in die Täler ab, und es kommt dort die dem hohen Barometerstande, den absteigenden Luftströmen und der Einstrahlung entsprechende, über dem Monatmittel liegende Temperatur zur Geltung.

C. Aus der meteorologischen Optik.

Das in die Lufthülle der Erde eindringende Licht der Sonne und Sterne sowie auch die von irdischen Körpern ausgehenden Lichtstrahlen erfahren durch **Brechung** eine Änderung der **Richtung**; ferner durch **Diffusion** und **Absorption** eine Änderung der **Farbe**, so z. B. im Morgen- und Abendrot, im Blau ferner Berge. — Zu den prachtvollsten Lichterscheinungen gehören ferner die **Regenbogen**, die ein Glied derjenigen Reihe von Dispersions- und Beugungserscheinungen bilden, der auch die **Höfe**, **Ringe** u. dergl. angehören.

§ 197. Astronomische und terrestrische Strahlenbrechung. Luftspiegelungen.

Die atmosphärische Strahlenbrechung bewirkt, dafs die scheinbare Höhe jedes Gestirnes über dem Horizonte gröfser ist als

Fig. 699.

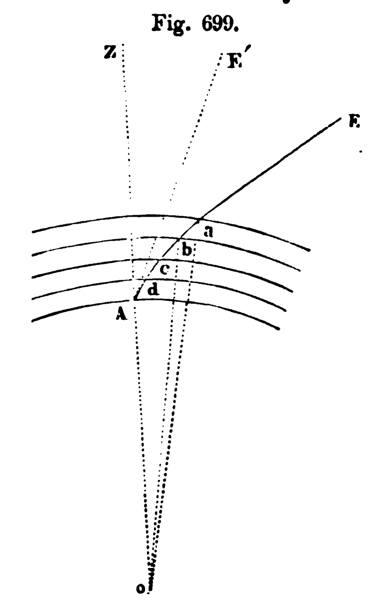


Fig. 700.

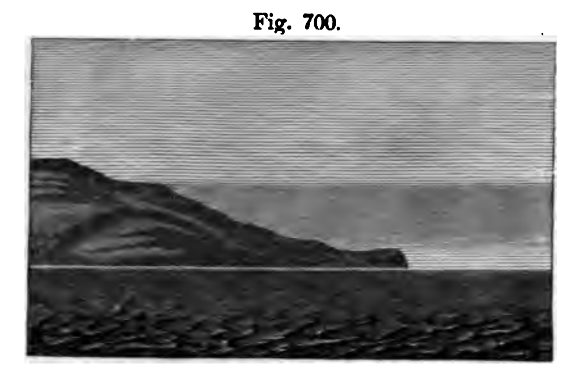
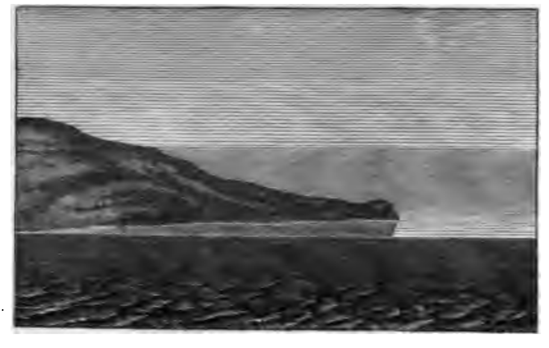


Fig. 701.



seine wirkliche Höhe, und zwar beträgt der Unterschied am Horizont etwa $^1/_2{}^0$ (so dafs, wenn z. B. der untere Rand der untergehenden Sonne den Horizont zu berühren scheint, in Wahrheit der obere Rand soeben untergeht). Nur für das Zenit ist die Ablenkung gleich Null.

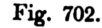
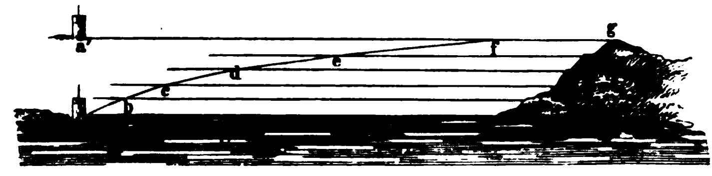


Fig. 702.



Die Erklärung dieser Tatsachen liegt in der Abnahme der mechanischen und damit auch optischen Dichte der Luft nach oben bei normaler Schichtung der Luft. Dringt also von einem Stern (Fig. 699) ein Strahl in die obersten und von hier aus in dichtere Schichten der Atmosphäre, so wird er überall zum

Einfallslot gebrochen, und das Stück des Lichtstrahls unmittelbar vor dem Auge ist steiler als der Strahl bei seinem Ausgehen vom Sterne. Bei allen astronomischen Beobachtungen, aber auch bei genauen trigonometrischen Messungen von Bergeshöhen, mufs auf diese Strahlenbrechung (deren quantitative Gesetze sehr verwickelt sind) Rücksicht genommen werden.

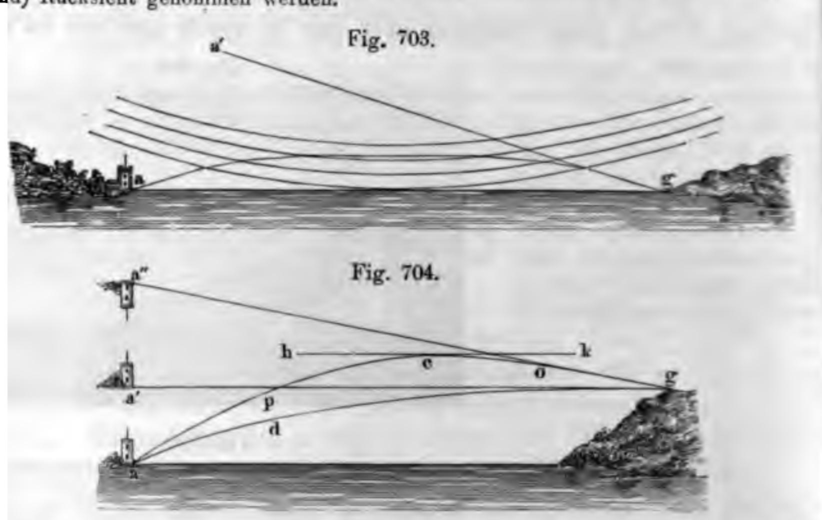


Fig. 703.

Fig. 704.

Mannigfache Abänderungen der Strahlenbrechung in der Atmosphäre infolge anormaler Schichtung führen zu **Luftspiegelungen** (*Fata morgana*, Kimmung, Figg. 700, 701). So treten nach Figg. 702—704 an anormal erhitzten Luftschichten verschiedene Ablenkungen, auch **totale Reflexion** ein.

§ 198. Helligkeit und Farbe des Himmels, Morgen- und Abendrot, Dämmerung.

Hätte die Erde keine Atmosphäre (oder würde diese gar kein Licht reflektieren, diffundieren und absorbieren), so müfste, auch wenn die Sonne über dem Horizonte ist, der Beobachter sogleich neben der hellen Sonnenscheibe sein übriges Gesichtsfeld schwarz (nämlich in seinem Augenschwarz, psych. Anh., Nr. 44 sehen — so wie wir die Sterne bei Nacht sehen, während sie sonst durch den Kontrast gegen das grelle Sonnenlicht unbemerkbar werden.

Anh. 44.

Das helle **Blau** des Tageshimmels (und das Schwarzblau des Nachthimmels) rühren von unregelmäfsig **reflektiertem** (kürzer: diffundiertem) Lichte der Sonne (bezw. der Sterne) her.

Warum die Farbe des Himmels gerade die **blaue** ist, hat man auf verschiedene Arten zu erklären versucht. So hatte Euler angenommen, die Luft sei in derselben Weise blau wie ein blaues Glas (oder wie Wasser in hinreichend dicken Schichten): diese Hypothese schliefst sich aber dadurch aus, dafs Sonne, Mond und Sterne bläulich erscheinen müfsten (wie z. B. weifses Papier durch blaues Glas betrachtet). Eine andere Hypothese nahm Beugungserscheinungen an. — Die einfachste Erklärung ist die von Lord Rayleigh, wonach die blauen und violetten Strahlen als die kurzwelligsten der diffusen Reflexion am meisten

unterworfen sind und also in dem uns von der Luft zugestrahlten Sonnenlichte überwiegen müssen. — Für diese Hypothese spricht auch, daſs das Himmelslicht wie alles diffuse reflektierte Licht polarisiert ist (mit Ausnahme dreier „neutraler" Stellen am Himmel in bestimmten Winkelabständen von der Sonne).

Im groſsen wird aus der verschiedenen Diffusion und Absorption lang- und kurzwelliger Strahlen auch erklärlich, warum die klare Luft in den der Erde nächsten Schichten in so hohem Maſse diatherman ist: da die diffundierende Wirkung der Luft in den obersten Schichten beginnt, so sind die Strahlen, die bis an den Boden des Luftmeeres gelangen, fast aller derjenigen Bestandteile schon beraubt, die ihnen die Luft entziehen kann (sowie z. B. Sonnenstrahlen, die durch blaues Glas gegangen sind, beim Durchgang durch weiteres gleichfarbiges Glas nur mehr sehr wenig geschwächt werden).

Morgen- und Abendrot und die gelbe bis rote Färbung der dem Horizonte nahestehenden Sonne selbst erklären sich daraus, daſs die Luft, namentlich die an Dunst und Staub reichere der tieferen Schichten, weniger von den lang- als den kurzwelligen Strahlen absorbiert.

Hieraus erklärt sich unter anderem, warum für Leuchttürme Petroleumlicht (neuestens Bremerlicht) dem bläulichweiſsen elektrischen Bogenlichte vorgezogen wird: die gelblichen Strahlen bleiben auf weitere Entfernungen sichtbar als die anfänglich helleren des an kurzwelligen reichen Bogenlichtes.

Schon vor Beginn des Morgenrotes und nach Aufhören des Abendrotes herrscht noch **Dämmerung**, nämlich solange die Sonne höchstens 16 bis 18° unter dem Horizonte steht und durch irdische Strahlenbrechung noch höhere Schichten des Luftmeeres für uns beleuchtet erscheinen.

Je nachdem die Tagesbahn der Sonne groſse Winkel wie in den Tropen oder kleine wie in den Polargegenden mit dem Horizonte einschlieſst, dauert die Dämmerung kurz oder lang. Schon in unseren Breiten ist in klaren Hochsommernächten selbst um Mitternacht noch ein Lichtschein in der Nordgegend zu bemerken. Mitternachtssonne am Polarkreis. Auch die halbjährige Nacht an den Polen wird um mehrere Tage abgekürzt, da die Sonne infolge der astronomischen Strahlenbrechung schon über dem Horizonte zu sein scheint, wenn sie in Wirklichkeit noch unter dem Horizonte ist. Auch geht dem Erscheinen der Sonne eine mehrwöchentliche Dämmerung vorher.

§ 199. Höfe und Ringe um Mond und Sonne. Regenbogen.

Nur bei ganz klarer Luft erstreckt sich das tiefe Blau des Nachthimmels merklich gleichartig bis ganz nahe an die leuchtende Mondscheibe heran; viel häufiger zeigt sich der Mond von einem weiſslichen Scheine umgeben, welcher von kondensiertem Wasserdunst herrührt. Der Volksmund sagt dann: „Der Mond hat einen Hof", und man deutet ihn bei gröſserer Stärke und bestimmtem Aussehen mit Recht als Vorzeichen schlechten Wetters. — Die Meteorologen unterscheiden von diesem **Lichtschein**, der vom Mond weg allmählich schwächer wird, die eigentlichen **Höfe** (Fig. 705 a. f. S.), nämlich Kreise (oder bei ungleicher Bewölkung nur Teile von solchen), in deren Mitte der Mond steht und die stets auſsen rot gesäumt sind. — Gerade umgekehrt ist die Färbung bei den **Ringen** *(Halos)*, die

innen rot und aufsen bläulich sind; sie stellen **Maxima der Lichtstärke** in gewissen Bogenabständen vom Monde dar, nämlich von 22°, 45°, 90°. Überdies treten mehr oder minder deutlich manchmal an den Enden des durch den Mond gelegten

Fig. 705.



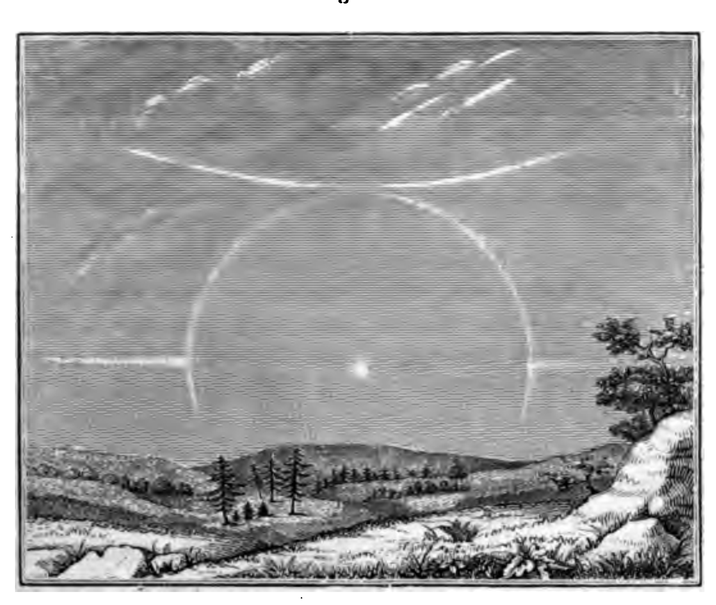
wagerechten (auch lotrechten) Durchmessers dieser Ringe Anschwellungen von gröfserer Lichtintensität auf (bei besonders günstiger Entwickelung der Erscheinung als **Nebenmonde** bezeichnet), an welche sich dann noch Lichtbogen, die gegen den Mond konkav sind, anschliefsen können.

Alle diese Erscheinungen treten in gleichen Winkelabständen auch um die Sonne herum auf, wo sie wegen der gröfseren Lichtstärke noch intensiver sind (Fig. 706) und nur deshalb häufiger übersehen werden, da man selten gegen die Sonne zu blicken pflegt.

Zur Erklärung zunächst des Lichtscheines ohne Maxima haben wir uns vorzustellen, dafs die vom Monde her parallel einfallenden Lichtstrahlen an den Dunstteilchen abgelenkt werden (woran im allgemeinen Reflexion, Diffusion, Brechung und Beugung beteiligt sein werden). Je ein Teilchen sendet dabei am meisten Licht nach der ursprünglichen Richtung der Strahlen aus und von da aus mit wachsendem Winkel allmählich immer weniger Licht. Trifft dann einer dieser Strahlen das Auge O (Fig. 707a), so sieht dieses in gleichem Winkelabstande den Himmel neben dem Monde in entsprechender Helligkeit. Bei überall gleich-

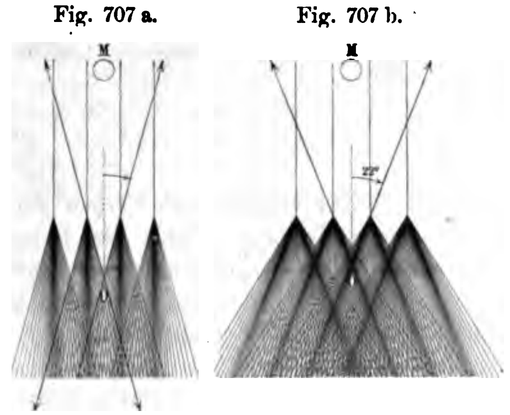
mäfsiger Trübung der Luft tragen also alle Teilchen auf den Kegelflächen mit dem Scheitel O zum Lichtschein bei.

Fig. 706.



Um ferner die Lichtmaxima der Höfe und Ringe zu erklären, müssen wir annehmen, dafs von den das Licht zerstreuenden Teilchen nach bestimmten Richtungen Lichtstrahlen in dichterer Scharung (Fig. 707 b) weggehen als nach den übrigen. Diese Bedingung ist wirklich vor allem dann erfüllt, wenn jene Teilchen Eiskristalle sind; wie denn auch die Höfe meistens in Cirruswolken auftreten. Da sich diese Kristalle auf regelmäfsige sechsseitige Prismen zurückführen lassen, so schliefst eine Seitenfläche mit der zweitnächstfolgenden einen brechenden Winkel von 60° ein, welchem Winkel für den Brechungsexponenten des Eises ein Minimum der Ablenkung von 22° entspricht. Dabei werden zwar die Kristalle alle erdenklichen Lagen gegen Mond und Auge haben, und daher wird von den meisten das dichtest weggehende Strahlenbüschel nicht ins Auge gelangen; wohl aber z. B. von Kristallen mit wagerechter Längsachse unter und über der Mondscheibe, desgleichen rechts und links von ihr bei vertikaler Achse. Allgemein werden also wieder alle diejenigen Eisnadeln wirksam sein, welche in einer Kegelfläche liegen, deren Scheitel das Auge ist; Kegelachse ist die vom Auge zum Mond gezogene

Fig. 707 a. Fig. 707 b.

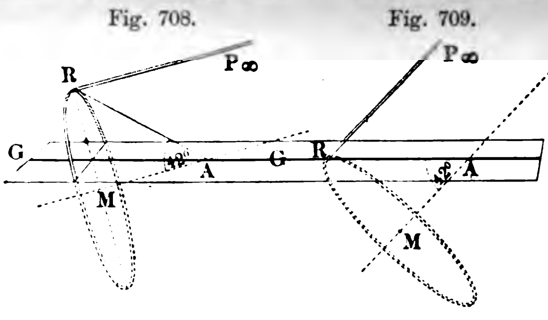


Gerade, der halbe Öffnungswinkel (zwischen Achse und je einer Seitenlinie) beträgt 22°; alle Längsachsen der Kristalle liegen normal zur Kegelachse.

Auch für den grofsen Hof und für die selteneren Begleiterscheinungen (Nebensonnen u. dergl.) hat sich ähnlich die alle Gröfsenverhältnisse wiedergebende Erklärung aus den optischen Gesetzen ableiten lassen. — Die im vorigen nur nach den allgemeinsten Zügen gegebene Beschreibung und Erklärung wird im folgenden noch etwas näher ausgeführt für die prachtvollste dieser Erscheinungen, den

Regenbogen. Zur Beschreibung: Wendet man einem Regenbogen das Gesicht zu, so hat man die Sonne im Rücken, d. h. der Winkelabstand des Regenbogens von der Sonne ist gröfser als 90° (während er bei den Höfen und Ringen kleiner als 90° war). Bei günstiger Stellung des Beschauers, z. B. gegenüber einem zerstäubenden Wasserfalle, Springbrunnen, kann man sehen, dafs der Schatten des Kopfes in der Mitte des Bogens liegt, dafs also der Mittelpunkt eines Regenbogens der „Gegenpunkt" der Sonne ist. Von diesem Punkte aus gemessen hat der **Hauptregenbogen** bis zum inneren violetten Rande einen Halbmesser von etwa 40°, bis zum äufseren roten Rande etwa 42°. Hierauf folgt ein häufig auffallend dunkler Streifen, der aufsen durch den **Nebenregenbogen** begrenzt ist, dessen innerer roter Saum etwa 51°, dessen äufserer violetter Rand 54° Öffnung hat. — Der Regenbogen erscheint überhaupt rund, weil an ihm diejenigen Tropfen beteiligt sind, welche auf einer Kegelfläche liegen, deren Scheitel das Auge, deren Achse die vom Auge in der Richtung der Sonnenstrahlen gezogene Gerade ist und deren Öffnungswinkel für verschiedene Farben die angegebenen Gröfsen haben.

Fig. 708. Fig. 709.



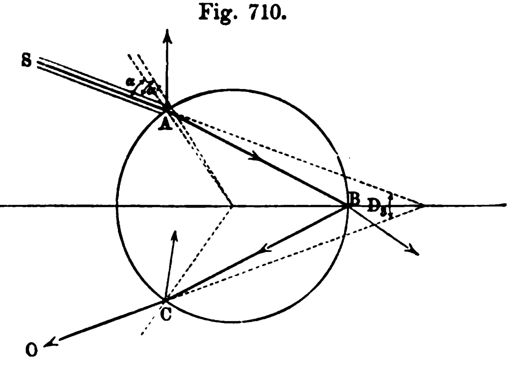
In erster Annäherung zeigen die Regenbogen die Farbenfolge des Spektrums (daher oft „Regenbogenfarben" = Spektralfarben). — Gröfse des über dem Horizonte erscheinenden Bogens je nach dem Sonnenstand; vergl. Figg. 708 und 709.

Genauere Beschreibung (nach PERNTER): „Keineswegs sieht ein Regenbogen aus wie der andere. In den häufigsten Fällen sieht man kein Blau, in anderen findet sich kein eigentliches reines Rot; von den Farbenabstufungen fehlt dunkelblau fast immer. Desgleichen ist die Breite der einzelnen Farben bei verschiedenen Regenbogen sehr verschieden. Einmal ist das Gelb von fast verschwindender Breite und Grün und Violett sehr breit, ein andermal ist Gelb und Grün sehr breit und Rot und Violett sehr schmal, hier und da ist Blau kaum zu sehen, dann ist es wieder fast dominierend. Auch in Bezug auf die Ver-

teilung der Intensität bemerkt man einen bedeutenden Wechsel. Besonders auffallend ist es dann, zu sehen, daſs wiederholt, ja häufig, die hellleuchtendste Stelle auf den Anfang des Violetts fällt. Eine weitere Veränderlichkeit, die dem Auge sehr deutlich auffällt, zeigt der Regenbogen in seiner Breite, indem nicht nur die Breite der einzelnen Farben, sondern die des ganzen Regenbogens bald gröſser, bald kleiner sich zeigt. Es tritt dann ferner eine Erscheinung auf, welche beim Regenbogen sehr aufgefallen ist; es sind dies die sekundären Bogen, welche besonders häufig an den Hauptregenbogen sich vom Violett ab nach innen anschlieſsen, aber auch beim Nebenregenbogen, auch wieder vom Violett ab, nach auſsen, zuweilen zu sehen sind. Die Erscheinung dieser sekundären Bogen ist ebenfalls sehr veränderlich. Man sieht bald deren mehrere — es sind schon sechs beobachtet worden —, bald nur einen und dann wieder keinen. Ihre Farben sind ebenfalls sehr veränderlich; am häufigsten bestehen dieselben nur aus Grün und Rosa, es kommt aber auch vor, daſs man Gelb, Grün und Purpur oder gar Gelb, Grün, Blau und Rosa zu sehen bekommt. Man erinnert sich bei ihrer Erscheinung unwillkürlich an die zweiten und dritten Ringe bei den kleinen Höfen. Doch tritt beim Regenbogen zuweilen der Fall auf, daſs zwischen dem Regenbogen und den sekundären Bogen ein farbloser dunkler Zwischenraum sich befindet. Die Erscheinung der sekundären Bogen ist nichts weniger als eine seltene Zufälligkeit, sondern sie tritt beim Hauptregenbogen so häufig auf, daſs man es als Zufälligkeit anzusehen hat, wenn sie fehlen. — Endlich erscheint auch zuweilen der weiſse Regenbogen. Man sieht denselben entweder bei Regen im Mondschein (Mondregenbogen) oder auf von der Sonne beschienenen Nebeln. Der Mondregenbogen erscheint übrigens unter günstigen Umständen auch schwach gefärbt. Im zweiten Falle (bei Nebeln) haben wir es mit einem echten weiſsen Regenbogen zu tun; man sollte ihn eigentlich Nebelbogen nennen. Er wird auf Bergen oder an den Küsten der Meere, besonders der nördlichen, öfters gesehen. Man sieht dann einen glänzenden weiſsen Bogen, welcher auſsen gelblichen oder orangeroten, innen bläulichen bis violetten Hauch als Begrenzung zeigt. Zuweilen bemerkt man, durch einen dunklen Zwischenraum getrennt, einen sekundären Bogen, in welchem aber dann die Farbenfolge umgekehrt ist, indem sich an den dunklen Zwischenraum ein bläulicher Saum anschlieſst und das zweite Rot den sekundären Bogen nach innen abschlieſst.“ —

Die Erklärung der Regenbogen ergibt sich, indem wir zunächst aus den Gesetzen der Reflexion, Brechung und Dispersion den Gang der Sonnenstrahlen in einem Regentropfen (den wir hierbei zuerst als eine Wasserkugel von nicht zu kleinem Halbmesser annehmen) durch Rechnung ableiten und die Ergebnisse dieser Rechnung mit den wirklich beobachteten Erscheinungen vergleichen. Erst insoweit die Rechnung und die Beobachtung nicht übereinstimmt, werden diese Abweichungen durch Rücksicht auf die Beugungserscheinungen (namentlich bei kleinen Tropfen) zu erklären sein. Die Erklärung gliedert sich in folgende Schritte 1—5:

Fig. 710.



1. Ist SA (Fig. 710)

die Richtung des auf den Tropfen unter dem Einfallswinkel α fallenden Strahles, so wird er bei A gespalten in einen reflektierten und einen gebrochenen Strahl; der gebrochene Strahl wird bei B wieder gespalten, sein reflektierter Anteil bei C abermals u. s. f. Jeder der so aus dem Tropfen austretenden Anteile schliefst mit dem ursprünglichen Strahle einen Ablenkungswinkel D ein, welcher von dem Winkel α, dem Brechungsquotienten n und der Anzahl der Spaltungen abhängig ist.

2. Der Hauptregenbogen entsteht durch dreimal gespaltene Strahlen (gebrochen bei A, reflektiert bei B, gebrochen nach CO; für diesen Strahl ist $D_3 = 4\beta - 2\alpha$; L A 227). LA 227.

3. Denken wir uns für sämtliche von der Sonne auf die Oberfläche des Tropfens fallenden parallelen und unter verschiedenen Einfallswinkeln α eindringenden Strahlen die Winkel D konstruiert oder berechnet (DESCARTES, 1636), so ergibt sich die dichteste Scharung beim Austritte für diejenigen Strahlen, welche bei einem Punkte A_0 eingetreten waren, für dessen Einfallswinkel α_0 die Maximumbedingung (LA 227) $\sin\alpha_0 = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$ erfüllt ist. Z. B. Für $n = \frac{4}{3}$, also für die orangegelben Strahlen zwischen den Fraunhoferschen Linien C und D, ist $\sin\alpha = \sqrt{\frac{20}{27}}$, $\alpha = 59^\circ\ 23'\ 29''$; daher erscheinen nur die Tropfen, welche diesen Winkel von 42° mit der Sehachse des Bogens einschliefsen, mit orangegelb. Für die Farben, denen $n \gtrless \frac{4}{3}$ entspricht, ist $\alpha \lessgtr 42^\circ$. LA 227.

4. Der Nebenregenbogen entsteht durch viermal gespaltene Strahlen (gebrochen, reflektiert, reflektiert, gebrochen). Infolgedessen ist er lichtschwächer als der Hauptregenbogen. — Dafs der Kreisring zwischen Haupt- und Nebenregenbogen dunkler erscheint als die Regenwand innerhalb des Haupt- und außerhalb des Nebenregenbogens, erklärt sich daraus, dafs die Strahlen des Hauptregenbogens ein Maximum, die des Nebenregenbogens ein Minimum der Ablenkung erfahren haben und wir daher von jenem Streifen gar kein Licht erhalten, das durch Brechung in die Tropfen übergegangen war, sondern nur Licht, das an deren Oberfläche reflektiert worden ist, wogegen die Tropfen aufserhalb der beiden Bogen uns beiderlei Licht zusenden.

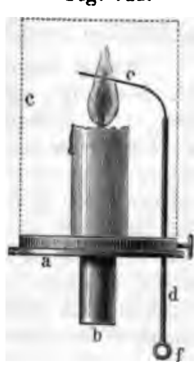
5. Indem die aus 1 und 2 durch Deduktion gefundenen Gröfsen und Farbenfolgen zwar in erster Annäherung dem wirklichen Anblick des Regenbogens entsprechen, aber doch die feineren Unterschiede obiger Beschreibung noch unerklärt lassen, zog AIRY (1836) zur Erklärung dieser restlichen Erscheinungen die Interferenzen des gebeugten Lichtes heran, welche zwischen den dichtest gescharten austretenden Strahlen stattfinden. In der Tat erinnern die sekundären Bogen mit ihrem Wechsel von Rosa und Grün an die Farben, welche z. B. feinbestäubtes Glas zeigt. Die weifsen Bogen erklären sich daraus, dafs sie bei den verhältnismäfsig kleinsten Regentröpfchen auftreten, wobei Licht aller Wellenlängen zur Interferenz kommt. Damit solche Beugungserscheinungen nicht merklich eintreten, also der Regenbogen der DESCARTESschen Theorie entspreche, müfsten, wie die AIRYsche Theorie zeigt, die Tropfen bis mindestens 4 mm Durchmesser haben; solche Tropfen aber behalten während des Fallens kaum mehr die Kugelgestalt ungestört bei (LA 228). LA 228.

Die beschriebenen Erscheinungen lassen sich auch künstlich nachahmen. So hatte schon ANTONIO DE DOMINIS (1611) bemerkt, daſs eine mit Wasser gefüllte Glaskugel in bestimmten Stellungen zum Auge die „Regenbogenfarben“ zeigte, und daraus die Kreisform des Regenbogens abgeleitet. (Auch ARISTOTELES hatte diese Seite der Erscheinung schon richtig erklärt.) Stellt man eine solche Kugel in den durch den Fensterladen in das verdunkelte Zimmer eintretenden Lichtzylinder, so zeigt sich an dem Fensterladen ein farbiger Kreis, und zwar ebenfalls rot auſsen, violett innen; wodurch unterscheidet sich gleichwohl diese objektive Erscheinung von dem nur subjektiv wahrnehmbaren Regenbogen? Werden an die Stelle des Prismas eines Spektralapparates zylindrische Glasstäbe, bezw. Glasfäden von 4 mm bis 0,05 mm Dicke gestellt, so lassen sich an ihnen sowohl die durch die Descartessche Brechungs-, wie die durch die Airysche Beugungstheorie geforderten Farbenerscheinungen beobachten.

D. Elektrische Erscheinungen der Atmosphäre.

Geschichtliches. Die vielfach verbreitete Meinung, als sei FRANKLIN der erste gewesen, der Blitz und Donner als dem elektrischen Funken und dem begleitenden Geräusch ähnlich erkannt habe, ist insofern nicht ganz zutreffend, als vielmehr schon Dr. WALL, der 1698 an einem groſsen geriebenen Harzzylinder die ersten lebhaften elektrischen Funken beobachtete, sie sogleich mit Blitz und Donner verglich. Doch war hiermit nicht etwa die elektrische Natur der Gewitter erkannt, denn Blitz und Donner waren seit ARISTOTELES für Explosionserscheinungen gehalten worden, die von der Entzündung brennbarer Dünste (nach späteren Meinungen von „Donnerkeilen“, von fallenden Meteorsteinen) herrühren sollten. Erst 1746 verglich WINKLER in klarer Weise die Gewittererscheinungen mit den kräftigen Funken der soeben erfundenen Leydener Flasche. FRANKLIN machte 1749 den Vorschlag zu den Versuchen mit Drachen an leitenden, isoliert gehaltenen Schnüren zur Prüfung des elektrischen Zustandes der Atmosphäre, und er führte diese Versuche wirklich aus (19. Oktober 1752, nachdem es im selben Jahr von einigen anderen geschehen war). Bei der Wiederholung von FRANKLINS Drachenversuchen fand RICHMANN (der Entdecker des Gesetzes über Mischtemperaturen, § 72) seinen Tod. — Die Einrichtung der Blitzableiter, von FRANKLIN 1765 erfunden, in Europa zuerst ausgeführt vom Pfarrer DIVISCH in Mähren, war die praktische Frucht jener Versuche; doch scheint schon im Altertum die schützende Wirkung von Obelisken, hohen Bäumen . . . als Tatsache, wenn auch ohne Einsicht in die Ursachen, bekannt gewesen zu sein.

Fig. 711.



LEMONNIER entdeckte (1752), daſs nicht nur bei herannahenden Gewittern, sondern auch bei wolkenlosem Himmel durch die Drachen elektrische Entladungen nachgewiesen werden können, und er stellte regelmäſsige Beobachtungen hierüber an. VOLTA befestigte auf einer hohen Stange eine Kerze, von deren Flamme ein isolierter Draht zu einem Elektroskop führte, dessen Wandung zur Erde abgeleitet war (Vorbild zu FRANZ EXNERS Versuch; folgender §).

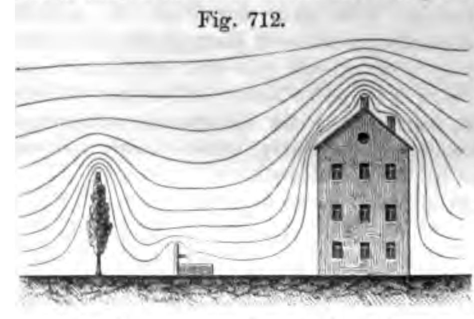
Gegenwärtig bilden die Grundlage für die Erforschung der elektrischen Zustände der Atmosphäre, kurz **„Luftelektrizität“** genannt, solche Versuche bei

klarem ruhigen Wetter („Schönwetterelektrizität“), wogegen die Gewitter als Störungen des normalen Zustandes aufzufassen sind.

§ 200. Elektrische Potentiale der Erde und ihrer Atmosphäre.

Franz Exners *Versuche:* Wird die Flamme des Voltaschen Versuches in verschiedene Abstände von der Erdoberfläche gebracht und an einem nach Volt geeichten Elektrometer (Fig 131, S. 409) die Potentialdifferenz zwischen dem Ort der Flamme und des Elektroskops (das seinerseits das Potential der Erde hat) abgelesen, so ergibt sich das Potentialgefälle per Meter Höhendifferenz als sehr abhängig von der geographischen Breite, von der Jahres- und Tageszeit (jährlicher, täglicher Gang), dem Gehalt an Feuchtigkeit und Staub und (nach Elster und Geitel) von den ultravioletten Strahlen der Sonne.

So fand Exner in Ceylon als Jahresmittel 58 Volt per Meter, Elster und Geitel fanden in Wolfenbüttel 220 Volt per Meter, und zwar als Minimum 102 im Juni bis zu einem Maximum 470 im Dezember. Als allgemeines Mittel sind etwa 130 Volt per Meter bei schönem Wetter anzunehmen, und zwar so, daſs dem der Erde näheren Punkte das kleinere (vergleichsweise negative), dem um 1 m höher gelegenen Punkte ein um 130 Volt höheres (positives) Potential entspricht. Hiernach wären an der als eben gedachten Erde die Niveauflächen wagrechte Ebenen, an der als kugelförmig gedachten Erde konzentrische Kugelflächen. Schon die kleineren Unebenheiten des Bodens und um so mehr Gebäude (Häuser, Türme . . .), Berge und Täler bewirken mannigfache Deformationen dieser Niveauflächen (Fig. 712); über eine völlige Veränderung der normalen Ladungsverhältnisse insbesondere durch Gewitterwolken im folgenden § 201.


Fig. 712.

Beträgt das Potentialgefälle der „Schönwetterelektrizität“ nächst der Oberfläche der als leitende Kugel angenommenen Erde zu einer bestimmten Zeit 1410 Volt per Meter, so ergibt sich daraus eine negative Ladung der Erdkugel mit einem Oberflächenpotential $V = 9$ Milliarden Volt (LA 229). — Dieser Berechnung liegt aber die Annahme zu Grunde, daſs eine solche negative Ladung der Erde der einzige Sitz elektrischer Kräfte an und über der Erdoberfläche sei. Es müſsten dann die Niveauflächen für Potentiale gleicher Differenz (wie bei je einem Punkte oder je einer homogenen Kugelschale) nach oben immer weiter auseinanderrücken, d. h. das Potentialgefälle gegen oben immer kleiner werden; doch wäre diese Abnahme des Gefälles nur eine sehr geringe wegen der Kleinheit der Höhenunterschiede im Vergleich zum Erdradius. Statt dessen aber haben neueste Ballonfahrten das Potentialgefälle in den höchsten Schichten sehr als nahezu Null erwiesen. Dies würde es wahrscheinlich machen, daſs die Atmosphäre selbst eine positive Ladung besitze, die gleich ist der sicher vorhan-

LA 229.

enen negativen Ladung der Erde (die aber in diesem Falle nicht mehr den oben errechneten ungeheueren Wert hätte).

Angesichts dieser bisherigen Unsicherheiten in der Beschreibung des tatsächlichen elektrischen Zustandes des Erdbodens und der Atmosphäre ist um so weniger schon eine sichere Erklärung möglich, woher diese Ladungen kommen. Nach ELSTER und GEITEL ist hieran wesentlich einerseits die ultraviolette Strahlung beteiligt, die nach Versuchen die negativ geladenen Bestandteile des Erdbodens zu entladen vermag und so den „täglichen Gang der Schönwetterelektrizität" bedingt. Anderseits ist es nach der neuesten Ionentheorie wahrscheinlich die ionisierte Luft (d. i. solche, die Sauerstoff- und Stickstoffatome, die keinen geschlossenen Sauerstoff- und Stickstoffmolekülen angehören und als Träger freier elektrischer Ladungen sich bewegen, § 154, S. 502), die auch die räumliche Trennung der luftelektrischen Ladungen erklärlich machen würde. — Diese Ionenhypothese wird dann noch weiter ins Einzelne ausgebildet durch die allerneueste Elektronentheorie (§ 154, S. 503).

§ 201. Gewitter, Blitzableiter. — Polarlichter.

Zwei Gruppen von Erscheinungen sind es, die zusammen als **Gewitter** bezeichnet werden: 1. Die starke Wolken- und Niederschlagsbildung, oft von heftigen Stürmen begleitet. 2. Die elektrischen Entladungen unter Blitz und Donner.

Ihrer Entstehung nach unterscheidet man **Wärmegewitter** (die nach BEZOLD Wirbel mit horizontaler Achse sind) und **Wirbelgewitter** (Wirbel mit vertikaler Achse vergl. § 191).

Zu dieser Unterscheidung führte namentlich die synoptische Darstellung des Fortschreitens ganzer „Gewitterfronten" über größere Länderteile. Die Isobaren zeigen dann oft V-förmige Ausbuchtungen („Gewittersäcke", Fig. 713). — Ferner zeigen die Barogramme selbstregistrierender Apparate oft ein als „Gewitternase" bezeichnetes plötzliches Ansteigen (danach auch oft wieder sprungweises Sinken) des Luftdruckes bei Eintritt des Gewitters, so in Fig. 714 (a. f. S.). Namentlich letztere Erscheinung steht damit im Einklange, daſs eine starke Depression sehr rasches Einströmen und Aufsteigen von Luftströmen und hiermit die mächtige Wolkenbildung zu ihrer nächsten Veranlassung hat. — Speziell bei Wärmegewittern, wie wir sie nach drückender Hitze erwarten, wird der absolute Feuchtigkeitsgehalt der Luft ein sehr groſser sein, was die folgenden starken Niederschläge begreiflich macht. In der Erklärung weiter zurückgehend finden wir

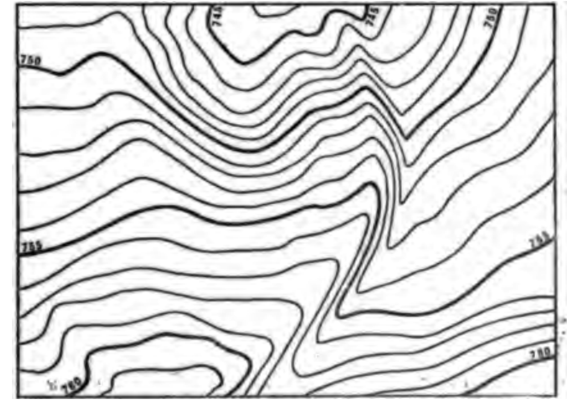


Fig. 713. Böenlinien in den Isobaren vom 27. August 1890.

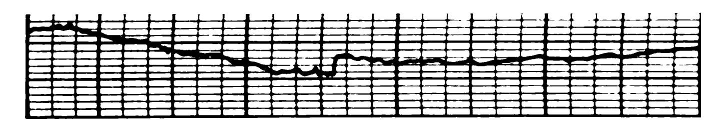


Fig. 714. Barogramm zur Zeit des schweren Hagelwetters in Wien am 7. Juni

Sommer im Binnenlande erfüllt zu sein. — Die Wirbelge
„begleiten die zentralen Teile tieferer wohl ausgebildeter Depres
bei unruhigem, trübem Wetter vorzugsweise dort auf, wo die]
zu besonders tiefen entwickeln, namentlich auf dem Meere bis an

Für die Erklärung der elektrischen Erscheinun
witter bildet den Ausgangspunkt die Beobachtung, dafs d
Anordnung der luftelektrischen Niveauflächen des he
durch die aufsteigenden Ströme der feuchten Luft und
densierenden Wasserdämpfe in hohem Grade gestört ist
durchschnittliche Gefälle von etwa 130 Volt per Meter äı
Nahen von Gewitterwolken bis 7000 Volt per Meter und
Exner). — Die Gewitterwolken weisen meistens (nic
gative Ladung auf; das aus diesen Wolken an die
Wasser zeigt bald positive, bald negative Ladung.

Für die weitere Erklärung, woher die grofsen Ladungsgra
mengen bei Gewittern kommen, treten zu den Unsicherheiten der
die Schönwetterelektrizität noch die weiteren Fragen: Haben
geladenen Erdboden aufsteigenden Wasserdämpfe die Fähigkeit,
durch Konvektion bis zur Wolkenbildung mit sich zu nehmen (
Oder wirkt die negativ geladene Erde durch Influenz auf
fallenden Wassertropfen, so dafs die an deren Oberseite wegstäu
Tröpfchen selbst freie negative Ladung annehmen (so nach Elster
Leichter zu erklären als die Herkunft der Ladungsmengen schie
Ladungsgrade: Denn da die grofsen Tropfen bei Gewitterregen ie

Die häufigste Form der Blitze ist die eines grofsen vielfach verästelten elek-ahen Funkens (nicht mit den herkömmlich angenommenen scharfen Ecken); adblitze, Fig. 715; Kugelblitze. — Wetterleuchten. — **Donner** rgl. Fig. 335, § 94).



Fig. 715. Bandblitz.

Blitzableiter vermögen bis zu gewissen Potenzial-ferenzen dem Einschlagen vorzubeugen, indem tt des plötzlichen Ausgleiches zwischen entgegen-setzten Ladungen von Haus und Wolke ein allmäh-ber durch „Spitzenwirkung" (§ 133) stattfindet.

Insoweit also ist die Bezeichnung „Auffangstange" nicht z zutreffend. Kommt es bei allzu rasch anwachsender entialdifferenz doch zum Einschlagen, so findet der Ausgleich schen Wolke und Erde in der verhältnismäfsig gut leitenden tallverbindung, nicht in den minder gut leitenden, entzünd-en Teilen des Hauses selbst statt. — Man pflegte früher bei Schätzung des Wirkungsbereiches eines Blitzableiters (dafs den Raum eines Kegels schütze, dessen Basisradius etwa Doppelte der Höhe der Spitze über dem Erdboden sei) sich elektrostatische Betrachtungen der ruhenden Niveau-hen zu beschränken. Doch weifs man jetzt aus theoretischen ünden und direkten Erfahrungen, dafs es sich bei den Blitzen istens um rasche oszillierende Entladungen handelt (woraus h z. B. auch das Aussehen der Bandblitze erklärt), für die lmehr die Gesetze von Wechselströmen hoher Frequenz anzuwenden sind. Stromstärke wurde dabei bis auf 32 000 Amp. geschätzt.

Eine besondere Gruppe von Erscheinungen der atmosphärischen ektrizität bilden die **Polarlichter** (Nordlicht in den nördlichen eiten; auch noch in mittleren Breiten, z. B. von Wien, Rom, wird nchmal ein feuerscheinartiges Licht nahe dem Nordhorizonte bemerkt). seiner vollen Entwickelung zeigt das Nordlicht ein dunkles Kreis-gment am Horizont, über das sich teils ruhende, teils rasch bewegte rahlen erheben; ferner vorhangartige Lichtgebilde u. dergl., deren öhe über dem Erdboden zu 50 bis 60 km (ausnahmsweise 5 km) ge-essen wurde.

Die Polarlichter stehen in keinem Zusammenhange mit elektrischen Gewittern gewöhnlichem Sinne, wohl aber mit den erdmagnetischen Gewittern (§ 146). lenfalls gehören sie unter die Erscheinungen der Elektrolumineszenz; nach neuerer pothese sind sie ein Fall von Kathodenstrahlung, die die hohen, sehr verdünnten hichten der Atmosphäre zur Lumineszenz erregt.

§ 202. Zusammenfassung. — Wetterprognose.

Überblicken wir die bisher entwickelten theoretischen Gesetze und Regeln r Physik der Atmosphäre in der besonderen praktischen Absicht der etterprognose, so stellen sich als die gegenwärtig wichtigsten Behelfe einer chen die folgenden heraus:

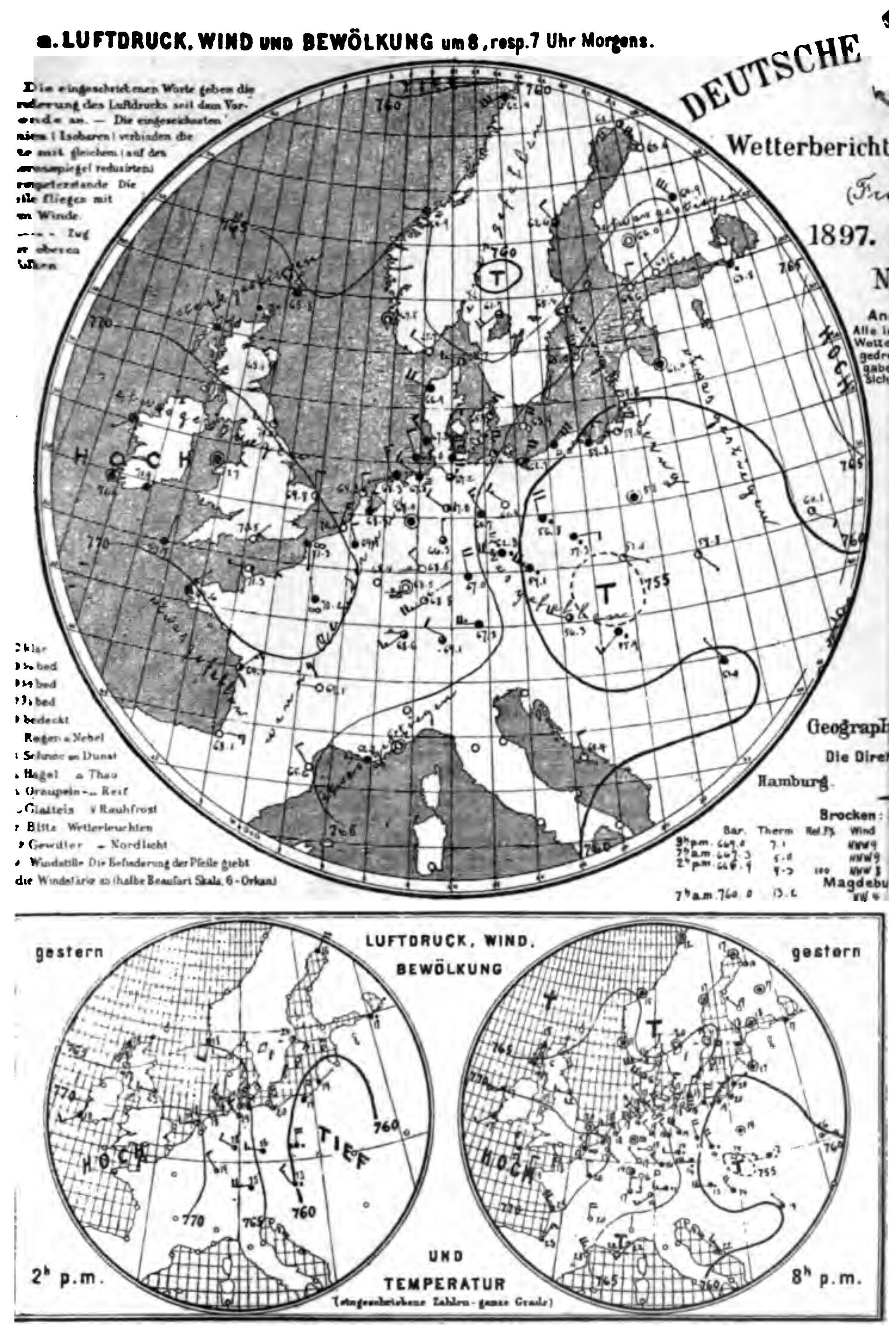
Ostwind (als vom asiatischen Kontinent herkommend, wo vorhan
gegeben und jedenfalls nicht viel neues aufgenommen wurde) he
dem Westwind das geradezu als „Westwetter“ bezeichnete
regnerische, windige. Damit aber solche Schlüsse aus dem Anl
karten geeignete hohe Wahrscheinlichkeit haben, ist Rücksicht zu

2. die **Zugstrafsen der Minima.** Immerhin gibt es deren
auf etwa 24 Stunden mit einiger Wahrscheinlichkeit vorauszusel
bestimmtes Minimum einen bestimmten Weg einschlagen werde.
ist die Zugrichtung West—Ost und die durchschnittliche Geschwin
7 bis 8 m per sec doch so vorherrschend, dafs man z. B. in Wie
liches Wetter erwarten kann, wie es gestern am Bodensee geherr

3. Jedenfalls kann aus einer vereinzelten Barometer
kein Schlufs auf das bevorstehende Wetter gezogen und insofe
nicht in der noch fast allgemein vermeinten Weise als „Wetter
werden. Denn der an einem Ort zu einer Zeit herrschende Druc
eine Teilbedingung aus dem ganzen Komplexe von vorwiegend aerom
aerothermischen Erscheinungen, die zusammen das „Wetter“ bil
auf längeres und starkes Fallen des Barometers brauchen nicht
folgen, so u. a., falls jenes nicht dem Vorüberziehen eines wirklich
sondern nur einer Art Furche tiefen Druckes entsprach; ferner
noch tieferer, im Osten hoher Barometerstand herrscht. Ebenso
hohem Barometerstand anhaltend trübes Wetter in den Niederung
in mäfsiger Höhe über der Nebelschicht) entsprechen aus der in §
Ursache der „Temperaturumkehr“. Überdies mag ein Minimum
auch nur bis in zu geringe Höhen sich erstrecken (wie neuestens B
wiederholt direkt gezeigt haben), um die typischen Folgen nach
Aus allen diesen Gründen sind auch die häufig zu vernehmend
„Unverläfslichkeit des Barometers“ nur die Anzeichen für das Nicht
wahren und einzigen Aufgabe, der Angabe des Luftdruckes.

4. Auch zahlreiche **populäre Anzeichen** guten und schlechten
sich als mit Teilursachen eines solchen zusammenhängend heraus.
der Hühneraugen, rheumatischer Glieder u. dergl. weisen zunächst

Tafel XII.



Landregen u



Allgemeine Uebersicht der Witterung am 30. Juli, 8(7) Uhr Morgens.

Zwischen Hochdruckgebieten über dem Innern Rußlands und der Westhälfte des Erdtheils, wo der Luftdruck über den britischen Inseln und Nordfrankreich, 770 mm übersteigend, am größten ist, liegt eine umfangreiche Depression zwischen der Ostsee und dem Schwarzen Meere. Bei schwachen, im Osten mäßigen bis starken, westlichen bis nördlichen Winden ist das Wetter in Deutschland im Süden mehrfach heiter, sonst meist trübe, die Morgentemperaturen liegen außer im Nordosten unter der Normale; im Osten und im Süden fiel Regen, in Chemnitz 22, Grünberg 36 Breslau 56 mm. Auch Nordoesterreich hatte starke Regenfälle, Wien 83, Prag 59, Lemberg 38 mm.

Aussichten für die Witterung des 31. Juli in

Nordwestdeutschland Etwas kühleres Wetter mit zunehmender Bewölkung und mäßigen nördlichen Winden, stellenweise Regen.

Ostdeutschland Veränderliches, meist kühles Wetter mit Regenfällen und vorwiegend schwacher Luftbewegung.

Süddeutschland Wie Ostdeutschland.

Abth. III. J. V. Köppen

Überschwemmung.

in Hamburg ausgegebenen Sturmwarnungen von hoher Wahrscheinlichkeit, indem diese Gegenden die Einbruchsstelle der in überwiegender Zahl von Nordwesten herkommenden Minima bilden. Dagegen können z. B. in einzelnen Gebirgstälern sich die herkömmlichen Wetterregeln geradezu umkehren, z. B. Westwind schönes Wetter anzeigen, falls er eigentlich ein durch Gebirgsvorsprünge abgelenkter Ostwind ist. — So erweist sich auch der bei manchen theoretisch Ungebildeten aus langer Erfahrung geschärfte Blick für Wetteranzeichen als an die Scholle der Heimat gebunden. Auch unter den wissenschaftlichen Regeln sind viele der z. B. von Abercromby für England aufgestellten für den Kontinent schon nicht mehr anwendbar.

6. Durchschnittlich weisen die wissenschaftlichen Prognosen etwas über 80 Proz. Treffer auf gegenüber 50 Proz., die jede willkürliche, also nur zufällig eintreffende Regel für sich geltend machen kann. Dabei macht diese Prognose bisher nur Anspruch darauf, etwa 24 Stunden voraus zu gelten (wogegen es bekanntlich die unwissenschaftlichen, dafür aber um so populäreren Prognosen auf Monate, Jahre, ja nach dem noch allgemein verbreiteten Knauerschen „Hundertjährigen Kalender" auf Jahrhunderte hinaus wagen). Es ist also bisher eine wesentliche praktische Forderung an den „Witterungsdienst", durch schnellste Ausarbeitung und Beförderung der Depeschen es anzustreben, dafs die Prognosen noch am Abend desselben Tages an die Beteiligten (z. B. Landwirte, die ihre Arbeiten für den nächsten Tag danach einzurichten wünschen) gelangen.

Im ganzen bleibt für die gerechte Würdigung des bisher an Prognosen schon Geleisteten zu bedenken: Die physikalischen Grundgesetze (Abhängigkeit der Luftbewegungen von Druckdifferenzen und der Erdrotation, Abhängigkeit der Kondensation von Druck und Temperatur u. s. w.), durch die das Wetter notwendig und ausreichend bestimmt ist, sind uns schon jetzt wohl in allem Wesentlichen bekannt. Nur ihre Anwendung gestaltet sich infolge der zahlreichen Teilbedingungen (z. B. Abhängigkeit von der Bodengestaltung je eines Ortes und Zusammenwirken der ganzen Umgebung) sehr verwickelt. Da nun aber sowohl die Mittel der mathematischen Analyse solcher Erscheinungen, wie der empirischen Erforschung des jeweiligen tatsächlichen Zustandes der Atmosphäre an möglichst vielen Orten an und über dem Festlande und dem Meere während der jüngsten Jahrzehnte und Jahre sich in rascher Folge vermehrt haben, so ist die Hoffnung auf immer genauere Anpassung der theoretischen Meteorologie an das praktische Bedürfnis des grofsen Publikums berechtigt. Vorbedingung für das Verständnis des schon Geleisteten und für tätige Mitarbeit an dem noch zu Leistenden ist die Ausbreitung gediegener meteorologischer Kenntnisse und Fertigkeiten in möglichst weiten Kreisen der Gebildeten.

Aus der Chemie.

A. Vorversuche und Vorbegriffe.

In den folgenden Versuchsgruppen I, II, III, IV, V (Versuche 1 bis 11) werden vorgeführt:

a) einige **Grundstoffe** (Eisen, Schwefel, Wasserstoff . . .) und **Verbindungen** (Schwefeleisen, Wa[illegible] Säuren, Salze),

b) die drei Haupt[illegible]vorgänge: **Synthesen** (Verbinden), **Analysen** (Zerlegen), **Sub**[illegible]n).

§ 203. Gruppe I: Ei[illegible]r, Schwefel. — Chemische Verb[illegible] (Synthese).

Versuch 1a: Es we[illegible]späne (besser: „Eisenpulver") und 4 g pulverisierter Schwefel (bes[illegible]chwefelblumen") möglichst innig gemengt. Erwärmen wir die[illegible]s graugrünen Pulvers an einer Stelle, so wird es hier schwarz und gerät bei stärkerem Erwärmen ins Glühen, das nun durch die ganze Stoffmenge fortschreitet. **Das Gewicht nimmt während des Vorganges weder zu noch ab** (vorausgesetzt, dafs nicht etwas Schwefel verbrennt oder verdampft). Wir sagen: Schwefel und Eisen haben sich miteinander **chemisch verbunden** und bilden nun die **chemische Verbindung** „Schwefeleisen", einen schwarzgrauen, spröden Stoff.

In dem „mechanischen Gemenge" (dem graugrünen Pulver) konnten wir mit freiem Auge oder doch mit dem Vergröfserungsglas die einzelnen Schwefel- und Eisenteilchen an der gelben, bezw. grauen Farbe, dem Metallglanz u. s. w. unterscheiden; im Schwefeleisen ist das selbst bei stärkster Vergröfserung nicht mehr möglich. Auch können wir aus dem Gemenge den Schwefel durch „Schlämmen" mit Wasser oder Lösen in Schwefelkohlenstoff, das Eisen durch den Magnet wieder (mehr oder minder vollständig) absondern, nicht aber aus dem pulverisierten Schwefeleisen.

Den eigentlich charakteristischen Unterschied zwischen mechanischem Gemenge und chemischer Verbindung aber lehren uns erst folgende „Gegenversuche": *Versuch* 1b: Wir mengen wieder Eisen- und Schwefelpulver im Gewichtsverhältnisse 7 : 4, setzen aber einmal einen Überschufs Eisen, ein andermal einen Überschufs Schwefel zu: Das Glühen tritt nun minder lebhaft oder gar nicht ein, und aus dem nach längerem Erhitzen gewonnenen Stoff läfst sich der Überschufs von Eisen, bezw. von Schwefel durch dieselben „mechanischen" Mittel wie beide einzelne Stoffe aus dem Gemenge absondern, wogegen gerade wieder 7 G.-T. (lies: Gewichtsteile) Eisen und 4 G.-T. Schwefel zum chemisch[illegible]

Verbinden gleichsam einander ausgewählt haben. — So geben Versuch und Gegenversuch ein erstes Beispiel für folgende zwei Grundgesetze aller chemischen Verbindungen:

I. **Das Gewicht einer chemischen Verbindung ist gleich der Summe der Gewichte der verbundenen Stoffe** (Gesetz der Erhaltung der Stoffmenge oder Masse, Cavendish 1781, Lavoisier 1782).

II. **Zwei (oder mehrere) Stoffe verbinden sich chemisch nur dann vollständig, wenn sie in bestimmten festen Gewichtsverhältnissen stehen** (Gesetz der konstanten Gewichtsverhältnisse, Wenzel 1777).

Versuch 2: Ähnlich wie im Versuch 1, nur unter etwas minder lebhaftem Glühen, verbinden sich 63 G.-T. **Kupfer** mit 32 G.-T. Schwefel zu „Schwefelkupfer".

Wie das Gewichtsverhältnis 7 : 4 für das Verbinden von Eisen und Schwefel charakteristisch ist, so für das Verbinden von Kupfer und Schwefel das Verhältnis 63 : 32. Geben wir beiden Verhältnissen gleiche Hinterglieder (7 : 4 = 56 : 32), so ergeben sich folgende Verhältniszahlen: für **Eisen 56**, für **Kupfer 63**, für **Schwefel 32**, welche wir noch bei mancherlei Versuchen (z. B. Versuche V) als für die drei genannten Stoffe bedeutungsvoll erkennen werden.

§ 204. Gruppe II: Wasser, Wasserstoff, Sauerstoff. — Chemische Zerlegung (Zersetzung, Analyse).

Versuch 3: Gefäfs und Röhren eines „Wasserzersetzungsapparates" (Fig. 716; vergl. auch Fig. 719, den mittleren der drei Apparate) werden mit „angesäuertem Wasser" (einer Mischung von etwa 10 Raumteilen Wasser auf 1 Raumteil Schwefelsäure) gefüllt. Solange ein elektrischer Strom durch das Gemisch geht, steigen von den Platinplatten des Apparates Gasbläschen in die Röhren auf. Das eine Gas, der **Wasserstoff**, ist entzündbar (bei hinreichend grofsen Mengen sehen wir eine schwach leuchtende, bläuliche Flamme); das andere Gas, der **Sauerstoff**, ist nicht selbst brennbar, entfacht aber einen blofs glimmenden Span. — Da nach längerer Zeit die Menge des Wassers, nicht aber die der Schwefelsäure sich vermindert zeigt, so schliefsen wir, dafs Wasserstoff und Sauerstoff (wenigstens mittelbar) dem Wasser entnommen seien, und wir sagen: Das Wasser ist (durch einen sekundären elektrolytischen Vorgang, § 154) **chemisch zersetzt** worden in Wasserstoff und Sauerstoff.

Fig. 716.

Vergleichen wir während der Zersetzung beliebig oft die Volumina der ausgeschiedenen Gase, so finden wir, dafs sich die **Volumina von Wasserstoff und Sauer-**

stoff verhalten wie 2:1[1]. — Aus dem Verhältnis der spezifi Gewichte beider Gase **1:16** (§ 46) ergibt sich für die abso Gewichte, dafs **im Wasser Wasserstoff und Sauerstoff verb sind im Gewichtsverhältnisse** 2:16 = **1:8.** In je 18 g ' sind also 2 g Wasserstoff und 16 g Sauerstoff.


Fig. 717.

Versuch 4: Hat man beide G einem und demselben Gefäfse („Eudi Fig. 717) aufgefangen, so bilden s Gemenge, welches „Knallgas" heifs es entzündet mit Explosion verbrennt bei geben **2** Liter Wasserstoffga **1** Liter Sauerstoffgas zusammen des Gemenges Knallgas, nach der V nung aber nur **2** Liter Wasserdamp ausgesetzt, dafs alle Volumina bei g Temperatur, z. B. 100° C und gl Druck gemessen werden). Ein Übe von Wasserstoff oder von Sauerstoff unverbrannt. (VOLTA 1779.)

Dies ist ein erstes Beispiel dafü zu den chemischen Grundgesetzen I der Gewichtsmengen, welche für all tropfbare, gasförmige) Stoffe gelten, fü noch insbesondere das folgende der V menge kommt:

III. **Zwei (oder mehrere) Gase verbinden sich nach bestin einfachen Volumsverhältnissen** (Gesetz der konstanten kleinzahligen Volumsverhältnisse, GAY-LUSSAC 1808.)

§ 205. Gruppe III: Natrium und Ätznatron. — Chem Ersetzung (Austausch, Substitution). — Basen.

Natrium ist ein Metall, das so weich ist, dafs es mit dem M geschnitten werden kann. Die Schnittfläche ist silberweifs, wird sehr bald mattgrau (infolge chemischer Verbindungen, die das Na mit Bestandteilen der Luft [Sauerstoff, Wasserdampf, Kohlend eingeht; es mufs daher unter Steinöl oder Vaselinöl aufbewahrt we Natrium hat ein kleineres spezifisches Gewicht als Wasser. Sch äufserst kleinen Mengen färbt es nichtleuchtende Flammen wach

[1]) Namentlich zu Beginn der Zersetzung beträgt das Volumen des Sauers weniger als die Hälfte von dem des Wasserstoffes; denn der Sauerstoff wird vom stärker absorbiert als der Wasserstoff, auch vermindert sich das Volumen von ein des Sauerstoffes durch Bildung von Ozon (§ 214). Das Verhältnis 2 : 1 erweist si als genau, wenn die Gase durch Erhitzen des Wassers u. s. f. vollständig gesammelt

Versuch 5: Hält man einen mit Wasser gefüllten Zylinder mit der offenen Seite in ein mit Wasser gefülltes Gefäfs und bringt in den Zylinder ein Stückchen Natrium (höchstens erbsengrofs, Vorsicht!), so steigt es im Wasser des Zylinders auf; dabei bedeckt es sich mit einer weifsen Kruste und verschwindet alsbald ganz; während dieser Zeit sinkt das Wasser im Zylinder. Das erzeugte Gas erkennt man (z. B. durch Anzünden) als Wasserstoff. In dem übrig gebliebenen Wasser ist ein ätzender Stoff gelöst, der Ätznatron heifst; seine wässerige Lösung heifst Natronlauge (Laugenessenz). — Man sagt: Das Natrium hat einen Teil vom Wasserstoff des Wassers **chemisch ersetzt** und bildet mit dem Reste des Wassers Atznatron.

Um **1** g **Wasserstoff** (beachte Volumen und spezifisches Gewicht!) aus dem Wasser auszuscheiden, mufs man 23 g **Natrium** zu 18 g Wasser bringen; dabei erhält man nebst dem 1 g Wasserstoff noch 40 g Ätznatron. Es besteht also wieder Gleichheit der Gewichte vor und nach der Substitution: **23** + **18** = **1** + **40**.

Versuch 6: Bringt man etwas von der Ätznatronlösung zwischen die Fingerspitzen, so fühlt sich deren Haut glatt und weich an — weil sie durch den ätzenden Stoff aufgelöst wird. Auch sehr verdünnte Lösung schmeckt noch „laugenhaft“. Gerötete Lakmustinktur (Lackmuspapier) wird durch Ätznatron wieder blau gefärbt. Stoffe, welche diese Eigenschaften zeigen, heifsen **Basen.**

§ 206. Gruppe IV: Schweflige Säure und Schwefelsäure. — Säuren.

Versuch 7: Beim Brennen des Schwefels entwickelt sich ein Gas von stechendem Geruche, das Rosen, befeuchtetes Stroh... zu bleichen vermag; vom Wasser wird es stark absorbiert, wobei es sich mit einem Teile desselben zu schwefliger Säure verbindet.

Versuch 8: Die englische Schwefelsäure, eine wasserhelle (die Nordhäuser Schwefelsäure, das „Vitriolöl“, eine bräunliche) ölige Flüssigkeit vom spez. Gew. 1,9, schwärzt (verkohlt) Holz, Zucker . . ., indem sie diesen organischen Stoffen Wasserstoff und Sauerstoff entzieht. (Aus gleichem Grunde erzeugt sie auf der Haut Brandwunden.)

Schweflige Säure und Schwefelsäure schmecken auch in starker Verdünnung sauer und färben blaue Lackmustinktur rot. Stoffe, welche diese Eigenschaften zeigen, heifsen **Säuren.**

§ 207. Gruppe V: Eisenvitriol, Kupfervitriol. — Salze.

Versuch 9: Werden Eisenspäne mit verdünnter Schwefelsäure übergossen (Fig. 718 a. f. S.), so entwickelt sich ein Gas, das wir (z. B. durch Anzünden — Vorsicht!) als Wasserstoff erkennen. Die rückständige

Flüssigkeit gibt, eingedampft, Krystalle von **Eisenvitriol**, einem grünlichen **Salz.**

Versuch 10: Kupferhammerschlag (**Kupferoxyd**), ein schwarzes Pulver, gibt, mit der farblosen verdünnten Schwefelsäure leicht erwärmt, eine schöne blaue Lösung eines anderen **Salzes: Kupfervitriol.**



Fig. 718.

Versuch 11: Halten wir die blanke Messerklinge in Kupfervitriollösung, so zeigt sie sogleich die Farbe des Kupfers. — Setzen wir einer Kupfervitriollösung Eisenspäne zu, so nimmt sie mehr und mehr die Farbe einer Eisenvitriollösung an, und statt des Eisens finden wir einen Bodensatz von Kupferpulver.

Damit bei Versuch [illegible] **Wasserstoff** ausgeschieden werden, müssen **56** g Eisen zu 98 g [illegible] acht werden, wobei sich 152 g Eisenvitriol bilden. (Beachte: [illegible] 2.)

Bei Versuch 10 müssen 79 g Kupferoxyd zu 98 g Schwefelsäure gebracht werden, damit sie 159 g Kupfervitriol geben.

Bei Versuch 11 werden in 159 g Kupfervitriol **63 g Kupfer durch 56 g Eisen** ersetzt, und es bilden sich wieder 152 g Eisenvitriol. — **Vergl. Versuch 1 und 2.**

Geschichtliches. — In vorgeschichtliche Zeit reicht zurück die Kenntnis mehrerer Stoffe, die wir heute für **Grundstoffe** halten, so **Gold, Silber,** Kupfer, Eisen, Zinn, Schwefel, Diamant, Kohle (Kohlenstoff) . . .; ferner **Verbindungen:** Wasser, Essig, Kochsalz . . . Von künstlich einzuleitenden chemischen Vorgängen verstanden schon die alten Ägypter mittels Eisen das Kupfer aus natürlichen Kupfersulfatlösungen zu fällen, die Phönizier das Quecksilber aus Zinnober abzuscheiden, aus Quarzsand und Soda Glas herzustellen; **Kalkbrennen, Kalklöschen** u. s. f. Der Araber Geber (Dschabir um 700 n. Chr.) liefs Quecksilber mit Schwefel sich zu Zinnober verbinden, gewann durch Rösten von Salpeter Salpetersäure, auch kannte er schon die Salzsäure. Das Nordhäuseröl (die braune Schwefelsäure) wurde von alters her durch Rösten von Eisenvitriol gewonnen. In diesen Säuren löste man verschiedene Metalle, so in der Salpetersäure sogar das „edle" Silber, im Königswasser, einem Gemisch von Salpetersäure und Salzsäure, auch das Gold. — Die Alchimisten (Alchimie, arabisch kemi = Ägypten, das schwarze Land, daher „schwarze Kunst") waren ganz besonders bemüht, Gold durch Synthese anderer Stoffe herzustellen — zwar ein vergebliches Unternehmen, weil bis heute Gold noch nicht zerlegt ist und daher auch nicht zusammensetzbar, also als Grundstoff gilt; was aber nicht hinderte, dafs gerade durch die immer wieder neuen Versuche die Menge der chemischen Einzelkenntnisse ausgiebig zunahm. — Von den heute allerwichtigsten Elementen wurde der **Wasserstoff** schon von Theophrastus

PARACELSUS (um 1550) als eine bei der Lösung von Metallen in Säuren auftretende „brennbare Luft“ bemerkt. Sauerstoff entwickelten SCHEELE und PRIESTLEY fast gleichzeitig (1774), aber unabhängig voneinander aus rotem Quecksilberoxyd: ferner SCHEELE (1774) aus Salzsäure und Braunstein das Chlor. Der Stickstoff war schon früher durch den Botaniker RUTHERFORD dadurch entdeckt worden, dafs die Luft durch Verbrennenlassen von Kohle und Beseitigung des Kohlendioxyds mittels Kalkwasser von dem das Brennen unterhaltenden Teile (dem Sauerstoff) befreit wurde. — Die „vier Elemente: Erde, Wasser, Luft, Feuer“ (deren Vierzahl die Alten aus den Gegensätzen „Kalt — Warm, Trocken — Feucht“ ableiten zu können glaubten) erinnern uns noch heute, welch weiten Weg die wissenschaftliche Begriffsbildung der Chemie zu durchmessen hatte.

B. Chemische Hypothesen und Theorieen.

§ 208. Grundstoffe, einfache Stoffe, chemische Elemente.

Wenn wir Schwefeleisen, Wasser . . . als „zusammengesetzte“ Stoffe bezeichnen, so ist dies insofern Ausdruck beobachtbarer Tatsachen, als wir das Schwefeleisen aus zwei, in vielen ihrer Eigenschaften ganz verschiedenen Stoffen haben hervorgehen sehen; desgleichen das Wasser, und letzteres auch wieder in zwei Stoffe, Sauerstoff und Wasserstoff, zerlegen können. Immerhin geht aber auch schon diese Auffassung über das rein Tatsächliche insofern hinaus, als wir freilich nicht direkt wissen können, ob z. B. der Wasserstoff und der Sauerstoff, nachdem sie sich verbunden haben, jeder für sich noch dieselben Eigenschaften hat, wie wenn sie sich nicht verbunden hätten, und ob also Wasserstoff und Sauerstoff als solche wirklich noch im Wasser enthalten seien. Insofern bildet schon die Annahme, dafs es überhaupt Stoffe gebe, welche innerhalb und aufserhalb ihrer Verbindungen unveränderliche Elemente der Materie darstellen, eine Hypothese, die aber von der gegenwärtigen Chemie fast ganz allgemein und meist wie selbstverständlich angenommen ist.

Für die erfahrungsmäfsige Erforschung der Zusammengesetztheit oder Nichtzusammengesetztheit der Stoffe ist die erste Frage, ob sich aus einem gegebenen Stoffe durch irgendwelche (mechanische, thermische, elektrische . . .) Mittel Stoffe abscheiden lassen, die von dem gegebenen Stoffe und untereinander sich durch einige Eigenschaften unterscheiden (denn in allen Eigenschaften unterscheidet sich kein Paar von Stoffen).

Als **Grundstoffe, chemisch einfache Stoffe** oder **Elemente** werden solche Stoffe bezeichnet, die man bisher weder aus anderen Stoffen zusammenzusetzen noch in solche zu zerlegen vermocht hat.

Diese Definition beansprucht für jeden Zeitpunkt der wissenschaftlichen Entwickelung nur relative Giltigkeit, indem es niemals ausgeschlossen ist, dafs bei einem Stoffe, welcher sich „bisher“ nicht hat zerlegen lassen, dies früher oder später gelingen werde. So hatte Wasser fast selbstverständlich als ein Grundstoff gegolten, bis CAVENDISH (1781) das Verbrennungsprodukt von Wasserstoff und Sauerstoff als Wasser erkannte (wogegen noch VOLTA, 1779, erwartet hatte, aus dem Wasserstoff werde „ein Säuretropfen“, aus dem Sauerstoff „ein erdiger Staub“ werden). Sogar alle Säuren und Basen hatte man vor LAVOISIER für Grundstoffe gehalten; desgleichen vor DAVY (1807) die basischen Oxyde Kali, Natron . . .

Immerhin wird die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Stoff, welcher allen bisherigen Methoden der Zerlegung widerstanden hat, auch wirklich ein unzerlegbarer Stoff sei, um so gröfser, je mannigfaltiger diese Methoden selbst geworden sind. Über die gegenwärtig (1903) bekannten Elemente vergl. die Tafel § 211 (S. [illegible]).

§ 209. Die Atomhypothese.

Sobald einmal die Annahme gemacht ist, dafs bei und nach der Vereinigung zweier oder mehrerer Stoffe zu einer chemischen Verbindung diese Stoffe sich in der Verbindung als das erhalten, was sie vor dem Verbinden gewesen waren, liegt die weitere Vorstellung nahe, sich jede Verbindung aus ungleichartigen „chemisch kleinsten Teilen“ oder **Atomen** bestehend zu denken. Diese Atome sind also definiert als die nur mehr durch chemische Mittel voneinander zu trennenden Teilchen der „mechanisch kleinsten Teile“ oder **Moleküle** (§ 57) der Körper. Chemische **Verbindungen** besteh[illegible]r **gleichartigen Molekülen**, mechanische Gemenge aus unglei[illegible] Molekülen. — Alle Atome je eines Grundstoffes, z. B. Eisen, we[illegible]ls untereinander völlig gleich angenommen, also von gleicher Ge[illegible]er Masse, gleichen Kräften, speziell auch gleichem absoluten G[illegible]her Begriff sich aber nicht deckt mit dem des „Atomgewichtes“[illegible]r blofs relativ ist, siehe unten). Die Atome zweier verschiedener G[illegible] mehr oder minder verschiedene Eigenschaften; speziell sind auch [illegible] Grundstoffe gefunden worden, welche gleiche Atomgewichte hätten [illegible]ch z. B. bei Kalium und Calcium nur wenig verschieden sind, nämlich [illegible]. — Diese Atom-Hypothese (mehr als dies ist sie auch bis heute n[illegible] von Dalton 1805 in die chemische Wissenschaft eingeführt, und fas[illegible]chritte des XIX. Jahrhunderts in der Erforschung chemischer Tatsachen sind unter der Leitung dieser Hypothese gemacht worden. Die hauptsächlichsten Tatsachen, welche sich als notwendige Folge dieser Hypothese verstehen lassen und die daher umgekehrt auch als ihre (sie mehr oder weniger wahrscheinlich machenden) empirischen Stützen zu gelten haben, sind namentlich die folgenden:

1. Das Gesetz der **Erhaltung der Stoffmenge** (des Gewichtes und der Mafse, § 203, Gesetz I): Denn wenn die Atome unveränderlich sind, in was immer für chemische Verbindungen sie eingehen, und jedem Atom ein bestimmtes absolutes Gewicht zukommt, so mufs auch das absolute Gewicht der Verbindung gleich der Summe der absoluten Gewichte der Bestandteile sein; wie ja allgemein das Gewicht eines aus mehreren Körpern irgendwie zusammengesetzten Körpers gleich der Summe von deren Gewichten ist.

2. Das Gesetz der **konstanten Gewichtsverhältnisse** (§ 203, Gesetz II): Denn stellen wir uns z. B. vor, dafs die Atomgewichte von Eisen und Schwefel sich verhalten wie $p:q$ und Schwefeleisen dadurch entsteht, dafs sich x Atome Eisen mit y Atomen Schwefel zu je einem Molekül Schwefeleisen verbinden, in welchem die Gewichte von Eisen und Schwefel sich verhalten wie $xp:yq$, so werden auch in jeder endlichen Menge Schwefeleisen Gewichtsmengen von Schwefel und Eisen sich verhalten wie $xp:yq$.

Beobachtbare Tatsache ist hier nur, dafs $xp : yq = 7:4$. Wie grofs dagegen Anzahlen x und y und daher auch die Gewichte p und q sind, ist hieraus in nicht zu entnehmen. Erst wenn unter allen denkbaren Annahmen die ein-hste gemacht wird, dafs nämlich je ein Atom Eisen und ein Atom Schwefel zu einem Molekül Schwefeleisen verbinden (also $x = 1$, $y = 1$), wäre hiermit h angenommen, dafs $p : q = 7:4$. Wieder aber ist hiermit noch gar nichts über gesagt, welche jedenfalls äufserst kleine Gewichtseinheit diesen Mafszahlen und 4 zu Grunde liegt, d. h. wieviel Trilliontel Gramm etwa wirklich ein wefel-, bezw. Eisenatom enthalten würde.

So ungezwungen sich übrigens die beiden tatsächlichen Gesetze I und II klären, wenn wir die Atomhypothese annehmen, so gering wäre doch das dürfnis, nur allein schon um dieser zwei Gesetze willen gerade eine ato-istische Struktur der Materie anzunehmen. — Die Hauptstütze dagegen findet ese Hypothese in dem von Dalton entdeckten Gesetz der „multiplen Pro-portionen", welches eine Ergänzung und Erweiterung des Gesetzes der kon-anten Gewichtsverhältnisse (keineswegs einen Widerspruch gegen dieses Gesetz) thält. Ein Beispiel für die in diesem Gesetze zusammengefafsten Tatsachen ilden die zweierlei Verbindungen von Eisen und Schwefel, nämlich inerseits die bei dem Versuch I, 1 sich ergebende Verbindung nach dem Gewichts-erhältnisse Eisen : Schwefel $= 7:4$, anderseits die in der Natur sehr häufig (als yrit, Schwefelkies . . .) vorkommende Verbindung nach dem Gewichtsverhältnisse isen : Schwefel $= 7:8$. — Ein anderes Beispiel bildet neben der Verbindung von Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser (1 : 8) das Wasserstoffsuperoxyd (1 : 16). — Ein drittes, besonders lehrreiches Beispiel bieten die fünf Verbindungen von Stickstoff und Sauerstoff, nämlich:

7 Gew.-T.	Stickstoff	+ 4	Gew.-T.	Sauerstoff	geben	11	Gew.-T.	Stickstoffmonoxyd
7 „	„	+ 8	„	„	„	15	„	Stickstoffdioxyd
7 „	„	+ 12	„	„	„	19	„	Stickstofftrioxyd
7 „	„	+ 16	„	„	„	23	„	Stickstofftetroxyd
7 „	„	+ 20	„	„	„	27	„	Stickstoffpentoxyd

Vorausgesetzt bei allen solchen Unterscheidungen mehrerer Verbindungen derselben zwei (oder mehrerer) Grundstoffe ist, dafs, wenn die zwei- oder mehrerlei Verbindungen miteinander gemischt vorkommen (wie es bei Legierungen, § 213, häufig geschieht), sie aus dem Gemenge durch mechanische oder chemische Mittel ausgesondert werden können.

Es ergibt sich sonach als von Hypothesen, insbesondere von der Atomhypothese zunächst noch ganz frei folgender Ausdruck für das

3. Gesetz der multiplen Proportionen: **Dieselben zwei (oder mehreren) Stoffe** können nicht nur je eine, sondern auch **mehrere chemische Verbindungen eingehen; die bestimmten festen Gewichtsverhältnisse hierbei stehen dann selbst wieder in ganzzahligen** (und zwar meist kleinzahligen) **Verhältnissen zueinander.**

Für diese Tatsache erlaubt sodann die Atomtheorie eine völlig ungezwungene Erklärung, indem wir z. B. annehmen, dafs sich je 1 Atom Stickstoff mit je 1, 2, 3, 4, 5 Atomen Sauerstoff verbinden; doch bleibt es daneben zunächst auch möglich, dafs je 2 (— was auch in den Formeln N_2O_1 . . . N_2O_5 als das Richtige

gleichwertig) sind dann auch noch folgende Sätze:

b) **Die absoluten Gewichte je eines Moleki** (chemisch einfacher oder zusammengesetzter, nicht gemengter) **verhalten sich wie die Normalgewi** § 211) dieser Gase. Denn diese Normalgewichte verhal absoluten Gewichte gleicher Volumina, diese absolut ganzen Volummengen aber wie die Gewichte der ein in gleicher Anzahl vorhandenen Moleküle. — (In wel die **Molekulargewichte** den Normalgewichten nicl tional, sondern **gleich** setzt, siehe unten 5.)

c) **Die mittleren Abstände der Moleküle sind ein alle Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur.** einzelnen Moleküle als sehr klein gegen diese Abstände angen praktischen Ausdrucksweise werden überdies nicht selten

d) **„die Moleküle aller Gase gleich grofs"** genannt, ganze Raum, welchen eine Gasmenge einnimmt, dividiert du Moleküle selbst als „Gröfse eines Moleküls" bezeichnet wird; gemeint ist, dafs dieser Raum gleichsam der durchschnittliche eines der Moleküle sei. — Die späteren Ermittelungen der wir gröfsen und deren wirklicher mittlerer Abstände voneinander dafs in der Tat diese gegen jene sehr grofs sind (§§ 57, 83).

Diese ganz nach Belieben in den Formen a), b), c), d) aus these wurde zuerst 1811 von Avogadro und unabhängig von Ampère aufgestellt. Sie mufste zunächst sehr willkürlich und kü ja zu jener Zeit die absolute Zahl N der Moleküle in je 1 Sauerstoff, Wasserdampf, Kohlendioxyd, Knallgas, Luft u. s. w. k war. In der Tat war auch Avogadros Hypothese durch Jahrzehn bis man von ganz anderer Seite, nämlich der um die Mitte des ausgebildeten kinetischen Gashypothese, auf die nämliche

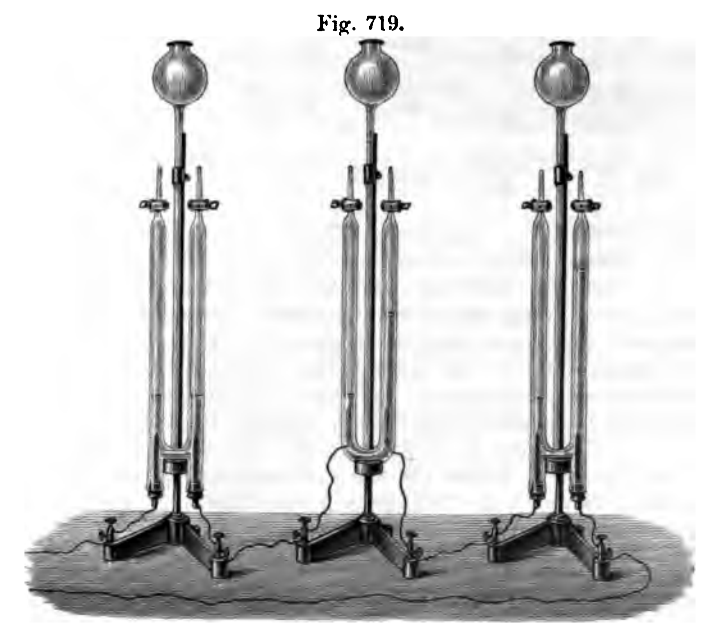
4. Das aeromechanisch-aerothermische Gesetz GAY-LUSSACS der **Gleichheit der Ausdehnungs- und Spannungskoeffizienten für alle Gase** unabhängig von ihrer sonstigen mechanischen und chemischen Verschiedenheit (§ 74).

5. Das chemische Gesetz der **konstanten und kleinzahligen Volumverhältnisse** (ebenfalls von GAY-LUSSAC, 1806 bis 1808).

Von diesem Gesetz gaben ein erstes Beispiel die Volumverhältnisse bei der Zersetzung des Wassers in Wasserstoff und Sauerstoff, bezw. bei der Verbrennung des Knallgases zu Wasser (§ 209, Versuch II, 3, 4): diese Verhältnisse sind durch Fig. 720 symbolisch dargestellt, wobei die gleich grofsen Quadrate z. B. je ein Liter der Gase bei gleichem Volumen und gleicher Temperatur darstellen mögen. An dieser Tatsache fordern also eine Erklärung heraus die folgenden merkwürdig einfachen Gesetzmäfsigkeiten: Erstens, dafs die ohne Rückstand zu verbindenden Gasmengen vor dem Verbinden das kleinzahlige Volumverhältnis 2:1 haben; zweitens, dafs zu dem Volumen 2 + 1 = 3 des Gemenges auch das nach dem Verbinden eingenommene Volumen das kleinzahlige Verhältnis 3:2 aufweist. — Hierzu kommt aber drittens, dafs die durch Fig. 716 dargestellte Analyse, bezw. Synthese des Wassers selbst wieder ein mittleres Glied darstellt zwischen den analogen Vorgängen mit Salzsäure und Ammoniak nach folgenden

Versuchen: Die drei elektrolytischen Doppelröhren (nach HOFMANN) sind gefüllt mit Salzsäure, angesäuertem Wasser und Ammoniak.

Fig. 719.

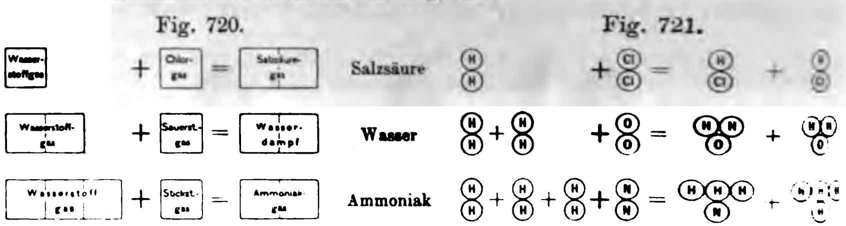


Werden sie dann a) einzeln in je einem Stromkreis von hinreichender Stärke und „Spannung" geschaltet, so scheiden sich aus je einer der Flüssigkeiten die Gase in den Verhältnissen **1:1**, bezw. **2:1**, bezw. **3:1**

aus. Werden sie aber b) **gleichzeitig** („hintereinander“, Fig. 719, **a. v. S.**) geschaltet, so kommt zu dieser Gesetzmäfsigkeit noch die **weitere,** dafs binnen gleichen Zeiten aus allen drei Flüssigkeiten **gleiche** Mengen Wasserstoff abgesondert werden, so dafs sich also **die anderen** Gase im Volumverhältnisse $1 : {}^1/_2 : {}^1/_3$ ausscheiden.

Auf Grund dieser volumetrischen Tatsache läge es nun freilich näher, nur für **Wasserstoff** und Chlor gleiche Molekülzahlen anzunehmen, als auch für Sauerstoff **und Stickstoff** mit ihren weniger einfachen Volumverhältnissen. Wird gleichwohl **Avogadros** Hypothese für alle drei (wie für die übrigen Gase) angenommen, so ver**langt sie** weiter, dafs wir uns nicht nur die Moleküle der zusammen**gesetzten** Gase aus mehr als einem Atom bestehend denken, sondern auch **je ein Molekül der einfachen Gase Wasserstoff, Chlor, Sauerstoff, Stickstoff schon aus je zwei Atomen bestehend.** (Nur bei wenigen Stoffen, Queck**silber, Zink**, Cadmium, ferner Argon und Helium, sind Molekül und Atom iden**tisch, d. h.** das Molekül besteht nicht aus mehreren Atomen, sondern in einem **Atom: bei** diesen Stoffen weist nämlich nichts auf eine Volumsverminderung beim **Verbinden** hin. — Übrigens scheinen auch bei den meisten mehratomigen Metallen **die Moleküle** bei hinreichend hohen Temperaturen in die einzelnen Atome zer**spalten zu** werden.) So treten dann an Stelle der noch die Tatsachen selbst dar**stellenden** Symbole Fig. 720 die folgenden Bilder für die Umlagerung der Atome **je eines Mo**leküls zu neuen Molekülen, Fig. 721:

Fig. 720. Fig. 721.



Wenn hier die Atome geradezu als Kügelchen dargestellt sind, die in den Molekülen aneinander kleben, so entspricht diese räumliche Vorstellung aller Wahrscheinlichkeit nach nur sehr teilweise der Wirklichkeit. Vielmehr sprechen bestimme Tatsachen (vergl. namentlich CLAUSIUS' Theorie der Elektrolyse, § 57) dafür, dafs auch die Atome innerhalb eines Moleküls noch ebenso in relativer Bewegung sind, wie die Moleküle ihrerseits in Bezug aufeinander infolge der Wärmebewegung. Auch können, wie schon § 57 erwähnt, die Atome vielleicht nicht voneinander getrennte Körperchen, sondern Wirbelringe (Schwingungsknoten . . .) innerhalb einer vielleicht stetig zusammenhängenden Materie sein. — Weitere Tatsachen, welche für die Atomhypothese als solche und speziell dafür sprechen, dafs auch die Moleküle von Grundstoffen in der Regel noch aus mehr als einem, meist aus zwei Atomen bestehen:

6. Die **allotropen Modifikationen,** in welchen zahlreiche Grundstoffe vorkommen, so Sauerstoff als gewöhnlicher Sauerstoff O_2 und Ozon O_3; der gelblichweifse (krystallinische), giftige Phosphor und der rote („amorphe“), ungiftige Phosphor; Schwefel (§ 218), Kohlenstoff (§ 221).

Die Annahme, dafs z. B. die beiden Arten des Sauerstoffs die Molekularformeln O_2 und O_3 haben, stützt sich auf die Tatsache, dafs beim Übergang des

ozonfreien Sauerstoffs in reines Ozon eine Volumverminderung eintritt, so dafs die gleiche Gewichtsmenge ozonisierten Sauerstoffs zum gewöhnlichen das Volumverhältnis 3 : 2 aufweist.

Nach dem Vorbilde der allotropen Modifikationen liefse sich sogar denken, dafs zunächst auch die Atome des Wasserstoffs schon Zusammensetzungen irgend einer, vielleicht sogar sehr grofsen Zahl von „Uratomen" seien. Schon Prout hat zu Anfang des XIX. Jahrhunderts eine solche Vermutung ausgesprochen. Wäre diese Zahl für Wasserstoff z. B. 1000, so wäre dann Stickstoff, dessen Atomgewicht das 14fache von dem des Wasserstoffs ist, als aus 14000, Sauerstoff als aus 16000 solchen Uratomen bestehend zu denken — kurz, sämtliche Grundstoffe wären eigentlich nur allotrope Modifikationen jenes einen Urstoffes. (Es wäre dann auch Hoffnung, auch die heutigen „Grundstoffe" künftig ineinander überzuführen, also z. B. doch auch „Gold zu machen". — Über neueste Ausgestaltungen jener Vermutung durch die Hypothese von den Elektronen vergl. § 154.)

Auch darin sah man einen Wahrscheinlichkeitsgrund für diese Hypothese, dafs die Atomgewichte von Stickstoff, Sauerstoff, Natrium u. s. f. ganzzahlige Vielfache vom Atomgewicht des Wasserstoffs zu sein schienen. Genauere Bestimmungen haben dann freilich gezeigt, dafs Stickstoff nicht 14, sondern 13,94, Sauerstoff nicht 16, sondern 15,88, Natrium nicht 23, sondern 22,88 als Atomgewicht haben: da aber diese Abweichungen doch verhältnismäfsig sehr klein sind, könnte man sie etwa ähnlich auslegen wie die Abweichungen vom idealen Mariotteschen Gesetz, die man aus den Störungen der Gleichförmigkeit der molekularen Bewegung infolge der zwischen den Molekülen auftretenden Anziehungskräfte erklärt.

7. Die **zusammengesetzten Radikale.** In sehr zahlreichen Verbindungen finden sich Atomgruppen, die nachweislich aus verschiedenen Grundstoffen bestehen, z. B. Hydroxyl HO, Ammonium = NH_4 (§ 220), Cyan = CN (§ 216), und die doch bei Synthesen und Substitutionen, zum Teil auch bei Analysen sich annähernd ebenso unveränderlich zeigen wie die Atome von Grundstoffen.

8. **Isomerie** und 9. **Polymerie.** Es gibt Verbindungen, die in ihren Eigenschaften und Reaktionen sich mehr oder weniger verschieden verhalten und doch aus den gleichen Grundstoffen in gleichen Gewichtsverhältnissen bestehen. Je nachdem überdies die Molekulargewichte solcher Verbindungen gleich oder aber verschieden sind, heifsen sie **isomer** bezw. **polymer.**

Isomer sind z. B. die 16 Unterarten des Traubenzuckers, welche alle dieselbe empirische Formel $C_6H_{12}O_6$, aber verschiedene Strukturformeln haben; vergl. § 222.

Polymer sind z. B. die Verbindungen: Äthylen C_2H_4, Propylen C_3H_6, Buthylen C_4H_8, Amylen C_5H_{10} u. s. w.

Diese Tatsachen gleicher prozentualer Zusammensetzung und dennoch verschiedenen chemischen Verhaltens wären nicht zu verstehen, wenn man die an der Verbindung beteiligten Mengen der einzelnen Grundstoffe als stetige, homogene, isotrope Stoffe in gleichartiger Mischung und Durchdringung annähme. Dagegen erklären sich diese Tatsachen ganz ungezwungen, wenn angenommen wird, dafs bei Isomerie gleich viele Atome, bei Polymerie gleiche Vielfache von Atomen derselben Stoffe in verschiedener Aneinanderlagerung vorhanden seien. —

Dafs Avogadros Hypothese (nach 5) dazu nötigt, auch die Moleküle chemisch einfacher Stoffe noch als aus Atomen zusammengesetzt anzunehmen (wie

oben nach Fig. 721), während ursprünglich die Atomhypothese doch nur dazu ausgedacht worden war, um verständlich zu machen, warum sich aus einem nicht mechanisch gemengten, homogenen Körper noch chemisch verschiedene Körper aussondern lassen, könnte als ein Wahrscheinlichkeitsgrund gegen Avogadros Hypothese angeführt werden. — Es gibt aber tatsächlich auch

10. Unterschiede im Verhalten eines Grundstoffes *in statu nascendi* (d. h. während der Entwickelung aus seinen Verbindungen) und demselben Stoffe sozusagen im fertigen, abgeschlossenen Zustande: dort suchte das einzelne Atom noch einen oder einige Genossen, hier hat es diese in einem oder mehreren gleichartigen oder ungleichartigen Atomen gefunden.

Sauerstoff und Wasserstoff z. B. können, zu Knallgas gemengt, beliebig lange unverbunden (oder doch ohne B[illegible]her Mengen von Wasser) erhalten bleiben; erst durch beträchtlich[illegible] Temperatur wird die Verbindung eingeleitet. Wenn dagegen z. B. [illegible]stitution $CuO + H_2SO_4 = CuSO_4 + H_2O$ (§ 207, Versuch V, 10 — [illegible]i vielen anderen Reaktionen) einerseits das O des Kupferoxyds, [illegible] H_2 der Schwefelsäure ausgetrieben werden, so treten sie nicht zu[illegible]ngt, sondern sogleich zu Wasser verbunden auf. —

Auch ein sehr allgeme[illegible]ewinn erwächst aus der Annahme der mehratomigen Moleküle [illegible]n: daſs nämlich alle chemischen Vorgänge in einem **Austausch** [illegible] bestehen; d. h. also nicht nur diejenigen Vorgänge, welche sich sc[illegible]h als Substitutionen darstellen, sondern auch die Analysen und [illegible] sind im Grunde **Substitutionen**. Beispiele hierfür in Fig. 721, ferner alle Formeln im § 211.

Während mehrere der vorstehenden theoretischen Grundgesetze sich auf den gasförmigen Zustand beziehen, gilt

11. Dulong-Petits Regel für Elemente in festem Zustande: Die auf ein Verbindungsgewicht bezogene spezifische Wärme, ist für alle solche Stoffe **gleich groſs**, nämlich etwa 6 cal., oder: **Das Produkt aus Atomwärme und Atomgewicht ist konstant.**

Diese Regel gilt nicht ausnahmslos; sie wurde anfänglich vorwiegend für Metalle ausgesprochen, gilt aber für alle festen Elemente, deren Verbindungsgewicht nicht kleiner als 30 ist. Elemente unterhalb dieser Grenze haben kleinere Atomwärmen.

§ 210. Wertigkeit (Valenz) und Verwandtschaft (Affinität).

Man nennt Chlor einwertig, Sauerstoff zweiwertig, Stickstoff dreiwertig im Hinblick auf ihr tatsächliches volumetrisches Verhalten zum Wasserstoff, wie es durch Fig. 720 symbolisch dargestellt ist, und das wir (indem wir die Symbole von rechts gegen links lesen) auch so beschreiben können: Aus je 2 Vol. Salzsäuregas, Wasserdampf, Ammoniakgas lassen sich ausscheiden je 1, 2, 3 Vol. Wasserstoff (und je 1 Vol. Chlor, Sauerstoff, Stickstoff). — Diesen Stoffen schlieſst sich der Kohlenstoff als vierwertig an, indem aus je 2 Vol. leichtem Kohlenwasserstoffgas (Methan) 4 Vol. Wasserstoff ausscheiden (wobei dann allerdings der übrig bleibende Kohlenstoff nicht ebenfalls als Gas darstellbar ist). — Es stellen insofern die vier Verbindungen

I. Chlorwasserstoff, II. Wasser, III. Ammoniak, IV. Methan

vier Typen dar, welchen sich auch die übrigen Verbindungen (allerdings mit gewissen Ausnahmen, infolge davon z. B. Chlor bald ein-, bald drei-, fünfwertig angenommen werden muſs, worauf hier nicht eingegangen werden kann) haben einreihen lassen. — Unter Heranziehung der Atomhypothese wird definiert:

Ein Stoff ist **ein-**, bezw. **zwei-**, **drei-**, **vierwertig**, wenn ein Atom von ihm entweder mit 1, bezw. 2, 3, 4 Atomen Wasserstoff oder ebenso vielen Atomen eines anderen schon als einwertig erkannten Stoffes (z. B. Chlor) sich zu verbinden oder diese Atome in einer Verbindung zu ersetzen vermag.

Beispiele hierzu im folgenden Paragraphen und im ganzen Abschnitt C. — Für dieses verschiedene Verhalten der Grundstoffe gegeneinander fehlt es noch an einer eigentlichen physikalischen Erklärung. Es ist nur als symbolisch aufzufassen, wenn man sich etwa von einem Kohlenstoffatom nach vier Richtungen (entsprechend den vom Mittelpunkt eines regulären Tetraeders gegen seine vier Ecken gezogenen Geraden) Anziehungskräfte von gröſserer Stärke oder dergleichen ausgehend denkt. — Dagegen ist folgendes wieder eine durchgreifende Erfahrung:

Es verbinden sich im allgemeinen zwei Elemente um so lieber (sie haben gröſsere **chemische Verwandtschaft** oder **Affinität**), je mehr sie in ihren gesamten Eigenschaften einander unähnlich sind (z. B. Sauerstoff und Kalium); sie ersetzen sich aber um so leichter in Verbindungen, je ähnlicher sie einander sind (z. B. Kalium und Natrium).

Die Gröſse der **chemischen Affinität** zweier Stoffe ist übrigens nicht einfach zu messen, und namentlich ist sie nicht zu verwechseln mit der Gröſse der **chemischen Energie**, welche z. B. bei der Verbindung einer gegebenen Gewichtsmenge Kalium mit dem zugehörigen Sauerstoff als Verbrennungswärme erzeugt (genauer: aus der potentiellen chemischen Energie in die aktuelle Wärmeenergie übergeführt) wird. Sagt man z. B., von zwei Säuren sei die eine „stärker", genauer: sie habe „eine gröſsere Verwandtschaft" zum Zink oder zu einem anderen bestimmten Metall, so ist hiermit zunächst gemeint, daſs sich das Zink in der stärkeren Säure geschwinder auflöst als in der schwächeren. Diese chemische Geschwindigkeit aber ist wieder nicht nur von der potentiellen chemischen Energie beider Stoffe in Bezug aufeinander, sondern auch von dem Grade der Konzentration der Säure nach einem nicht einfachen Gesetze („Gesetz der Massenwirkung") abhängig.

§ 211. Chemische Namen, Formeln und Gleichungen.

1. Wiewohl eine Anzahl von Stoffen, mit welchen sich der Chemiker wissenschaftlich beschäftigt, auch dem gewöhnlichen Leben bekannt ist und in der Verkehrssprache herkömmliche Namen besitzt (Lauge, Essig, Scheidewasser, Kalk, gebrannter Kalk, gelöschter Kalk, Gips, Vitriolöl u. s. w.), so haben sich doch diese Bezeichnungen als für die chemische Wissenschaft nicht völlig brauchbar erwiesen, und es werden in ihr diese Trivialnamen nur nebenher noch manchmal verwendet. — Auch die chemische Terminologie selbst hat mannig-

fache Änderungen erlebt mit fortschreitender Erkenntnis der Tatsachen und mit dem sie begleitenden allmählichen Wandel der chemischen Theorie. Die gegenwärtigen **chemischen Termini** deuten sowohl die in einer Verbindung enthaltenen Grundstoffe mehr oder weniger vollständig an, wie auch die Art ihrer Zusammensetzung und überdies die Hauptklassen der Verbindungen, zu welchen ein bestimmter Stoff gehört. So hatte z. B. der Name „Laugenessenz" nur die basischen Eigenschaften (und die starke Konzentration der Lösung) erkennen lassen; der Name „Ätznatron" schon, dafs es speziell eine Base des Natriums sei; der gegenwärtige Name Natriumhydroxyd aber besagt, dafs in dem Stoffe Natrium, Hydrogenium (Wasserstoff) und Oxygenium (Sauerstoff) enthalten sei. — Der Name Eisensulfid bezeichnet eine Verbindung von Eisen und Schwefel, Eisensulfat das aus der Schwefelsäure hervorgegangene Eisensalz. Näheres über diese Terminologie im ganzen Abschnitt C.

2. Noch kürzer und zugleich quantitativ vollständiger als durch den wissenschaftlichen Terminus wird je ein Stoff bezeichnet durch seine **Molekularformel;** z. B. Natriumhydroxyd = NaHO, Wasser = Wasserstoffoxyd = H_2O (Wasserstoffsuperoxyd = H_2O_2), Schwefeleisen = Eisensulfid = FeS, Eisenvitriol = Eisensulfat = Fe_2SO_4. Hierbei bedeuten die einzelnen Buchstaben nicht nur die Qualität des betrachteten Grundstoffes, sondern je ein Atom; die einem Buchstaben angehängten Indices bedeuten die Anzahl der gleichartigen Atome innerhalb eines Moleküles, die ganze Formel je ein Molekül, ein diesem Molekülzeichen vorgesetzter Koeffizient die Anzahl der Moleküle.

3. Durch die **chemischen Gleichungen** endlich werden chemische Vorgänge bezeichnet, dafs links vom Gleichheitszeichen die Stoffe vor, rechts die nach dem Vorgang zu stehen kommen.

Es bedeutet also z. B.
$2H_2 + O_2 = 2H_2O$ die Synthese von Wasserst. u. Sauerst. zu Wasser (Versuch 4).
$2H_2O = 2H_2 + O_2$ die Analyse des Wassers in Wasserst. u. Sauerst. (Versuch 3).
$Na_2 + 2H_2O = H_2 + 2NaHO$ die Substitution des Natriums für einen Teil des Wasserstoffs im Wasser und „Freiwerden" des Wasserstoffes (Versuch 5).

Äufserlich genommen ist es ein Mittel zur Kontrolle einer chemischen Gleichung, dafs die Summen der Atomzahlen für je einen Stoff vor und hinter dem Gleichheitszeichen dieselben sein müssen; denn dies ist nur ein anderer Ausdruck der Atomhypothese selbst, nach welcher ja während eines chemischen Vorganges weder Atome verloren gehen noch aus nichts hinzukommen können. — Die eigentliche sachliche Frage angesichts jeder chemischen Formel und jeder chemischen Gleichung ist aber die, woher man weifs, dafs gerade so und so viele Atome je eines Grundstoffes in jedem Molekül vorhanden seien und dafs sich gerade so und so viel Moleküle an dem Vorgange beteiligen. In der Tat haben im Verlaufe der Entwickelung der Chemie die Formeln für die nämlichen Stoffe und die Gleichungen für die nämlichen Vorgänge wiederholt sehr verschiedene Gestalt angenommen. So schrieb man lange Zeit Wasser HO, statt wie jetzt H_2O und dergleichen mehr. — Die Entscheidung, welche Formel für einen bestimmten Stoff, bezw. Vorgang die angemessenste sei, stützt sich auf folgende zwei Reihen von tatsächlichen Grundlagen: Erstens die **Verbindungs-**

gewichte (Äquivalenzgewichte), die demselben Stoffe bei den Reaktionen gegen möglichst mannigfaltige andere Stoffe zukommen (z. B. Schwefel 32, Eisen 56, Kupfer 63, § 203, Versuch 1 und 2). Zweitens die **Volumverhältnisse** (§ 204, Versuch 4), wenn die in die Reaktion eintretenden, bezw. aus ihr hervorgehenden Stoffe als Gase gemessen sind (oder wenn auf ihren Gaszustand geschlossen werden kann). — In der Sprache der Molekular- und Atomhypothese führen dann diese Tatsachen zu folgenden Begriffen und Regeln:

A. Als **Molekulargewichte** werden die Normalgewichte der Stoffe gewählt. Als diese Normalgewichte gelten bei allen Stoffen, die als Gase oder Dämpfe bekannt sind, ihre **Gas- oder Dampfdichten**, und zwar am bequemsten ihre bezüglichen Dichten in Bezug auf ein fingiertes Normalgas, dessen Dichte $1/_{32}$ von der des Sauerstoffes ist.

1. Der Grund dieser Wahl ist folgender: Lange Zeit hatte man, da Wasserstoff nicht nur unter allen Gasen die kleinste Dichte (oder gröfste spezifische Spannung, § 215) hat, sondern auch in Verbindungen den verhältnismäfsig kleinsten Gewichtsanteil darstellt (sogar in solchen, in denen mehrere Atome Wasserstoff auf ein Atom eines anderen Stoffes kommen, z. B. in CH_4) als chemische relative Gewichtseinheit „1 Atom Wasserstoff, H = 1“ benutzt. Auf Grund der Tatsachen, die dafür sprechen, sich eine Molekel Wasserstoff als aus 2 Atomen bestehend zu denken, war dann das Molekulargewicht des Wasserstoffes $H_2 = 2$. Indem ferner auf Grund der volumetrischen Tatsachen, die in Fig. 720 und Fig. 721 symbolisiert sind, 1 Mol. Wasser als aus 2 Atomen Wasserstoff und 1 Atom Sauerstoff bestehend gedacht und deshalb durch H_2O bezeichnet wurde, war das Atomgewicht des Sauerstoffs O = 16 zu schreiben. Dies aber nur so lange, als man glaubte, die Dichte des Sauerstoffs sei das genau 16fache von der des Wasserstoffs. Als sich aber herausstellte, dafs das numerische Verhältnis genauer 1,00 : 15,88 = 1,008 : 16,000 sei, empfahl es sich, als grundlegende Zahl die für das Atom Sauerstoff O = 16 zu wählen und somit H = 1,008 zu setzen; denn von vielen Stoffen sind direkte Verbindungen mit Sauerstoff, aber nur von viel weniger Stoffen direkte Verbindungen mit Wasserstoff bekannt. — Da nun überdies auch die kleinste Menge frei vorkommenden Sauerstoffs die der Molekel $O_2 = 32$ ist, so empfiehlt es sich nach Ostwald, als fingiertes Normalgas eines von der Dichte 1, d. i. also von $1/_{32}$ der Dichte des Sauerstoffs allen übrigen Angaben zu Grunde zu legen.

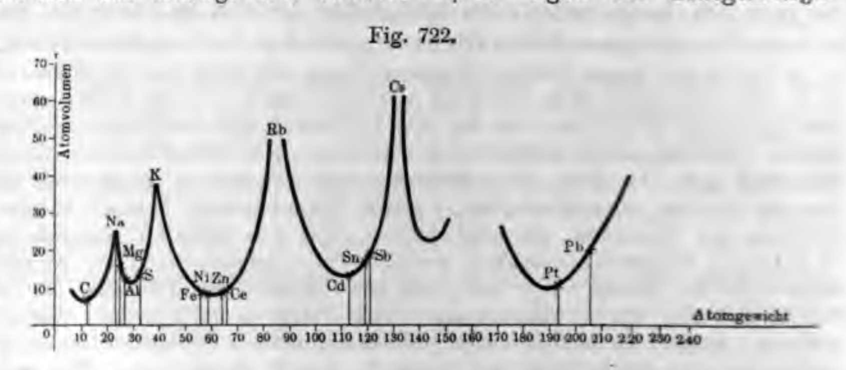
2. Auch von flüssigen und festen Körpern, welche sich nicht vergasen lassen, läfst sich auf das Molekulargewicht aus dem osmotischen Drucke von Lösungen dieser Stoffe schliefsen, weil nach van 't Hoff der osmotische Druck sich ganz analog dem Gasdruck verhält (§ 56).

3. Auch aus Gefrierpunktserniedrigungen und Siedepunktserhöhungen solcher Lösungen (und anderen Erscheinungen der Molekularphysik) wurden ähnliche Schlüsse gezogen.

B. Die **Atomgewichte** ergeben sich meistens erst aus den Molekulargewichten und zwar wieder 1. am unmittelbarsten, wenn sowohl die Stoffe vor und nach dem Verbinden Gase sind (oder wenn wenigstens z. B. die Verbindung und ein Bestandteil Gase sind, wie im Beispiel des Methan CH_4, § 210). — 2. Für feste Grundstoffe mit Atomgewichten über 30 hilft Dulong-Petits Regel über die Atomgewichtszahlen entscheiden.

Natürliches, periodisches System der Elemente. — Überblickt man sämtliche bekannten Grundstoffe nach den direkt wahrnehmbaren Eigenschaften (spezifisches Gewicht, spezifische Wärme, Aggregatzustand bei Normaltemperatur u. s. f.) sowie nach der hypothetischen Eigenschaft des Atomgewichts, so scheinen sie auf den ersten Blick ein regelloses Zusammensein dieser verschiedenen Eigenschaften darzubieten. Ordnet man sie aber nach einer dieser Eigenschaften — u. zw. hat sich als gleichsam unabhängige veränderliche Gröfse am meisten das Atomgewicht bewährt —, so zeigen die übrigen Eigen-

Fig. 722.



schaften innere Zusammengehörigkeit, teils der Ähnlichkeit, teils des Kontrastes, womit sich die ganze Mannigfaltigkeit mehr oder minder deutlich in Familien, Gattungen und Arten gliedert.

„Fast alle Eigenschaften der Elemente stehen in näherem Zusammenhang mit dem Atomgewicht; sie sind Funktionen, u. zw. periodische Funktionen der Gröfse des Atomgewichts“ (Lothar Meyer). Besonders deutlich erweist sich die Dichtigkeit, die die Stoffe im festen Aggregatzustande haben als eine periodische Funktion des Atomgewichts, indem sie mit steigendem Atomgewicht ziemlich regelmäfsig ab- und zunimmt. Am übersichtlichsten läfst sich diese Abhängigkeit darstellen, wenn man nicht die Dichtigkeit selbst, sondern das Atomvolumen, d. i. das Verhältnis des Atomgewichts zur Dichtigkeit, als abhängige Veränderliche einführt, wie dies in Fig. 722 durch die Ordinaten dargestellt ist; z. B. das Atomgewicht des Lithiums Li = 7,01; die Dichtigkeit dieses Metalls ist D = 0,59, also das Atomvolumen $V = \frac{7{,}01}{0{,}59} = 11{,}9$ (d. h. 7,01 g erfüllen 11,9 cm^3); ebenso Kohlenstoff C = 12, $V = 3{,}6$; Natrium Na = 23, $V = 33{,}7$; Kalium 39, $V = 45{,}4$; Eisen Fe = 56, $V = 7{,}2$. Dafs hiermit, wie Mendelejeff, Lothar Meyer u. a. erkannten, ein „natürliches System der Elemente“ gewonnen ist, zeigt sich daraus, dafs mehrfach in den absteigenden Ästen der Kurve metallische (elektropositive), in den aufsteigenden metalloidische (elektronegative) Stoffe zu liegen kommen (ähnliche Beziehungen zur Leicht- und Schwerflüssigkeit u. dergl.).

Mendelejeff hat aus der Stellung der Lücken im periodischen System sogar einzelne später entdeckte Elemente (Gallium, Scandium . . .) ihren Eigenschaften nach vorauszusagen vermocht!

Elemente und ihre internationalen Atomgewichte 1903.

ne (und ·tigkeit) lementes	Zeichen	Atomgewicht bezogen auf O = 16	H = 1	Name des Elementes	Zeichen	Atomgewicht bezogen auf O = 16	H = 1
nium . . .	Al	27.1	26,9	Nickel	Ni	58.7	58,3
on	Sb	120.2	119,3	Niobium	Nb	94	93,3
. . . . .	A	39.9	39,6	Osmium	Os	191	189,6
. . . . .	As	75.0	74,4	Palladium	Pd	106.5	105,7
n . . .	Ba	137.4	136,4	**Phosphor** (III) [V]	P	31.0	30,77
ium . . .	Be	9.1	9,03	Platin	Pt	194.8	193,3
. . . . .	Pb	206.9	205,35	Praseodym . . .	Pr	140.5	139,4
. . . . .	B	11	10,9	**Quecksilber** (I) .	Hg	200.0	198,5
. . . . .	Br	79.96	79,36	Radium	Ra	225	223,3
um	Cd	112.4	111,6	Rhodium	Rh	103.0	102,2
n	Cs	133	132	Rubidium	Rb	85.4	84,8
m (II) . .	Ca	40.1 ≠ 40	39,8	Ruthenium . . .	Ru	101.7	100,9
n	Ce	140	139	Samarium	Sa	150	148,9
(I)	Cl	35.45 ≠ 35.5	35,18	**Sauerstoff** (II) .	O	16.00	15,88
. . . . . .	Cr	52.1	51,7	Scandium	Sc	44.1	43,8
(II) [III] .	Fe	55.9 ≠ 56	55,5	**Schwefel**	S	32.06 ≠ 32	31,83
n	Er	166	164,8	Selen	Se	79.2	78,6
. . . . .	F	19	18,9	Silber	Ag	107.93	107,12
nium . . .	Gd	156	155	Silicium	Si	28.4	28,2
m	Ga	70	69,5	**Stickstoff** (III) .	N	14.04 ≠ 14	13,93
nium . .	Ge	72.5	71,9	Strontium	Sr	87.6	86,94
. . . . . .	Au	197.2	195,7	Tantal	Ta	183	181,6
n	He	4	4	Tellur	Te	127.6	126,6
n	In	114	113,1	Terbium	Tb	160	158,8
m	Ir	193.0	191,5	Thallium	Tl	204.1	202,6
. . . . . .	J	126.85	125,90	Thorium	Th	232.5	230,8
m (I) . . .	K	39.15 ≠ 39	38,86	Thulium . . .	Tu	171	169,7
t	Co	59.0	58,56	Titan	Ti	48.1	47,7
nstoff (IV)	C	12.00	11,91	Uran	U	238.5	236,7
on	Kr	81.8	81,2	Vanadin	V	51.2	50,8
r	Cu	63.6	63,1	**Wasserstoff** (I) .	H	1.008	1,000
an	La	138.9	137,9	Wismut	Bi	208.5	206,9
m	Li	7.03	6,98	Wolfram	W	184.0	182,6
sium . . .	Mg	24.36	24,18	Xenon	X	128	127
n	Mn	55.0	54,6	Ytterbium	Yb	173.0	171,7
dän . . .	Mo	96.0	95,3	Yttrium	Y	89.0	88,3
m (I) . .	Na	23.05 ≠ 23	22,88	Zink	Zn	65.4	64,9
m	Nd	143.6	142,5	Zinn	Sn	119.0	118,1
. . . . .	Ne	20	19,9	Zirkonium . . .	Zr	90.6	89,9

Anmerkung: Die 1900 eingesetzte internationale Atomgewichtskommission gte sich Ende 1902 auf obige „internationale Atomgewichte" (die für = 1 werden jetzt als didaktische Atomgewichte bezeichnet). Die vom Anfänger nprägenden Zahlen sind im Druck hervorgehoben; auch die Wertigkeit ist bei gen in römischen Ziffern beigesetzt.

§. 212. Beziehungen zwischen Physik und Chemie.

Die **Chemie** pflegt definiert zu werden als „die Lehre von den **stofflichen** Veränderungen der Körper“, wogegen innerhalb einer rein physikalischen Erscheinung „an einem Körper nicht sein Stoff, sondern nur ein kleinerer oder gröſserer Teil seiner Eigenschaften sich verändern“. Gemeint ist hiermit, daſs, wenn z. B. ein eiserner Schlüssel erwärmt und abgekühlt, magnetisch und unmagnetisch gemacht, mit Licht verschiedener Farben beleuchtet, durch Anschlagen zum Klingen gebracht, wenn er verbogen, zerbrochen wird u. s. w., er bei allen diesen Vorgängen immer noch „derselbe Stoff“, nämlich Eisen, bleibt; wogegen sich bei der Verbindung von Eisen mit Schwefel ein „neuer Stoff“, Schwefeleisen, bildet. Hierbei ist aber festzuhalten, daſs wir auch von den Stoffen nur durch ihre Eigenschaften wissen können. (Vergl. über den Unterschied des Gebrauches der Wörter „Körper“ und „Stoff“ § 16, S. 60.) In der Tat charakterisiert ja auch der Chemiker jeden einzelnen Stoff nur durch die möglichst vollständige Reihe seiner physikalischen Eigenschaften, von diesen namentlich: **Aggregatzustand** bei Normaldruck (76 cm) und Normaltemperatur (0° C, oder „Zimmertemperatur“ zwischen 10° und 20° C); **Schmelz-** und **Siedepunkte** (kritische Temperatur und kritischer Druck vergl. § 77); **spezifisches Gewicht** (bei Gasen relative Dichte gegen das „Normalgas“, § 46, bezw. gegen Wasserstoff oder Luft); **Löslichkeit** in verschiedenen Flüssigkeiten bei verschiedenen Temperaturen; **Farbe, Geschmack, Geruch** (genauer: Verhalten zum normalen Sehorgan bei normaler Beleuchtung, meist im diffusen Tageslicht — namentlich aber auch das spektrale Verhalten, § 115; ebenso: Verhalten zum normalen Geruchs- und Geschmacksorgan u. s. f.); sonstiges optisches, elektrisches, magnetisches Verhalten u. s. f.). — Umgekehrt interessiert es den Physiker bei sehr vielen seiner Untersuchungen, ob der Stoff, mit welchem er es zu tun hat, „chemisch rein“ ist (z. B. bei spezifischen Wärmen, spezifischen Leitungswiderständen für Wärmeströme und elektrische Ströme u. s. f.). — Zwar tragen trotz dieses Ineinandergreifens physikalischer und chemischer Betrachtung auch heute noch z. B. die Arbeiten eines physikalischen Laboratoriums im ganzen ein anderes Gepräge als die eines chemischen (durch dessen beiderseitige vollständige Charakteristik dann erst der tatsächliche „Unterschied zwischen Physik und Chemie“ erschöpfend zu bestimmen wäre); doch hat namentlich in neuester Zeit gegenüber den ausschlieſslich physikalischen, bezw. chemischen Forschungsgegenständen und Methoden immer mehr an Umfang gewonnen das Grenzgebiet **„physikalische Chemie“**. Dieses hat schon innerhalb der mechanischen Eigenschaften engen Anschluſs an die „Mechanik der sogenannten Molekularwirkungen“ (Kap. V, S. 196): namentlich hängt die Krystallform mit der chemischen Zusammensetzung so eng zusammen, daſs Stoffe gleichen chemischen Aufbaues auch dieselbe Krystallstruktur haben (isomorph sind); z. B. die verschiedenen Alaune, welche sich bei gleichem Anteil der Schwefelsäure durch verschiedene Metalle (Kalialaun, Chromalaun ...) unterscheiden; deshalb auch u. a. ein Mutterkrystall aus einem dieser Stoffe in einer Lösung des anderen ungestört weiter krystallisiert. — Ferner zeigen Ausströmungs- und Diffusionsgeschwindigkeiten, innere Reibung einen gesetzmäſsigen Zusammenhang mit der chemischen Zusammensetzung der Gase und tropfbaren Flüssigkeiten, desgl. der osmotische Druck, die Kontraktion mancher Mischungen (z. B. Alkohol und Wasser) u. s. f.

Innerhalb der Wärmelehre hängen die Dampfdichten, Schmelz- und Siedepunkte mit dem Molekulargewicht, die spezifischen Wärmen mit

dem Atomgewicht der Elemente zusammen. Es bilden diese Erscheinungen, sowie namentlich die Verbindungswärmen (und die bei Zersetzungen, namentlich Dissoziationen verbrauchten Wärmemengen) das beinahe schon selbständig gewordene Gebiet der **„Thermochemie"**.

Ferner hängt die Lichtbrechung, Emission, Absorption (vergl. über die Lage der Spektrallinien bei verschiedenen Stoffen, § 115), das optische Drehungsvermögen (§ 129) mit der chemischen Zusammensetzung eng zusammen. Ähnlich **„Elektrochemie"**, §§ 152, 153. — Entsprechend diesem Ineinandergreifen zahlreicher Erscheinungsgebiete der physikalischen und chemischen Seite erfahren auch die Molekular- und Atomtheorieen beider Disziplinen fortgesetzte Weiterbildung durcheinander.

C. Einige Grundstoffe und deren Verbindungen.

Vorbemerkung 1. Um die Mitteilung dessen, was wir von den einzelnen Grundstoffen wissen, einigermaſsen einheitlich zu gestalten, werde von jedem Stoffe, soweit er nicht schon in der Natur rein vorkommt, zuerst eine der bequemsten Laboratoriumsmethoden für eine Darstellung besprochen. Sodann Aufzählung der ihn definierenden und charakterisierenden Eigenschaften (vergl. vorigen Paragraph), wobei zunächst stillschweigend, gewöhnlicher Druck und gewöhnliche Temperatur vorausgesetzt sind, namentlich wenn der Stoff kurzweg als gasförmig, flüssig oder fest bezeichnet wird. Sodann die wichtigsten Arten seines Vorkommens in Gemengen und Verbindungen; unter ihnen namentlich diejenigen, die die übrigen Methoden seiner Darstellung geben. Hierauf seine Reaktionen gegen andere Stoffe und endlich seine Bedeutung im Haushalte der Natur und seine technischen Anwendungen.

Vorbemerkung 2. Als die oberste Einteilung aller Grundstoffe hat sich die in **Metalle** und **Nichtmetalle** bewährt, wiewohl es zwischen beiden keine scharfe Grenze gibt. Wiewohl die Zahl der Metalle viel gröſser ist als die der Nichtmetalle, so sind doch ihre Eigenschaften und ihr Verhalten im ganzen ähnlicher als die der untereinander fast keine durchgehenden gemeinschaftlichen Eigenschaften aufweisenden Nichtmetalle (weshalb auch diese nur durch den negativen Namen zusammengefaſst werden).

a) Einige Metalle.

§ 213. Metalle.

Die Haupteigenschaften, um derentwillen die lange bekannten Stoffe Gold, Silber, Eisen, Kupfer, Blei, ... aber auch die spät entdeckten (weil nur künstlich aus ihren Verbindungen darstellbaren) Kalium, Natrium, Aluminium ... in die eine Klasse der **Metalle** zusammengefaſst wurden, sind 1. das „metallische Aussehen", welche optische Eigenschaft zurückgeht auf Undurchsichtigkeit und starke Reflexion (weshalb umgekehrt bei totaler Reflexion auch eine Grenzfläche von Luft und Wasser silberglänzend erscheint, § 104). 2. Hohe Leitungsfähigkeit für Wärme und Elektrizität. 3. Geschmeidigkeit (daher Eignung zur Bearbeitung durch Hämmern, Walzen ..., bei einem Teile auch durch Schweiſsen, Löten ...). Doch sind einige Metalle überhaupt spröde (z. B. Antimon ...),

andere je nach der Bearbeitung (z. B. glasharter Stahl ...). — Schon eine spezi chemische Gemeinsamkeit der meisten Metalle ist es, dafs sie vorwiegend basische (die Nichtmetalle dagegen meist saure) Oxyde bilden.

Hauptsächlich nach dem spezifischen Gewicht und der Art ihrer chemischen Reaktionen werden unterschieden

Leichtmetalle (relative Dichte gegen Wasser ½ bis 4)	Alkalimetalle: Kalium, Natrium, Lithium... Metalle der alkalischen Erden: Baryum, Strontium, Calcium. Erdmetalle: Aluminium, Thallium ...
Schwermetalle (relative Dichte gegen Wasser 7 bis 22)	Unedle Metalle: Eisen, Kupfer, Blei ... Edelmetalle: Gold, Platin (Silber) ...

Die uralte Bezeichnung „edel" verdanken Gold und Silber zunächst ihrer schönen Farbe, dem starken Glanz, dem „warmen Griff" (infolge der hohen Leitungsfähigkeit nehmen sie von der berührenden Hand schnell Wärme auf und infolge der geringen spezifischen Wärme erhöht sich dabei der Wärmegrad beträchtlich); insbesondere wertvoll machte sie aber ihre „Beständigkeit" in Feuer und feuchter Luft, was wir jetzt als geringe Affinität, namentlich zum Sauerstoff verstehen (ebendeshalb nennt man die ebenfalls chemisch sehr indifferenten Gase Argon und Helium auch „Edelgase", § 220). Gegenwärtig zählt man zu den Edelmetallen Gold, Platin (und einige seltene Metalle Iridium, Palladium u. s. w.); das Silber reihen manche in die „Zinngruppe", das halbedle Quecksilber mit Zink in die „Magnesiumgruppe". — Während die Edelmetalle, aber auch einige dem andere Schwermetalle in der Natur „gediegen", d. h. unverbunden vorkommen, oder sich doch, künstlich aus Verbindungen abgeschieden, mehr oder minder „blank" durch längere Zeit erhalten lassen, haben im Gegenteil die Leichtmetalle und unter ihnen wieder am meisten die Alkalimetalle sehr grofse Affinität zu den Nichtmetallen. Sie bilden das den Nichtmetallen entgegengesetzte Ende der Reihe von Grundstoffen in Bezug auf die Gröfse der zwischen ihnen bestehenden Affinitäten. In dieser Beziehung kann als das „metallischste Metall" das Kalium bezeichnet werden, da es noch lebhaftere Reaktionen als Natrium zeigt (z. B. auf Wasser entzündet es sich sofort und verbrennt unter violetter Flamme, wogegen das Natrium sich erst entzündet, wenn es z. B. auf ein Flöckchen Papier gelegt, am Umherschiefsen auf dem Wasser und hiermit an der Wärmeabgabe gehindert ist).

Legierungen. Solange Metalle technische Verwendung finden, pflegt man verschiedene Metalle zusammenzuschmelzen („Bronzezeitalter" vor dem „Eisenzeitalter" ...), z. B. Gold durch einen Zusatz von Kupfer härter zu machen u. s. w. Häufig hat eine Legierung bedeutend gröfsere Härte als jedes der vereinigten Metalle für sich; desgleichen häufig viel niedrigere Schmelzpunkte (Roses Metallgemisch schmilzt bei 94° C).

Für die theoretische Chemie entsteht die Frage, ob solche Legierungen mechanische Gemenge oder chemische Verbindungen seien. Für die erstere Annahme scheint zu sprechen, dafs die zu vereinigenden Metalle in beliebigen Gewichtsverhältnissen zusammengebracht werden können; für die letztere Annahme spricht, dafs nicht selten die Vereinigung (z. B. von Natrium und Queck-

silber zu Natriumamalgam, § 220) von starker Wärmeentwickelung begleitet ist. Die beiden Tatsachenreihen lassen sich miteinander in Einklang bringen durch die Annahme, dafs dieselben zwei Metalle *A* und *B* nach dem Gesetz der multiplen Proportionen chemische Verbindungen nach verschiedenen ganzzahligen Verhältnissen miteinander eingehen und diese Verbindungen sich dann in beliebigen Verhältnissen mechanisch mischen können.

Die Verarbeitung gediegen vorkommender Metalle, die Gewinnung der Reinmetalle aus Erzen und die Herstellung von Legierungen reichen zum Teil bis in die vorhistorischen Anfänge der Zivilisation zurück. Die ältesten hüttenmännischen Leistungen verstehen wir heute als Abscheidung der Metalle aus ihren Verbindungen mit Sauerstoff, Schwefel u. dergl. — Hochofenprozefs, Bessemer-Verfahren. — Einiges über die neueste Elektrometallurgie § 169.

b) Einige Nichtmetalle.

§ 214. Sauerstoff (Oxygenium, O = 16, Wertigkeit = II).

Versuch: Darstellung aus Kaliumchlorat, einem weifsen Salze, das in einer Retorte erhitzt wird und dabei den ganzen Sauerstoff abgibt.

Der gewöhnliche (nicht ozonisierte) Sauerstoff ist ein farb-, geruch-, geschmackloses Gas, dessen Dichte etwas gröfser ist als die der Luft; man kann ihn daher kurze Zeit in einem nach oben offenen Gefäfse erhalten.

Der Normalsiedepunkt des Sauerstoffs ist — 182° C, seine kritische Temperatur 119° C, der kritische Druck 50,8 Atmosphären.

Sauerstoff geht mit allen Grundstoffen (Fluor ausgenommen) Verbindungen ein; mehr als die Hälfte vom Gewicht der Erdrinde ist Sauerstoff.

Sauerstoff ist das einzige Gas, das die Atmung (§ 225), und das wichtigste (nicht das einzige), das die Verbrennung unterhält.

Methoden der Darstellung: 1. Elektrolyse des Wassers, § 154; und zwar ist die Wasserzersetzung unter Zusatz von Ätzkali (KHO) die zur fabrikmäfsigen Herstellung des Sauerstoffs seit kurzem meist verwendete Methode. — 2. Aus Kaliumchlorat: $2\,KClO_3 = (2\,KCl + 2\,O_3) = 2\,KCl + 3\,O_2$. — 3. Aus Silberoxyd (oder aus rotem Quecksilberoxyd), das man in einer kleinen Retorte erhitzt, wobei der ganze Sauerstoff entweicht und

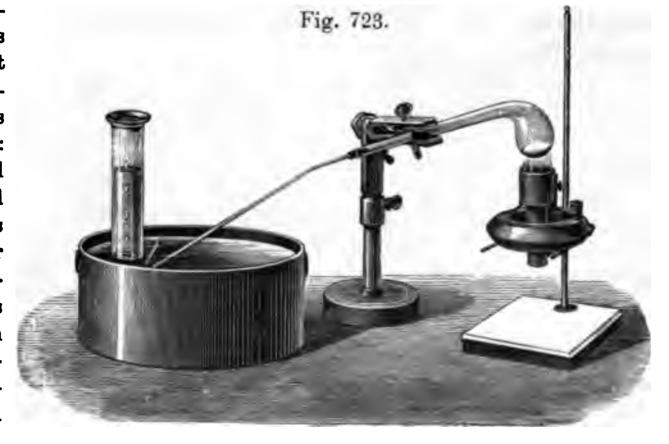


Fig. 723.

metallisches Silber (Quecksilber) sich abscheidet. — 4. Aus **Braunstein** (Mangandioxyd, MnO_2), den man in eisernen Retorten bis zum Rotglühen erhitzt und der dabei einen Teil seines Sauerstoffs abgibt: $3MnO_2 = M_3O_4 + O_2$. — 5. Mittels **Baryumoxyd** (BaO), das bei Erhöhung der Temperatur aus der Luft noch Sauerstoff aufnimmt (BaO_2) und bei noch weiterer Erhöhung ihn wieder abgibt, so dafs man mittels einer endlichen Menge BaO durch wechselndes Steigen- und Sinkenlassen der Temperatur beliebig grofse Mengen O aus der Luft gewinnen kann. — 6. Da aus der „**flüssigen Luft**" (siehe unten) der Stickstoff rascher in die umgebende Luft diffundiert als der Sauerstoff, so ist auch dies eine der technisch verwerteten Methoden zur Gewinnung eines sauerstoffreichen Gemenges. — 7. Auch **Pflanzenteile**, namentlich frische grüne Blätter, geben, unter kohlensäurehaltiges Wasser gebracht und dem Sonnenlichte ausgesetzt, Sauerstoff ab.

Versuche: In reinem Sauerstoff verbrennt Schwefel mit tiefblauer lebhafter Flamme, Phosphor unter blendendem Glanz, Kohle hell leuchtend ohne Flamme, ein glimmender Holzspan entfacht sich zur Flamme, erhitztes Natrium verbrennt mit hellgelber Flamme, eine stählerne Uhrfeder, an deren einem Ende ein Feuerschwamm glimmt, verbrennt unter hellem Funkensprühen.

Wie das Verbrennen so ist auch das Atmen in reinem Sauerstoff ein viel intensiveres, im übrigen aber gleichartig mit dem in **atmosphärischer Luft;** schon dies weist darauf hin, dafs die atmosphärische Luft ein Gemenge aus Sauerstoff und chemisch indifferenten Gasen (Stickstoff, Argon, Helium u. s. f.) sei. Näheres hierüber im Zusammenhange mit der Chemie des Stickstoffs, § 220.

Ozon $= O_3$ (im Gegensatz zu gewöhnlichem Sauerstoff O_2). Das Gas macht sich durch seinen Geruch bemerklich in der Nähe einer elektrischen Funkenstrecke in Luft; ein noch empfindlicheres Reagens ist Jodkaliumkleister, der sich in ozonisierter Luft sogleich blau oder braun färbt.

Dafs Ozon O_3, gewöhnlicher Sauerstoff O_2, vergl. § 209. — Durch starke Abkühlung läfst sich Ozon vom begleitenden gewöhnlichen Sauerstoff befreien und wird als kräftigstes Oxydationsmittel fabrikmäfsig hergestellt und verwendet.

Die Verbindungen des Sauerstoffs mit Grundstoffen heifsen **Oxyde** (über **sauere, indifferente** und **basische** vergl. § 217). **Der Vorgang** des Verbindens heifst **Oxydieren, das Entziehen des Sauerstoffs Desoxydieren** oder Reduzieren. **Reduktionsmittel sind Wasserstoff**, Kohle, Phosphor u. s. f.

Geschichtliches. Von allen einzelnen Entdeckungen auf dem Gebiete der Chemie hat die tiefstgehende Revolution aller theoretischen Vorstellungen von chemischen Vorgängen die Erforschung des (zuerst durch PRIESTLEY dargestellten) Sauerstoffs und seiner Verbindungen durch LAVOISIER bewirkt. — Die ganze an einzelnen Erfahrungen reiche Chemie des XVIII. Jahrhunderts war beherrscht gewesen durch STAHLS (1680 bis 1734) Theorie des „**Phlogiston**" (*φλογιστός*, verbrannt; *ἡ φλόξ*, die Flamme). Zunächst stellen sich Stahls Annahme eines Phlogiston und Lavoisiers Annahme eines Sauerstoffs als zwei verschiedene, ja einander in bestimmter Weise entgegengesetzte Deutungen des nämlichen Kreises von Tatsachen dar, z. B. folgender: Das metallische Eisen geht an der Luft in den erdigen Eisenrost über. Von weifsglühendem Eisen blättert sich unter dem Hammer der zwar nicht erdige, aber auch nicht mehr eigentlich metallische Hammerschlag ab. Das metallische Zink verbrennt zur flockigen „Zinkasche", was auf den ersten

Blick erinnert an das Verbrennen des Holzes zu Holzasche. Diese Vorgänge nun, welche wir heute mit Lavoisier nur mehr als Verbindungen, nämlich der Metalle mit dem Sauerstoff, denken zu müssen überzeugt sind (z. B. Eisenrost = Eisen *plus* Sauerstoff, Zinkasche = Zink *plus* Sauerstoff), hatte Stahl gerade umgekehrt als Zerlegungen (nämlich den Eisenrost als Eisen *minus* Phlogiston, die Zinkasche als Zink *minus* Phlogiston u. s. f.) aufgefafst. Wiewohl wir diese Auffassung heute nicht mehr teilen, hat doch Stahls Auffassung dadurch, dafs sie eine grofse Zahl von Erscheinungen einheitlich zu überschauen gestattete, wie Lavoisiers entgegengesetzte einheitliche Auffassung der Chemie des XVIII. Jahrhunderts im Vergleiche zu allen vorausgegangenen chemischen Einzelkenntnissen zum erstenmal ein eigentlich systematisch-wissenschaftliches Gepräge gegeben; und tatsächlich sahen sich alle grofsen Entdecker jener Zeit, CAVENDISH, PRIESTLEY, SCHEELE . . ., bei ihren Entdeckungen durch die von ihnen angenommene STAHLsche Theorie nichts weniger als gehindert. Dafs wir heute nichtsdestoweniger uns durchaus gegen STAHL und für LAVOISIER entschieden haben, liegt in der bei weitem gröfseren Ungezwungenheit der Annahme, dafs der Sauerstoff nur ein „Stoff" wie alle anderen sei, weil tatsächlich, wenn z. B. eine bestimmte Gewichtsmenge Zink in Zinkasche übergeht, hierbei das Gewicht gröfser wird, also ein Stoff von positivem Gewicht hat aufgenommen werden müssen, während Stahls Auffassung das Phlogiston als einen Stoff von negativem Gewicht anzunehmen nötigen würde, wie wir seinesgleichen sonst nicht kennen (das Mitwirken eines Auftriebes umgebender Luft u. dergl., aus welchem z. B. wir das „Leichterwerden" eines gefüllten Luftballons erklären, läfst sich bei Lavoisiers Versuchen ausschliefsen; in der Tat mufs z. B. bei Versuchen über die Verbrennung von Phosphor in einem verschlossenen Ballon mit Sauerstoff oder atmosphärischer Luft abgewartet werden, bis die erwärmten und daher aufsteigenden Luftströme die Wägung nicht mehr stören). — Es bleibt auch gegenwärtig noch eine lehrreiche Übung, die tatsächlichen Vorgänge statt nach der Theorie von Lavoisier nach der von Stahl zu deuten und zu benennen. Z. B. aus den Gleichungen Eisenrost = Eisen + Sauerstoff und: Eisenrost = Eisen — Phlogiston folgt weiter: „Sauerstoff ist negatives Phlogiston" (oder „Phlogiston ist negativer Sauerstoff". Was könnten die modernsten Vertreter dieser These oder Definition gegen das Argument einwenden: „Sauerstoff läfst sich für sich darstellen, Phlogiston nicht"? — Vergl. die analoge Umdeutbarkeit mancher Wärmevorgänge in „Kältevorgänge"; aber auch, warum wir doch nur von Kalorien, nicht von „Frigorien" sprechen; desgleichen, warum man vom Begriffe des „Luftdruckes" wohl nie mehr zu Galileis Begriff einer „Kraft des Vakuums", § 44, zurückkehren wird). Was wir heute „Metalloxyde" nennen, hatte Stahl „dephlogistische Metalle" genannt. (Inwiefern ist die Bezeichung „Zinkasche" nicht analog zu deuten wie „Holzasche"?) — Das Chlor gewann SCHEELE aus der Salzsäure (HCl), indem er ihr durch den sauerstoffreichen Braunstein (MnO_2) den Wasserstoff entziehen liefs, weshalb man noch lange das Chlor nicht für einen Grundstoff, sondern für „oxydierte Salzsäure" hielt; Scheele selbst aber hatte gemeint, dafs er die „Salzsäure dephlogistiert" habe. — Wir drücken heute Kohle, Kohlenoxyd, Kohlendioxyd aus durch C, CO, CO_2, von welchen drei Stoffen C am meisten, CO weniger, CO_2 gar nicht brennbar ist. Dagegen war nach Stahls Theorie CO eine halb, CO_2 eine ganz dephlogistierte Kohle.

Dafs übrigens Lavoisier trotz seiner glücklichen Theorie über viele chemische Einzelheiten noch anders dachte als wir, bezeugen die Beispiele, dafs er Licht und Wärme zu den chemischen Grundstoffen zählte, die wir heute überhaupt nicht

mehr für Stoffe halten; dafs er auch Kali und Natron unter dem Namen Alkali noch für Grundstoffe hielt, wogegen er von Kalkerde, Tonerde, Baryterde wenigstens vermutete, dafs sie nicht Grundstoffe seien. Von den heute bekannten etwa 50 Metallen kannte Lavoisier nur 17.

§ 215. Wasserstoff (Hydrogenium, H = 1, Wertigkeit = I).

Darstellung aus einer Säure (Schwefelsäure, Salzsäure, nicht Salpetersäure) mittels eines Metalles (Zink, Eisen, nicht Kupfer, *Versuche* § 204).

Wasserstoff ist ein farb-, geruch-, geschmackloses Gas; seine Dichte ist die kleinste unter allen Grundstoffen und Verbindungen.

Der Normalsiedepunkt ist 252° C, die niederste erreichte Temperatur 257° C, der kritische Druck 15 Atmosphären (§ 77). — Ob es gelungen sei, festen Wasserstoff (bei raschem Verdunstenlassen von flüssigem) herzustellen, ist noch nicht ganz sicher; es wurde bei einzelnen Versuchen ein weifser schaumiger Stoff beobachtet, bei anderen ein bläulicher Strahl, der unter klirrendem Geräusch den Steinboden traf.

Wasserstoff kommt in der Natur rein vor (als Exhalation von Vulkanen, als „ewiges Feuer“, glühend in den Protuberanzen der Sonne, absorbiert von Metallen); in Verbindung mit Sauerstoff im Wasser (siehe unten), mit Kohlenstoff in zahlreichen Kohlenwasserstoffen, überhaupt in zahllosen organischen Verbindungen; in allen Säuren (§ 217).

Methoden der Darstellung: I. Aus Wasser 1. durch Elektrolyse (über die Berechtigung des Ausdruckes „Wasserzersetzung“ vergl. § 154); 2. mittels Natrium (§ 204, Versuch 3); 3. indem man Wasserdämpfe über glühendes Eisen (Kupfer) leitet, wobei sich der ganze Sauerstoff mit dem Eisen verbindet und der ganze Wasserstoff frei wird. — II. Aus **Säuren** (siehe oben).

Wasserstoff pflegte anfangs unter den Nichtmetallen genannt zu werden. Später wurde er unter die Metalle gezählt, da er 1. oft durch Metalle in Verbindungen ersetzt wird und 2. sich besonders gern mit Nichtmetallen verbindet. Am zutreffendsten aber ist es, ihm eine Stellung zwischen den Nichtmetallen und Metallen anzuweisen und zwar näher den letzteren, da zwar sein Superoxyd H_2O_2 basische Eigenschaften zeigt, seine häufigste Verbindung Wasser H_2O aber nur ein indifferentes Oxyd ist. Auch hat der feste Wasserstoff nach obigen Versuchen nicht das erwartete metallische Aussehen gezeigt.

Wiederholender Überblick über die vielen auszeichnenden Eigenschaften des **Wassers:** Lösungsfähigkeit für sehr viele Stoffe, sehr hohe spezifische Wärme, Abweichung vom Ausdehnungsgesetz (Dichtigkeitsmaximum bei 4° C), sehr hoher elektrischer Leitungswiderstand; etwa vier Fünftel der Erdoberfläche sind mit Wasser bedeckt. Bedeutung für das organische Leben. Hygienisches über die verschiedenen Arten des Wassers: hartes, weiches, Quell-, Brunnen-, Flufs-, Regenwasser.

Versuche: Bildung von Wasser bei Verbrennen von trockenem Wasserstoff in trockenem Sauerstoff (Luft); Brennen von Sauerstoff in Wasserstoff (Vorsicht!), richtiger Verbinden von Wasserstoff und Sauerstoff unter Feuererscheinung zu Wasser. — Reduktion von Kupferoxyd durch Wasserstoff; $2\,CuO + 2\,H_2 = Cu_2 + 2\,H_2O$.

§ 216. Chlor (Cl = 35,5, Wertigkeit = I). — Die Halogene.

Der bekannteste von den Stoffen, welche Chlor enthalten, ist das **Kochsalz.** Aus dem Kochsalz wurde schon von Geber (um 700 n. Chr.) durch Erwärmen mit Schwefelsäure das **Salzsäuregas** gewonnen. Dieses Gas wird von Wasser gierig absorbiert und gibt wässerige **Salzsäure** (welche aber auch als wohlfeiles Nebenprodukt u. a. bei der Sodaerzeugung entsteht). — Erst aus der Salzsäure gewann dann Scheele das **Chlorgas,** das in der Natur nirgends unverbunden vorkommt, weil es insbesondere zu den Metallen grofse Verwandschaft hat.

Chlor ist im Normalzustande ein Gas von grüngelber Farbe (daher der Name χλωρός, grün) und stechendem Geruch. Seine Dichte ist 35,5 in Bezug auf Wasserstoff, 2,5 in Bezug auf Luft, 2,3 in Bezug auf Sauerstoff. Bei 0° C wird es durch 3,7 at zu einer öligen Flüssigkeit von 1,56 Dichte in Bezug auf Wasser. — Das Chlorgas zerstört organische Stoffe, in geringen Mengen eingeatmet bringt es Entzündung der Schleimhäute, bei gröfseren Mengen Bluthusten hervor. Es dient als Bleich- und Desinfektionsmittel (Chlorkalk).

Diese Vorgänge erklären sich aus der grofsen Verwandtschaft von Cl zu H: Meistens wirkt Chlor in der Weise auf organische Verbindungen, dafs es sich mit einem oder mehreren H-Atomen verbindet, und dafs an deren Stelle ebensoviele Cl-Atome treten. Indem überdies der frei werdende Sauerstoff *in statu nascendi* kräftig oxydierend auf die Verbindungen des Tier- und Pflanzenkörpers wirkt, ist das „Bleichen durch Chlor" eigentlich ein Farbloswerden der Farbstoffe durch Aufnahme von Sauerstoff. Insofern ist die Endwirkung dieselbe wie bei der Rasenbleiche, wo ebenfalls die befeuchtete Leinwand unter Einwirkung des Sonnenlichtes durch den aus dem Wasser an die Farbstoffe übergehenden Sauerstoff entfärbt wird.

Das Chlor gibt, mit gleichem Volumen Wasserstoff gemengt, Chlorknallgas, welches entzündet, aber auch schon im directen Sonnenlicht oder Magnesiumlicht, unter heftiger (sehr gefährlicher!) Explosion in **Chlorwasserstoffgas** übergeht.

Im Chlorgas verbrennt erhitztes Natrium zu **Kochsalz,** Antimonpulver entzündet sich.

Schon im § 214, Ende, wurde der theoretischen Schwierigkeiten gedacht, welche der Auffassung des Chlors als eines Grundstoffes entgegenstanden. — Heute stellt sich uns der Zusammenhang der angeführten Stoffe und ihrer Reaktionen so dar:

1. Darstellung von Salzsäure: $2 NaCl + H_2SO_4 = 2 HCl + Na_2SO_4$.
2. Darstellung von Chlor: $4 HCl + MnO_2 = Cl_2 + MnCl_2 + 2 H_2O$.

Hier ist bei 2. durch das Oxydationsmittel MnO_2 das HCl vom H befreit worden. — Auch wenn man 3. dem NaCl und H_2SO_4 des Vorganges 1. noch MnO_2 zusetzt, erhält man Cl.

Jod, Brom, Fluor. — Dem Kochsalz vielfach ähnlich sind diejenigen Stoffe, welche als **Jodkalium, Jodnatrium, Bromkalium, Bromnatrium** ... im Handel vorkommen (und strenger als Kalium-

jodid, Natriumbromid ... bezeichnet werden). Aus ihnen lassen sich (ganz ähnlich wie bei Versuch 2 das Chlor) das **Jod** als ein veilchenblaues (ἰοδός, veilchenartig), das **Brom** als braunes, heftig stinkendes (βρῶμος, Gestank) Gas ausscheiden. — Jod sublimiert leicht zu festen Schüppchen, Brom kondensiert sich zu einer braunen Flüssigkeit.

Dem Cl, J, Br reiht sich das **Fluor**, Fl, an, welches, weil es fast alle Stoffe heftig angreift, erst seit kurzem aus seinen Verbindungen ausgeschieden und als dem Chlor ähnlich erwiesen wurde.

Die verbreitetste Fluorverbindung ist der Flufsspat = Calciumfluorid, $CaFl_2$. Aus ihm wird durch Übergiefsen mit Schwefelsäure die Flufssäure gewonnen, welche schon seit etwa 250 Jahren zum Glasätzen verwendet wird.

Chlor, Brom, Jod, Fluor heifsen **Salzbildner** oder **Halogene**, weil sie mit Metallen di[illegible]lze geben. Die Verbindungen Chlorwasserstoff HCl, J[illegible]stoff HJ, Bromwasserstoff HBr, Fluorwasserstoff HFl, [illegible] **Haloidsäuren.**

Dem Cl, J, Br, Fl ähnlich [illegible] auch das „zusammengesetzte Radical" **Cyan** ($Cy = CN$, § 209, Pkt. 7[illegible] KCy (Cyankalium).

§ 217. Säuren[illegible]alze. — Basen.

Das Wort „Säure" weist in [illegible] wissenschaftlichen Bedeutung auf eine einzige Eigenschaft zahlreicher S[illegible] nämlich „sauer" zu schmecken, wie Essig, auch noch sehr verdünnte [illegible], Salz-, Salpetersäure u. s. w. Der Begriff dagegen, welcher gegenwärtig mit dem Namen **„Säure"** verbunden wird, enthält jenes Merkmal „sauer" überhaupt nicht mehr, indem z. B. auch die (unbeständige) Verbindung H_4SiO_4 als „Kieselsäure" bezeichnet wird, wiewohl sie, als in der Speichelflüssigkeit unlöslich, überhaupt nicht schmeckt. Die wissenschaftlichen Gründe, welche zu diesem Begriffswandel unter Festhaltung des alten Namens geführt haben, liegen in Erfahrungen folgender Art: Neben der Eigenschaft, sauer zu schmecken, welche die am längsten bekannten Säuren haben, ist ihnen auch die Fähigkeit gemeinsam, mit **Metallen, Metalloxyden** und **Basen** Stoffe von der Art des Eisen-, Kupfer-, Zinkvitriols, des Kali-, Natronsalpeters u. s. w. zu bilden, die ihrerseits wieder wegen auffälliger Ähnlichkeiten mit dem Kochsalz unter die Bezeichnung **„Salze"** zusammengefafst wurden.

Noch zu Lavoisiers Zeit hielt man für einen gemeinschaftlichen und charakteristischen Bestandteil aller dieser Säuren und Salze den Sauerstoff (dieser hatte ja ebendeshalb seine Bezeichnung „Sauer-Stoff" erhalten, welche schon im Hinblick auf die basischen und indifferenten Oxyde keineswegs glücklich ist). Durch die Entdeckung nun, dafs gerade in dem bekanntesten aller Salze, dem Kochsalz $NaCl$, überhaupt gar kein Sauerstoff vorkommt und dafs auch das Salzsäuregas HCl gar keinen Sauerstoff enthält und dennoch mit einem Metall, z. B. Na, zusammen unmittelbar jenes Kochsalz wiedergibt, wurde die Aufmerksamkeit viel mehr auf den Wasserstoff als den allen Säuren gemeinschaftlichen Bestandteil gelenkt (so dafs also viel mehr dieser den Namen „Sauerstoff" verdient hätte, zumal H dem Wasser nicht charakteristischer ist als O; natürlich ist aber an eine so völlige Umnennung kaum mehr zu denken). So gelangte man zu den beiden folgenden miteinander zusammenhängenden Definitionen:

Säuren sind Verbindungen, in welchen der Wasserstoff durch in Metall oder metallähnliches Radikal ersetzbar ist.

Salze sind Verbindungen, welche aus einer Säure hervorgehen, indem ihr Wasserstoff durch ein Metall oder metallähnliches Radikal ersetzt wird.

Je nachdem die Säure eine Sauerstoffsäure (H_2SO_4, HNO_3 . . .) oder ine Haloidsäure (HCl, HFl . . .) ist und je nachdem ihr das Metall entweder ls reines Metall (Na . . .) oder als basisches Oxyd (Na_2O . . .) oder als Base (NaHO . . .) zugesetzt werden kann, ergeben sich sechserlei Vorgänge nach olgenden Mustern (wobei praktisch zu beachten ist, dafs z. B. beim Einführen on Natriummetall in die Salz- oder Schwefelsäure die Verbindung mit explosionsrtiger Heftigkeit vor sich geht):

$H_2SO_4 + Na_2 = Na_2SO_4 + H_2$.	$2HCl + Na_2 = 2NaCl + H_2$.
$H_2SO_4 + Na_2O = Na_2SO_4 + H_2O$.	$2HCl + Na_2O = 2NaCl + H_2O$.
$H_2SO_4 + 2NaHO = Na_2SO_4 + 2H_2O$.	$2HCl + 2NaHO = 2NaCl + 2H_2O$.

Ähnlich statt des einwertigen (zweiatomigen) Na_2 die zweiwertigen Metalle Fe zweiatomig) und Zn (einatomig):

$2H_2SO_4 + Fe_2 = 2FeSO_4 + 2H_2$.	$4HCl + Fe_2 = 2FeCl_2 + 2H_2$.
$H_2SO_4 + Zn = ZnSO_4 + H_2$.	$2HCl + Zn = ZnCl_2 + H_2$.

Man beachte, in welchen Fällen neben dem Salz Wasserstoff und in welchen lagegen Wasser auftritt. — Wieso erweist sich also gegenüber den neuen Begriffsestimmungen von Säure und Salz die alte Definition: **„Ein Salz ist die Verindung einer Säure und einer Base“** als zu eng? — Auch die häufig auseichende Definition: **„Chemische Verbindungen, welche durch „Neutralisieren“ einer Säure mittels eines Metalles, eines basischen Oxydes oder iner Base entstehen, heifsen Salze“** ist nicht allgemein genug. Es sind nämlich war die angeführten Beispiele solche, in welchen das entstehende Salz weder die sauere Reaktion“ (Röten der blauen Lackmustinktur) noch die „basische Reaktion“ (gerötete Lackmustinktur wieder bläuen) zeigt, also „neutral“ ist. Es gibt aber auch **„saure Salze“**; so zeigt z. B. schon $CuSO_4$ saure Reaktion was man sich daraus begreiflich machen kann, dafs CuO eine „schwache“ Base, H_2SO_4 eine „starke“ Säure ist). Insbesondere verbleibt dem Salz etwas von den auren Eigenschaften, wenn nicht der ganze, sondern nur ein Teil des Wasserstoffs durch das Metall ersetzt wird. So ist das Glaubersalz, Na_2SO_4, eutrales Natriumsulfat (ältere Bezeichnung: „einfachschwefelsaures Natron“), lagegen ist $NaHSO_4$, Natriumhydrosulfat, ein saures Salz (ältere Bezeichnung: doppeltschwefelsaures Natron“). — Ähnlich die noch immer verbreitete Bezeichung „doppeltkohlensaures Natron“ (§ 221).

§ 218. Schwefel (Sulfur, S = 32, Wertigkeit = II).

Schwefel ist gelb, durchscheinend, spröde, in Wasser und Weingeist unlöslich, im Schwefelkohlenstoff löslich. Er schmilzt bei 111° C und bildet eine hellbraune Flüssigkeit, die beim stärkeren Erhitzen dunkelrotbraun wird; bei 250° ist er dickflüssig, bei 400° wieder dünnflüssig), bei 450° C siedet er. Werden die Schwefeldämpfe rasch abgekühlt, so sublimieren sie zu Schwefelblumen (Reinigung des Schwefels). —

so dafs also Schwefel in dreierlei **allotropen Modifikatione**
die rhombische Form ist stabil.

Das bei der Verbrennung von Schwefel **in trocker**
Versuch 7) oder in reinem Sauerstoff (§ 214) **sich bi**
Schwefeldioxyd, SO_2 (oft fälschlich „Schwefeldampf"
ihm gehen hervor nach den Gleichungen $SO_2 + O =$
trioxyd, und $SO_3 + H_2O = H_2SO_4$ **englische Schw**

Versuch: Eine grofse Glasflasche oder ein Kolben von etw
Volumen wird mit dem Gemenge von etwa zwei Volumteilen
Volumteil O gefüllt (was sich bei Verwendung zweier gleicher W
der Durchgangsgeschwindigkeit der Gasblasen schätzen läfst).
für sich aufeinander nicht chemisch ein; wird aber in eine
Platin- oder Nickeldrahtnetz locker gestopfter Platinasbest mit
über der Bunsenflamme schwach erhitzt und in das Gasgemen
bilden sich (durch **„katalytische"** Einwirkung des in die Verbin
eingehenden Platins) sogleich dichte Nebel von SO_3, die, wenn
waren, in dem dicht verschlossenen Gefäfs nach einiger Zeit an
Krystalle sich absetzen. Dabei tritt Volumverminderung ein, w
Druckverminderung in einem angesetzten Manometerrohr zeige
dann H_2O in das Gefäfs gebracht, so bildet sich H_2SO_4 (wie s
Lösung von $BaCl_2$, Baryumchlorid, zeigen läfst, das auf H_2
scheidung eines weifsen Niederschlages von $BaSO_4$ reagiert)
„Kontaktverfahren" wird gegenwärtig schon ein gröfserer Tei
technische Betriebe wichtigen H_2SO_4 fabrikmäfsig hergestellt als
Salpetersäureverfahren (§ 220).

Schwefelwasserstoffgas entwickelt sich bei Üb
Schwefeleisen mit Schwefelsäure: $FeS + H_2SO_4 = FeS$

Wird H_2S durch Lösungen von Metallsalzen geleitet, s
„Fällungen" charakteristische Farben an (Zinksulfid weifs, Kadm
gelb, Kupfersulfid schwarz), und es bildet somit dieses Gas ein

§ 219. Phosphor (P = 31, Wertigkeit = III oder V).

Phosphor kommt in zwei allotropen Modifikationen vor: Der weiſse (gelbliche) Phosphor ist durchscheinend, aus Lösungen (z. B. in Schwefelkohlenstoff) krystallisierend. Seine Entzündungstemperatur in reinem Sauerstoff ist 45° C; auch in gewöhnlicher Luft entzündet er sich schon bei der durch schwaches Reiben eintretenden Temperaturerhöhung (er muſs daher unter Wasser im Dunkeln aufbewahrt und als sehr giftig überhaupt mit groſser Vorsicht behandelt werden). — Der rote (schwärzliche) Phosphor ist erst bei viel höherer Temperatur entzündlich und nicht giftig; er zeigt nur Spuren von Krystallisation (daher oft als amorph bezeichnet).

Über das Leuchten des Phosphors im Dunkeln, von dem er seinen Namen hat, das aber nicht eigentliche Phosphoreszenz, sondern Chemilumineszenz ist, vergl. § 121. — Phosphor wird aus dem Calciumphosphat der Tierknochen gewonnen. Mit Sauerstoff gibt er Phosphorpentoxyd, P_2O_5, und dieses mit Wasser Phosphorsäure. — Die 1835 erfundenen Phosphorzündhölzchen (eine zu ihrer Zeit sehr lebhaft begrüſste Neuerung) haben als Köpfchen Gemische des gelben Phosphors mit Braunstein u. dergl. und Klebemittel. — Bei den „schwedischen Zündhölzchen" ist der ungiftige rote Phosphor in den Reibflächen verwendet, wogegen die Köpfchen aus Kaliumchlorat und Schwefelantimon bestehen.

§ 220. Stickstoff (Nitrogenium, N = 14, Wertigkeit = III).

Stickstoff ist ein farb-, geruch- und geschmackloses Gas von etwas kleinerer Dichte als Luft, von der es etwa vier Fünftel ausmacht (siehe unten). Er kann das Atmen (und Verbrennen) nicht unterhalten, ist jedoch nicht giftig, überhaupt chemisch sehr indifferent. — Stickstoff kommt in vielen Verbindungen, namentlich auch in organischen Stoffen, mit Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlenstoff verbunden, vor (über stickstoffhaltige Lebensmittel vergl. § 225).

Von den in § 209 genannten fünf Verbindungen des Stickstoffs mit Sauerstoff gibt N_2O_5 mit Wasser die **Salpetersäure** ($N_2O_5 + H_2O = 2HNO_3$); diese ist eine farblose (gelbliche), sehr sauerstoffreiche Säure und wirkt als Oxydationsmittel. (So wird nach einem älteren Verfahren, als das nach § 218, um H_2SO_4 im groſsen zu erzeugen, S zu SO_2 verbrannt, dieses zusammen mit Wasserdampf und Luft in Bleiklammern geleitet, in denen eine begrenzte Menge HNO_3 abwechselnd O abgibt und die Stickoxyde sich wieder durch O aus der Luft zu HNO_3 ergänzen.) Ebenfalls sehr sauerstoffreich sind die Salze des HNO_3, nämlich **Kalisalpeter** (KNO_3, Verwendung im Schieſspulver) und Natronsalpeter ($NaNO_3$, Chilesalpeter), aus welchem man HNO_3 durch Erwärmen mit Schwefelsäure und Abkühlen der Dämpfe gewinnt: $NaNO_3 + H_2SO_4 = HNaSO_4 + HNO_3$.

Gieſst man HNO_3 über Kupfer- oder Zinnspäne, so steigen dichte Wolken eines gelbbraunen, auf die Atmungswerkzeuge sehr zerstörend einwirkenden Gases auf: es ist Untersalpetersäuregas, NO_2. Es entwickelt sich auch z. B. in geschlossenen Bunsenelementen.

das Gemenge schon bei gewöhnlicher Temperatur jenen
den Geruch, der von der im Handel als „Salmiakgeis
stark basischen Flüssigkeit her bekannt ist. Er
Ammoniakgas.

$$CaO + 2NH_4Cl = CaCl_2 + 2NH_3 + H_2O.$$

Versuch 2: In je einem hohen Probierzylinder
Tropfen Salmiakgeist, bezw. Salzsäure herumgeschwe
auch erwärmt); werden die Gläser mit den Mündung
gebracht, so bilden sich dicke Nebel von **Salmiakkrys**

$$NH_3 + HCl = NH_4Cl.$$

Der Bau der Formel NH_4Cl entspricht dem von $NaCl$. Da
als Salze chemisch ähnliches Verhalten zeigen, so liegt die Vermu
das zusammengesetzte **Radikal** „Ammonium" sich wie das
des Grundstoffes Na verhalten wird. Diese Erwartung bestätigt

Versuch 3: Wir legen auf 1 bis 2 cm^3 Quecksilber erbsengroß
Natrium, die, sobald eine frische Schnittfläche mit dem Quecksilb
Berührung kommt, sich mit ihm unter Feuererscheinung zu Na
verbinden. Diese teigigen oder harten Brocken der Legierung
wenn wir sie mit einer konzentrierten Lösung von NH_4Cl in Wa
zum 10- bis 20fachen ihres Volumens an: der neue Stoff is
amalgam, d. h. an Stelle des Metalles Na im Natriumamalgam
artige Radikal NH_4 getreten (das ausgeschiedene Na verbindet
des Salmiaks zu $NaCl$). — Das Ammoniumamalgam selbst zerfä
wieder unter Ausscheidung von Ammoniak, NH_3, und Wasserstoff
Lösung des Kochsalzes in Wasser und Quecksilber zurückbleibt.

Näheres zur Chemie der **atmosphärischen**
Hauptbestandteile der Luft sind fast überall und imme
teile Stickstoff auf 21 Volumsteile Sauerstoff (also 79:

lenen eines als identisch mit dem schon früher auf der Sonne aufgefundenen und leshalb **Helium** (§ 115) genannten, befunden wurde; andere wurden als **Xenon, Neon, Krypton** bezeichnet.

Die fast nie fehlenden Beimengungen von **Wasserdampf, Kohlendioxyd** und **Ammoniak** sind von gröfster Bedeutung für die Rolle der Luft im organischen Leben und insbesondere auch in vielen hygienischen Rücksichten.

Über den Wassergehalt, der bis zu etwa 4 % Volum vorkommt, vergl. § 194.

Der Gehalt an Kohlendioxyd CO_2 (Kohlensäure) beträgt im Mittel nur etwa 0,03 % des gesamten Luftvolumens. Wegen der Zersetzung von CO_2 unter Einflufs des Sonnenlichtes (§ 225) findet sich bei Tag weniger CO_2 als bei Nacht. In Grofsstädten ist der CO_2-Gehalt gröfser als auf dem Lande; z. B. in London bei Nebelwetter 0,14 %. Steigt er, z. B. im Schulzimmer, auf 0,5 %, so tritt Übelbefinden der in solcher Luft Atmenden ein. (Dies rührt aber hauptsächlich von den Nebenprodukten der Atmung, „Anthropotoxin", her. Mischt man der Luft 0,5 % reine CO_2 bei, so treten noch keine Beschwerden ein.)

Viel geringer sind noch die Mengen von Ammoniak, das sich bei Zersetzung organischer Stoffe bildet; ferner Ozon (auf 1 m³ nur 0,04 mg) und verschiedene Säuren. Die Meinung, dafs Waldluft viel mehr Ozon enthalte als andere, hat sich als irrig erwiesen.

Aufser diesen gasförmigen Bestandteilen sind die zusammenfassend als **Staub** bezeichneten festen Teile mehrfach bedeutsam.

Auch in „sehr guter Luft" auf dem Lande und an der Meeresküste kommen auf 1 cm³ noch mehrere tausend Staubteilchen; in Edinburgh bei trübem Wetter 250000 pro cm³; in einem Zimmer, wo 426000 pro cm³ gezählt worden waren, steigerte sich die Zahl auf $46 \cdot 10^6$, nachdem 4 Gasflammen zwei Stunden lang gebrannt hatten; die Zahl der Staubteilchen, die ein Zigarrettenraucher in einem Zuge aussendet, werden auf $4 \cdot 10^9$ geschätzt. (Die Zählung der Staubteilchen gelang Aitken, indem er die zu untersuchende Luft mit Wasserdampf sättigte und hierdurch jedes Staubteilchen zu einem Kondensationskern machte, worauf dann die Zahl der Tröpfchen unter dem Mikroskop direkt zu ermitteln war.)

Beschaffenheit und Herkunft der einzelnen Staubteilchen ist sehr verschieden: viele sind anorganisch, dem Erdboden der näheren und ferneren Umgebung entstammend, dazu vulkanischer und kosmischer Staub (dieser z. B. nach dem Ausbruch des Krakatau 1883, vielleicht auch nach dem Ausbruch des Mont Pelée 1902 sich im Nebelglühen der Atmosphäre bemerkbar machend). Nicht so grofs ist im allgemeinen die Zahl der organischen Staubteilchen, unter ihnen wieder lebensfähige Keime (Bakterien). Es wurden in Paris in 1 m³ Luft 5400 Bakterien, zu gleicher Zeit auf dem Lande nur 300 gezählt.

§ 221. Kohlenstoff (Carbonium, C = 12, Wertigkeit = IV).

Kohlenstoff kommt in drei allotropen Modifikationen vor: 1. als **Diamant**, 2. als **Graphit** — diese beiden krystallinisch; 3. als amorpher Kohlenstoff oder kurz **Kohle**.

Bekanntlich sind diese drei Stoffe bei gewöhnlicher Temperatur fe bleiben es auch bei sehr hoher Temperatur; erst seit kurzem nimmt m



Fig. 724.

Temperatur des elektrischen Lichtboge 3000 bis 3500° C als Temperatur des Erwe und Verdampfens von Kohlenstoff an. - bei viel geringeren Temperaturen dageg brennen alle drei Formen des Kohlenst Sauerstoff zu Gasen, und zwar bei reic Zutritt von O zu Kohlendioxyd, C spärlichem O zu dem sehr giftigen K oxyd, CO.

Folgender Cyklus von Versuchen lehre die Eigenschaften des CO_2 näher und zeige seinen Zusammenhang mit (ungebranntem, gebranntem, gelöschtem)

Versuch 1: Aus ungebran Kalk (Kalkstein, Marmor, Kreide) w schwach saure **Kohlendioxyd** durc stärkere Säure ausgetrieben (Fig. '

Mit Wasser gibt Kohlendiox **Kohlensäure;** $H_2O + CO_2 = H_2$

Da $CO_2 = H_2CO_3 - H_2O$, so nennt man Kohlendioxyd auch Kohlen anhydrid, häufig aber auch selbst noch Kohlensäure (entsprechend de Sprachgebrauch, nach dem z. B. SO_3 als Schwefelsäure bezeichnet wurde eigentliche Kohlensäure, H_2CO_3, **ist nicht für sich rein darstellbar,** sonder die natürlichen und künstlichen **Säuerlinge** sind nur Lösungen von H_2 überschüssigem Wasser; wollte man dieses Wasser beseitigen, so würd H_2CO_3 wieder zerfallen in CO_2 und H_2O. Somit deuten in den folgenden F die Klammern ( ) einen mehr oder minder vollständigen Zerfall an:

$$CaCO_3 + H_2SO_4 = CaSO_4 + (H_2O + CO_2)$$
$$CaCO_3 + 2HCl = CaCl_2 + (H_2O + CO_2)$$

Ähnlich aus „doppelt kohlensaurem Natron“:

$$NaHCO_3 + HCl = NaCl + H_2O + CO_2.$$

Wasserfreies und kondensiertes CO_2 ist gegenwärtig in Stahlbomben zu haben, indem für dessen Herstellung eine ganze Kohlensäureindustrie ents ist (Verhütung saurer Gährung des Bieres, Löschapparate). Zahlreiche Ve mit flüssiger und fester Kohlensäure (Kohlensäureschnee . . .).

Versuch 2: Aus dem im Kalkofen erhitzten Kalkstein entw CO_2, worauf gebrannter Kalk, CaO, zurückbleibt.

Somit Kalkbrennen: $CaCO_3 = CaO + CO_2$. — Kennt man die Atomge von Ca, C, O, so ergeben sich die Molekulargewichte $CaO = 40 + 16$ $CO_2 = 12 + 2 . 16 = 44$. Es entwickeln sich also aus 100 g ungebrannten 44 g gebrannter Kalk und 56 g Kohlendioxyd.

Das dem basischen Oxyd CaO zu Grunde liegende Metall **Calcium** (in r Zustande weifs, etwas verunreinigt, messinggelb) ist noch immer sehr sch darzustellen; es ist zweiwertig. Der Kalkstein ist also aufzufassen als das Ca salz der Kohlensäure, indem in H_2CO_3 die zwei Atome H_2 ersetzt sind dur

Versuch 3: Einige Stücke gebrannten Kalkes benetzen wir mit Wasser. Er erhitzt sich und zerfällt zu einem trockenen Pulver von „gelöschtem Kalk“, woraus wir schliefsen, dafs er das Wasser chemisch aufgenommen habe. — Bei Zusatz von mehr und mehr destilliertem Wasser erhalten wir Kalkbrei, endlich farbloses „Kalkwasser“; dieses zeigt stark basische Eigenschaften.

Kalklöschen: $CaO + H_2O = CaH_2O_2$ (gelöschter Kalk = Calciumhydroxyd. Zeige auch durch Vergleich von CaH_2O_2 mit $2NaHO = Na_2H_2O_2$, dafs Ca zweiwertig sei; desgl. durch Vergleichung von CaO und Na_2O).

Versuch 4: Leiten wir in klares Kalkwasser wieder Kohlendioxyd, so trübt sich jenes; nach einiger Zeit krystallisieren aus dem Gemische Nadeln eines Stoffes, der wieder dieselbe chemische Zusammensetzung zeigt wie der Kalkstein.

$$CaH_2O_2 + CO_2 = CaCO_3 + H_2O.$$

Haben wir klares Kalkwasser aus 56 g gebranntem Kalk hergestellt, und fangen wir in diesem alles CO_2 auf, welches bei Versuch 2 entweicht, so erhalten wir als Niederschlag wieder 100 g Kalkstein.

§ 222. Aus der Chemie der Kohlenstoffverbindungen.

In den Organismen (den lebenden Tier- und Pflanzenkörpern) wird eine unermefslich grofse Zahl der verschiedensten chemischen Verbindungen erzeugt, und aus diesen werden durch Analysen, Synthesen und Substitutionen täglich noch neue Verbindungen künstlich hergestellt. Z. B. Essigsäure, Buttersäure, Milchsäure, Stearinsäure, Äther, Kaffeïn, Holzfaser, Stärkemehl, Gummi, Zucker, Harze, Eiweifs, Käsestoff . . .

Da nun im Gegensatze zu diesen Verbindungen viele Grundstoffe (z. B. alle gediegen vorkommenden Metalle) und viele Verbindungen (z. B. Ätznatron, Schwefelsäure — abgesehen von den kleinen Mengen, in denen sogar diese als Ausscheidungsprodukte von Muscheln vorkommt), soweit wir ihre Entstehung zurückverfolgen können, nichts mit irgend einem Lebensprozefs zu tun haben, so nahm man einen Gegensatz von **organischen** und **anorganischen Verbindungen** an und unterschied demgemäfs überhaupt als die zwei Hauptteile der Chemie die „anorganische“ und die „organische Chemie“ (welche Unterscheidung zum Teil auch heute noch in einer mehr oder weniger durchgreifenden Verschiedenheit der zur Verwendung kommenden Methoden rein praktischen Rückhalt findet). Die Kluft aber, welche zwischen unorganischen und organischen Verbindungen zu bestehen schien, wurde zuerst durch Wöhler (1829) insofern überbrückt, als er einen Stoff (Harnstoff), der bisher nur als ein Ausscheidungsprodukt des tierischen Organismus bekannt gewesen war, aus einem unorganischen Stoffe (Ammoniumcyanat) herstellte. Seither ist die Synthese von früher als „organisch“ bezeichneten Verbindungen aus Grundstoffen und anorganischen Verbindungen in unzähligen Fällen gelungen.

Da alle Verbindungen, welche man einst für ausschliefslich organisch gehalten hatte, das gemeinsame haben, dafs in ihnen Kohlenstoff eine wesentliche Rolle spielt, so bezeichnet man heute das Gebiet der früheren „organischen Chemie“ als **„Chemie der Kohlenstoffverbindungen“**. In diesen Teil der Chemie gehört also auch der Inhalt des ganzen vorigen Paragraphen, z. B. auch die Darstellung von Kohlendioxyd aus Kalkstein mittels Schwefelsäure u. dergl., also Stoffe und Vorgänge, die man früher ganz der anorganischen Chemie zugewiesen hatte.

Die unermefsliche Mannigfaltigkeit von Verbindungen des Kohlenstoffes **erklärt** sich vor allem schon aus der **Vierwertigkeit** dieses Stoffes, welche das Zustandekommen von Molekülen mit viel mehr Atomen, als sie bei ein-, zwei- und dreiwertigen Stoffen vorkommen [illegible], erwarten lassen. So haben z. B. die Moleküle gewisser Verbindungen, die i[illegible]der Nervensubstanz vorkommen, die empirischen Formeln Cerebrin, $C_{37}H$[illegible]NO [illegible]zithin, $C_{44}H_{90}NSO_9$; Hühnereiweifs ist $C_{204}H_{322}N_{52}O_{66}S_2$ (Molekularg[illegible]t [illegible]eifs des Hämoglobin $C_{680}H_{1098}N_{210}O_{241}S_2$ (16118). — Noch weit fruch[illegible]annigfaltigkeit der Verbindungen aber ist der Umstand, dafs sich [illegible]hrere **Kohlenstoffatome untereinander** bald nur mit je einer [illegible]it zwei und mit drei (im Kohlenstoffmolekül C_2 auch mit allen vier) [illegible]keiten **binden**. Die frei gebliebenen Wertigkeiten vermögen dann selbs[illegible] verschiedene Reihen anderer Atome zu binden; und einzelne frei bleibende [illegible]gkeiten dieser letzteren Atome binden dann wieder einzelne Kohlenatome u. [illegible] Die theoretische Erforschung aller dieser teils wirklich vorkommenden, teil[illegible]vorhinein zu ersinnenden Verbindungen richtet sich überall insbesondere darauf, nicht mit den rein empirischen Molekularformeln, wie die vier oben (und die in § 209 bei Isomerie und Polymerie) angeführten, sich zu begnügen, sondern die Struktur solcher Moleküle auf typische **Gruppierungen kleinerer Atomketten** (ungeschlossenen und geschlossenen) zurückzuführen. So erkannte Kekulé als eine in verschiedenen Verbindungen wiederkehrende Atomgruppe den **Benzolkern**:

```
        |
        C
      /   \\
   —C       C—
    ||      |
   —C       C—
      \   //
        C
        |
```

bei welchem die einfachen, bezw. Doppelstriche die einander bindenden Wertigkeiten darstellen, so dafs in jedem Kohlenstoffatom noch eine Wertigkeit frei bleibt, welche dann durch einwertige Elemente oder durch einwertige Radikale abgesättigt werden können. Dagegen liegen offene Ketten von C-Atomen bei der Fettsäurereihe und bei den Olefinen (Propylen, Buthylen, Äthylen ...) vor. Bei der ersteren sind an den Eckgliedern drei Wertigkeiten, an den übrigen zwei Wertigkeiten frei, welche durch Wasserstoffatome oder andere einwertige Atome oder Radikale abgesättigt sind. Z. B. Butan; empirisch C_4H_{10}; Strukturformel

```
   H  H  H  H
   |  |  |  |
H—C—C—C—C—H.
   |  |  |  |
   H  H  H  H
```

Sie haben allgemein die Formel C_nH_{2n+2}. Bei den Olefinen ist ein Paar Kohlenstoffatome durch zwei Wertigkeiten verbunden. — Beim Acetylen C_2H_2 sind zwei

Kohlenstoffatome mit je drei Wertigkeiten verbunden, mithin noch zwei Wertigkeiten frei, bezw. durch Wasserstoff abgesättigt. Empirisch C_2H_2; Strukturformel H—C≡C—H.

§. 223. Gärungen.

Sehr viele Kohlenstoffverbindungen erleiden scheinbar „von selbst", in Wahrheit aber durch die Einwirkung bestimmter niedriger Lebewesen (Spaltpilze, Sprofspilze) einen Zerfall in minder hochatomige Verbindungen (z. B. Zucker in Alkohol und Kohlendioxyd, Eiweifs in Ammoniak, Schwefelwasserstoff und Kohlendioxyd); je nach diesen Zerfallstoffen unterscheidet man insbesondere die sogenannte **geistige, saure, faulige Gärung.** Alle diese Vorgänge treten nur innerhalb bestimmter Temperaturgrenzen auf (Einkühlen, Dörren von Fleisch).

Geistige Gärung, durch welche aus wässerigen Lösungen von Traubenzucker, zunächst dem Traubensaft, unter Entwickelung von Kohlendioxyd alkoholhaltige Flüssigkeiten werden, stellen in der Hauptsache einen Zerfall des **Traubenzuckers** ($C_6H_{12}O_6$) in Kohlendioxyd (CO_2) und **Alkohol** (C_2H_6O) dar. Gärungserreger sind hier Sprofspilze, welche jederzeit im geprefsten Traubensafte sich schon vorfinden, indem sie aus der Luft auf die Oberfläche der Traube gelangt waren. — Wenn Flüssigkeiten, die **Rohrzucker** ($C_{12}H_{22}O_{11}$) enthalten, ebenfalls in geistige Gärung übergehen, so findet vorher eine Umsetzung des Rohrzuckers in Traubenzucker statt. — Bei Körpern, welche, wie Kartoffeln und Gerste, **Stärkemehl** enthalten (Formel: $C_6H_{10}O_5 . x$, wo $x > 1$, übrigens nicht näher bekannt ist), wird dieses zuerst durch die Diastase (einen Stoff, der beim Keimen der Gerste entsteht und sich auch in der Kartoffel findet) zuerst in Zucker übergeführt, der dann wieder den z. B. im Kartoffelbranntwein und Bier vorkommenden Alkohol liefert. Die bis ins feinste gehenden Unterschiede, z. B. verschiedener Biersorten, sind wesentlich mitbedingt durch die Varietäten der die Gärung einleitenden Sprofspilze.

Saure Gärung. Alkoholhaltige Flüssigkeiten (gewässerter Branntwein, Bier, Wein ...) werden bei längerem Stehen an der Luft sauer. Es hat sich hier der Alkohol durch Aufnahme von Sauerstoff in **Essig** verwandelt, aber auch dies nur unter Mitwirkung von Bakterien, welche meistens schon durch die Luft zugeführt werden.

Bei der Schnellfabrikation träufelt verdünnter Weingeist über Hobelspäne und dergleichen, die mit Essig getränkt sind und der Luft reichlich Zutritt gewähren.

Faulige Gärung (Fäulnis). Beim Zerfall von Muskel-, Käsestoff, Schleim u. dergl. rührt der bekannte Fäulnisgeruch her von Ammoniak, Schwefel- und Phosphorwasserstoff u. s. f. Bedingungen der Fäulnis sind: Aufhören des Lebens in den faulenden Organen, Vorhandensein von Wasser, Zutritt der Luft, eine Temperatur zwischen 0° und 100° C. Dementsprechend Mittel, die Fäulnis zu verhindern (Konserven, Aufbewahrung von Tieren im Alkohol u. s. f.).

§. 224. Wärmeentwickelung und Wärmeverbrauch bei chemischen Vorgängen.

Das **Verbrennen** im technischen Sinne, als Verbindung des in unseren Brennmaterialien (Holz, Steinkohle, Steinöl, Leuchtgas ...) enthaltenen Kohlenstoffs und Wasserstoffs mit dem Sauerstoff der Luft zu CO_2 und H_2O, ist nur ein besonderer Fall von chemischem Verbinden unter Wärmeentwickelung, die bei hohen Graden auch von Lichtentwickelung begleitet ist.

Wenn auch die Verbrennung, z. B. einer bestimmten Menge Kohle im reinen Sauerstoff, höhere Wärmegrade (und hiermit glänzendere Lichterscheinungen) liefert als in der atmosphärischen Luft, so sind doch die erzeugten Wärmemengen genau gleich; durch sie mufs im zw[illegible]iten Fall auch der Stickstoff mit erwärmt werden. — In dem erweit[illegible] Sinn[illegible] Wortes „Verbrennen", nach welchem nur die Wärmemenge, nicht ab[illegible] W[illegible]ad und also auch nicht das Leuchten wesentlich ist, wird dann auch [illegible]gsprozefs der Tiere als eine Verbrennung bezeichnet (vergl. [illegible]

Als **Verbrennungswä**[illegible]offe (Grundstoffe, Verbindungen oder Gemenge) in Bezug [illegible] wird die bei Verbindung von je 1 g entwickelte Anzahl von [illegible]chnet. Folgende Zahlen gelten in Bezug auf Sauerstoff: [illegible] zu CO 2440, C zu CO_2 8140.

Zwei noch nicht verbundene [illegible]en wir uns ebenso als mit potentieller Energie versehen zu denken, wie der noch nicht der Erde bis zur Berührung nahe gekommene Stein in Bezug auf sie **Energie der Lage** besitzt. Wir können uns geradezu das Verbrennen als ein Zusammenfahren der einander chemisch verwandten Atome vorstellen unter dem Bilde des zur Erde stürzenden Steines oder Wasserfalles.

Das **Entzünden** eines brennbaren Stoffes (allgemeiner: das Einleiten der Verbindung zweier Stoffe) ist zu vergleichen der den Stein zum Fallen veranlassenden „Auslösung" (Öffnen einer Schleuse ...). Meistens erfolgt dieses Entzünden durch Erhöhen der Temperatur des einen Körpers an einer eng begrenzten Stelle bis zur **„Entzündungstemperatur"** (für Phosphor schon bei 44°, bei Schwefel 270°). Die durch das Verbrennen der entzündeten Teile erzeugte Wärme erhöht die angrenzenden auf die Entzündungstemperatur u. s. w. — Das „Explodieren" des Knallgases besteht darin, dafs durch die ganze Gasmenge sehr rasch die Verbrennung sich fortpflanzt, wodurch plötzlich sehr grofse Hitze und infolgedessen eine starke Ausdehnung des Knallgases und des sich entwickelnden Wasserdampfes eintritt, dem alsbald eine entsprechend grofse Abkühlung und ein Zusammenstürzen der auseinander getriebenen Luftmassen folgt. Im Schiefspulver, das aus etwa 1 G. T. Kohle, 1 T. Schwefel und 6 T. Kaliumsalpeter besteht, gibt letzterer so viel Sauerstoff ab, dafs ebenfalls eine sehr rasche Verbrennung erfolgt. — Bei manchen Explosivstoffen findet nicht ein Sichverbinden, sondern vielmehr ein jähes Auseinanderfahren der nur lose verbundenen Atome statt, z. B. bei NCl_3 (Chlorstickstoff)..

Flamme. In einer Kerzenflamme lassen sich deutlich folgende Teile unterscheiden (Fig. 725): 1. Die Mitte bildet ein kegelförmiger

dunkler Raum, in dem keine Verbrennung stattfindet; denn von den sich dort ansammelnden Gasen wird die Luft abgehalten. 2. Diesen dunklen Kegel hüllt ein stark leuchtender Teil ein. In diesem Raume

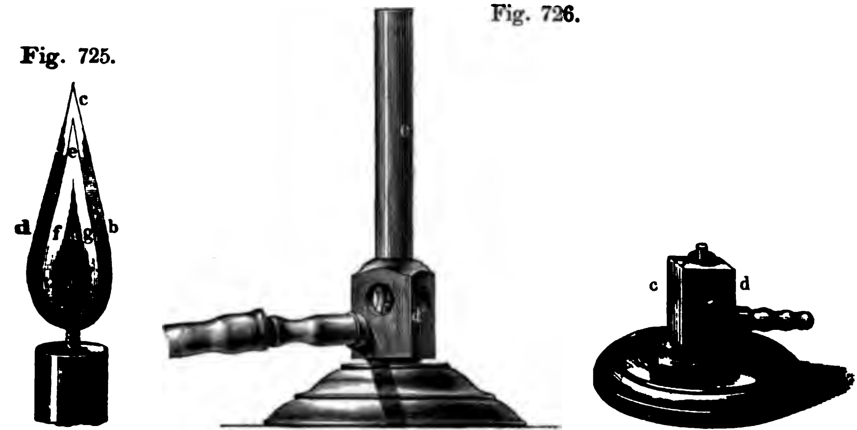


Fig. 725. Fig. 726.

wird nämlich aus dem Kohlenwasserstoff ein Teil des Kohlenstoffes ausgeschieden und durch die hohe Temperatur des verbrennenden Wasserstoffes zum hellen Glühen gebracht. 3. In der äufseren Schicht werden diese glühenden Kohlenteilchen, weil hinreichend viel Luft von aufsen zutreten kann, vollständig verbrannt. Diese Hülle ist nur schwach leuchtend. 4. Zu unterst befindet sich ein blauer Mantel von verbrennendem Kohlenoxydgase. — Bunsenbrenner (Fig. 726); Auerbrenner.

Allgemeiner bezeichnet man als „Flammen" teils die während des Verbrennens selbstleuchtenden Gase oder doch solche heifse (weniger oder nicht selbstleuchtenden) Gasmassen, in denen feste Körperteilchen glühen; ob der eine oder der andere Vorgang stattfindet, verrät sich in der Spektralanalyse; die Kerzenflamme zeigt überwiegend das kontinuierliche Spektrum des glühenden festen Kohlenstoffs.

Die ökonomische Anwendung der Verbrennung (Heiztechnik) hat aufser den rein thermochemischen Gröfsen der Verbrennungswärmen noch zahlreiche Rücksichten zu nehmen auf die jeweilig zweckmäfsigste Zufuhr der Luft, den Abzug der Verbrennungsgase, wobei diese auch noch möglichst viel von ihrer Wärme an die zu heizenden Körper abzugeben haben u. s. f.

§ 225. Chemische Vorgänge bei Atmung und Ernährung.

Die chemischen Vorgänge, welche sich im lebenden tierischen, bezw. pflanzlichen Organismus abspielen, sind, auf die einfachsten Schemata gebracht, **Oxydation** und **Desoxydation**; nämlich:

I. Dem tierischen Körper werden als Nahrungsmittel teils **stickstoffhaltige** Stoffe (Fleisch, Milch, Käse, Eier, Hülsenfrüchte ...)

zugeführt, welche vorwiegend dem Aufbau des Körpers (Muskelfleisch, Blut ...) dienen, teils (ganz oder annähernd) **stickstofffreie** Stoffe (Stärkemehl, Zucker, der Hauptsache nach die Fette ...). Diese neben Sauerstoff vorwiegend aus Kohlenstoff und Wasserstoff bestehenden Stoffe werden ebenfalls in den Geweben aufgespeichert und es findet in diesen durch den in das Blut aufgenommenen Sauerstoff eine Oxydation statt; es wird **Kohlendioxyd** und Wasserdampf (nebst dem unveränderten Stickstoff der eingeatmeten Luft) ausgeatmet. — Die bei dieser Oxydation produzierte Energie tritt teils als Körperwärme, teils als physiologisch-chemische Energie der Muskeln, Nerven u. s. w. auf. Zum überwiegenden Teil also sind es diese stickstofffreien Nahrungsmittel, welchen der Organismus seine „Kraft“ (im Sinne der Arbeits[illegible]t = Energie) verdankt.

Geschichtliches: Noch dem [illegible]rhundert hatte die tierische Wärme als eine weiter nicht erklärliche Le[illegible]einung („*calor innatus*“ = angeborene Wärme) gegolten. Dafs sich [illegible]ten dieser Wärme ganz nach physikalischen und chemischen Ge[illegible]ah schon Rumford ein, indem er zu seinen berühmten Wärmeversu[illegible]onenbohren (§ 81) bemerkte, er hätte das Wasser auch erwärmen [illegible] ihm die durch Verbrennen des Heues entwickelte Wärme direkt [illegible]att das Heu durch die Pferde fressen und durch die Pferdekraft [illegible]reiben zu lassen. — Für das Genie Robert Mayer's war gerade u[illegible]ng zwischen Wärmeproduktion und Chemismus der Ernährun[illegible]te Anlafs zur ganz allgemeinen Aussprache des Gesetzes der Erhaltung der Arbeit. Mayer fand nämlich bei einem Aderlasse, den er als Schiffsarzt unter den Tropen vorzunehmen hatte, dafs dort das venöse Blut röter, d. h. dem arteriellen ähnlicher sei als in kälteren Gegenden. Er erklärte dies richtig daraus, dafs, weil der Leib in warmer Umgebung weniger Wärme abgibt, auch ein geringerer chemischer Umsatz zur Ersetzung dieser Wärme erforderlich sei. In der Tat spüren Europäer in den Tropen ihren Appetit sich vermindern. Umgekehrt bedürfen die Bewohner der kalten Zone zu ihrer Ernährung bedeutender Mengen von Tran u. dergl.

Das Vorstehende bezieht sich zunächst auf die früher so genannten „**Warmblütler**“ (Menschen, Säugetiere, Vögel) jetzt homoiotherme: ihre Bluttemperatur ist von der der Umgebung unabhängig, indem sie durch die jeweilige Anpassung der Nahrungszufuhr eine Art Selbstregulierung erfährt. Dagegen ist die Körpertemperatur meist nur um wenige Grade über der jeweiligen Temperatur der Umgebung bei den poikilothermen Tieren (früher „**Kaltblütler**“ genannt, was aber jedenfalls unpassend ist, weil z. B. Krokodile in den heifsen Zonen eine Bluttemperatur bis 30° C. und darüber aufweisen); bei diesen mischen sich venöses und arterielles Blut im Herzen, was bei homoiothermen nicht der Fall ist.

II. Dem pflanzlichen Körper werden als Nahrungsstoffe teils Salze, Ammoniak ... aus den Bestandteilen des Bodens (einschliefslich Düngers), teils das durch die Spaltöffnungen der Blätter aus der Luft aufgenommene **Kohlendioxyd** zugeführt und assimiliert. Das CO_2 wird unter Einwirkung des Sonnenlichtes in den chlorophyllhaltigen Zellen zerlegt in Kohlenstoff, welcher einen Hauptbeitrag

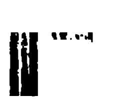
zum Aufbau der Pflanze liefert (Kohlenlager), und in Sauerstoff, welcher von den Blättern ausgeschieden wird.

Nach neueren Entdeckungen gibt es neben diesem Prozefs, welcher in der Aufnahme von CO_2 und Ausscheidung von O der tierischen Atmung entgegengesetzt ist, auch eine dieser ganz analoge und auch mit Wärmeproduktion verbundene „Pflanzenatmung", indem z. B. keimende Samen und manche blühende Pflanzen O aufnehmen und unter beträchtlicher Wärmeentwickelung CO_2 ausscheiden.

III. **Das tierische und pflanzliche Leben ergänzen einander also sowohl in den aufgenommenen und abzugebenden Stoffen, wie in der hierbei produzierten und verbrauchten Energie.**

Durch eine Art Selbststeuerung im gröfsten Mafsstabe ist einer übermäfsigen Ausbreitung des einen „Reiches" auf Kosten des anderen vorgebeugt, nämlich: Denken wir uns, es sei zu irgend einer Zeit durch irgend welche Umstände a) die Menge der Pflanzen beträchtlich gröfser als gegenwärtig, die Menge der Tiere aber dieselbe. Hierdurch sind dann die Existenzbedingungen für die Pflanzen verschlechtert, indem ihre gröfsere Menge sich in dieselbe Menge Nahrungsmittel aus dem Boden, in das Kohlendioxyd und das Sonnenlicht teilen müfste; die Existenzbedingungen der Tiere sind aber verbessert, indem an den vermehrten Pflanzen zunächst die Pflanzenfresser und an diesen wieder die Fleischfresser vermehrte Nahrung und überdies mehr durch die Pflanzen ausgeatmeten Sauerstoff vorfinden. — Wäre dagegen b) die Menge der Tiere beträchtlich gröfser als gegenwärtig, die Menge der Pflanzen aber dieselbe, so würden wieder die Nahrungsmittel für die Tiere im ganzen geringer sein und überdies mehr Kohlendioxyd und weniger Sauerstoff in der Luft vorhanden sein. — Diese schematische Betrachtung ist indes nur auf geschichtliche, nicht auf geologische Zeiträume anwendbar, indem z. B. tatsächlich einst die Menge des Kohlendioxyds viel gröfser als jetzt gewesen sein dürfte, woraus sich dann die durch die Kohlenlager bezeugte Üppigkeit des damaligen Pflanzenwuchses zum Teil erklärt.

Neben dem festen Kapital von Stoffen, vor allem **Kohlenstoff**, aus welchem das immer sich erneuernde Wechselspiel tierischen und pflanzlichen Lebens erhält, empfängt aber die Erde in Form des **Sonnenlichtes** einen immer sich erneuernden Zuschufs von Energie, und zwar zunächst aktueller Energie, welche dann namentlich in den Kohlenlagern als potentielle Energie aufgespeichert bleibt. Wenn nachmals die Erde die aus der Verbrennung dieser Kohle wieder entwickelte aktuelle Energie durch Strahlung in den Weltraum wieder verliert, so war doch die chemisch wirksame Energie der Sonnenstrahlen eine höhere Form der Energie gewesen als die ausgestrahlte Wärme — so dafs auch schon unter diesem weit ausschauenden Gesichtspunkte Sparsamkeit mit den vor allem in Form von Kohle aufgespeicherten Energieschätzen naturwissenschaftlich geboten erscheint.



Anhang.

A. Zusätze aus der angewandten Mathematik.

1. Maſse und Messen.

Jeder mathematischen Gröſsenangabe muſs ein Zählen oder ein Messen vorausgegangen sein. Wir „zählen“ gesonderte (diskrete) Dinge oder Vorgänge; z. B. Pendelschläge, Elemente einer Batterie ... Wir „messen“ stetige (kontinuierliche) Gröſsen; z. B. Raumstrecken, Flächen- und Rauminhalte, Zeitstrecken, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, mechanische Kräfte, Lichtstärken, Stromstärken u. s. w.

Das Ergebnis einer einfachen Zählung gliedert sich einerseits in die **Anzahl** (dargestellt durch eine für sich „unbenannte“ ganze, positive Zahl), andererseits in die Gattung (Art) des Gezählten oder die „**Benennung**“; z. B. 60 Pendelschläge. — Ebenso gliedert sich auch die Angabe jedes Meſsergebnisses in die der **Maßzahl** und die der **Maßeinheit**[1]); z. B. 60 Sekunden.

„Zählen“ und „Messen“ sind daher nicht rein koordinierte Begriffe — schon weil der Begriff der „Maßzahl“ dem der „Zahl“ (namentlich wenn der Zahlbegriff „erweitert“ wird durch den der gebrochenen, irrationalen . . . Zahlen) nicht beigeordnet (koordiniert), sondern untergeordnet ist.

Alles Messen ist teils ein direktes, teils ein indirektes. — **Direkt** messen wir eine Raumstrecke, indem wir an ihr die am Maßstabe verzeichnete Längeneinheit wiederholt auftragen (etwa mittels des Zirkels; oder häufiger: indem wir einen in solcher Weise mittels des Zirkels oder mittels der Teilmaschine ein für allemal hergestellten Maßstab an die zu messende Strecke anlegen).

Wir messen eine Zeitstrecke direkt, indem wir die in sie fallende Anzahl Pendelschläge einer guten Uhr zählen.

---

[1]) In diesem Buche werden (gemäſs dem immer mehr durchgreifenden Gebrauche) die Maßzahlen, soweit sie allgemeine Zahlen (nicht numerische Spezialwerte) sind, durch *Kursiv*-, die Maßeinheiten durch Antiqua-Lettern dargestellt. Z. B. *s* cm, *b* cm², *mg* (lies m Gramm, vergl. S. 62, Anm.), *mg* Dyn.

Massen dagegen messen wir schon **indirekt**, indem wir sie a guten Wage ins Gleichgewicht bringen mit einer bestimmten von Gewichtskörpern.

Die in diesen drei Beispielen angeführten Gröfsen sind gegenwärtigen Physik als **Grundgröfsen** gewählt: **Raumstr Zeitstrecken, Massen**; u. zw. als Einheiten das Centimet Sekunde, das Gramm[1]).

Indirekt messen wir ferner z. B. eine Geschwindigkeit, wir aus den Maßzahlen des bei einer Bewegung zurückgelegten und der zum Zurücklegen gebrauchten Zeit die Maßzahl der Gesch keit durch Division (nach der Formel $c = \frac{s}{t}$, § 4) ableiten. - Temperatursteigerung messen wir indirekt durch die Verlän eines Quecksilberfadens im Thermometer.

Im Gegensatz zu den drei Grundgröfsen nennt man alle physikalischen Gröfsen, insoweit sie durch die drei Grundgröfs haben ausdrücken lassen, **abgeleitete Gröfsen.**

Wie in den Anfangsgründen der Rechenkunst gelehrt wird, kann j Gröfse nur durch Gröfsen **gleicher Art** zahlenmäfsig ausgec bezw. gemessen werden. So wie sich also eine Länge nur durch eine eine Zeit nur durch eine Zeit messen läfst, kann auch eine Geschwind nur durch eine Geschwindigkeit, eine Temperatursteigerun durch eine Temperatursteigerung u. s. w. gemessen werden. Spezi **die Maßeinheit für jede Art von Gröfse,** gleichviel ob sie eine gröfse oder eine abgeleitete Gröfse ist, mufs also **eine bestimmte Gröfse gleicher Art** sein. Z. B. Geschwindigkeitseinheit kann (nicht etwa e sondern) nur eine bestimmte Geschwindigkeit sein; ebenso wie z. B. Fl einheit nur eine bestimmte Fläche sein kann. Diesem Prinzip widerspricht dafs sich z. B. die Fläche eines Rechtecks berechnen läfst aus der Län Grundlinie und die Länge der Höhe, wobei die Maßzahl gleich ist dem der Maßzahlen beider Strecken. Nur indirekt werden durch das Centim Längeneinheit auch die Flächen und Volumina gemessen, indem die beq Flächeneinheit das Quadratcentimeter, die bequemste Volumeinhe Kubikcentimeter ist. — Es ist aber zu bemerken, dafs logisch nichts im stände, z. B. als Flächeneinheit einen Streifen von 3 cm Länge und $^1/_3$ cm Br wählen, nur würden dann die Flächeninhaltsformeln komplizierter werden, z. B. die Fläche eines Rechtecks nicht mehr $f = gh\,\mathrm{cm}^2$, sondern $f' = {}^2/_3 gh$ andere Flächeneinheiten hätte. — Hierbei ist der Zusammenhang von Cent Quadratcentimeter, Kubikcentimeter vorbildlich für das aus Zweckmäfsi

[1]) Man pflegt dieses System das Centimeter-Gramm-Sekunden-S (C-G-S-System) zu nennen. — Wir haben in diesem Buche die Reihenfolge der d zeichnungen abgeändert in Centimeter-Sekunden-Gramm (daher C-S-G-System), cm der Geometrie, die sec der Phoronomie, das g der Dynamik angehö weil zwischen diesen drei Wissenschaften das Verhältnis besteht, dafs die zweite un von der, bezw. den vorausgenannten abhängig, die vorausgenannte aber von den gebauten unabhängig ist.

gründen in der Physik immer mehr durchdringende (und in der Lehre von den physikalischen Dimensionen, Nr. 6, 7, systematisch durchgeführte) Prinzip, die **Einheiten ungleichartiger Gröfsen in möglichst einfache numerische Beziehungen zu einander zu bringen.**

Natürliche und konventionelle Maße (Urmaße, Etalons, Prototypeinheiten). Lesen wir, dafs eine im Altertum gemessene Strecke eine bestimmte Anzahl „Stadien" betragen, ein Körper so und soviel „Pfund" gewogen habe, so sind diese Maßangaben für uns fast unverständlich, da uns jene Maßeinheiten nur sehr unvollkommen bekannt sind. Von Fufs, Elle oder dergleichen können wir uns annähernd Vorstellungen machen, da diese Maße nach der durchschnittlichen Gröfse derjenigen menschlichen Gliedmaßen, nach denen sie benannt sind, in freilich sehr mangelhafter Weise festgesetzt waren.

Es bestand daher seit langem der Wunsch, Urmaße zu gewinnen, das wären solche, deren blofse Definition schon gestatten sollte, die Einheiten immer wieder neu in absolut genauen Kopien herzustellen. Namentlich bei der Einführung des metrischen Maßes und Gewichtes hoffte man im Erdmeridianquadranten eine solche Grundgröfse gewählt zu haben, nach der das Meter und nach diesem wieder das Kilogramm als Masse von 1 dm^3 Kubikdecimeter Wasser definiert und angefertigt wurden. Warum diese Erwartung für Längeneinheit und Masseneinheit sich nicht erfüllt hat, vergleiche Nr. 3 und 5. Ebenso ist die je nach der Umdrehungszeit der Erde definirte Zeiteinheit kein Urmaß, denn diese Umdrehungszeit kann sich im Laufe der Jahrtausende merklich ändern.

Ein wirkliches Urmaß besitzt von den Gröfsen der Mathematik und der Physik nur der Winkel, nämlich im **vollen Winkel.**

Es wird deshalb das Winkelmaß schon im folgenden Paragraphen noch vor den physikalischen Grundgröfsen Raum, Zeit, Masse behandelt, um so die Unabhängigkeit des Winkelmaßes von denen aller übrigen Arten von Gröfsen (und somit auch vom C-S-G-System) schon äufserlich anzudeuten, wogegen z. B. schon die Zeitmessung ganz von der Winkelmessung an den Zifferblättern der Uhren und den Teilkreisen der astronomischen Instrumente abhängig ist.

Zu den wichtigsten und zum Teil schwierigsten Aufgaben der messenden Physik gehören 1. die Herstellung der **Normalkörper** für Längen, Massen, elektrische Leitungswiderstände u. s. f. (Etalons im weitesten Sinne oder Maßprototype), sowie ihre Aufbewahrung unter Abhaltung aller schädlich verändernden Einflüsse; 2. die Einrichtung der **Mefsapparate** aller Art (Nonien, Ablesefernrohre, Uhren u. s. f.); 3. deren Handhabung im eigentlichen **Mefsverfahren**; 4. die Anbringung der nötigen **Korrektionen** (z. B. für die Verlängerung der Maßstäbe bei Erwärmung, für den Auftrieb der Gewichtskörper in Luft . . . und dergleichen mehr).

Trotz aller auf die Mefsvorrichtungen und Mefsverfahren der Physik verwendeten Sorgfalt bleibt zwischen ihnen und den Gröfsenbestimmungen der reinen Mathematik folgender grundsätzlicher Unterschied, ja Gegensatz unvermeidlich: In der Mathematik als solcher wird von vornherein angenommen, dafs die in die Rechnung eingehenden Gröfsen durch streng gleiche Einheiten ausgedrückt seien. Durch welche tatsächlich ausführbare Operationen man sich dieser Gleichheit

vergewissert, bleibt für den Mathematiker als solchen aufser Betracht; ja er k
sich in seinen Operationen sogar dadurch nicht beirren, dafs er weifs, eine vö
Gleichheit zwischen was immer für Gröfsen, z. B. zwei angeblichen Centim
sei praktisch niemals herzustellen, und falls sie zufällig einmal ohne s
Zutun hergestellt wäre, nicht einmal als Gleichheit zu erkennen, d. h. von e
Anh. 40. untermerklichen Verschiedenheit (psychol. Anh. Nr. 40) zu untersche

Der Physiker dagegen sinnt auf die erdenklich vollkommensten praktis
Mittel, sich zu versichern, dafs die auch von ihm zunächst angenomme
Gleichheiten möglichst verwirklicht seien, d. h., dafs die seinen Rechnunge
Grunde gelegten Gröfsen den entsprechenden Gröfsen der „Etalons" unmitte
oder mittelbar mit möglichster Annäherung gleich sind. Er weifs dabei frei
dafs bei jeder Messung „Fehler" unvermeidlich sind; aber durch wiederh
Messung derselben Gröfse und durch Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeitsrechn
weifs er den wahrscheinlichsten Wert der direkt oder indirekt gemess
Gröfse und die wahrscheinliche Gröfse des begangenen Fehlers
ermitteln („Fehlertheorie"; vergl. Nr. 15, 21, Angaben des „wahrscheinli
Fehlers" z. B. Nr. 3, 5; § 21, VI.). —

Im folgenden sollen einige besondere Mefsapparate, namentlich für
drei Grundgröfsen und für die mit ihnen am nächsten zusammenhänge
Gröfsen, z. B. für Krümmung, und ihre Handhabung kurz beschrieben wer
andere, wie die Apparate zu Temperatur-, Strommessungen u. dgl., komm
allenthalben innerhalb des Lehrganges zur Sprache, da sie selbst wichtige
wendungen der physikalischen Gesetze darstellen.

In Nr. 21 dieses Anhanges überblicken wir dann die Grundsätze, nach de
sich der Physiker bei der mathematischen Verarbeitung seiner Messungsergebn
fast immer blofs annähernder Rechnungen bedient.

2. Messung von Winkeln.

Einheit für ebene Winkel ist der Winkelgrad $(1^0) = \frac{1}{360}$ **vollen Winkels**; kleinere Einheiten sind $\frac{1^0}{60} = 1'$; $\frac{1'}{60} = 1''$.

Man bemerke, dafs die Zeichen ′ ″ für Winkelminuten und Winkelsekun
vorbehalten bleiben, und dafs zum Unterschied von ihnen die Zeitminuten
Zeitsekunden durch min, sec bezeichnet werden. (Über die Messung
Winkeln in „Stunden", „Zeitminuten" und „Zeitsekunden" vergl. Astronomie § 1

Wie man sieht, ist also die natürliche Winkeleinheit schon der vo
Winkel selbst; und es bildet ein wichtiges Axiom der Geometrie, dafs a
vollen Winkel gleich sind (— was zusammen mit der Definition des rech
Winkels als vierten Teiles eines vollen das 10. Euklidsche „Axiom" gibt: „
rechten Winkel sind einander gleich"). — Für die weit in das Altertum zurü
reichende Unterteilung des vollen Winkels in 360° Grade waren wohl name
lich zwei Gründe maßgebend: Erstens der astronomische, dafs die Sonne
vollen Umkreis der Ekliptik in annähernd 360 gleichen täglichen „Schritt
(*gradus*) zurücklegt, welche Annäherung auch dem noch jetzt gebräuchlichen ka
männischen Jahre zu 360 Tagen entspricht. Zweitens der arithmetische U
stand, dafs 360 sehr viele ganzzahlige Divisoren hat: nämlich 2, 3, 4, 5, 6, 8
10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180. — Trotzdem ist das



die Zahl 360 gegründete Gradmaß nur ein willkürliches. Deshalb konnte z. B. **zur** Zeit der Einführung des Metermaßes der Vorschlag gemacht werden, den **vollen** Winkel in 400 gleiche Teile zu teilen, den rechten also in 100 etwas kleinere **„Grade"** zu zerlegen; doch hat sich dieses Maß nicht eingebürgert. Mehr Aus**sicht** hat es, den rechten Winkel wie bisher in 90 Grade zu teilen, sich aber dann **der** Dezimalteilung dieses alten Grades zu bedienen, statt der Angabe von **Winkel**minuten und Winkelsekunden. Bis jetzt ist diese Dezimalteilung noch wenig, **namentlich** an den Teilkreisen astronomischer Instrumente gebräuchlich; durch **ihre** allgemeine Einführung würde sich die Einrichtung und der Gebrauch der **logarithmisch**-trigonometrischen Tafeln wesentlich einfacher gestalten.

In der wissenschaftlichen Geometrie und auch in der Mechanik **bedient** man sich meist überhaupt nicht des Gradmaßes, sondern des **absoluten** Winkelmaßes. In diesem ist die **absolute Winkeleinheit** (1 a.WE oder kürzer WE) derjenige Centriwinkel, dessen **zugehöriger Bogen gleich lang ist dem Radius.** Verglichen mit dem Gradmaß ist $1\,\text{a.WE} = \frac{360^0}{2\pi} = 57^0\,17'\,44{,}8''$.

Dafs also 1 a.WE etwas kleiner als 60^0 sei, prägt sich sofort aus der **Überlegung** ein, dafs für den Centriwinkel 60^0 dem Radius nicht der Bogen, son**dern** die Sehne gleich ist. Der genaue Wert ergibt sich aus der Bedingung, dafs **für** den vollen Winkel der zum Radius r cm gehörige Bogen $2\pi r$ cm, also 2π mal **so** lang als der Radius ist. Derjenige Winkel also, dessen Bogen gleich dem **Radius** ist, mufs 2π mal so klein als der volle Winkel von 360^0 sein. **Man präge sich** hiernach folgende zu einander gehörige Angaben ein:

360^0,	180^0,	90^0,	60^0,	$57^0\,17'\,44{,}8''$,	45^0,	30^0,	1^0
$2\pi = 6{,}28..$,	$\pi = 3{,}14..$,	$\frac{\pi}{2} = 1{,}57..$,	$\frac{\pi}{3}$,	1,	$\frac{\pi}{4}$,	$\frac{\pi}{6}$,	$\frac{\pi}{180}$ a.WE.

Allgemein: Sind für einen beliebigen Winkel die Maßzahlen im **Gradmaß** n, im absoluten Winkelmaß φ, also $n^0 = \varphi$ a. WE, so **besteht** die Beziehung $n^0 : 360^0 = \varphi : 2\pi$; somit $\varphi = \frac{2\pi}{360} n$ oder $\varphi = \frac{\pi}{180} n$ und $n = \frac{180}{\pi} \varphi$.

Sowohl das Gradmaß wie das absolute Winkelmaß sind völlig unab**hängig** vom gewählten Längenmaß; Transporteure mit kleinem, grofsem **Radius.** — Die Maßzahlen der Winkel im absoluten Maß gewinnen aber eine **besonders** einfache übersichtliche Deutung, wenn wir sie auf **den „Einheitskreis"**, d. i. den Kreis mit dem Radius 1 cm **beziehen.** Dann tritt nämlich an Stelle obiger vom Centi**meter** unabhängigen Definition die folgende: **1 a. WE ist derjenige Centriwinkel im Einheitskreise, dessen zugehöriger Bogen 1 cm lang ist** (Fig. 1). Einem Winkel **von** φ a. WE entspricht eine Bogenlänge von φ cm. (Ver**gleichung** des absoluten Winkelmaßes mit den gonio**metrischen** Funktionen [s. u. Nr. 18]: Wiewohl nämlich **die** goniometrischen Funktionen gegenwärtig nicht mehr als Strecken, sondern **als** reine Verhältniszahlen definiert zu werden pflegen, empfiehlt es sich doch,

Fig. 1.

vergewissert, bleibt für den **Mathematiker als solchen aufser** Betr... sich in seinen Operationen **sogar dadurch nicht beirren, dafs** ... Gleichheit zwischen **was immer für Gröfsen, z. B. zwei** ar... sei praktisch **niemals herzustellen, und falls sie zu**... Zutun hergestellt wäre, **nicht einmal als Gleichheit zu** ...

Anh. 40. untermerklichen **Verschiedenheit** (psychol. A...

Der Physiker **dagegen sinnt auf die erdenk**... Mittel, sich zu versichern, **dafs die auch** vo... Gleichheiten möglichst **verwirklicht seien**, ... Grunde gelegten Gröfsen den entsprechende... oder mittelbar **mit möglichster Annäher**u... dafs bei jeder Messung **„Fehler"** ur... Messung derselben Gröfse **und durch** 7... weifs er den **wahrscheinlichste**... Gröfse und die **wahrscheinli**... ermitteln („**Fehlertheorie**"; ... Fehlers" z. B. **Nr. 3, 5; § 21.**

Im folgenden sollen ... drei **Grundgröfsen** un... Gröfsen, **z. B. für** Krü... andere, **wie die App**... allenthalben **innerha**... wendungen **der ph**...

In Nr. 21 di... sich **der Physik**... fast immer blo...

...nedenen Kreisen von ... ...mal so lange Bogen gehört ... des Bogens ist,

$$= \frac{l}{r} \text{ und } r = \frac{l}{\varphi}.$$

durch Transporteure und durch ... goniometer, Bussolen u. s. f. vorge... messung doch wieder von einem ... langer Bogen von gleichem Krümm... wirklich ein Kreis von 1 cm Halbmesser ... ...ungen bei weitem zu klein wäre. — Man ... Winkelmessungen möglichst grofser Kr... Halbmesser als Längeneinheit angesehen ... in dieser Längeneinheit gemessenen Kreis... absolutem Maße darstellen. (Von den techn... ...stellung solcher feinster Teilkreise wird es ... deren Preis bis auf 50000 Kronen und dar...

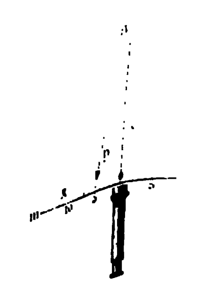
...en Winkel- bezw. Bogenablesung erforderlich ist, ...kreises nicht zu klein sei, so werden z. B. an ... Kompafs, Tangentenbussole) möglichst lange leichte Z... ...glas u. dergl.) angebracht. — Einen beliebig ... gewichtslosen Zeiger bietet ein Lichtstrahl ... sich drehenden Körper fest verbundenen Sp... ...auffallen und reflektiert werden lassen. Anwend... ...her Lichtgeschwindigkeit, § 122, bei sehr ... und magnetischen Mefsapparaten, z. B. ... insbesondere in der von Poggendorf ... [illegible]

Ei...

volle...

vor...

Z...

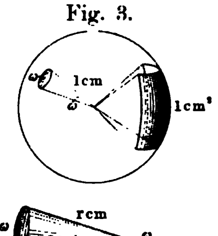


Spiegelablesung: ihr Prinzip ... a) für **objektive**, b) für **subjektive** B... ...htung ausgestalten.

Z... Das vom Spiegel, z. B. ... kommende Lichtbüschel ... ...linse zu einer Lichtmarke ... etwa über die ganze Länge ... ausdehnenden Skala spielt. — Z... ...des Objektivs eines ... wagerechte Skala ... ...von der sich ... geometrisches Bild ... [illegible]

Räumliche Winkel. Sowie der Umfang des Kreises vom Halbmesser 1 cm das Maß 2π des vollen ebenen Winkels, so gibt die Oberfläche der Kugel vom Halbmesser 1 cm das Maß 4π des **vollen räumlichen Winkels** (Fig. 3). — Sowie $l = r\varphi$ die Länge des Bogens im Kreise vom Halbmesser r zum Centriwinkel von φ absoluten Einheiten des ebenen Winkels ist, so ist $f = r^2\omega$ der Flächeninhalt des Teiles einer Kugeloberfläche vom Halbmesser r, der aus der ganzen Oberfläche durch einen räumlichen Winkel von ω absoluten Einheiten des räumlichen Winkels herausgeschnitten wird (Anwendung in LA 48).

Fig. 3.



LA 48.

3. Messung von Raumstrecken.

Einheit der Raumstrecke (allgemeiner: der räumlichen Abstände, meistens kurz: **Längeneinheit** LE) ist im C-S-G-System das **Centimeter** (cm) = $1/_{100}$ **Meter** (m). — Es sind 10 cm = 1 dm, 100 cm = 1 m; 1000 m = 1 km; $1/_{1000}$ m = 1 mm; $1/_{1000}$ mm = 1 μ (1 Mikron); $1/_{1000000}$ mm = $1/_{1000}\,\mu$ = 1 $\mu\mu$ (z. B. gebräuchlich bei Wellenlängen des Lichtes, Tafel V bei S. 363).

Das **Meter** ist definiert als der Abstand zweier Striche an dem internationalen Meterprototyp, d. i. einem Platin-Iridiumstab, den die 1889 in Paris tagende internationale Meterkonferenz auswählte, mit der Bezeichnung 𝔐 versah, und der seither im Keller des internationalen Bureaus (im Park von St. Cloud bei Paris) verwahrt wird.

Diesem seit 1889 geltenden Begriffe des Meters (und ebenso des Kilogramms, Anhang Nr. 5) ist eine 99 Jahre umfassende Entwickelung vorausgegangen. Im Jahre 1790 hatte die französische Nationalversammlung eine Kommission (*Commission des poids et mésures*) eingesetzt, der LAPLACE, LAGRANGE, BORDA, LAVOISIER u. A. angehörten. Diese Kommission wählte 1791 als Längeneinheit den zehnmillionsten Teil des durch die Pariser Sternwarte gehenden Erdmeridianquadranten (erste Definition des „Meter"). Behufs Messung des Quadranten wurde von 1792 bis 1798 der Meridianbogen zwischen Dünkirchen und Montjouy bei Barcelona trigonometrisch vermessen. Als direkt, nämlich mittels eines Toisenmaßstabes gemessene Basis diente der Abstand zweier Punkte, die in eingemauerten Kupferzylindern eingraviert waren. Dieser Abstand betrug 6075,900069 Toisen (die direkt gemessenen Winkel des ersten Dreiecks waren 63° 43′ 34,08″, 75° 39′ 29,81″, 40° 36′ 56,81″; ihre Summe geht über 180° um 0,70″, den durch die Rücksicht auf die Erdkrümmung verlangten „sphärischen Exzefs", hinaus). Der ganze trigonometrisch gemessene Bogen betrug 551 583,6 Toisen (bei einem Meridianbogen von 9° 40′ 24,24″). Hieraus wurde unter der Annahme, dafs die Abplattung der Erde $1/_{334}$ sei, auf eine Länge jenes Meridianquadranten von 5 130 740 Toisen geschlossen und im Jahre 1800 hiernach die Länge des neuen Maßes so festgestellt: 1 Meter = 0,513074 Toise (— 1 Toise war etwa 1 Klafter im damaligen Maße). — Es wurde sodann ein Stab aus Platin von 0,4 cm Dicke, 2,5 cm Breite, an dem der Abstand der kugelig abgerundeten Ecken genau jener

berechneten Länge gleich sein sollte, angefertigt und als **Archivmeter** bezeichnet, weil er in den Pariser Staatsarchiven verwahrt wurde.

Einige Jahrzehnte später machte Bessel darauf aufmerksam, daſs das so definierte und angefertigte Meter keineswegs ein Urmaß (in dem Sinne von Anh. Nr. 1), sondern begrifflich und sachlich abhängig sei von dem individuellen Toisenmaßstabe, der zur Messung jener trigonometrischen Base gedient hatte. Auch beträgt nach Bessels Berechnungen auf Grund eines anderen Wertes der Abplattung der Erde (die man gegenwärtig zu $^1/_{294}$ annimmt) die Länge des Erdmeridians nicht das 10^7fache, sondern das 10000856fache der Länge des Archivmeters (— dieser war also um 0,0856 mm, d. i. um etwa Haaresdicke kürzer geraten, als seiner Definition nach beabsichtigt war).

Nach neuerlichen jahrzehntelangen Verhandlungen und Vorarbeiten wurden dann 1889 30 neue Meterstäbe aus einer Legierung von 90 Proz. Platin mit 10 Proz. Iridium (die sehr hart und sehr vollkommen zu polieren ist) hergestellt.

Fig. 4.



Dem Querschnitt dieser Stäbe wurde die Form von Fig. 4 (natürliche Gröſse) gegeben, da bei dieser überhaupt nur geringe Verbiegungen eintreten, für die dann ab die neutrale Schicht ist (§ 51), die sich bei Verbiegungen weder verlängert noch verkürzt. Die Stäbe wurden annähernd 102 cm lang gemacht und auf der Fläche ab ein der Länge des Archivmeters von 1800 möglichst genau gleicher Abstand als „1 Meter" durch feine Endstriche markiert. Bei nachherigen wiederholten Vergleichungen dieser neuen Meterdistanz zeigte sie sich bei einem der 30 Meterstäbe (M_6) von der des Archivmeters auch bei genauester mikroskopischer Prüfung nicht mehr merklich verschieden. Dieser Stab bekam die Bezeichnung $\mathfrak{M}$ und bildet das neue **internationale Prototyp des Meters.** — Die übrigen Meterstäbe wurden unter die an der Kommission beteiligten Staaten verlost; z. B. Österreich erhielt die Meter M_{15} und M_{19}, welche gegen $\mathfrak{M}$ um 0,0009 mm bezw. 0,0011 mm zu lang befunden wurden. (Aus einer groſsen Zahl von Messungen ergab sich, daſs diese Abweichungen einen wahrscheinlichen Fehler $\pm$ 0002 mm haben, d. h. die wahre Länge der Stäbe beträgt noch um 0,0002 mm mehr oder weniger, mit einer Wahrscheinlichkeit 1 : 1400. Dieser Unterschied wäre auch durch die schärfsten Mikroskope kaum mehr zu beobachten.) — Da die Länge des Meters auch von der Temperatur abhängig ist und nicht alle Thermometer völlig gleiche Temperaturen zeigen (§ 73), so wurden jeder der Meterkopien zwei bestimmte Quecksilberthermometer beigegeben, nach denen die Reduktion auf die Temperatur des schmelzenden Eises zu vollziehen ist.

Es ist festzuhalten, daſs trotz der Unterschiede in den Längen der 30 nationalen Meter von dem einen internationalen Meter nicht etwa nun die einzelnen Staaten etwas verschiedene Längeneinheiten besitzen, sondern für alle gemeinsam ist 1 LE die Länge des eingangs definierten internationalen Meterprototyps; die bekannten Unterschiede der nationalen Meter werden bei feinsten Messungen in Rechnung gebracht. Für die allermeisten Zwecke aber bleiben diese Unterschiede ohnedies ganz auſser Betracht. Für die dem jeweiligen Zwecke angemessene Genauigkeit der in den Handel kommenden Maßstäbe sorgen die behördlichen Eichungskommissionen.

Der Durchführung genauer Längenmessungen dienen mannigfaltige Apparate und Nebenvorrichtungen, z. B. Kathetometer, Fühlhebel, Nonien und Mikrometerschrauben.

Fig. 5 zeigt die Anwendung des **Kathetometers** z. B. zur Ablesung der **itände** beider Säulen in einem Heberbarometer, dem man sich nicht nähern will, **lamit** weder die Aufhängung des Instrumentes **ioch** (durch die vom Beobachter ausstrahlende **Wärme**) die Temperatur gestört werde.

Fig. 5.

Nonius. Wird der Nullpunkt eines **z. B.** in Centimeter und Millimeter ge**teilten** Maßstabes an den Anfangspunkt **einer** gegebenen Strecke gelegt, so ist es **streng** genommen unendlich unwahrschein**lich**, dafs auch der Endpunkt dieser **Strecke** genau zusammenfallen werde mit **einem** Teilstrich des Maßstabes. — Damit **aber** auch noch Zehntelmillimeter abge**lesen** werden können, ist neben dem **Hauptmaßstab** ein Nebenmaßstab **(Nonius, Vernier, Werner)** verschieb**bar.** Auf ihm sind dann 9, bezw. 11mm **in** 10 gleiche Teile geteilt; dann ist **beim** „vortragenden Nonius" 1 Teil $= {}^{9}/_{10}$ mm $= (1 - {}^{1}/_{10})$ mm, **beim** „nachtragenden Nonius" 1 Teil $= {}^{11}/_{10}$ mm $= (1 + {}^{1}/_{10})$ mm.

Fig. 6 veranschaulicht, wie durch Beobachtung (nötigenfalls mittels Lupe) **der** coincidierenden Teilstriche des Haupt- und Nebenmaßstabes eine Strecke (**zwischen** A und B) von z. B. 4,76 cm abgemessen wird.

Ebensolche Nonien werden auch an feineren Kreisteilungen angebracht.

Sehr geringe Unterschiede von Längen lassen sich mittels **Mikrometerschrauben** bestimmen; denn wenn die Höhe eines Schraubenganges (Anh. Nr. 25) sehr klein ist und mit der Schraubenspindel ein Schraubenkopf verbunden

Anh. 25.

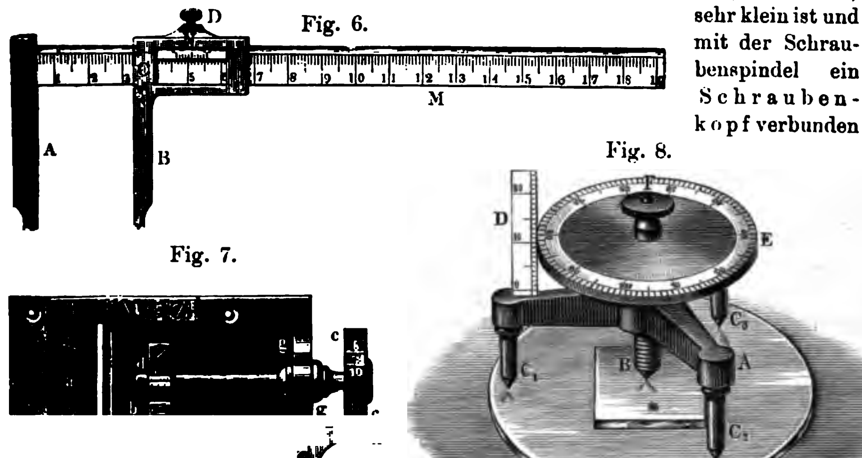


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

ist, an dessen Umfang eine genaue Gradteilung enthält, so lassen si sehr kleine Bruchteile der Höhe des Schraubenganges mittelbar am Sc kopf ablesen. Hierauf beruht z. B. die Messung von Spaltenbreiten a. v. S.); desgleichen das **Sphärometer** (Fig. 8 a. v. S.), mittels dessen Dicke eines Plättchens (unter der Spitze B), teils die Krümmung kugelige (hiernach der Name Sphärometer), z. B. von Hohlspiegeln, Linsen bestimm kann — entsprechend der stereometrischen Aufgabe: Von einer K die Abstände dreier Punkte C_1, C_2, C_3 eines Nebenkreises und die Höhe d kappe gegeben: hieraus den Kugelradius zu bestimmen.

4. Messung von Zeitstrecken.

Einheit der Zeitstrecke (der Zeitdauer, meistens ku einheit **ZE**) ist im C-S-G-System die **Sekunde mittlerer Son** (sec) = $1/_{86400}$ des **mittleren Tages** (Tag mittlerer, bürgerlich — Es sind 60 sec = 1 min, 60 min = 1^h, 24^h = 1^d (Tag, di $1^d = 24 \times 60 \times 60$ sec = **86400 sec.**

Nach § 181 liegt dem Begriffe des mittleren Tages zu Grunde tropischen Jahres, d. i. die zwischen zwei aufeinander folgenden Dur des Mittelpunktes der Sonnenscheibe durch den Frühlingspunkt verfliefs (nach einem für eine möglichst grofse Zahl von solchen Jahren gen Durchschnitte). Da aber die Zahl der Tage dieses tropischen Jahres ke (in erster Annäherung $365^1/_4$ Sonnentage = $366^1/_4$ Sternentage) ist, so g Definition des Tages mittlerer Sonnenzeit auch noch die Rücksicht Sterntag, indem die genaue Zahl x der auf ein tropisches Jahr entfallen dadurch definiert ist, dafs die Zahl der Sterntage $x + 1$ sei. Nach j möglichst viele Jahre genommenen Durchschnitte sind dann 365,24222 Tage = 366,24222 Sterntage. Daraus ergeben sich die Umrechnungszahl

$$1 \text{ mittlerer Tag} = \frac{366{,}24222}{365{,}24222} = 1{,}0027379 \text{ Sterntage} \quad = 86636{,}55 \text{ sec S}$$

$$1 \text{ Sterntag} = \frac{365{,}24222}{366{,}24222} = 0{,}9972696 \text{ mittlere Tage} = 86164{,}09 \text{ sec m}$$

Dasselbe Zeichen „sec“ kann also sowohl die in der Astronomie g liche Sekunde Sternzeit, wie die im bürgerlichen Leben und in de gebräuchliche Sekunde mittlerer Zeit bedeuten. Da alle genauen Ze mungen auf die an den Sternwarten anzustellenden Beobachtungen zur und von diesen wieder die einfachsten und genauesten die der täglic drehung des Fixsternhimmels sind, wie sie durch die tägliche Rotationsb der Erde (gemäß dem ersten Hauptsatze der kopernikanischen Lehre, § dingt ist, so können wir sagen:

Die **Uhr**, nach deren Angaben wir letztlich alle anderen richten, ist die **Erde**; Uhrzeiger ist das nur in der Meridi drehbare, im übrigen mit der Erde fest verbundene Meridianf des Astronomen (§ 176), Zifferblatt ist der **Fixsternhimmel.**

Warum es nicht angeht, die Räderuhren nach den Sonnenuhren lieren, vergl. § 181 (Zeitgleichung). — Wie nun die erste Forderung an e Uhr die ist, dafs die Winkelgeschwindigkeit (§ 12, 31) ihrer Zeig stant sei (wogegen ein gleichmäßiges Zufrüh- oder Zuspätgehen einer U

schadet, sondern durch Zu- oder Abrechnen einer der jeweilig verflossenen Zeitstrecke proportionalen Korrektur leicht verbessert werden kann — Vor- oder Nachrücken der Zeiger wird bei guten Uhren möglichst vermieden), so scheint alle Zeitmessung auf die Schwierigkeit zu führen, woher wir wissen, dafs die Erde **mit konstanter** Winkelgeschwindigkeit rotiert? Ja, schliefst nicht diese Frage selbst schon einen logischen Zirkel ein, da wir ja „gleiche Zeiten" selbst wieder nur nach den von der Erde zurückgelegten gleichen Umdrehungswinkeln beurteilen? — Dieser Schwierigkeit scheint man entgehen zu können, wenn man an Stelle der Zeitstrecken in exakten physikalischen Messungen überhaupt nur die Umdrehungswinkel der Erde einsetzt. Gegen dieses Auskunftsmittel aber ist zu bemerken, dafs, wenn die Erde eine hinreichend grofse Winkelbeschleunigung oder Verzögerung erhielte, wir dies an unserem unmittelbaren psychologischen Zeitmaße (psych. Anhang Nr. 41) merken würden. Auch würden wir, wenn z. B. die Erde ihren Umlauf in demjenigen Zeitraum vollendet hätte, den wir jetzt eine „Stunde" nennen, nicht eben diesen Zeitraum als gleich demjenigen bezeichnen, den wir jetzt einen „Tag" nennen. **Anh. 41.**

In der Tat liegt denn auch dem astronomisch-physikalischen Zeitmaße unser anderweitig, nämlich dynamisch begründetes Wissen (nicht die blofse „Annahme") zu Grunde, dafs die Umdrehung der Erde eine mit überaus grofser Annäherung wirklich gleichförmige, d. h. ihre Winkelgeschwindigkeit fast völlig konstant sei. Wäre nämlich die Erde eine reine Kugel von homogener Massenverteilung, so könnte die Anziehung keiner anderen Masse des Universums an ihr eine Winkelbeschleunigung hervorrufen (da jeder Punkt auf diese Kugel so wirkte, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, somit keine der Massenanziehungen ein Drehmoment lieferte). Daraus, dafs die wirkliche Erde kein starres System ist, sondern dafs vor allem der Mond im Wassermeere (und vielleicht auch im feuerflüssigen Innern) Flutreibung hervorruft, kann die Erde allerdings eine Winkelverzögerung haben. Umgekehrt würde, wenn der Erdkörper infolge Abkühlung und Zusammenziehung ein kleineres Trägheitsmoment bekäme und seine kinetische Energie unverändert bliebe, dies eine Winkelbeschleunigung zur Folge haben. Man schätzt die aus beiden Ungleichheiten resultierende Ungleichförmigkeit der Erdrotation so, dafs seit Hipparchs Zeiten der Sterntag nur etwa 1 sec länger geworden sei. Nach anderen Schätzungen hätte sich der Sterntag seit damals um jedenfalls weniger als $^1/_{20}$ sec verlängert oder verkürzt. —

So wie sich die Gleichförmigkeit der Erdrotation letztlich aus dem Trägheitsgesetze erklärt, sind es auch dynamische Gesetze, auf die wir die Einrichtung der Pendel- und Federuhren gründen. Inwieweit dann eine einzelne Uhr der Absicht gemäfs ausgeführt ist, beurteilen wir teils durch Vergleichung mit dem Fixsternlaufe, d. h. danach, ob den von den Fixsternen zurückgelegten Bögen die von den Zeigerspitzen zurückgelegten Bögen proportional sind; teils vergleichen wir nur möglichst viele sorgfältig gearbeitete Uhren untereinander.

Die **Pendeluhr** (zuerst ersonnen von GALILEI, von dem eine wahrscheinlich nach einem Modell angefertigte Zeichnung einer ganz richtig gebauten Pendeluhr erhalten ist, Fig. 9 a. f. S.), wurde zuerst wirklich ausgeführt und verwendet von HUYGENS auf Grund der in der Schrift *Horologium oscillatorium 1673* entwickelten Theorie des einfachen und zusammengesetzten Pendels. In eben dieser Schrift ist auch die für die Einrichtung genauer Chronometer wesentliche Verwendung der Trägheitsmomente (auf deren Begriff eben das Problem des physischen Pendels geführt hatte) gegeben. Erst hierdurch wurden die schon lange vorher be-

kannten Räderuhren (z. B. Nürnberger Eierlein) zu exakten Zeitmefsinstrume[...]
Wasseruhren (vergl. GALILEIS Versuche, § 2), Sanduhren.

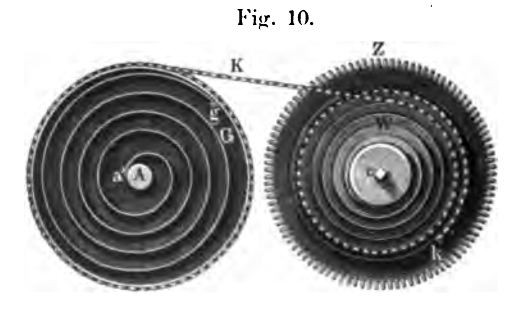
Fig. 9.



Sekunden-, Minuten-, Stundenzeiger mit den entsprechenden Zahnr[...]
Kompensationspendel, § 73.

In der Pe[...] **uhr** würde ein [...] Welle eines Zahn[...] wirkendes Ge[...] oder eine ges[...] Feder diesem [...] Winkelbeschl[...]gung erteilen, [...] nicht eine mit [...] Pendel verbu[...] Ankerhemm[...] die gleichmäßi[...] schleunigte Bew[...] in eine glei[...]förmige (ge[...] in eine aus gle[...] Abschnitten [...] ungleichförm[...] bestehende) ve[...]delte. — Die E[...]wirkung des I[...] auf das Pe[...] ersetzt diesem [...] durch Reibung [...] Luftwiderstand [...]stehenden Verlu[...] Energie.

Fig. 10.



Im Chronometer i[...] bewegende Kraft die eine [...]stischen Feder wirksam. [...] Ankerhemmung der Pend[...] ist hier ersetzt durch die [...]ruhe, welche Drehsch[...]gungen (§ 33) ausführ[...] Die Konstanz der Schwing[...]dauer trotz der durch da[...]laufen der Feder eintret[...] Verminderung der Federkraft wird herbeigeführt durch Veränd[...] des Kraftarmes (indem eine Kette spiralig aufgewunden ist, Fig

Die Regulierung gegenüber Einflüssen der Temperatur wird durch Änderung des Trägheitsmomentes von Massen erzielt, die an einem Doppelstreifen aus Metall entsprechend angebracht sind (Kompensationsstreifen, Fig. 278, S. 264).

Chronoskope heifsen Vorrichtungen zur Messung sehr kleiner Zeitstrecken bis herab auf Tausendstel, ja Millionstel Sekunden.

In HIPPS Chronoskop ist ein sehr genaues Uhrwerk mit zwei Zifferblättern, die Hundertstel und Tausendstel Sekunden angeben, durch einen Elektromagneten so lange arretiert, bis zu Beginn der zu messenden Zeitstrecke (z. B. freier Fall einer Kugel bei geringer Fallstrecke) der Strom unterbrochen wird und so die Bewegung des Räderwerkes freigibt. Zu Ende der Zeitstrecke werden die Zeiger wieder arretiert.

Sogar die Zeiten, die z. B. eine Kanonenkugel braucht, um bestimmte Strecken innerhalb des Kanonenlaufes zurückzulegen, lassen sich elektrisch messen, indem quer durch den Lauf Leitungsdrähte gespannt sind, die von der Kugel abgerissen werden und in diesen Zeitpunkten z. B. Funkenmarken in sehr rasch rotierende berufste Trommeln einbrennen. Bei anderen Chronoskopen liefern schwingende Federn, frei fallende Körper und dergleichen, fast immer unter Zuhilfenahme elektrischer Ströme, die Zeitmaße.

5. Messung von Massen.

Einheit der Masse (Masseneinheit ME) ist im C-S-G-System das **Gramm** (g) = $^1/_{1000}$ **Kilogramm** (kg). Es sind 10 g = 1 Dekagramm, $^1/_{10}$ g = 1 Decigramm, $^1/_{1000}$ g = 1 Milligramm (mg). — Vergl. § 16.

Das **Kilogramm** ist definiert als die Masse des internationalen Kilogrammprototyps, d. i. des Platin-Iridiumzylinders, der 1889 dem Pariser Archivkilogramm von 1800 möglichst genau massengleich gemacht, mit der Bezeichnung 𝔎 versehen wurde und im Keller des internationalen *Bureau des poids et mésures* zu Paris aufbewahrt wird.

Das Archivkilogramm war ein Platinzylinder, den die 1790 eingesetzte *commission des poids et mésures* möglichst genau massengleich gemacht hatte einem Liter Wasser von 4° C. — Durch diese Definition hatte man ein Urmaß der Masse festgestellt zu haben geglaubt, was aber später aus ähnlichen Gründen wie bei dem Meter sich als nur annähernd erreicht herausstellte. Überdies hatten sich aber während der Arbeiten behufs Abnahme von Kopien dieses Kilogrammkörpers Zweifel an seiner Konstanz erhoben, deren Berechtigung aus den folgenden Einzelheiten erhellt:

Es war nicht möglich gewesen, eine der Definition des Kilogramms unmittelbar entsprechende Menge Wasser von 4° C. und 1 Liter Volumen direkt herzustellen; denn schon die Kapillarerscheinungen am Rande eines genau 1 Liter fassenden Gefäfses machen eine genaue Entscheidung schwierig, ja unmöglich, ob ein solches Gefäfs wirklich genau eben gefüllt sei. Vielmehr wurde die Masse von 1 Liter Wasser mittelbar auf Grund des Archimedischen Prinzips bestimmt: Ein Messingzylinder (bei dem es nicht auf seine Masse, sondern auf sein stereometrisch genau zu bestimmendes Volumen ankam) wurde in Wasser gewogen und hiernach ermittelt, dafs 1 Liter Wasser von 4° C. das Gewicht von 2 Pfund 5 Gros 35 Gran altfranzösischen Gewichtes habe. Auf Grund dieser Zahlen wurde dann ein Platinkörper verfertigt, der ein genau ebenso grofses Gewicht haben sollte. Als Gestalt

dieses Körpers wurde die des **gleichseitigen Zylinders** ($h = 2r$) gewählt. In Wahrheit hatte das nach diesen Definitionen **angefertigte Archivkilogramm** eine abgerundete Kanten und **zeigt auch an der Oberfläche Poren**, in welchen sich Schmiergelkörner lagern (sie **rühren her vom Abschmiergeln** des Zylinders, als er auf sein richtiges Gewicht gebracht wurde; **und die Poren waren** nicht zu vermeiden gewesen, weil man damals das Platin noch nicht **schmelzen konnte**, sondern es in chemischen Verbindungen als **Pulver abschied und dieses** in der Glühhitze durch Hämmern zu einem dichteren Ganzen **zusammenschweifste**). Als dann später das Archivkilogrammzylinder selbst wieder in Wasser **gewogen** wurde, hat sich wahrscheinlich eine nicht mehr zu bestimmende **Menge** dieser Schmiergelkörner abgeschwemmt. **Möglicherweise weicht das alte Archivkilogramm** um ein Zehntausendstel gegen seine theoretische Definition ab, welche Gröfse noch bei weitem nicht an, geschweige unter der Grenze der **Empfindlichkeit** unserer Wagen [illegible].

Bei der Herstellung des **internationalen Kilogrammprototyps** von 1889 [illegible] so vorgegangen: Es wurde **ein Block von 65 kg einer Legierung** von 90 Proz. Platin und 10 Proz. Iridium (die erst auf Grund ganz neuer chemischer Methoden frei von fremden Metallen, namentlich **von Eisen erhalten werden** konnten) in einer Schmelzung hergestellt. Aus diesem Block wurden 40 Zylinder entnommen, [illegible]

Fig. 11.

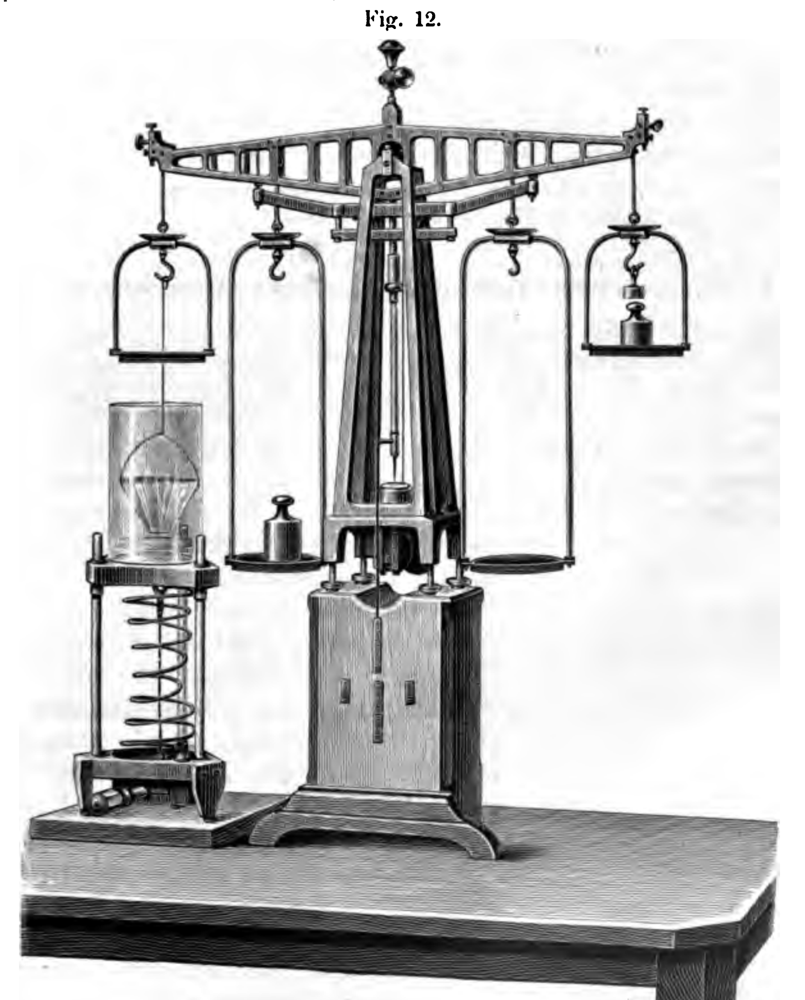


[illegible] Gewicht gebracht. Ebenso hatte man vorher [illegible] mit dem Archivkilogramm verglichen [illegible] gleiches Gewicht mit dem Archivkilogramm [illegible] 1889 [illegible]. [illegible] zeigte einer dieser K[illegible] Verschiedenheit vom Gewichte des A[illegible] K[illegible] bezeichnet und bildet [illegible]

s internationale Prototyp. Mit diesem Kilogramm $\mathfrak{K}$ wurden die 40 nationalen ototype durch Wägung in Luft verglichen und die Abweichungen auf den leeren um reduziert. Österreich erhielt bei der Verlosung die mit $\mathfrak{K}_{14}$ und $\mathfrak{K}_{33}$ bezeichen Prototype; von diesen ist $\mathfrak{K}_{33}$ um 0.061 mg zu leicht, wobei der mögliche Fehler ı ± 0.001 die Wahrscheinlichkeit von 1400 : 1 hat. — Es ist auch hier festalten, dafs trotz der Unterschiede der nationalen Kilogrammprototype von ı internationalen Kilogrammprototyp nicht etwa die verschiedenen Staaten as verschiedene Masseneinheiten besitzen, sondern für alle gemeinsam ist als ıseneinheit das internationale Prototyp.

Für die meisten theoretischen und praktischen Massen- und Dichtebestimıgen genügt die alte Definition: 1 g ist die Masse von 1 cm³ Wasser bei 4° C. ıg theoretisch aber ist die Masse von 1 g = $^1/_{1000}$ der Masse des internationalen grainms $\mathfrak{K}$ = der Masse von 1,00005 cm³ Wasser bei 4° C.

Fig. 12.



Alle genaue Vergleichung irdischer Massen erfolgt m **Wage** (über die Vergleichung kosmischer Massen vergl. § 21 Fig. 11 (S. 710) zeigt eine feine Wage mittlerer Tragkraft. De balken ist durchbrochen und mit einer Skalenteilung versehen auf ihn an verschiedenen Stellen „Centigrammhaken" (mittels von aufsen durch das Gehäuse geführt sind) aufgesetzt, so l noch Bruchteile eines Centigramms wägen. Die abwärts Zunge spielt vor einer Skale; da nach § 29, Gl. 1, für kle gewichte $tg\alpha$ proportional p ist, so kann aus der Abwei der Lotlage auf die Gröfse des Übergewichts geschlossen wer an dem Wagebalken oberhalb der Schneide angebrachte erlaubt den Schwerpunkt des Wagebalkens verschieden hoch und so die Empfindlichkeit nach Bedarf zu regulieren. schalen werden mittels Träger, die ebenfalls von aufsen zu l zu senken sind, arretiert oder freigegeben. — Erklärung Einzelheiten nach einer wirklichen feinen „chemischen Wa

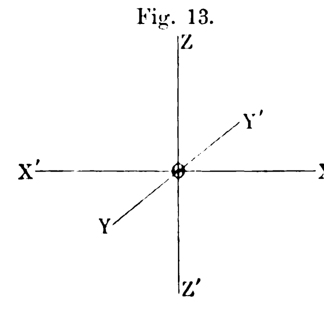
Fig. 12 (a. v. S.) zeigt eine Demonstrationswage von RUEPRECHT zwecke mit Vorrichtung zu Wägungen unter Wasser.

6. Geometrische (und arithmetische) Dimensio

Bekanntlich pflegt man eine Linie ein eindimensionales, ei ein zwei-, einen Raum ein dreidimensionales Gebilde zu nennen. den Ausdrücken „Dimension" und „1-, 2-, 3- (4- . . , n-)dimens strengen Sinne gemeint ist, läfst sich zuerst für Raumgröfsen so besc

Durch einen Punkt O des Raumes lassen sich unendl beiderseits unbegrenzte Gerade legen, so dafs keine Rich allen übrigen irgendwie ausgezeichnet ist. — Wählen wir v Geraden eine $X'X$ (Fig. 13), so l auf ihr im Punkte O immer noch lich viele normale Gerade welche zusammen in der auf $X'X$ Ebene liegen. Wählen wir vo Geraden wieder eine $Y'Y$, so läfst nur mehr eine einzige Gerade Z welche sowohl auf $X'X$, als normal steht. Kürzer: In jedem des Raumes beträgt die Anz gegenseitig aufeinander Normalen **drei**; wobei aber dieser dreiseitigen Ecke durch die Lage des Scheitels O k selbst schon eindeutig, sondern unendlich vieldeutig gegebe Drei solche Gerade OX, OY, OZ bilden ein **dreiachsig winkeliges Koordinatensystem**; näheres hierüber s. u. Nr

Fig. 13.



Unter den begrenzten Räumen, d. h. den („mathematischen") **Körpern**, ist es das rechtwinkelige Parallelepiped, von welchem je drei in einer Ecke zusammenstofsende Kanten die drei Dimensionen anschaulich darstellen. Ebenso unter den begrenzten Flächen das Rechteck die zwei Dimensionen. Die Gerade besitzt nur eine Dimension.

Aber auch einer unbegrenzten oder begrenzten krummen Linie sprechen wir nur eine, die Längsdimension, zu, einer krummen Fläche zwei Dimensionen, die Flächendimension. Letzteres hat den Sinn, dafs, wenn wir aus der Fläche ein Element herausheben, seine Abweichung von der Tangentialebene verschwindend klein ist gegen die Längsausdehnungen des Elementes (von scharfen Kanten und Spitzen abgesehen; vergl. Nr. 26 „Krümmung"). — Halten wir uns daher, um zu einer festen Definition der räumlichen Dimension zu gelangen, der Einfachheit halber wieder nur an die Ebene mit ihren zwei Dimensionen, so können wir sagen: Sobald in der Ebene zwei zu einander normale Gerade $X'X$ und $Y'Y$ gezogen sind, läfst sich jede durch deren Durchschnittspunkt O gehende weitere Gerade $G'G$ ersetzen durch die Richtungen jener beiden **„Achsen"** und bestimmte Längen an diesen Achsen; und: Jede begrenzte Gerade ist durch ihre Projektionen auf die eine Achse und den Projektionswinkel, oder durch ihre Projektionen auf die zwei Achsen eindeutig bestimmt.

Diese beiden Richtungen der Ebene, auf welche sich in diesem Sinne alle übrigen Richtungen „zurückführen" lassen, heifsen nun die **„zwei** Dimensionen" der Ebene. Im analogen Sinne kommen dann dem Raume **„drei** Dimensionen" zu. — Dafs es einen „Raum mit 4, 5 . . . $n > 3$ Dimensionen" nicht gibt (wenn auch aufserräumliche „Mannigfaltigkeiten" von beliebig vielen „*Dimensionen" denkbar, zum Teil auch zu veranschaulichen sind, z. B. am „Farbenkörper", Nr. 44), ist im selben Sinne und mit gleicher Evidenz ein Axiom der („Euklidschen") Geometrie, wie z. B. das, dafs alle vollen ebenen Winkel einander gleich sind. (Speziell dem Vorschlage, den drei Dimensionen des Raumes als vierte Dimension die eindimensionale Zeit zuzugesellen, ist entgegenzuhalten, dafs Raum und Zeit qualitativ verschieden sind; wie sich denn auch schon z. B. eine Zeitstrecke weder der Lage noch der Länge nach vergleichen läfst mit einer Raumstrecke. Ebenso war auch oben schon einmal das Wort „*Dimension" in künstlich erweitertem Sinne gebraucht.)

Die bisherigen Bestimmungen betreffen blofs geometrische Lagen-, nicht Gröfsen- (Maß-)Verhältnisse. — Vergleichen wir nun die Maßzahlen des Rechtecks und des senkrecht-rechtwinkeligen Parallelepipeds mit den Maßzahlen einer Geraden, so ist

für das Rechteck: $f = g.h$, für das Parallelepiped: $v = abc$
speziell für das Quadrat: $f = a^2$, für den Würfel: $v = a^3$.

Es kehren also hier die Zahlen 2 und 3, welche bezüglich der Lageverhältnisse die Anzahl der in einem Punkte möglichen Normalen gewesen waren, als Potenzexponenten, allgemeiner als **Anzahlen** der in den Formeln für f, bezw. v als **Faktoren** auftretenden Längenmaßzahlen auf.

Über diesen eigentlichen Sinn hinausgehend sagt man aber gegenwärtig nicht nur, die Maßzahl einer Fläche sei eine Gröfse zweiter, die Maßzahl eines Volumens dritter Dimension; sondern man schreibt auch sehr zweckmäßig die

Maßeinheiten der Fläche cm^2, des Volumens cm^3 (welche Zeichen aber schon deshalb nicht buchstäblich, sondern nur symbolisch zu nehmen sein können, weil man zwei oder drei Gröfsen, die, wie die Centimeter, nicht blofse Zahlengrößen sind, nicht multiplizieren, also auch nicht potenzieren kann).

Indem man überdies jenen Begriff von Dimension auch auf Produkte von mehr als drei Faktoren ausdehnte, sagt man noch innerhalb der Geometrie (z. B. bei der algebraischen Analyse von Konstruktionsaufgaben), dafs, wenn a, b, c, d, m, n . . . Maßzahlen von Strecken sind, das Produkt $abcd$ von vier Dimensionen, oder häufiger, aber minder genau: dafs es von der vierten Dimension, der Quotient $\frac{abc}{mnpqr}$ von der (—2)ten Dimension, die Wurzelgröfse $\sqrt{\frac{abc}{mn}}$ von der ($^1/_2$)ten Dimension sei. Auch kann man dann schreiben cm^{+4}, cm^{-2}, $cm^{\frac{1}{2}}$. Hierbei hat also der Ausdruck „Dimension" seine ursprüngliche Bedeutung gewechselt, indem es räumliche Gebilde von mehr als drei und weniger als Null Dimensionen nicht gibt (der mathematische Punkt einerseits, der im absoluten Maße gemessene Winkel anderseits hat die Dimension Null; beides in genau gleichem Sinne?). man kann diesen Sinn des Wortes „**Dimension" zum Unterschied von den vorigen Bedeutungen als den der „arithmetischen Dimension" bezeichnen. Dagegen ist die Anzahl der räumlichen Dimensionen im ursprünglichen Sinne ebenso notwendig eine absolute, ganze Zahl, wie eine Anzahl Menschen, eine Anzahl Seiten oder Ecken eines Polygones u. dergl.

Prüfung von Gleichungen in Arithmetik und Geometrie auf ihre Homogeneität mittels Vergleichung der „Dimensionen" aller einzelner Glieder. Z. B. In der Gleichung für das Volumen des Pyramidenstutzes $V = \frac{1}{3} h (B + \sqrt{Bb} + b)$ ist $\sqrt{Bb}$ von der Dimension $(2 + 2) : 2 = 2$, also wie B und b selbst, u. s. w.

Diese zum Teil stark erweiterten Begriffe von „Dimension" haben dann in der Physik noch folgende weitere Verallgemeinerung und Anwendung erfahren.

7. Physikalische Dimensionen.

Fourier (1826) führte folgende Bezeichnungsweise ein: Z. B. Die Geschwindigkeit ist nach der Länge von der Dimension + 1, nach der Zeit von der Dimension — 1; die Beschleunigung ist nach der Länge von der Dimension + 1, nach der Zeit von der Dimension — 2.

Dieser Sprachgebrauch Fouriers wurde nachmals abgeändert in folgenden: Z. B. Die Geschwindigkeit hat die (oder: „ist von der") Dimension $L^1 T^{-1}$, die Beschleunigung hat die Dimension $L^1 T^{-2}$, wobei die Zeichen L und T nur Länge und Zeit überhaupt (qualitativ), ohne Voraussetzung spezieller Längen- und Zeiteinheiten bedeuten.

Unter Einführung der Einheiten des C-S-G-Systems schreibt man z. B.:

Die Geschwindigkeit (§ 4) eines Körpers, der in gleichförmiger Bewegung 15 cm in 3 sec zurücklegt, ist $c = \frac{15}{3} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 5\,\text{cm}\,\text{sec}^{-1}$. — Die Beschleunigung (§ 5) im freien Falle ist $981\,\text{cm}\,\text{sec}^{-2}$. — Bei solcher Verwendung vertreten also die Dimensionssymbole in der Regel (Ausnahmen wegen gleicher Dimension bei ungleicher Benennung s. unten) zugleich die Angabe der Benennung. Z. B. Statt 1 Dyn

kann man schreiben $1\,\mathrm{cm\,sec^{-2}\,g}$; denn nach der Gleichung $k = mb$ hängt die Maßeinheit der Kraft von der der Beschleunigung $\mathrm{cm\,sec^{-2}}$ und der der Masse g in der Weise ab, dafs die Maßzahlen beider Gröfsen zu multiplizieren sind. — Hierbei können sich durch Auflösung der Definitionsgleichungen auch gebrochene Exponenten ergeben. Z. B. Da die elektrische Ladungsmenge gemäß $f = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2}$ Dyn (§ 135) definiert wird, gilt symbolisch $\mathrm{cm\,sec^{-2}\,g} = \varepsilon^2 . \mathrm{cm}^{-2}$, woraus folgt:

$$\mathrm{Dim}\ \varepsilon^2 = \mathrm{cm^3\,sec^{-2}\,g}, \quad \text{also} \quad \mathrm{Dim}\ \varepsilon = \mathrm{cm^{3/2}\,sec^{-1}\,g^{1/2}}.$$

In der Tabelle der Nr. 29, S. 769 ff. sind für die wichtigsten der in diesem Buche verwendeten Gröfsen die Dimensionssymbole beigesetzt, wogegen im Texte nur einige wenige der am leichtesten zu merkenden regelmäßig verwendet wurden, namentlich $\mathrm{cm\,sec^{-1}}$ und $\mathrm{cm\,sec^{-2}}$. Insoweit nicht kurze Namen wie Dyn, Erg, Ohm (Cel? Accel? — S. 12 und S. 15, Anm.) . . . gebräuchlich sind, genügt es für den Anfänger und meistens auch für den praktischen Rechner, nur die Grundeinheiten im Gedächtnis zu behalten oder in Klammern beizusetzen. Freilich tritt dann bei den meisten physikalischen Gröfsen das Zeichen (cm, sec, g) in gleicher Weise auf, da eben die meisten von allen drei Grundgröfsen, d. h. von Raum, Zeit und Masse abhängen. Aber 1. genügt dies sehr oft als Erinnerung, dafs z. B. im absoluten (nicht im irdischen) Maß der Massen und Kräfte, oder im absoluten C-S-G-System (nicht im absoluten Gauss-Weberschen Millimeter-Sekunden-Milligramm-System) gerechnet worden sei; 2. fallen doch bei vielen Gröfsen die eine oder zwei, selbst alle drei der Grundgröfsen aus, z. B. Trägheitsmoment (cm, g) d. h. $\mathrm{cm^2\,g}$; in allen rein phoronomischen Gröfsen fehlt g überhaupt.

Übrigens sind auch die Dimensionssymbole öfters die nämlichen für ganz heterogene Gröfsen, z. B. $\mathrm{cm\,.\,sec^{-1}}$ für eine Geschwindigkeit und für einen Leitungswiderstand im elektromagnetischen Maße; cm für eine Länge und für eine elektrostatische Kapazität (§ 139). Schon aus diesem Umstande geht hervor, dafs die Dimension und Benennung einer physikalischen Gröfse einander nur „in der Regel" praktisch vertreten können und dafs sie vollends theoretisch nicht dasselbe sind. Vielmehr gilt: Nur die „Benennung" (z. B. Länge, Geschwindigkeit, Widerstand . . .) ist der unzweideutige Ausdruck für die qualitative Beschaffenheit einer physikalischen Gröfse. Noch vollkommeneres leistet die betreffende Maßeinheit (cm, absol. GE = Cel, Ohm = Ω . . .), da hier nebst der Qualität auch eine bestimmte Gröfse bezeichnet ist, nämlich die des gleichartigen Etalons (so bei der Grundgröfse cm, bei der abgeleiteten Gröfse Ohm), oder der aus den Etalons immer wieder durch Rechnung abzuleitenden Einheiten.

Die wichtigste praktische Anwendung findet die vollständige Dimensionsangabe einer Gröfsenart dann, wenn im Verlaufe oder am Ende einer physikalischen Rechnung statt der bis dahin verwendeten Einheiten höhere oder niedrigere Einheiten (oder solche eines ganz anderen Maßsystems) eingeführt werden sollen.

Inwiefern hierbei auch die Exponenten wichtig werden, zeigt die Gegenüberstellung folgender zwei Beispiele:

1. Legt ein Körper in gleichförmiger Bewegung 6 m in 5 min zurück, so ist seine Geschwindigkeit $\frac{6}{5}$ (m, min). Führen wir zunächst als Einheit des Weges

statt Meter Centimeter und später als Einheiten der Zeit statt Minuten Sekunden ein, so wird seine Geschwindigkeit ausgedrückt durch $\frac{600}{5}$ (cm, min) $= 120$ (cm, min) $= \frac{120}{60}$ (cm, sec) $= 2$ (cm, sec).

2. Hat ein Körper bei gleichmäfsiger Geschwindigkeitszunahme zu Beginn einer Minute die Geschwindigkeit $\frac{6}{5}$ (m, min), am Ende dieser Minute hingegen $\frac{7}{5}$ (m, min), so ist seine Beschleunigung $\frac{7-6}{5}$ (m, min) $= \frac{100}{5}$ (cm, min) $= \frac{100}{5 \cdot 60^2}$ (cm, sec) $= \frac{1}{5 \cdot 36}$ (cm, sec) $= \frac{1}{180}$ (cm, sec).

Es ist also z. B. bei Einführung einer kleineren Zeiteinheit die Maßzahl der Geschwindigkeit mit der (+ 1)ten, die einer Beschleunigung mit der (+ 2)ten Potenz der Verwandlungszahl zu multiplizieren; dagegen bei Einführung einer kleineren Wegeinheit hindurch nur mit der (+1)ten Potenz zu dividieren oder mit der (— 1)ten Potenz zu multiplizieren; und so überhaupt mit dem jeweiligen reziproken Werte der Verwandlungszahl in der durch die Dimensionsformel angezeigten Potenz. — Diese Rechnungsregel kommt übrigens meist nur dort zur Anwendung, wo man erst nach durchgeführter Rechnung die neuen Einheiten einführen will. Solange während des Rechnens die Potenzierungen der Maßzahlen noch nicht ausgeführt sind, unterliegen nach Einführung der neuen Maßzahlen die in ihnen steckenden Umwandlungszahlen von selbst den durch die physikalischen Formeln vorgeschriebenen Operationen. — Man beachte diesen Unterschied z. B. bei der Berechnung der Beschleunigung des Mondes gegen die Erde aus dem Abstande des Mondes in Erdradien und seiner

LA 34. Umlaufszeit in Tagen nach der Gleichung $w_{\perp} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ in cm und sec (LA 34), indem man einmal die Umrechnung zu Beginn und ein andermal zu Ende der numerischen Rechnung vornimmt. —

Die theoretische Bedeutung der Dimensionsformeln liegt darin, dafs sie den Hinweis darauf enthalten, ob eine abgeleitete Gröfse mit den Grundgröfsen cm, sec, g (oder auch anderen, schon abgeleiteten Gröfsen) nach dem „multiplikativen Typus“ (Beispiele: Fläche = Länge $\times$ Länge; Volumen = Fläche $\times$ Länge; Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung; Arbeit = Kraft $\times$ Weg ...) oder dem „divisiven Typus“ $\left(\text{Beispiele: Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}; \text{ Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Zeit}}; \text{ Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} \ldots\right)$ zusammenhängt. Anderer als dieser zwei Typen bedient sich die Physik nicht.

Über weitgehende Vereinfachungen aller Dimensionsformeln, sobald die Dimension der Gravitationskonstante (desgleichen der reziproke Wert der Dielektrizitäts- und der der Magnetisierungskonstante) gleich der Dimension einer

LA 52. Geschwindigkeit gewählt wird, vergl. LA 52.

8. Vektoren. Vektorgröfsen und Skalengröfsen.

Bekanntlich pflegt man Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte u. dergl., wiewohl sie nicht selbst Strecken sind, doch durch Strecken (Pfeile, Vektoren) darzustellen; und zwar deutet man durch eine Pfeilspitze eine



bestimmte **Richtung** (z. B. der Geschwindigkeit, genauer genommen: des von einem Punkte mit dieser Geschwindigkeit zurückgelegten Weges) unmittelbar **an**; wogegen sich die **absolute Gröfse** z. B. einer Geschwindigkeit nur mittelbar durch die Länge einer Strecke so darstellen läfst, dafs, wenn willkürlich festgesetzt ist, 1 cm Länge solle eine Geschwindigkeit c cm sec^{-1} darstellen, ein Pfeil von 2, 3 . . . cm Länge Geschwindigkeiten von $2c$, $3c$ . . . cm sec^{-1} darstellt.

Alle Gröfsen, denen aufser ihrem absoluten Werte noch Richtung zukommt, heifsen Vektorgröfsen — im Gegensatz zu richtungslosen Gröfsen oder Skalengröfsen, wie Wärmegrade, Potentiale (§ 24) . .

Schärfer gefafst gehört zum Begriffe des Vektors noch, dafs sein Ausgangspunkt („Ursprung") unwesentlich sei (z. B. bei rein fortschreitenden Bewegungen, wo die Bewegung irgend eines Punktes zugleich die aller übrigen repräsentiert; desgleichen bei den Kräften des homogenen Kraftfeldes). — Maxwell [*Matter and motion* (Stoff und Bewegung), Art. VIII] definiert: „Der Ausdruck $\overline{AB}$ ist im geometrischen Sinne nichts als der Name einer Linie. Hier jedoch bezeichnet er die Operation, mittels welcher die Linie gezogen wurde, nämlich das Fortführen eines beschreibenden Punktes in einer bestimmten Richtung und durch eine bestimmte Strecke. — In dieser Bedeutung als Operation nennt man $\overline{AB}$ einen **Vektor**, und die Operation selbst ist vollständig bestimmt durch die Richtung und Strecke der Fortführung. Der Ausgangspunkt, den man Ursprung des Vektors nennt, kann beliebig gewählt werden. — Um eine gerade Linie zu bestimmen, müssen wir sowohl ihren Anfangspunkt, als auch ihre Richtung und Länge angeben; Vektoren hingegen, welche sich nur durch ihren Ursprung voneinander unterscheiden, welche also parallel (und nach derselben Seite hin gezogen) und von gleicher Länge sind, werden als gleich angesehen. — Jede Gröfse, welche, wie z. B. eine Geschwindigkeit oder eine Kraft, eine bestimmte Richtung und einen bestimmten Betrag hat, kann als Vektor betrachtet und in einem Diagramm als gerade Linie dargestellt werden, deren Richtung parallel ist der des Vektors und deren Länge, nach einer angenommenen Skala, die Gröfse des Vektors vorstellt."

Wie man sieht, sind im Begriffe des „Vektors" die Merkmale der Gröfse und Richtung künstlich vereinigt, das der absoluten Lage künstlich aus ihm ausgeschieden. Wird nämlich z. B. die Strecke AB (Fig. 14) von der absoluten Länge s cm binnen t sec zurückgelegt, so kommt der Bewegung die absolute Geschwindigkeit von $c = \frac{s}{t}$ cm sec^{-1} zu, welcher Gröfse zunächst noch kein Richtungsmerkmal anhaftet. Insofern ist die Geschwindigkeit der Bewegung von A nach B die gleiche wie die von A nach B' oder speziell auch von B nach A, wenn die Strecke AB' der absoluten Länge nach gleich der Strecke AB, wiewohl der Richtung nach von ihr verschieden, ja ihr geradezu entgegengesetzt ist. Wie man aber dem Begriffe der (absoluten) natürlichen Zahl nochmals das Merkmal des Negativen, bezw. Positiven (und bei komplexen Zahlen das irgend einer Richtung in der Zahlenebene) hinzufügt, kann man auch zu dem Begriffe jener absoluten (richtungslosen) Gröfse der Geschwindigkeit das Merkmal der Richtung der Strecke AB, bezw. AB' ausdrücklich hinzufügen und dann sagen, es habe nicht nur die Bewegung überhaupt eine bestimmte Richtung, sondern auch speziell die Geschwindigkeit selbst habe eine Richtung. —

Fig. 14.

Man kann die **Vektoren der Geschwindigkeit** und die **Vektoren der** [Be]**schleunigung** mit dem gemeinschaftlichen Namen **Bewegungsvektoren** [be]zeichnen. Unter diese Bezeichnung fallen auch **Vektoren der Wege** (Dislokat[ionen], falls z. B. in Fig. 27, S. 26 nur darauf geachtet wird, dafs die Strecken AB und AD binnen gleicher Zeiten zurückgelegt worden sind.

Durch Einführung des Begriffes Vektor vereinfachen sich alle Sätze, in [denen] auf die Konstruktion von Parallelogrammen (der Dislokationen, [der] Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte ...) Rücksicht genommen [werden] müfste. Während nämlich z. B. die Resultierende zweier Kräfte nur dann [gleich] ihrer „Summe" im gewöhnlichen Sinne, wenn die Kräfte denselben An[griffs]punkt und gleiche Richtungen haben, läfst sich allgemein der die Diagona[le des] Kräfteparallelogramms darstellende Vektor als die **„Summe"** der die Kompo[nenten] darstellenden Vektoren aus den Parallelogrammseiten auffassen und bezei[chnen]. (Es entspricht dies z. B. der Darstellung der komplexen Zahlen in der Zahlen[ebene], indem dieselbe Zahl $Z = a + bi$ entweder durch die gebrochene Lin[ie aus] den Strecken a, b oder durch die gerade Linie $OM = r$ dargestellt wir[d, wo] $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $tg\,\varphi = \frac{b}{a}$.) Ebenso kann dann jede Komponent[e als] **Differenz**[1]) aus der Resultierenden und der anderen Komponente beze[ichnet] werden u. s. f. — Eine interessante Anwendung dieser Vektoren in Ham[iltons] Hodographen (LA 31, 44).

LA 31, 44.

9. Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mi[ttel].

Für den Fall von nur zwei Gröfsen a und b entspricht der arithmetischen Proportion $a - x = x - b$

das **arithmetische Mittel** $x = \frac{a}{-}$ [...]

der geometrischen Proportion $a : y = y : b$

das **geometrische Mittel** $y =$ [...]

der harmonischen Proportion $(a - z) : (z - b) = a : b$

das **harmonische Mittel** $z = \frac{2\,\cdot}{a\,-}$ [...]

Verallgemeinerte arithmetische Mittel.

Zu den n Gröfsen $a_1, a_2 \ldots a_n$ ist das arithmetische M[ittel]

$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ldots (1)$; man bezeichnet es auch kurz als die „durchschnittliche Gröfse" oder als den „Durchschn[itt]" jener Gröfsen.

---

[1]) Für die sehr häufige Wortverbindung „**gleich und entgegengesetzt**" (in [der] Physik: Wege, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Potentiale, elektrische Ladu[ngen], magnetische Polstärken u. s. f.) würde sich der kurze Ausdruck **„gegengleich"** empfe[hlen]. — In dieser Ausdrucksweise hiefse es dann z. B. allgemein: **Die Summe geg[en]gleicher Gröfsen** (sowohl Vektorgrößen wie Skalengrößen) **ist Null.**



Ein solcher Durchschnitt wird z. B. genommen, wenn sich bei wiederholten Messungen der Länge desselben Stabes u. dgl. die voneinander etwas abweichenden Maßzahlen $a_1, a_2 \ldots a_n$ ergeben haben; vorausgesetzt, dafs alle Messungen unter (so viel man weifs) gleich günstigen Messungsbedingungen ausgeführt worden sind. Es ist dann unmittelbar einleuchtend, dafs der wahrscheinlichste Wert der wahren Länge jenes arithmetische Mittel sei. — Auch hat dieses die merkwürdige Eigenschaft, dafs die Summe der Quadrate $S = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$ den kleinstmöglichen Wert erreicht, wenn als Wert von x jenes arithmetische Mittel gewählt wird (Beweis vergl. Anh. Nr. 14). Anh 14.

Sehr häufig sind in der Physik Durchschnitte aus Gröfsen zu nehmen, die von einem Anfangswerte Null bis zu einem Endwerte E gleichförmig und stetig zunehmen. Dann ist $D = \frac{0 + E}{2} = \frac{E}{2}$. Dafs dieses arithmetische Mittel aus Nichts und Etwas auch zugleich die Durchschnittsgröfse der Einzelwerte ist, läfst sich in den Formeln der arithmetischen Reihe (Nr. 10) allgemein so beweisen:

$$\frac{\varepsilon + 2\varepsilon + \cdots\cdots (n-1)\varepsilon + n\varepsilon}{n} = \frac{n(n+1)\varepsilon}{2 \cdot n} \neq \frac{n\varepsilon}{2} = \frac{E}{2}.$$

Beispiele: Galileis graphische Methode zur Ableitung von $s = \frac{g}{2}t^2 = \frac{1}{2}(gt).t$, § 6; die Ableitung der Arbeit $A = \frac{1}{2}\varkappa s^2$, § 22; ferner LA 57, 58, 59. LA 57, 58, 59

Eine Erweiterung des Begriffes arithmetisches Mittel in anderer Hinsicht wird dann notwendig, wenn den zwei (oder mehreren) Gröfsen a und b verschiedenes „Gewicht" (das Wort im übertragenen Sinne, wie „Gewicht einer Zeugenaussage", genommen) zukommt. Wer z. B. 1 m Tuch um 5 Mk. und 1 m um 7 Mk. kauft, hat im Mittel „Tuch im Werte von 6 Mk. pro Meter gekauft". Wer aber 3 m Tuch zu 5 Mk. und 6 m zu 7 Mk. gekauft hat, hat Tuch um $\frac{3.5 + 6.7}{3 + 6} = \frac{57}{9} = 6^1/_3$ Mk. pro Meter gekauft. Dieser Preis weicht von dem einfachen Mittel (6) zwischen 5 und 7 gegen den Preis des kostspieligeren (7) ab, weil die Menge des kostspieligeren Tuches überwogen hatte. So bei allen „Mischungsrechnungen". — Allgemein:

Das arithmetische Mittel für die Gröfsen $a, b, c \ldots$, welche die „Gewichte" $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ haben, ist $x = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots} \cdot\cdot (2)$

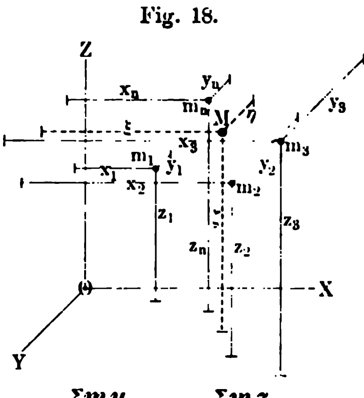
Diese Gl. (2) läfst sich übrigens als spezieller Fall der obigen Gl. (1) auffassen; denn wir können die Gewichtszahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ (vorausgesetzt, dafs sie ganze Zahlen sind) als Anzahlen gleicher Gewichte einzelner Gruppen auffassen. Z. B. Hat ein Schüler dreimal die Note 2 und fünfmal die Note 4 erhalten, so verdient er nicht die „reine" Note 3, sondern man rechnet:

$$x = \frac{2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4}{8} \text{ oder } x = \frac{3.2 + 5.4}{3 + 5} = \frac{26}{8} = 3^1/_4.$$

Speziell auch bei wiederholten Beobachtungen, von welchen α Beobachtungen das Ergebnis a und β das Ergebnis b ergeben haben, wird der wahrscheinliche Wert nicht $\frac{a+b}{2}$, sondern $\frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta}$ sein.

...he Erweiterung der Gl. 3 für ... gleiche oder ungleiche Massen-... Da durch diese Gleichung nur der ... des Schwerpunktes von einer Ebene ...mt ist, so bedarf es für ein nach drei ...ensionen verteiltes System von Massen-...nkten dreier solcher Gleichungen. Haben ... Bezug auf ein dreiachsiges rechtwinkeliges ...ordinatensystem (Fig. 18) die Massenpunkte ..., $m_2 \ldots m_n$ die Koordinaten $x_1 y_1 z_1$, $y_2 z_2 \ldots x_n y_n z_n$, und schreiben wir z. B. $x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n = \Sigma m x$ und $+ m_2 + \ldots + m_n = \Sigma m = M$ die Gesamt-...asse des Systems, so sind (Fig. 18) die ...ordinaten des Schwerpunktes $\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}$, $\eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}$, $\zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$ . . . (4).

Fig. 18.



Anwendungen dieser Gleichungen zur Schwerpunktsbestimmung von stetig ...t Masse erfüllten Gebilden LA 70, 72. LA 70, 72.

Bemerkung: Wiewohl durch die Gleichungen (3, 4) die Lage des Schwer-...nktes eines Systems von Massenpunkten nicht auf dieses System selbst, sondern ...f ein äufseres Koordinatensystem bezogen erscheint, so ist doch die Lage des ...hwerpunktes nur von der gegenseitigen Lage der Massenpunkte ...d den Gröfsen ihrer Massen, nicht aber von der Lage dieser Massenpunkte ...n Koordinatensystem abhängig. Es erhellt dies schon im einfachsten Falle eines ...thmetischen Mittels z. B. $x = \frac{a + b}{2}$. Dieser Gleichung entspricht geometrisch ... Lage eines Punktes M in der Mitte zwischen zwei Punkten A und B; dabei ...hält M seine Lage in Bezug ...f A und B, wie immer diese ...zen äufsere geometrische Ge-...de liegen mögen. Bezieht man ...nlich die Punkte A und B auf ...en in der durch sie bestimmten Geraden liegenden Punkt O (Fig. 19), indem ...$A = a$, $OB = b$, so ist $OM = x = \frac{a + b}{2}$. Aber auch wenn statt O ein ...lerer Punkt O' gewählt wird, so dafs $O'A = a'$, $O'B = b'$, ist doch wieder ...$M = x' = \frac{a' + b'}{2}$. Denn, wenn $O'O = \delta$, so ist $a' = a + \delta$, $b' = b + \delta$, ...mit $x' = \frac{a' + b'}{2} = \frac{(a + \delta) + (b + \delta)}{2} = \frac{a + b}{2} + \delta = x + \delta = O'M$.

Fig. 19.

Geometrisches Mittel.

Nach der Formel $y = \sqrt{ab}$ wird gerechnet bei Bordas Doppel-...igung (LA 78), bei der Ermittelung der Horizontalintensität des ...rdmagnetismus aus den Ergebnissen A und B der ersten und zweiten ...auptoperation (§ 146); weitere Beispiele 146. LA 78.

Ein geometrisches Mittel ist es auch, wenn in der Ableitung der Gl. (3), 22, als Mittelwert von r^2 und r_1^2 gesetzt wird $r r_1$, denn $r r_1 = \sqrt{r^2 r_1^2}$. Dieses

Mittel wird hier nur gewählt, weil es das rechnerisch bequemste ist; würde statt rr_1 ein anderer Mittelwert $r_1 r'_1$ gewählt, wo $r'_1 = r + \varrho$ (und wieder ϱ verschwindend klein wird, wenn r_1 sich der Grenze r nähert, wie es in jener Rechnung vorausgesetzt ist), so wird auch der Unterschied zwischen den Mitteln rr_1 und rr'_1 verschwindend klein. (Immerhin ist hiermit noch nicht streng bewiesen, dafs, wenn man dieselbe Vernachlässigung bei allen unendlich vielen Gliedern der Summierung vornimmt, es in der Summe nicht einen endlichen Unterschied macht. Der strenge Nachweis liefse sich erst durch Einschliefsen zwischen eine obere und untere Grenze erbringen, wie in allen solchen wesentlich der Integralrechnung zugehörigen Aufgaben; vergl. Anh. Nr. 15, 21.)

Anh. 15, 21.

Harmonisches Mittel.

Das durch die harmonische Proportion $(a - z) : (z - b) = a : b$ definierte harmonische Mittel läfst sich übersichtlicher als in $z = \frac{2ab}{a+b}$ so darstellen: $bz + az = 2ab$, daher nach Division durch abz

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{z} \quad \cdots \quad (5)$$

Denken wir uns hier z als gegebene konstante Gröfse, a als unabhängig veränderliche, b als abhängig veränderliche Gröfse, so heifst **b dem a in Bezug auf z harmonisch zugeordnet.**

Von der Form der Gleichung (5) ist die Hohlspiegelformel (§ 103). Hierin ist z der gegebene konstante Krümmungshalbmesser des Spiegels, a die als unabhängig veränderlich gedachte Gegenstandsweite, b die ihr jeweilig zugeordnete Bildweite. Dafs zwischen a und b diese harmonische Zuordnung besteht, hat seinen allgemeineren Grund darin, dafs in dem Dreiecke AMB (Fig. 358, S. 332) der Krümmungshalbmesser OM als Einfallslot eine Winkelsymmetrale darstellt; von dieser gilt der Satz: **Die Symmetrale eines Winkels im Dreiecke teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten** (Beweis nach Fig. 20 durch $MB' = MB$, daher $B'B \parallel MO$ u. s. w.).

Denken wir uns überdies das auf dem Einfallslote normal stehende Element der Fläche des Hohlspiegels als Ebene erweitert bis zur Verlängerung der Geraden AB, so entspricht diese der Symmetrale des Aufsenwinkels bei M (Fig. 21). Die Beschränkung, unter der die Hohlspiegelformel aufgestellt wurde, dafs nämlich nur verschwindend kleine Winkel MAH vorausgesetzt werden, hat zur Folge, dafs der Punkt H zusammenfällt mit demjenigen Punkte H des Kugelspiegels, in dem der Hauptstrahl auffällt. Wir können also die Hohlspiegelformel auch so auffassen: Den beiden festen Punkten H und O sind die beiden beweglichen Punkte B und A

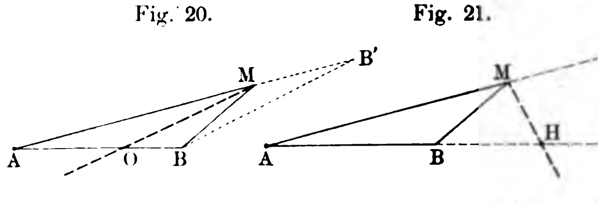


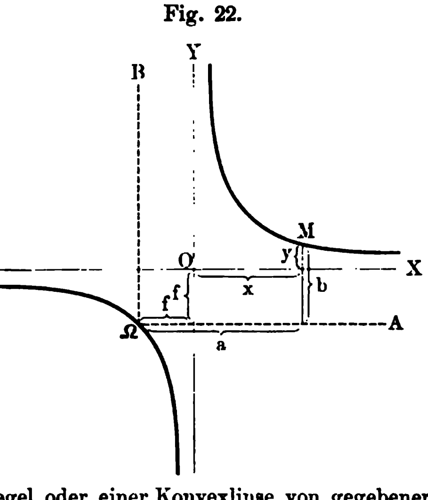
Fig. 20. Fig. 21.

harmonisch zugeordnet; dies entsprechend dem allgemeinen planimetrischen Satze: **Werden in einem Dreiecke ein Winkel und sein Aufsenwinkel halbiert, so sind die Schnittpunkte dieser beiden Winkelsymmetralen den Endpunkten der dem Winkel gegenüber liegenden Dreieckseite harmonisch zugeordnet.**

Denkt man sich dann über der Strecke OH alle diejenigen (in einem Halbkreise liegenden) Punkte M aufgesucht, für die $OM \perp MH$ und den Punkt A als Gegenstandspunkt aus $+\infty$ bis O und von da nach H wandernd, so stellt B den Bildpunkt dar, wenn immer $\measuredangle\, BMO = OMA$ gemacht wird.

Weitere arithmetische und geometrische Beziehungen ergeben sich aus (5), wenn wir $\frac{2}{z} = \frac{1}{f}$ und $a = f + x \cdots (6)$, $b = f + y \cdots (7)$ setzen. Dann wird durch eine leichte Reduktion $xy = f^2 \cdots (8)$. Das ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel (Nr. 23) in Bezug auf ein Koordinatensystem $O(XY)$, für die zu $x = f$ auch $y = f$ gehört und deren reelle Halbachse $\sqrt{f^2 + f^2} = f\sqrt{2}$ ist (Fig. 22). Betrachten wir ferner die Gleichungen (6) und (7) als Transformationsformeln in Bezug auf ein System Ω (AB), und denken wir uns in diesem Systeme die Abszisse a von $+\infty$ bis Null abnehmend, so wachsen die zugehörigen Werte der Ordinaten b gemäfs der Gleichung

Fig. 22.



$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \cdots (9)$$

— also ebenso, wie bei einem Konkavspiegel oder einer Konvexlinse von gegebener Brennweite f mit abnehmender Gegenstandsweite die Bildweite wächst.



10. Arithmetische und geometrische Reihen. Interpolation und Extrapolation.

Eine **arithmetische Reihe** (erster Ordnung) bilden die Gröfsen $a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d \ldots$; es ist dann

das $n$te Glied der arithmetischen Reihe $t = a + \overline{n-1}\, d$,
die Summe der arithmetischen Reihe $s = \frac{1}{2} n (a + t)$.

Z. B. Für die natürlichen Zahlen: $\Sigma n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n (n + 1) \ldots (1)$; für die ungeraden Zahlen; $\Sigma (2n - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2 \ldots (2)$.

Anschauliche Darstellung der Gleichung (2) in Fig. 23 und Fig. 24 — Anwendung in den Fallgesetzen § 2; hierzu §§ 3, 6.

Fig. 23.

Fig. 24.

Steigende Reihe für $q > 1$, fallende Reihe für $q < 1$. Summe der fallenden unendlichen geometrischen Reihe $s = \frac{a}{1-q}$.

Ein Beispiel einer steigenden arithmetischen Reihe gab die Verdichtungsluftpumpe, einer fallenden geometrischen die Verdünnungsluftpumpe § 48. — Graphische Darstellungen von geometrischen Reihen in Figg. 26, 27, 28.

Da die Stellenzeiger 1, 2, 3, 4 . . . $n-1$, n . . . der einzelnen Glieder der Reihe selbst eine arithmetische Reihe bilden, kann man sich vorstellen, dafs die Glieder einer geometrischen Reihe denen einer arithmetischen zugeordnet seien. In solchem Sinne sagt man z. B., dafs die Dichtigkeiten der Luft in einer vertikalen Säule nach geometrischer Reihe abnehmen, wenn die Erhebungen nach arithmetischer Reihe wachsen; ebenso, dafs die Schwingungszahlen von Tönen nach der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8, 16 . . . wachsen müssen, damit die Tonhöhe um das nämliche Intervall von je einer Oktave zunehme (ob aber diese Zunahme der Tonhöhen selbst wieder mit einer arithmetischen Reihe verglichen werden darf, ist eine Streitfrage der Psychologie, insofern es sich nicht von selbst versteht, dafs Steigerungen um gleiche Tonintervalle mit den gleichen Differenzen in einer arithmetischen Reihe verglichen werden dürfen; psychol. Anh. Nr. 40). Dafs und warum sich dieser Zusammenhang einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe auch in logarithmischer Form ausdrücken läfst, ja geradezu das Wesen der Logarithmen darstellt, zeigt zunächst das Beispiel der geometrischen Reihe 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 . . ., wo die Exponenten 0, 1, 2, 3, . . . die Werte von log 1, log 10, log 100, log 1000 . . . darstellen. Vergl. den allgemeineren Beweis Nr. 17. **Anh. 40.**

Interpolieren und Extrapolieren. Schaltet man z. B. zwischen je zwei Glieder einer arithmetischen Reihe deren arithmetisches Mittel ein, so bilden die früheren und die **interpolierten** neuen Zahlen zusammen wieder eine arithmetische Reihe. Ähnlich z. B. bei der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 . . . .

So wurden auch am Wurfapparate Fig. 17, S. 20, zwischen je zwei aufeinander folgende Lote von den Längen 0, 5, 20, 45 cm je drei so eingeschaltet, dafs auch sie der Quadratreihe sich fügen, nämlich **0**, $5.(^1/_4)^2$, $5.(^2/_4)^2$, $5.(^3/_4)^2$, **5**, $5.(^5/_4)^2$, $5.(^6/_4)^2$, $5.(^7/_4)^2$, **20**, $5.(^9/_4)^2$ . . .

Ist von einer beiderseits endlichen Reihe irgendwie das Bildungsgesetz erkannt, so kann man nach demselben die Reihe auch nach beiden Seiten erweitern (oder Glieder **extrapolieren**).

Das einfachste Beispiel ist das Erweitern der natürlichen Zahlenreihe nach beiden Seiten ins Unendliche. — In der Physik werden so öfters Reihen von direkt beobachteten Werten über die Grenze der Beobachtung hinaus mit gröfserer oder geringerer Wahrscheinlichkeit angenommen (vergl. log. Anh. Nr. 31). — Doch verbietet sich eine solche Erweiterung von selbst, wenn man weifs, dafs jenseits der Grenzen der der Erfahrung entnommenen Reihen anderweitige Naturgesetze ins Spiel kommen. Ein Beispiel hierfür das Erweitern des Gesetzes für die Volumverkleinerung der Gase beim Abkühlen bis zum absoluten Nullpunkt **Anh. 31.**

— 273° C., wobei aber schon vor dem Erreichen dieser Temperatur die Gase [...] hören Gase zu sein, indem sie flüssig oder fest werden.

11. Koordinatensysteme und Koordinaten. Graphische Darstellungen.

Aus der analytischen Geometrie der Ebene wird als bekannt vorausge[...] wie man mittels eines **zweiachsigen, rechtwinkeligen Koordinatensyst[...]** OX, OY und zweier Koordinaten von x, y cm Länge die Lage jedes Pu[...] dieser Ebene darstellt. — Richtungen der Koordinatenachsen, Vorzeichen [...] Koordinaten. —

Die drei gegeneinander normalen OX, OY, OZ (Fig. 13, S. [...] bilden ein **dreiachsiges, rechtwinkeliges Koordinatensystem.** [...] Ebenen XOY, XOZ, YOZ heifsen die drei Koordinatenebe[...] Die Lage irgend eines Punktes M wird durch die drei Koordin[...] von x, y, z cm Länge angegeben.

Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den ebenen und räumlichen r[...] winkeligen Koordinatensystemen! — Im räumlichen Systeme gelten meisten[...] zwei Koordinaten x und y als unabhängig, die dritte z als die (von [...] beiden in gleichem Maſse) abhängig veränderliche Koordinate.

Wie z. B. die Mittelpunktsgleichung eines Kreises lautet $x^2 + y^2 = a^2$, [...] Mittelpunktsgleichung der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. — Rotationsellipsoid [...] Erdsphäroid): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. — Dreiachsiges Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ [...]

LA 42. — Rotationsparaboloid (z. B. LA 42) $x^2 + y^2 = 2pz$. —

Das **ebene Polarkoordinatensystem** besteht in dem einzigen Halbs[...] OZ (Figg. 50, 69 . .). Koordinaten sind hier der (meist als unabhängig [...] änderlich gedachte) Polarwinkel φ und der (dann als abhängig veränderlic[...] dachte) Leitstrahl (*radius vector r*). Man zählt φ von 0° bis 360°, r von 0 bi[...]

So wie man die mannigfachsten einzelnen Gröſsen durch Vekt[...] darstellt, so auch die Beziehungen der mannigfachsten Gröſsen [...] einander durch **Kurven,** z. B. Luftdruckkurven (Fig. 449, S. 6[...] Sterblichkeitskurven u. s. f. Anwendungen solcher graphischer D[...] stellungen in §§ 6, 22, u. s. f.; Anh. Nr. 9 (Fig. 22), Nr. 19 (Figg. [...] 53); LA 49, 121, 135, 139, 150, 184, 196, 206, 207, 209, 223 u. s[...]

Gesetzt, alle diese physikalischen Kurven seien zunächst rein empiri[...] gefunden, indem z. B. in der Kurve von Mariottes Gesetz sowohl die Werte fü[...] wie für v, in der Kurve für die Spannkraft der Wasserdämpfe sowohl die Te[...] peraturen t wie die Spannungen p direkt gemessen und dann durch die zu[...] hörigen Strecken zu einer graphischen Darstellung vereinigt worden waren. [...] sind dann die zwei Hauptfälle zu unterscheiden, daſs ein die beiderlei Gröſ[...] verbindendes arithmetisches Gesetz bekannt, bezw. nicht bekannt [...] Im ersteren Falle bildet dann die die Gröſsen selbst verbindende Gleichung a[...] zugleich die Gleichung der Kurve. Im letzteren Falle ist zwar eine sol[...] Gleichung nicht angebbar, aber auch hier ist die Kurve noch ein anschaulic[...] Bild des zwischen den beiden Gröſsen bestehenden „funktionellen", wenn [...] auch sonst übrigens unbekannten Verhältnisses. In der folgenden Nummer [...]



jedoch der Begriff der mathematischen Funktion nur für die Fälle einer angebbaren Gleichung näher erörtert werden.

Sind nicht wie bisher nur zwei, sondern drei Gröfsen in Abhängigkeit voneinander, so ergibt sich als graphische Darstellung statt einer Linie eine **Fläche**; z. B. die für Boyle-Gay-Lussacs Gesetz in LA 144. LA 144.

12. Begriff der mathematischen Funktion.

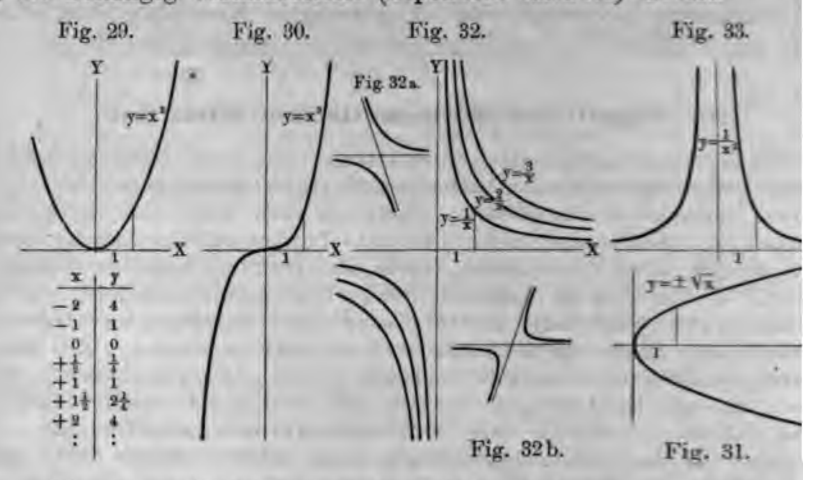
Eine arithmetische, eine geometrische (oder sonst irgend eine mathematische) **Reihe** läfst sich so auffassen, dafs die Gröfse jedes Gliedes „abhängt" von dem Stellenzeiger des Gliedes. Tragen wir dann diese, ihrer Natur nach ganzzahligen Stellenzeiger als äquidistante Punkte an einer Abszissenachse, die zugehörigen Werte der einzelnen Glieder als Strecken parallel der Ordinatenachse auf, so bilden deren Enden eine Punktreihe; sie kommen z. B. bei der arithmetischen Reihe längs einer Geraden, bei der steigenden geometrischen auf einer immer steiler werdenden Kurve (Anh. Nr. 17) zu liegen. — Dem **Interpolieren** von Gliedern in der Reihe entspricht das Dichterwerden jener Punktreihen; um aus den getrennten Punkten aber wirklich eine **stetige** Linie zu machen, müfsten unendlich viele Reihenglieder interpoliert werden oder wir müssen uns den Stellenzeiger gleichsam stetig wachsend denken, wobei dann auch die Werte der Reihenglieder im allgemeinen stetig wachsen. Es bilden so die mathematischen Reihen eine natürliche Einführung in den allgemeinen Begriff der **mathematischen Funktion**. — Wir nähern uns diesem Begriffe auch durch die Gegenüberstellung der folgenden beiden Betrachtungsweisen mathematischer Beziehungen überhaupt, einer elementaren und einer höheren. Besteht nämlich z. B. zwischen zwei Gröfsen x und y die Beziehung $y = x^2$, so können wir diese Gleichung erstens im elementaren Sinne der „Buchstabenrechnung" oder zweitens im höheren Sinne einer „**funktionellen Beziehung**" auffassen: Anh. 17.

Erstens: Denken wir uns der „Buchstabengröfse" x beliebige besondere Werte erteilt, so ergibt sich durch Quadrieren jedes dieser Werte ein zugehöriger besonderer Wert von y. Dieser Auffassung entspricht das Auseinanderlegen der einen Gleichung zwischen allgemeinen Zahlen in eine **Tabelle** von zwei Reihen besonderer Zahlen, wie das Täfelchen unter Fig. 29 (a. f. S.).

Zweitens: Denken wir uns die Gröfse x als eine veränderliche Gröfse, so ändert sich mit ihr auch die Gröfse y; dabei können wir uns x als von $-\infty$ stetig wachsend denken bis 0 und von hier bis $+\infty$. Es wird dann y stetig abnehmen von $+\infty$ bis 0 und von hier stetig zunehmen bis $+\infty$. Dieser Auffassung entspricht die graphische Darstellung der Gleichung durch die stetige **Kurve** in Fig. 29 (a. f. S.). — Ähnliche Tafeln und Kurven für die Gleichungen $y = x^3$ (Fig. 30), $y = \pm\sqrt{x}$ (Fig. 31), $y = \frac{1}{x}$ (Fig. 32), $y = \frac{1}{x^2}$ (Fig. 33) . . .

Denkt man sich statt der besonderen Operationen des Quadrierens, Kubierens, Radizierens, Reziproknehmens u. s. f. mit der Gröfse x **irgend** eine mathematische **Operation** vollzogen, so ist das Symbol hierfür $f(x)$, sprich: **Funktion von x.** Bezeichnet man ferner das zu je einem besonderen Wert von x zugehörige Ergebnis dieser Operation mit y, so ist die Gleichung $y = f(x)$ — in Worten: **„y ist eine Funktion von x"** — der Ausdruck dafür, dafs zwischen y und

x irgend ein mathematischer Zusammenhang bestehe. Es heifst da
x die **unabhängig veränderliche** (independent variable) Gröfse u
y die **abhängig veränderliche** (dependent variable) Gröfse.



Wie also die Einführung der Buchstaben $a, b, \ldots, x, y \ldots$ statt d
Ziffern ausgedrückten Zahlen 1, 2, ... 99, 100, ... die Schwelle für das
steigen von der besonderen zur allgemeinen Arithmetik darstellt, so
die Einführung der Zeichen $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ ... für irgend welche Operat
die Schwelle für das Aufsteigen von der „niederen" zur „höheren M
matik" dar.

Speziell in der Physik gewinnen die meisten der vorkommenden Gleich erst dann ihren vollen, lebendigen Sinn, wenn wir sie nicht im primitiven arithmetischer Formeln, sondern in der höheren Auffassung funktioneller ziehungen nehmen. Z. B. Das Weg-Zeit-Gesetz für freifallende Körper s = kann allerdings einfach so verstanden werden, dafs, wenn wir für t beli besondere Zahlen einsetzen, z. B. $t = 1$ sec, $t = 1^1/_2$ sec, $t = 2$ sec, sich zugehörigen Werte $s = 5$ m, $s = 11{,}25$ m, $s = 20$ m ergeben. Der volle dieser Gleichung aber, insofern sie eine Bewegung, also die stetige Ände des Ortes jenes Körpers während der stetig sich ändernden Zeit darstellen erfordert, dafs wir uns auch die Gröfse t als unabhängig veränderlich de (und in der Tat können wir die Zeit die unabhängig veränderliche Gr κατ' ἐξοχήν nennen). Wenn dann die Zeit mit der ersten Potenz der stetig vergröfsernden Zahlenwerte von t wächst, so wächst der Abstand vom Ausga punkte, d. i. der jeweilige Weg s, mit der zweiten Potenz jener Zahlen.

In den §§ 16 bis 19 sollen die einfachsten Funktionen der Elementarm matik und einige ihrer Grundeigenschaften nach dieser Auffassung in Erinne gebracht und mit je einigen physikalischen Anwendungen versehen werden.

Zuvor aber stellen die §§ 13 bis 15 die Begriffe des „Differentiales" und „Integrales", die in physikalischen Rechnungen versteckt oder offen überall besonderen Anwendung kommen, etwas allgemeiner dar.



13. Ausdrücke von der Form $\frac{y'-y}{x'-x}$ für $x' = x$ (Differentialquotienten).

1. Aufgabe: Zwischen der unabhängig veränderlichen Gröfse x und der abhängig veränderlichen Gröfse y bestehe die Beziehung $y = x^2$. Wächst ein bestimmter Wert x bis x', so wächst y bis y'. Wie grofs ist das Verhältnis der Zuwüchse $\frac{y'-y}{x'-x}$, wenn x und x' erstens um einen endlichen, zweitens um einen verschwindend kleinen Betrag voneinander unterschieden sind?

Antwort: Es ist $\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{x'^2 - x^2}{x'-x} = \frac{(x'+x)(x'-x)}{x'-x} = x' + x \ldots$ (1)

Soll nun hier x nur um einen verschwindend kleinen Betrag sich in x' verändern, so läfst sich das ausdrücken durch $x' - x = 0$ oder $x' = x$. Wird dann in (1) $x' = x$ gesetzt, so ergibt sich $\frac{y'-y}{x'-x} = x + x = 2x$ .... (2)

2. Aufgabe. Dieselbe Operation durchgeführt für die Gleichung $y = x^3$ gibt $\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{x'^3 - x^3}{x'-x} = \frac{(x'^2 + x'x + x^2)(x'-x)}{x'-x} = x'^2 + x'x + x^2$.

Für $x' = x$ wird hier $\frac{y'-y}{x'-x} = x^2 + xx + x^2 = 3x^2$. — Ähnlich gilt:

Man kann zu jeder[1]) Funktion $y = f(x)$ den Quotienten der Differenzen $\frac{y'-y}{x'-x}$ auswerten. Man nennt solche Quotienten Differenzquotienten, und wenn die Differenz $x' - x$ als eine „verschwindend kleine", d. h. wenn $x' = x$ gedacht wird, Differentialquotienten.

Als völlig gleichbedeutend mit den im Texte dieses Buches ausschliefslich benutzten schwerfälligen, elementaren Symbolen

$\frac{y'-y}{x'-x}$ schreibt man auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Differenzquotient)

$\frac{y'-y}{x'-x}$ für $x' = x$ schreibt man auch $\frac{dy}{dx}$ (Differentialquotient),

wo die Zeichen Δ und d nicht Faktoren, sondern Operationssymbole sind.

Man sagt auch z. B.: Die Funktion $y = x^2$ gibt differenziert $\frac{dy}{dx} = 2x$. Ebenso: Die Funktion $y = x^3$ gibt differenziert $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. — Die Differentialrechnung lehrt jede[1]) Funktion zu differenzieren.

Das Anwendungsgebiet dieser Operation des Differenzierens ist ein unermefslich grofses. So wurde im § 4 allgemein aus dem Weg-Zeit-Gesetz $s = f(t)$ die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ gefunden. Also z. B. angewendet auf $s = at$ ergibt sich $v = \frac{ds}{dt} = a$ (§ 4). — Aus $s = at^2$ ergibt sich $v = \frac{ds}{dt} = 2at$ (§ 4).

[1]) Von den durch die „Funktionentheorie" untersuchten Ausnahmen kann in der physikalisch angewandten Mathematik abgesehen werden.

Ebenso wurde in § 5 allgemein aus der Geschwindigkeit v die Beschleunigung $w = \frac{dv}{dt}$ gefunden. Also z. B. angewendet auf $v = a$ ergibt sich $w = 0$ (§ 5). — Aus $v = 2at$ ergibt sich $w = \frac{dv}{dt} = 2a$ (§ 5). —

Ebenso ergibt sich in § 12 aus $s = a \sin(\alpha t)$ durch Differenzieren $v = \frac{ds}{dt}$ $= a\alpha \cos(\alpha t)$ und $w = \frac{dv}{dt} = - \alpha^2 a \sin(\alpha t)$.

Vor allem solche phoronomische Berechnungen von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen waren es, die NEWTON die Differentialrechnung (unter dem Namen „Methode der Fluxionen") um dieselbe Zeit erfinden liefs, da sie in der Hauptsache (unabhängig von NEWTON) LEIBNIZ zunächst behufs einer sehr allgemeinen geometrischen Aufgabe erfand, nämlich unter dem Namen

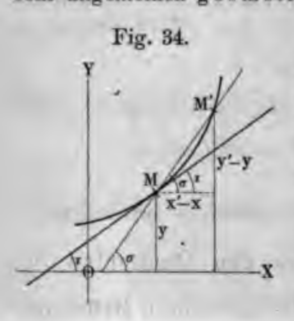


Fig. 34.

„Problem der Tangenten": 1. Aufgabe: **Es sei $y = x^2$ die Gleichung der Parabel in Fig. 29, S. 728. Wie grofs ist der Richtungskoeffizient $A = tg\tau$ in demjenigen Punkte M der Parabel, dessen Abszisse x ist?** Auflösung: Für den Punkt M ist $y = x^2$, für einen Nachbarpunkt M' ist $y' = x'^2$. Die durch M und M' gehende Sekante schliefse mit der Abszissenachse den Winkel σ ein; für ihn ist

$$tg\,\sigma = \frac{y' - y}{x' - x}.$$

Die Sekante geht in die Tangente über, wenn M' unendlich nahe an M heranrückt, also $x' - x = 0$, oder $x' = x$ wird. Dies eingesetzt in die Gleichung für $tg\,\sigma$ ergibt

$$A = tg\,\tau = \frac{y' - y}{x' - x} \text{ für } x' = x.$$

Diese allgemeine [für jede Kurvengleichung $y = f(x)$ gültige] Gleichung gibt, auf die spezielle Kurve $y = x^2$ angewendet, $A = tg\,\tau = 2x$.

Beweis: $tg\,\sigma = \frac{x'^2 - x^2}{x' - x} = x' + x$ und daher ist $tg\,\tau = x + x = 2x$.

Es entsprechen einander für diese spezielle Kurve $y = x^2$ z. B. die Werte

$x = -2$,	$x = -1$,	$x = 0$,	$x = +1/2$,	$x = +1$,	$x = +2$
$tg\tau = -4$,	$tg\tau = -2$,	$tg\tau = 0$,	$tg\tau = +1$,	$tg\tau = +2$,	$tg\tau = +4$
$\tau = 104^\circ 2' 10''$,	$\tau = 116^\circ 33' 54''$,	$\tau = 0^\circ$,	$\tau = 45^\circ$,	$\tau = 63^\circ 26' 6''$,	$\tau = 75^\circ 57' 50''$

Bemerkung. Statt ausführlich zu sagen: „$A = 2x$ ist der Richtungskoeffizient in demjenigen Punkte M der Parabel, dessen Abszisse x ist", werden wir auch abkürzend sagen: „Der Richtungskoeffizient der Parabel ist $2x$".

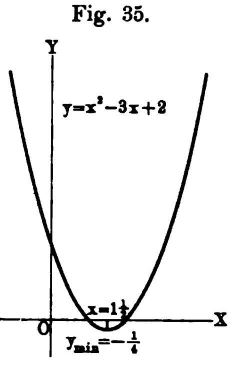
Ein Beispiel für Differenzquotienten (entsprechend $tg\,\sigma$) und Differentialquotienten (entsprechend $tg\,\tau$) vergl. auch LA 139 über „mittlere spezifische Wärme" und „wahre spezifische Wärme". LA 139.

Eine der nächstliegenden Anwendungen des Differenzierens ist die zur „Methode der Maxima und Minima".

14. Maxima und Minima der Funktionen.

Es gibt Funktionen, z. B $x = + Ax$, $y = x^3$, $y = \log x$, ..., bei denen jedem Wachsen des x auch ein Wachsen des y entspricht; andere, z. B. $y = - x^3$, $y = \operatorname{ctg} x$, ..., bei denen jedem Wachsen des x ein Abnehmen des y entspricht. — Bei sehr vielen Funktionen aber geht mit einer immer in demselben Sinne erfolgenden Änderung (Wachsen, Abnehmen) des x das Wachsen des y bei bestimmten Werten des x in ein Abnehmen (bezw. das Abnehmen in ein Wachsen) über. Man sagt von solchen Funktionen, dafs bestimmten Werten des x ein **Maximum** bezw. **Minimum** des y entspreche.

Fig. 35.



So haben die Funktionen $y = x^2$, $y = x^4$, ... bei $x = 0$ ihr Minimum. Die Funktion $y = x^2 - 3x + 2$ hat bei $x = 1^1/_2$ ihren Minimalwert (Fig. 35). Z. B. für die Funktion $y = \sin x$ (Fig. 52, S. 742) sind
die Maxima bei $x = ... - 270^0, + 90^0, + 450^0, ...$,
die Minima bei $x = ... - 90^0, + 270^0, + 630^0, ...$
Wie hier, sind also die Begriffe Maximum und Minimum nur in Bezug auf die nächste Umgebung gemeint. Z. B. $\sin 90^0 = 1$ ist sowohl gröfser als $\sin(90^0 - \xi)$ wie auch gröfser als $\sin(90^0 + \xi)$, wenn ξ eine beliebig kleine Gröfse bedeutet; dagegen sind die Maxima bei $x = 90^0, 450^0$ ... alle untereinander gleich, nämlich $= 1$.

Ein Verfahren, diejenigen Werte der unabhängigen Variabeln x anzugeben, für welche die unabhängig veränderliche Gröfse $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum erreicht, bieten die Differentialquotienten der Funktion; nämlich:

Eine Gröfse $x = f(x)$ erreicht ihre gröfsten und kleinsten Werte y_{max} bezw. y_{min} für diejenigen speziellen Werte von x, für die die Gröfse $A = \frac{y' - y}{x' - x}$ für $x' = x$ $\left(\text{kürzer geschrieben } \frac{dy}{dx}\right)$ den Wert Null annimmt [— über Ausnahmen von dieser Regel siehe unten a) und b)].

Fig. 36. Fig. 37.

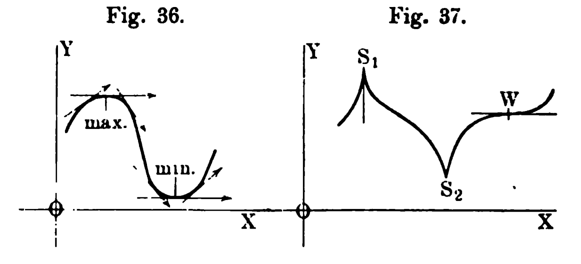


Fig. 36 gibt die graphische Begründung dieser Regel: An Stellen, wo die Kurve steigt oder fällt, ist $A = tg\,\tau$ positiv bezw. negativ. Wo dagegen die Kurve nicht mehr steigt und noch nicht fällt, ist $A = tg\,\tau = 0$.

Diese Regel hat Ausnahmen in zweierlei Fällen:

a) Es kann $A = tg\,\tau = 0$ werden, indem statt Maximis und Minimis „Wendepunkte" (W, Fig. 37) vorhanden sind, wo der konvexe in den konkaven Verlauf oder umgekehrt übergeht, wie z. B. für $y = x^3$ bei $x = 0$ (Fig. 30).

b) Es können Maxima und Minima eintreten, ohne dafs $A = tg\,\tau = 0$ nämlich wenn die Kurve Spitzen S_1, S_2 hat wie in Fig. 37.

Beispiel 1: Durch Rechnung zu zeigen, dafs und warum die Fu $y = x^2 - 3x + 2$ **ihren Minimalwert bei** $x = \frac{3}{2}$ **hat.**

Auflösung: Für diese Funktion ist $\frac{y' - y}{x' - y} = \frac{x'^2 - 3x' + 2 - (x^2 - 3}{x' - x}$
$= \frac{x'^2 - x^2 - 3(x' - x)}{x' - x} = \frac{(x' + x)(x' - x) - 3(x' - x)}{x' - x} = x' +$

Für $x' = x$ wird dieser Quotient $A = x + x - 3 = 2x - 3$. $A = 0$, mufs $2x - 3 = 0$, also $x = 1\frac{1}{2}$ sein.

Der zu diesem Werte $x = 1\frac{1}{2}$ gehörige Wert $y = (1\frac{1}{2})^2 - 3(1\frac{1}{2}) + 2 =$ ist wirklich kleiner als die Nachbarwerte des y (für $x = 1\frac{1}{2} \pm \xi$).

Beispiel 2: Zu zeigen, dafs unter allen Rechtecken von gl Umfange 4a das Quadrat den gröfsten Flächeninhalt hat.

Auflösung: Ist eine Rechteckseite x, so ist die andere $2a - x$, die $y = (2a - x)x = 2ax - x^2$; hier ist also

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{(2ax' - x'^2) - (2ax - x^2)}{x' - x} = \frac{2a(x' - x) - (x'^2 - x^2)}{x' - x} = 2a - ($$

Für $x' = x$ wird dieser Quotient $A = 2a - 2x$. Damit $A = 0$, mufs $x =$

Eine Art Umkehrung des obigen Satzes ist der folgende: Unter Rechtecken von gleichem Flächeninhalt a^2 hat das Quadra kleinsten Umfang. — Der Beweis dieser Umkehrung stützt sich auf d mittelbar einleuchtenden Satz, dafs bei ähnlichen Figuren zum gröfseren U der gröfsere Flächeninhalt und umgekehrt gehört. Sind dann nebst dem geg Quadrat von der Fläche a^2 und somit vom Umfang $4a$ noch beliebige Rec von gleichem Umfang $4a$ gegeben, so haben nach obigem Beispiel 2 all Rechtecke kleinere Flächen als das Quadrat. Ersetzt man jedes Rechteck ein ähnliches, das mit dem Quadrat flächengleich geworden ist, so sind d die Umfänge gröfser geworden als bei den kleineren Rechtecken und daher gröfser als der Umfang des Quadrates: es hat also das Quadrat den kl Umfang unter allen flächengleichen Rechtecken; *q.e.d.*

Einen arithmetischen Beweis für den einfachsten speziellen Fall jene kehrung liefert folgende Betrachtung: Wählen wir die Seite des Quadrat Längeneinheit, also seinen Inhalt als Flächeneinheit und ist die Grundlinie ein Rechtecke x, so ist seine Höhe $\frac{1}{x}$, also der Umfang $2\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Lassen wir die Wertereihe . . 5, 4, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ . . durchlaufen, so durchläu Ausdruck $x + \frac{1}{x}$ die Reihe . . $5\frac{1}{5}$, $4\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{5}$ . . offenbar 2 das Minimum ist; daher ist 2×2 jener kleinste Umfang. — gemeiner: **Sind zwei Gröfsen A und B derart veränderlich, dafs ihr Pro $A \cdot B = P$ konstant bleibt, so erreicht die Summe $A + B = S$ da Minimum, wenn $A = B$.** — Beweis: Wir setzen $A = C_1 x$, $B = \frac{C_2}{}$ x eine unabhängig veränderliche Gröfse, C_1 und C_2 konstante Gröfsen sin dafs A und B das konstante Produkt $C_1 . C_2 = P$ haben. Setzen wir ferne



abhängig veränderliche Gröfse $S = y$, so ist $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$, daher $\frac{y' - y}{x' - x}$
$= \frac{\left(C_1 x' + \frac{C_2}{x'}\right) - \left(C_1 x + \frac{C_2}{x}\right)}{x' - x} = C_1 - C_2 \frac{x' - x}{(x' - x)\, x'\, x}$; was für $x' = x$ übergeht in $C_1 - \frac{C_2}{x^2}$. Dieser Ausdruck gleich Null gesetzt gibt $x = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ und $y = C_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} + C_2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = 2\sqrt{C_1 C_2}$. [Also für $C_1 = C_2 = 1$ wieder $y = 2$]. — Anwendung in LA 200 und 206. LA 200. LA 206.

Beispiel 3: Zu zeigen, dafs die Funktion $y = x^3$ weder ein Maximum noch ein Minimum hat.

Auflösung: $\frac{x'^3 - x^3}{x' - x} = x'^2 + x'x + x^2$. Für $x' = x$ wird $A = x^2 + x x + x^2 = 3x^2$. Hier wird zwar $A = 0$, oder $3x^2 = 0$ für $x = 0$. An dieser Stelle ist aber weder ein Maximum noch ein Minimum, sondern ein „Wendepunkt", indem die Kurve bis zum Punkte $x = 0$, $y = 0$ zugenommen hat (und zwar immer schwächer), von da an aber nicht etwa abnimmt, sondern wieder zunimmt (Fig. 30, S. 728).

Beispiel 4: Zu zeigen, dafs die Summe der Quadrate $S = (x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$ ihren kleinstmöglichen Wert für das einfache arithmetische Mittel der Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_n$ erreicht (vergl. Anh. Nr. 9). Anh. 9.

Auflösung: Subtrahiert man S von $S' = (x' - a_1)^2 + \cdots (x' - a_n)^2$, so folgt aus $S' - S = [(x' - a_1)^2 - (x - a_1)^2] + \cdots [(x' - a_n)^2 - (x - a_n)^2]$ $= (x' + x - 2a_1) \cdot (x' - x) + \cdots (x' + x - 2a_n) \cdot (x' - x)$; somit

$$\frac{S' - S}{x' - x} = (x' + x - 2a_1) + (x' + x - 2a_2) + \cdots (x' + x - 2a_n)$$
$$= n(x' + x) - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Hierin $x' = x$ und dann der ganze Ausdruck gleich Null gesetzt, gibt $x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n}$.

Auf den Beweis, dafs für diesen besonderen Wert des x wirklich ein Minimum und nicht etwa ein Maximum oder ein Wendepunkt eintritt, soll hier nicht eingegangen werden. Gemäfs vorstehender Beziehung wird auch die „Fehlertheorie", d. i. die Methode, aus gegebenen Beobachtungen den wahrscheinlichst richtigen Wert zu ermitteln, überhaupt als „Methode der kleinsten Quadrate" bezeichnet.

Physikalische Anwendungen der Maxima und Minima beim Minimum der Ablenkung im Prisma § 106, Minimum der Ablenkung bei dem Hauptregenbogen LA 227, Maximum der Ablenkung bei dem Nebenregenbogen, Maximum der Stromstärke bei Gleichheit des äufseren und inneren Widerstandes LA 200 u. s. w. LA 227. LA 200.

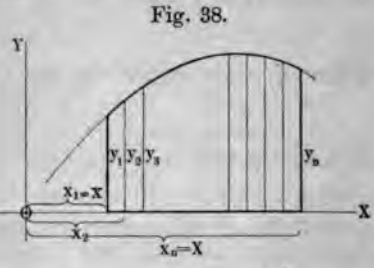
15. Summen von unendlich vielen unendlich kleinen, nach einem bestimmten Gesetze sich ändernden Gröfsen (Integrale).

Ist der Flächeninhalt einer auf ein ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Kurve (Fig. 38) zu bestimmen, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, so kann die Fläche als die Summe von schmalen Streifen aufgefafst werden, deren jeder

für sich ein Rechteck mit der Grundlinie $x' - x$ und der Höhe y darstellt und zwar dies um so genauer, je kleiner die Strecke $x' - x$ genommen wird. Es nimmt daher die Maßzahl der Fläche die Form an
$F = y_1(x_1 - x) + y_2(x_2 - x_1) \cdots + y_n(X - x_{n-1})$, wofür $F = \Sigma\, y(x' - x)$ eine abgekürzte Darstellung ist.

Wenn die Differenzen $x' - x$ verschwindend klein gedacht werden, so setzt man statt des Summenzeichens Σ das Summenzeichen $\int$ (Integralzeichen), statt der Differenz $x' - x$ das Differentialzeichen dx (vergl. Nr. 13) und schreibt $F = \int y\,dx$.

Fig. 38.



Um anzudeuten, dafs derjenige Teil des Flächeninhaltes der Kurve berechnet werden soll, der sich erstreckt von der unteren Grenze x bis zur oberen Grenze X (also derjenige Teil der Kurvenfläche, der begrenzt ist durch die Grundlinie $X - x$, durch die beiden in x und X errichteten Ordinaten y_1 und y_n sowie durch den über $X - x$ liegenden Teil der Kurve), schreibt man

$$F_x^X = \int_x^X y\,dx \quad \text{oder} \quad F_x^X = \int_x^X f(x)\,dx.$$

In dieser Bezeichnungsweise lauten z. B. die aus der analytischen Geometrie bekannten Flächeninhaltsformeln für die

Halbparabel im I. Quadranten $F_0^x = \int_0^x y\,dx = \int_0^x \sqrt{2px}\,dx = \frac{2}{3} \cdot xy = \frac{2}{3} x\sqrt{2px}$,

Halbellipse im II. und I. Quadranten $F_{-a}^{+a} = \int_{-a}^{+a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,ab\pi$.

Von den physikalischen Rechnungen dieses Buches waren also Integrationen Galileis Ableitung des Gesetzes $s = \frac{g}{2}t^2$ aus $v = gt$ (§ 6, Fig. 14), sowie die entsprechende arithmetische Ableitung (LA 9). Ferner die Berechnung von Arbeitssummen, in deren Arbeitsdiagrammen gerade (Fig. 65) oder stetig gekrümmte Kurven (Figg. 66, 67) vorkommen; die Berechnung der Gravitations-, elektrischen und magnetischen Potentiale; die Berechnung von Schwerpunktskoordinaten (Nr. 9 und LA 70), von Trägheitsmomenten (LA 90) u. s. f. —

LA 9. LA. 70, 90.

Einem ersten Einblick in den Zusammenhang zwischen Integral- und Differentialrechnung diene noch folgendes: Während fast alle Summierungen von unendlichen Reihen, wie sie in der Elementarmathematik durchgeführt werden, auf mehr oder minder zufällig scheinenden Kunstgriffen beruhen, löst die Integralrechnung ihre Aufgaben dadurch, dafs das Integrieren die inverse Operation zum Differenzieren ist. Dies werde hier nur an einigen Beispielen erläutert.

1. Beispiel: Es sei die Summe einer Reihe von Gröfsen von der Form $x^2(x' - x)$ zu bilden, wo x vom Anfangswerte Null bis zu einem beliebig großen endlichen Spezialwerte X stetig zunehmend und die Differenz $x' - x$ verschwindend klein vorausgesetzt wird. Dann hat die verlangte Summe die Form $\int_0^X x^2 dx$.



Denken wir uns die Strecke von O bis X in n gleiche Teile geteilt, so findet die annähernde Gleichung $\Sigma n^2 = \frac{n^3}{3}$ (Nr. 10, Gl. 4) um so besser Anwendung, je gröfser n ist. Setzen wir also $X = n.(x' - x)$, so wird $\int\limits_0^X x^2\, dx = \frac{X^3}{3}$. — Hier läfst sich aber der Kunstgriff, der in Nr. 10 zur Beziehung $\Sigma n^2 = \frac{n^3}{3}$ geführt hatte, ersparen, wenn wir beachten, dafs nach Nr. 13 aus der Gl. $y = x^3$ durch Differenzieren folgt $\frac{dy}{dx} = 3x^2$; schreiben wir dafür $dy = 3x^2 dx$ oder $x^2 dx = \frac{1}{3}\, dy = \frac{1}{3}\, d\,(x^3)$ $= d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x'^3}{3} - \frac{x^3}{3}$, so erkennen wir die Integration $\int\limits_0^X x^2 dy = \frac{X^3}{3}$ als invers zur Differentiation $\frac{1}{3}\, d\,(x^3) = x^2 dx$.

2. Beispiel: Ebenso ist $\int\limits_0^X x^3 dx = \frac{X^4}{4}$ als invers zur Differentiation $\frac{1}{4}\, d\,(x^4)$ $= x^3 dx$. — Etwas allgemeiner ist $\int\limits_a^A x^2 dx = \frac{A^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ und $\int\limits_a^A x^3 dx = \frac{A^4}{4} - \frac{a^4}{4}$.

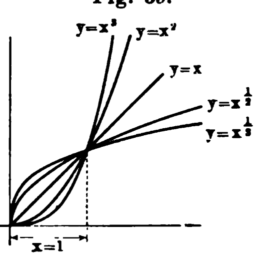
Nehmen wir nun im weiteren die oben mitgeteilte (und durch die beiden angeführten Beispiele natürlich keineswegs schon strenge bewiesene) Beziehung zwischen Integrieren und Differenzieren als allgemein gültig an, so ergeben sich z. B. aus den Differentialbeziehungen $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$ und $d\cos x = -\sin x\, dx$ die folgenden weiteren Beziehungen: 3. Beispiel: $\int\limits_r^R \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ (vergl. § 22).

4. Beispiel: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$ (vergl. Nr. 19).

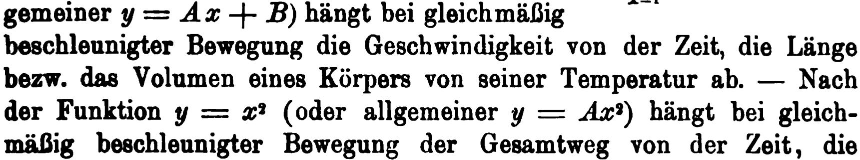
16. Die Funktion $y = x^m$.

Unter den allgemeinen Ausdruck $y = x^m$ fallen alle Potenzen und Wurzeln, z. B.: x selber für $m = 1$, x^2 für $m = 2$, x^3 für $m = 3$, ...; ferner die Reziprokwerte $\frac{1}{x}$ für $m = -1$, $\frac{1}{x^2}$ für $m = -2$, ...; $\sqrt{x}$ für $m = 1/2$, $\sqrt[3]{x}$ für $m = 1/3$, ... In Fig. 39 sind einige dieser Kurven zusammengestellt.

Fig. 39.



Man stelle die unter den Ausdruck $y = x^m$ fallenden Gesetze aus den verschiedenen Teilen der Physik möglichst vollständig nach dem Vorbilde folgender Beispiele zusammen:



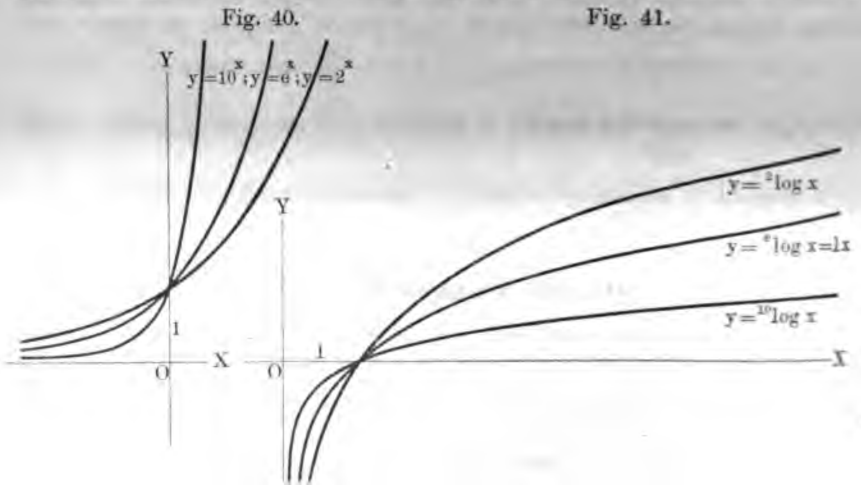
Nach der Funktion $y = x$ (oder allgemeiner $y = Ax + B$) hängt bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung die Geschwindigkeit von der Zeit, die Länge bezw. das Volumen eines Körpers von seiner Temperatur ab. — Nach der Funktion $y = x^2$ (oder allgemeiner $y = Ax^2$) hängt bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung der Gesamtweg von der Zeit, die

Stromwärme von der Stromstärke . . . ab. — Nach der Funktion $y = \sqrt{x}$ oder (allgemeiner $y = A\sqrt{x}$) hängt bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung die Geschwindigkeit vom Wege ab. — Nach der Funktion $\frac{1}{x}$ $\left(\text{oder allgemeiner } \frac{A}{x}\right)$ hängt nach dem Boyleschen Gesetze p von v, oder v von p ab; ebenso das Potential V vom Abstand r. — Nach der Funktion $\frac{1}{x^2}$ hängen die Massenanziehung, Schallstärke, Lichtstärke u. s. w. vom Abstande ab. — Dagegen folgen (nach MAXWELL) bestimmte Molekularkräfte dem Gesetze $\frac{1}{x^5}$. U. s. f.

17. Die Funktionen $y = a^x$ und $z = {}^b log\, x$.

Die Gleichung $y = a^x$ $(a > 1)$ gibt nach x aufgelöst $x = {}^a log\, y$. Wie entsprechen daher die logarithmischen Kurven in Fig. 41 den Exponentialkurven in Fig. 40? Warum haben alle Kurven in Fig. 40 die negative Abszissenachse, in Fig. 41 die negative Ordinatenachse zur Asymptote? Warum gehen sie alle durch

Fig. 40. Fig. 41.



den Punkt $x = 0$, $y = 1$? Dem sehr raschen Steigen der Exponentialkurve für große x entspricht das sehr schwache Steigen der logarithmischen Kurve für sehr große y (man sagt: **Das „logarithmische Unendlich" ist ein schwächeres Unendlich als jedes algebraische, z. B.** $log\, x$ **ist kleiner als** $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, ... $\sqrt[1000]{x}$ ... für $x = \infty$).

Da der logarithmischen Funktion **die Exponentialfunktion zu** Grunde liegt, in der Elementarmathematik **aber nicht so ausführlich untersucht** zu werden pflegt, wie (wegen ihrer praktischen **Verwendung) die Logarithmen, so sei** über die Exponentialfunktion und speziell **über die Zahl e folgendes mitgeteilt:**

Vergleichen wir die Funktion $y = x^2$ **mit der Funktion $Y = 2^x$, indem** wir beide für $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ auswerten, **so wird das rasche Wachsen der**



Reihenglieder 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ... alsbald noch stärker übertroffen durch das von 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Die Funktion $Y = a^x$ heifst **Exponentialfunktion** (und gehört **zu den transzendenten Funktionen im Gegensatz zu den algebraischen, unter die x^a gehört, wenn a rational ist). — Fig. 40 zeigt die Exponentialkurven für $a = 2$, $a = e$, $a = 10$. Dabei ist die Zahl $e = 2{,}718281828459045 2\ldots$, bekanntlich die Basis der „natürlichen" Logarithmen, definiert als Wert der Grenze, der sich der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$ immer mehr nähert, je gröfser ω wird; was wir so schreiben können:**

$$e = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega_{\text{für } \omega = \infty} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Um die angegebene Zahl e in etlichen Stellen zu bestätigen, berechne man diesen Ausdruck für $\omega = 1, 2, 3 \ldots$ nach dem binomischen Satze; ferner z. B. für $\omega = 100, 1000 \ldots$ mittels vielstelliger Logarithmen.

Auf Grund der Definitionsgleichung (1) für e ergibt sich sodann allgemeiner:

$$\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{x} \cdot x} = \left[\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{x}}\right]^x, \text{ daher } \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega_{\text{für } \omega = \infty} = e^x \quad \ldots (2)$$

Eine naheliegende **arithmetsiche** Anwendung dieser Zahl bildet die folgende Aufgabe der Zinseszinsrechnung: Ein Kapital A zu p Prozent auf n Jahre angelegt, gibt, je nachdem die Zinsen nach $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \ldots \frac{1}{r}$ Jahr zum Kapital geschlagen werden, die Endwerte

$$A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \; A\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p}{100}\right)^{2n}, \ldots E_{n,r} = A\left(1 + \frac{1}{r}\frac{p}{100}\right)^{nr} \quad \ldots (3)$$

Welcher Grenze nähert sich letzterer Ausdruck, wenn die Verzinsung nach immer kleineren und schliefslich nach verschwindend kleinen Zeitteilen erfolgt, d. h. $r = \infty$ wird? (Anwendung, wenn z. B. das Zuwachsen von Holz in einem Walde nicht wie bei uns in Perioden von ganzen Jahren, sondern wie in den Tropen **stetig** erfolgt, weshalb wir eine Verzinsung für $r = \infty$ als „**organische Verzinsung**" bezeichnen können). Antwort: Der Ausdruck in Gl. (3) hat den Bau des Ausdruckes $\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega$ in Gl. (2), wenn $x = \frac{p}{100}$ und $r = \omega$ gesetzt wird. Daher ist

$$E_{nr} = A\left[\left(1 + \frac{\frac{p}{100}}{r}\right)^r\right]^n = A \cdot \left(e^{\frac{p}{100}}\right)^n = A \cdot e^{\frac{pn}{100}} = A \cdot e^z \quad \ldots (4)$$

wo $\frac{pn}{100} = z$ die einfachen Zinsen der Kapitalseinheit für n Jahre darstellt. —

In der **Physik** sind die Funktion $y = e^x$ und aus ihr zusammengesetzte Funktionen mehrfach wichtig. So lautet die Gleichung der **Kettenlinie** $y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$ in Bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Ordinatenachse die vertikale Symmetrale der Kettenlinie ist und dessen Anfangspunkt h cm unter dem **tiefsten** Punkte der Kettenlinie liegt.

Man beachte die gemeinsame Form in den Gesetzen

$b = b_0 e^{-\lambda h}$ für Barometerstand b und Höhe h (barometrische Höhenmessung)

$t = t_0 e^{-\lambda z}$ für die Abnahme der Temperatur t mit der Zeit z (Newtons Erkaltungsgesetz)

$l = l_0 e^{\pm \lambda A}$ für die Länge l einer Gassäule, zu deren Zusammendrückung (bei konstanter Temperatur) eine Arbeit A aufgewendet worden ist (LA 225),

LA, 225.

wo λ je eine Konstante bedeutet.

Oft werden für empirisch gewonnene Kurven (z. B. für die Spannkraft der Wasserdämpfe) zweckmäßig Gleichungen von der Form $y = A e^{a+bx}$ oder $y = A e^{a+bx+cx^2}$ u. s. f. behufs Anpassung an die durch direkte Versuche gefundenen Wertpaare x und y benutzt.

Physikalische Anwendung findet das logarithmische Wachsen z. B. bei der barometrischen Höhenmessung, indem der Barometerstand als unabhängig, die Höhe als abhängig veränderlich aufgefafst wird.

Überhaupt läfst sich jede Abhängigkeit, die einer geometrischen Reihe entspricht (wobei in $t = a \cdot q^{n-1}$ die Stellenzeiger n im Exponenten stehen, sonach t eine Exponentialfunktion von n ist), auch als logarithmische auffassen, indem wir die abhängige und die unabhängige Gröfse vertauschen; z. B.: Bei der Luftpumpe schreitet die Verdünnung fort nach einer geometrischen Reihe, wenn nämlich die Anzahl der Kolbenzüge als Stellenzeiger der Reihenglieder betrachtet wird; daher mufs die Zahl der Kolbenzüge nach dem Gesetze des Logarithmus zunehmen, wenn die Verdünnung nach einer (fallenden) arithmetischen Reihe erfolgen soll.

18. Die goniometrischen Funktionen.

Ein Beispiel für die Funktion Tangens: Befindet sich im wagerechten Abstande $b = 10$ m vom Fufspunkte eines lotrechten Turmes ein Auge, das (z. B. durch ein Diopter oder Fernrohr) unter Elevationswinkeln von $\alpha^0 = 0^0, 1^0, 2^0, 3^0, \ldots 30^0, \ldots 45^0, \ldots 60^0, \ldots 87^0, 88^0, 89, 90^0$ gegen den Turm hin blickt (Fig. 42), so gehören zu immer gröfseren Winkeln α auch immer gröfsere Strecken a vom Fufspunkte des Turmes aufwärts bis zu dem von der Blicklinie getroffenen Punkte. Es wachsen aber die Strecken a nicht einfach proportional den Winkeln α, sondern in stärkerem Verhältnisse. Und zwar läfst sich dieses Verhältnis auch nicht angeben durch irgend eine algebraische Funktion (z. B. α^2 oder α^3 ..., so dafs etwa $a = b\alpha^2$ oder $b\alpha^3$ ... wäre), sondern das Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist eine ganz eigenartige Funktion, nämlich eine „goniometrische Funktion" von α, und es wird daher geschrieben $\frac{a}{b} = tg\, \alpha$ (sprich: „a zu b ist *Tangens* α" oder ausführlicher: „das Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist die goniometrische Tangente des Winkels von α Grad").

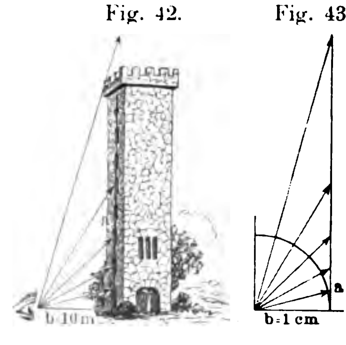


Fig. 42. Fig. 43.

Aus planimetrischen Betrachtungen ist bekannt, dafs also $tg\, 0^0 = 0{,}00000$, $tg\, 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735$, $tg\, 45^0 = 1{,}00000$, $tg\, 60^0 = \sqrt{3} = 1{,}73205$, $tg\, 90^0 = \infty$.

Die Zwischenwerte von $tg\,\alpha$ sind zu entnehmen den „**Tafeln der natürlichen goniometrischen Funktionen**" (und den **Tafeln der Logarithmen der goniometrischen Funktionen**).

Die Funktion $tg\,\alpha$ hat ihren Namen „**Tangens**" davon, daſs, wenn man zu den Winkeln α als Centriwinkeln einen Kreis mit der Strecke b als Halbmesser zeichnet (Fig. 43), die dem Winkel α gegenüberliegenden Strecken a alle längs der im Endpunkte von b an den Kreis gelegten (planimetrischen) **Tangente** zu liegen kommen. Insofern wird das Wachsen der Funktion tg veranschaulicht durch das Wachsen dieser **Tangentenstrecken**. — Am zweckmäßigsten ist es hierbei, die Strecke $b = 1$ cm zu nehmen und so die Funktion tg zu veranschaulichen durch die **Tangentenstrecke am Einheitskreise**. Es ist aber $tg\,\alpha$ **nicht eine Strecke**, sondern gemäß der Definition $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$ **eine unbenannte Zahl**.

Da durch die zwei Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreieckes auch die Hypotenuse c gegeben ist (Fig. 44), und da sich aus den Gröſsen a, b, c **sechs** verschiedene Verhältnisse $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$ bilden lassen, so gibt es auſser der Funktion $tg\,\alpha$ noch fünf andere goniometrische Funktionen $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $ctg\,\alpha$, $sec\,\alpha$, $cosec\,\alpha$.

Fig. 44.

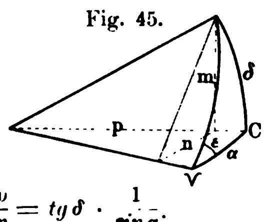
Durch irgend **eine** von ihnen sind die fünf anderen gegeben mittels der **goniometrischen Grundformeln**; denn es folgen durch Multiplikationen, bezw. aus dem Pythagoreischen Lehrsatz $a^2 + b^2 = c^2$

aus den Definitionen		die Reziprokformeln	die Quadratformeln
$sin\,\alpha = \frac{a}{c}$	$cosec\,\alpha = \frac{c}{a}$	$sin\,\alpha\; cosec\,\alpha = 1$	$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$	$sec\,\alpha = \frac{c}{b}$	$cos\,\alpha\; sec\,\alpha = 1$	$tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$
$tg\,\alpha = \frac{a}{b}$	$ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$	$tg\,\alpha\; ctg\,\alpha = 1$	$1 + ctg^2\alpha = cosec^2\alpha$.

Der bisherigen Definition der Funktion tg und der übrigen goniometrischen Funktionen liegt die Voraussetzung zu Grunde, daſs der Winkel α ein **absoluter spitzer Winkel** sei; denn nur für einen solchen läſst sich ein **rechtwinkliges Dreieck** konstruieren, indem von einem Punkte des einen Schenkels eine Normale auf den anderen Schenkel gefällt wird. — Wie sich die **Definitionen erweitern** lassen für **beliebige Winkel** φ, soll, nebst einigen anderen Eigenschaften, nur für die beiden in der Physik besonders häufig vorkommenden Funktionen *Sinus* und *Cosinus* näher ausgeführt werden in der folgenden Nr. 19.

Aus der sphärischen Trigonometrie. Wiewohl die Definitionen der goniometrischen Funktionen auf Grund **ebener** Dreiecke gegeben sind, so sind sie doch notwendig und ausreichend auch für die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln **sphärischer Dreiecke**. Als Beispiel soll hier nur die Beziehung $tg\,A = \frac{tg\,a}{sin\,b}$ für das rechtwinklige Dreieck (mit dem Winkel $C = 90^0$) abgeleitet werden, und zwar in der Form $tg\,\varepsilon = \frac{tg\,\delta}{sin\,\alpha}$ die in LA 212 zur Anwendung kommt. Aus Fig. 45 folgt $tg\,\varepsilon = \frac{m}{n} = \frac{m}{p} \cdot \frac{p}{n} = tg\,\delta \cdot \frac{1}{sin\,\alpha}$.

Fig. 45.



LA 212.

19. Näheres über die Funktionen $y = \sin x$ und $z = \cos$

I. Sinus für absolute spitze Winkel α: Ist $0^0 \gtreqless \alpha^0 \leqq 90^0$, so
dem rechtwinkligen Dreiecke ABC das Verhältnis $\frac{a}{c} = \sin \alpha$. Spezi

$$\sin 0^0 = 0, \quad \sin 30^0 = \frac{1}{2}, \quad \sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \sin 90^0 = 1$$
$$= 0{,}5000, \quad = 0{,}7071, \quad = 0{,}8660, \quad = 1{,}($$

Die unbenannte Zahl $\sin \alpha$ läfst sich darstellen durch die S
strecke, nämlich als **Halbsehne** im Einheitskreise (Fig. 46)
nämlich im Kreise mit dem Halbmesser $c = 1$ cı
Maßzahl der zum Centriwinkel $2\alpha^0$ gehörigen Sehne
ist die Maßzahl der Halbsehne $\frac{s}{2} = a$ und $\sin \alpha = \frac{a}{1}$
— Die Funktion $\sin \alpha$ wächst mit α, und zwar an
schnell, später langsam.

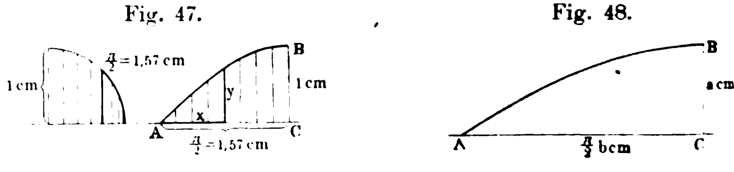
Fig. 46.

Dieses Wachsen des Sinus mit dem Winkel läfst sich
konkreter veranschaulichen, indem wir eine Strecke (z. B.
Stab oder ein Brett, vgl. die Fig. 2, S. 7 für die schiefe E
in dem einen Endpunkte an einer bestimmten Wagrechten (z.
Tischplatte) festgehalten und von dem anderen Endpunkte ein Lot (z. B
Schnur) auf die Wagrechte herabgelassen denken. Je steiler die Strecke i
so länger wird das Lot, aber so, dafs die Lotlängen langsamer al
Winkel wachsen; insbesondere: Nachdem der Winkel erst 30^0, d. i. ein Dı
der vollen Gröfse von 90^0 erreicht hat, hat die Lotlänge schon $1/2$, d. i. die H
ihrer vollen Länge Eins (gleich der Stablänge) erreicht. — Verschiedene Beispie
Gröfsen, die nach der Funktion Sinus wachsen (z. B. aus der Geometrie: Die S
eines schiefwinkligen Dreieckes mit γ, wenn die Stücke a und α konstant bl
gemäß $c = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma$; desgleichen der Flächeninhalt gemäß $f = \frac{1}{2} a b \sin$
Aus der Physik: $a_\varepsilon = a \sin \varepsilon$ [§ 2]; $g_\varepsilon = g \sin \varepsilon$ [§ 6]; $W = \frac{c^2}{g} \sin 2\varepsilon$ [§ 11]

Statt die Winkel wie bisher im **Gradmaße**, **empfiehlt es sich**
Anh. 2. sie im **absoluten Winkelmaße** (Anh. Nr. 2) zu messen. Dann

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \sin \frac{\pi}{2} =$$

Werden die Bogen des Viertelkreises (Fig. 47) als Abszissen



die Sinusstrecken als Ordinaten aufgetragen, so bilden deren E
punkte die **einfache Sinuskurve** AB (Fig. 47); so nennen wir

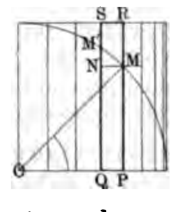
ezielle Sinuskurve, deren Basis $AC = \frac{\pi}{2}$ und deren Höhe $CB = 1$ ist; re Gleichung ist $y = \sin x$ $\left(0 \lesseqgtr x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Wird die Basis im Verhältnis b mal so grofs und die Höhe im Verltnis a mal so grofs genommen, so ergibt dies die **allgemeine Sinuskurve** ig. 48); ihre Gleichung ist $y = a \sin \frac{x}{b}$.

Für sehr kleine (im absoluten Maße gemessene) Winkel ξ ; $\sin \xi = \xi$ oder $\frac{\sin \xi}{\xi} = 1$.

Veranschaulichung: In der einfachen Sinuskurve ist das sehr kleine Dreieck ehst der Spitze A ein gleichschenklig-rechtwinkliges, dessen wagerechte Kathete ξ, ssen lotrechte $\sin \xi$ ist. — Strengere Begründung Anh. Nr. 21. Anh. 21.

Der Flächeninhalt der einfachen Sinuskurve ist gleich einer ächeneinheit. — Beweis (Fig. 49): Die Basis AC werde in eiche kleine Strecken zergt, deren eine, z. B. mm', eich ist einem entspreenden Bogen MM' des nheitskreises. Wird dieser nheitskreis ebenfalls in reifen zerlegt, die bis zur eren Quadratseite verlängert werden, so ist der Streifen $PQSR$ chengleich dem Streifen $mm'sr$ (denn die Breiten PQ nehmen in mselben Verhältnis zu, wie die Höhen mr).



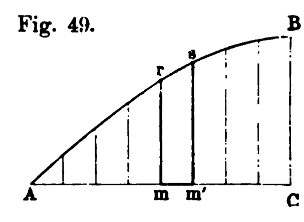


Fig. 49.

Für die allgemeine Sinuskurve $y = a \sin \frac{x}{b}$ ist die Fläche $f = ab$. — nn jeder Streifen ist hier der Höhe nach a mal, der Breite nach b mal so grofs, bei der einfachen Sinuslinie.

Zusatz: Diese beiden Flächensätze lauten in Integralzeichen (Nr. 15) so:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2} b} a \sin \frac{x}{b} \, dx = ab.$$

Mittelwert der Funktion *Sinus* ist die Höhe h desjenigen Rechteckes, der Sinuskurve bei gleicher Basis flächengleich ist (Fig 50). Somit ist für die

fache Sinuskurve $h \cdot \frac{\pi}{2} = 1$, also $h = \frac{2}{\pi}$;

gemeine „ $H \cdot \frac{\pi}{2} b = ab$, „ $H = \frac{2}{\pi} a$.

(Anwendung in LA 197: „mittlere Stromrke des Sinusstromes.") LA 197.

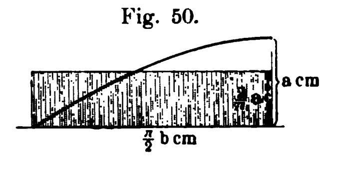
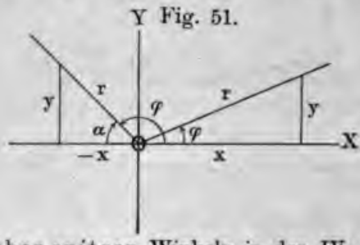
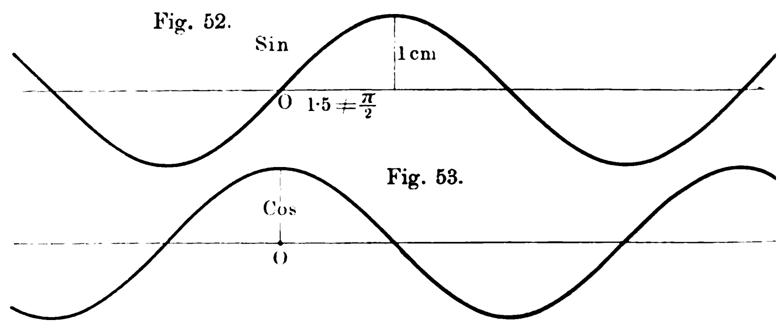


Fig. 50.

II. Sinus für beliebige Winkel φ: Ist der gegebene Winkel $\varphi^0 > 90$ $\varphi^0 < 0^0$, so läfst sich nicht mehr ein Lot von dem einen Schenkel auf den a fällen, und es ist daher auch nicht mehr die Definition des Sinus bei absoluten spitzen Winkel ohne weiteres auf jeden anderen Winkel übert Wohl aber läfst sich zu jedem beliebig grofsen, positiv oder n bezeichneten Winkel φ ein „entsprechender absoluter spitzer Wi auf folgende Art zuordnen: Der Scheitel des Winkels φ wird in den A punkt eines rechtwinkligen Koor systems (Fig. 51), der eine Schenkel schenkel) in die positive Abszissenr gebracht und der Winkel im Sinne positiven Abszissen- gegen die positi natenrichtung hin gezählt. Dann kon andere Schenkel (bewegliche Schenk stumpfen Winkeln in den II. Qua bei überstumpfen Winkeln in den über spitzen Winkeln in den IV., bei negativen spitzen Winkeln ebenfalls IV. Quadranten u. s. w. zu liegen. Wird von diesem beweglichen Schenk beliebige Strecke r cm abgeschnitten und von dem Endpunkt auf die Abszis eine Normale gefällt, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α bei dem Scheitel O; und zwar ist α derjenige absolute Wink den der gegebene Winkel φ gröfser ist als das 0-, 1-, 2-, 3-, .. von 180°. Wir nennen diesen Winkel α den „dem Winkel φ entsprechen soluten spitzen Winkel" (oder kurz „den entsprechenden Winkel") weitern die Definition des Sinus für solche absolute spitze Winkel so:



Unter dem Sinus eines beliebigen Winkels φ verstehen w **Sinus des ihm entsprechenden (absoluten spitzen) Wink und zwar mit dem Vorzeichen der Ordinate desjenigen Quadr bis in welchen der bewegliche Schenkel des Winkels φ reicht.** — Di finition ist eine Erweiterung der für absolute spitze Winkel gegeb da sie sich, wenn speziell $0^0 \leqq \varphi \gtreqless 90^0$ ist, mit der für $sin\,\alpha$ gegebenen

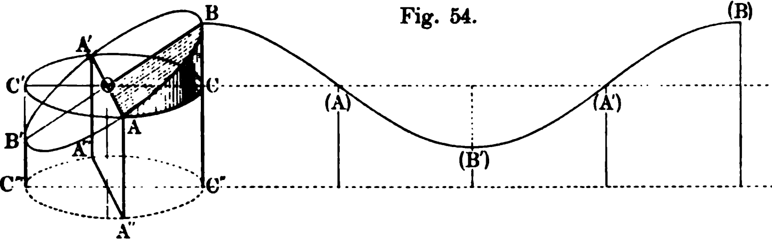


Graphische Darstellung des Gesamtverlaufes der Fu tion $y = sin\,x$: Für $0 \gtreqless x \geqq \frac{\pi}{2}$ ergibt sich als I. Quadrant Sinuskurve die oben als einfache Sinuskurve bezeichnete L Diese wird dann für den II., III., IV., ..., —I., —II., ... Quadra

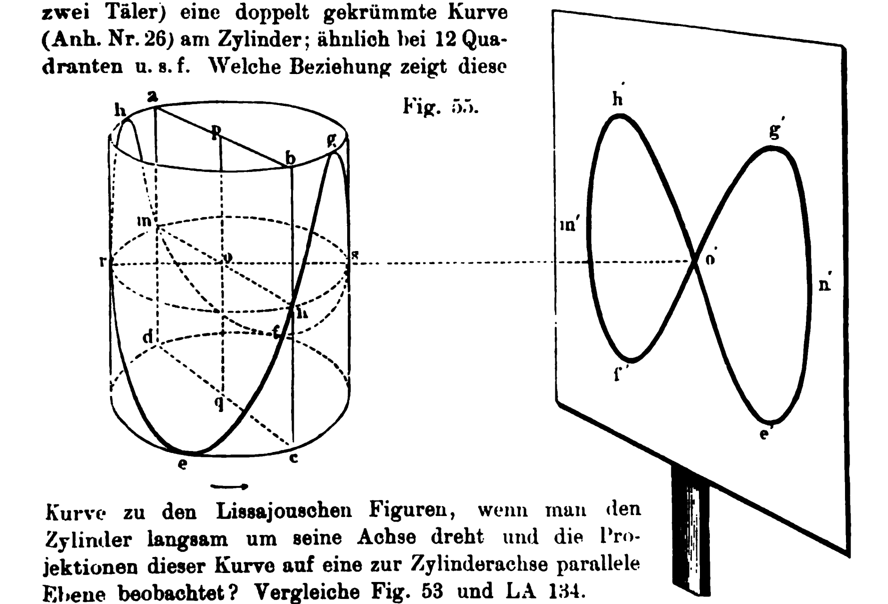


in teils axialsymmetrischer, teils centralsymmetrischer Lage (Anhang Nr. 22) zu der nach beiden Seiten ins Unendliche verlaufend gedachten „Wellenlinie“ angereiht (Fig. 54). Anh. 22.

Als eine in der Physik vielfach nützliche Anwendung betrachten wir folgende Beziehung zwischen der Sinuslinie und dem schiefen Zylinderschnitte (Fig. 52). Durch den geraden Kreiszylinder sei ein zur Achse senkrechter Schnitt $A''C''A'''C'''$ und ein zur Achse schiefer Schnitt $ABA'B'$ gelegt. Wird der Mantel des Zylinders in eine Ebene abgewickelt, so dafs der Punkt A nach (A), B' nach (B') ... zu liegen kommt, so ist die Kurve B (A) (B') (A') (B) eine Sinuskurve mit dem Nullpunkt A' (oder eine Cosinuskurve mit dem Anfangspunkte C). Ist der Radius AC des Zylinders gleich b und $CB = a$, so ist die Gleichung dieser Kurve [in Bezug auf (A') als Anfangspunkt] $y = a \sin \frac{x}{b}$. (Beweis!) — Umgekehrt: Wird auf ein rechteckiges Blatt die Sinuskurve B (A) (B') (A') (B) gezeichnet und zu



einem Zylinder zusammengerollt, so bildet der krumme Rand einen ebenen (elliptischen) Schnitt des Zylindermantels. Hierbei ist vorausgesetzt, dafs nur vier Quadranten der Kurve (entsprechend einer Wellenlänge mit Wellenberg und Wellental) gegeben waren. Dagegen geben 8 Quadranten (zwei Berge und zwei Täler) eine doppelt gekrümmte Kurve (Anh. Nr. 26) am Zylinder; ähnlich bei 12 Quadranten u. s. f. Welche Beziehung zeigt diese Anh. 26.



Kurve zu den Lissajouschen Figuren, wenn man den Zylinder langsam um seine Achse dreht und die Projektionen dieser Kurve auf eine zur Zylinderachse parallele Ebene beobachtet? Vergleiche Fig. 53 und LA 134. LA 134.

Beziehungen zwischen den Funktionen Sinus und Cosinus. Werden die Funktionen $y = \sin x$ und $z = \cos x$ so in Kurven dargestellt, daſs die Nullpunkte untereinander zu liegen kommen (Figg. 55, 56 a. v. S.), so zeigt die Vergleichung beider Kurven zunächst die Beziehungen

$$\sin (90^0 - \varphi) = \cos \varphi, \quad \cos (90^0 - \varphi) = \sin \varphi,$$

und zwar für Werte von φ beliebiger Quadranten.

Man präge sich nach den graphischen Darstellungen ein, in welchen Punkten die beiden Funktionen den Wert 0 haben, für welche Intervalle des Winkels x sie positiv, bezw. negativ sind; wo sie steigen, fallen; wo sie ihre Maxima + 1, bezw. ihre Minima − 1 haben.

Anh. 13. Rechnerisch ergeben sich diese Einzelbestimmungen nach Anh. Nr. 13 und 79 so:

Differentiation der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. — Wir bilden:

$$\frac{\sin x' - \sin x}{x' - x} = \frac{2 \cos \frac{x' + x}{2} \sin \frac{x' - x}{2}}{x' - x} = \cos \frac{x' + x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x' - x}{2}}{\frac{x' - x}{2}}.$$

Da $\frac{x' - x}{2}$ ein sehr kleiner Winkel ist, so wird $\frac{\sin \xi}{\xi} \doteq 1$, und für $x' = x$ wird $\frac{\sin x' - \sin x}{x' - x} = \cos x$. $\left(\text{Oder } \frac{d \sin x}{dx} = \cos x.\right)$

Ebenso ergibt sich $\frac{\cos x' - \cos x}{x' - x} = - \sin \frac{x' + x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x' - x}{2}}{\frac{x' - x}{2}}$, und für $x' = x$ wird $\frac{\cos x' - \cos x}{x' - x} = - \sin x$. $\left(\text{Oder } \frac{d \cos x}{dx} = - \sin x.\right)$

Allgemeiner gehört zu $y = a \sin \alpha x$ der Differentialquotient $\alpha a \cos \alpha x$,
„ $y = b \cos \beta x$ „ „ $- \beta b \sin \beta x$.

Durch solche Differentiationen nach t haben sich im § 12 aus $s = a \sin \alpha t$ ergeben $v = \alpha a \cos \alpha t$ und $w = - \alpha^2 a \sin \alpha t$.

Zunahme, Abnahme, Maxima und Minima von Sinus und Cosinus. — Da die Funktion $y = \sin x$ den Richtungskoeffizienten $A = \cos x$ hat und da $\cos x$ positiv ist im I., IV., V. VIII. . . . Quadranten, so ist in diesen Quadranten die Funktion $\sin x$ in Zunahme.

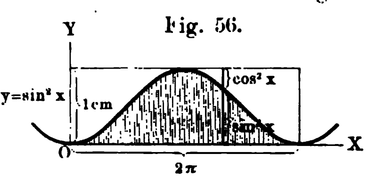
Da die Funktion $z = \cos x$ den Richtungskoeffizienten $-\sin x$ hat und da $-\sin x$ positiv ist für den III., IV., VII., VIII.... Quadranten, so ist in diesen Quadranten die Funktion $\cos x$ in Abnahme.

Ebenso Abnehmen der Funktionen $\sin x$ im II., III., VI., VII. . . ., der Funktion $\cos x$ im I., II., V., VI. . . . Quadranten.

Da $\cos x = 0$ bei $x = 90^0, 270^0 \ldots$, so hat in diesen Punkten die Funktion Sinus ihre Maxima oder Minima; entsprechend für die Funktion Cosinus. —

Der Flächeninhalt der Kurve $y = \sin^2 x$ hat für die Grundlinie 0 bis 2π den Wert $F = \pi$. — Beweis: Diese Kurve hat die Gestalt nach Fig. 56. Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, so stellt dieselbe Kurve auch die Gleichung $z = \cos^2 x$ dar, wenn wir uns den oberen Rand des Rechteckes als Abszissenachse und die positiven Ordinaten von ihr nach abwärts aufgetragen denken. — Von der Fläche dieses Rechteckes $F' = 2\pi . 1 = 2\pi$ kommen gleich grofse Teile auf die Kurve $y = \sin^2 x$ und $z = \cos^2 x$. Es hat daher die Fläche jeder dieser Kurven für die Grundlinie 2π den Wert π. (Anwendung LA 197). LA 197.

Fig. 56.



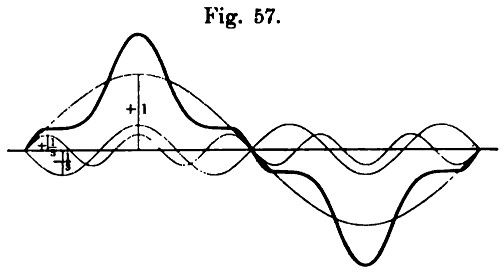
In Integralzeichen lautet der Satz so: $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \pi$.

20. Darstellung einer gegebenen Kurve durch Superposition von Sinuskurven (Fouriers Satz).

Über einer und derselben Geraden als Abszissenachse seien zwei oder mehrere Sinuskurven gezeichnet, die durch ihre Längen $l_1, l_2, l_3 \ldots$ und ihre Amplituden $a_1, a_2, a_3 \ldots$ gegeben sind und überdies gegeneinander irgend welche Phasenverschiebungen haben können. Werden dann für jeden Punkt der gemeinschaftlichen Abszissenachse alle Ordinaten algebraisch addiert, so ergeben sich durch solche **Superposition von Sinuskurven** die mannigfachsten Linien.

So sind in Fig. 257 (S. 242) $l = \frac{L}{2}$ und die Nullpunkte der beiden Sinuskurven fallen zusammen. Indem in Fig. 258 eine Phasenverschiebung um $\frac{1}{4}\, l$ stattgefunden hat, ändert sogleich die resultierende Kurve völlig ihr Aussehen im Vergleich zu der in Fig. 257. — In Fig. 57 sind Kurven von den Längen $l, \frac{1}{3} l, \frac{1}{5} l, \frac{1}{7} l$, und den Amplituden $a, -\frac{1}{3} a, +\frac{1}{5} a, -\frac{1}{7} a$, superponiert, wo die Zeichen positiv und negativ bedeuten, dafs die erste Welle mit einem Wellenberg, die zweite mit einem Wellental usw. beginnt. — Ähnlich sind in Fig. 58 (a. f. S.), Wellen superponiert, deren Amplituden $a, -\frac{1}{9} a, +\frac{1}{25} a, -\frac{1}{49} a$ sind. Die Gleichung der superponierten Kurve ist also $y = \sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \frac{1}{49} \sin 7x$. Man erkennt, dafs diese Kurve sich einer aus Geraden bestehenden Zickzacklinie

Fig. 57.



diese Annäherung ginge bis ins Unendliche, wenn noch Well
ldungspunkt in infinitum hinzugefügt würden.

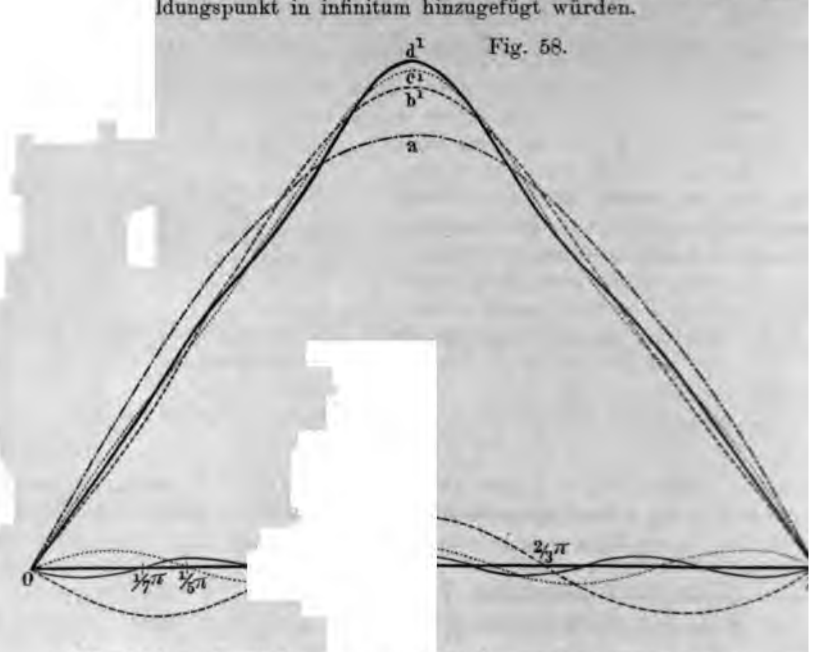


Fig. 58.

Wie bisher Sinuslinien zu neuen Gestalten zusammengesetzt wur der Gestalt der Sinuslinien scheinbar ganz fremd sind, so zeigt das letztang Beispiel, dafs und wie Linien sich auch wieder in Reihen von Sinuslinie zwar im allgemeinen in unendliche Reihen) zerlegen lassen.

Fourier hat gezeigt, dafs eine Zerlegung in Sinusk sogar für alle erdenklichen Arten von Kurven möglich ist in arithmetischer Form ausgedrückt: dafs für jede beliebige Funkti die Reihenentwickelung gilt

$$f(x) = a_0 + a_1 \sin(A_1 + x) + a_2 \sin(A_2 + 2x) + \cdots + a_n \sin(A_n + nx) +$$

Fourier hat auch ein Verfahren (mittels Integralrechnung, worauf hie eingegangen werden kann) angegeben, wie je nach der Natur der geg Funktion $f(x)$ die Konstanten dieser Reihe, nämlich $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ $A_1, A_2, \ldots A_n \ldots$ zu ermitteln sind.

Zur Veranschaulichung dieses mathematischen Theorems von Fourier man sich mittels des Stäbchenapparates in Fig. 256, Seite 242 irgend eine aus Sinuskurven superponiert, dann aber alle komponierenden Kurven etwa eines Tuches verdeckt, und es werde nun verlangt, aus dem Anblick der tierenden Kurve die komponierenden Kurven anzugeben. Diese Aufgabe ist bei drei oder vier Kurven für das Auge nicht mehr zu lösen. Dagegen wi analoge Aufgabe für Schallwellen durch das Ohr auch noch bei viel mehr k nierenden Wellen gelöst, indem aus einem zusammengesetzten Klange die ein Töne herausgehört werden (§§ 90, 96).

Eine weitere Anwendung des Fourierschen Satzes bildet die Zerlegung der täglichen Luftdruckkurve in zwei Sinuskurven (§ 190, S. 615; § 196, S. 640).

21. Annähernde Gröfsenbestimmungen in der Physik.

So wie alle in der Physik vorkommenden Gröfsen nur annähernd (mit einer günstigenfalls bis auf „untermerkliche Verschiedenheiten" zurückgehenden Genauigkeit) durch Messung bestimmt werden können, so begnügt sich auch die rechnerische Verarbeitung dieser Gröfsen mit **Annäherungen**, welche je nach dem besonderen Zwecke der Rechnung mehr oder minder genau sind. — Allgemein geht dieser Unterschied darauf zurück, dafs die reine Mathematik nur mit Beziehungen, die Physik aber mit Wirklichkeiten zu tun habe (log. Anh. Nr. 37). Man vergegenwärtige sich diesen prinzipiellen Unterschied z. B. an der Schachbrettaufgabe: Es ist leicht (wenn auch etwas zeitraubend), die Anzahl der Körner $2^{64} - 1 = 18_{,,,}446.744_{,,}073.709_{,}551.615$ bis auf die Einer genau auszurechnen. Sollte aber diese Zahl an wirklichen Körnern hergestellt werden, so kämen wir auf keinen Fall über die Genauigkeit hinaus, wie sie etwa mit fünfstelligen Logarithmen zu erzielen ist, nämlich $1{,}8446 . 10^{19}$. Denn schon wer 1 Million Körner wirklich zählen wollte, hätte eine sehr grofse Wahrscheinlichkeit, sich um wenigstens ein Korn (über oder unter 10^6) zu verzählen; daher bei 1 Billion um 1 Million, bei 1 Trillion um 1 Billion Körner sich zu verzählen. (Überdies bedenke man, dafs man schon zum wirklichen Durchzählen einer Million Geldstücke etwa einen Monat braucht; wieviel Menschenleben daher zu obiger Zahl?) Ferner: Sollte jene ungeheure Zahl von Körnern wirklich beschafft werden, so würde man sie ja nicht durch Zählen, sondern durch Zumessen nach Scheffeln herstellen; wobei wieder die Anzahlen der Körner bei den verschiedenen einzelnen Scheffeln sich um Hunderte oder Tausende unterscheiden würden. — Ebenso ist es bei allen Zählungen: z. B. bei der Volkszählung einer Millionenstadt wird das Ergebnis gewifs schon in den Hunderten unsicher sein, daher bei einem Staat von etwa 40 Millionen Einwohnern günstigenfalls in den Tausenden und Zehntausenden. — Daher die Regel: **Schon die ganzen Zahlen, welche sich bei Zählungen ergeben, sind nur als bis auf etwa 6 oder 7 Stellen verläfslich anzusehen;** wobei, wie die angeführten Beispiele erkennen lassen, der jeweilig wirklich erreichte Genauigkeitsgrad ganz von den der Zählung günstigen objektiven Bedingungen (z. B. mehr oder minder strenge Administration eines Staates), nicht minder aber von den subjektiven Bedingungen (Aufmerksamkeit, Übung . . . des Zählenden) abhängt.

Anh. 37.

Um so mehr gilt von den Messungen **kontinuierlicher** Gröfsen und ihrer rechnerischen Verarbeitung, dafs **Zifferreihen von mehr als etwa 6 bis 7 Stellen nicht nur überflüssig, sondern unmöglich** sind. Es beruht auf einer Selbsttäuschung des Rechnenden, wenn er z. B. die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels dadurch zu einer Zahl von 10 oder 20 Stellen anschwellen macht, dafs er in $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ sowohl die Zahl π, wie die Quadratwurzel mit je 10 Stellen einführt und dann etwa auch noch ohne Abkürzung multipliziert.

Da jede wirklich physikalische Rechnung als solche (zu unterscheiden von Aufgaben der reinen Mathematik mit blofs physikalischer Einkleidung) auf numerische Angaben abzielt, so ist es auch schon während der algebraischen Durchführung der Rechnung (in all-

gemeinen, sogen. Buchstabengröfsen) nicht nur erlaubt, sondern sogar häufig geboten, sich **abkürzender und annähernder Rechnungen** zu bedienen. — Für „Annäherung“, d. h. für eine nur annähernde Gleichheit, wurde (von § 3, S. 8 an) das Zeichen $\doteqdot$ gebraucht.

Einige allgemeine und besondere Gesetze über annähernde Rechnungen. — Vor allem sind zu unterscheiden 1. solche Annäherungen im Verlaufe der Rechnung, infolge deren auch das Resultat **ein blofs annäherndes** (Typus 1), und 2. solche Annäherungen, unbeschadet deren das **Resultat völlig genau** (Typus 2) wird.

Beispiele zu Typus 1.: Wird die Beschleunigung der Schwere statt 981 cm sec^{-2} abgerundet 10 m sec^{-2} gesetzt, so gelten auch die entsprechenden Werte für die Geschwindigkeiten v und die Wege s nur als abgerundete Zahlen. — Da für jede endliche Elongation eines Pendels die Sehne nur annähernd gleich dem Bogen ist, so gilt die vereinfachte Formel für die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ nur annähernd bei allen endlichen Elongationen (LA 24, 25, 26).

LA 24, 25, 26.

Beispiele zu Typus 2.: Wiewohl bei einer gleichförmigen Kreisung ein Element des Kreises nur annähernd durch eines nächst dem Scheitel der Parabel von dem gleichen Krümmungshalbmesser ersetzt werden kann, so gibt doch der aus der Analogie zur Wurfbewegung hergeleitete Ausdruck $b_\perp = \frac{c^2}{r}$ völlig genau den Wert der Normalbeschleunigung bei der Kreisung. — Trotz der Annäherungen $\sin\alpha \doteqdot \alpha \doteqdot tg\,\alpha$ gibt die Ableitung der Linsenformel den genauen Wert der Bildweite — allerdings nur für die Spitze der Einhüllenden aller Strahlen, die unter verschiedenen Winkeln α von dem Gegenstandspunkte A ausgegangen waren.

Grundlegend für alle systematisch durchgeführten Annäherungen ist die Unterscheidung von **kleinen Gröfsen erster Ordnung** und **kleinen Gröfsen zweiter Ordnung.** — Ein Vorbild für diese Unterscheidung gibt schon jede dekadische Zahl, welche, wie z. B. 1,006009, sich darstellt als eine Summe aus einer Gröfse (1,000000), einer im Vergleich zu ihr kleinen Gröfse (0,006) und einer wieder zu dieser Gröfse „kleinen“, im Vergleich zu ersterer also „sehr kleinen“ Gröfse (0,000009). — Diese Unterscheidung von verschiedenen **Gröfsenordnungen** wird dann sogleich praktisch bei Quadrierungen von Binomen zweier stark verschiedenen Summanden; es ist nämlich dann z. B.

$$1{,}003^2 = \left(1 + \frac{3}{1000}\right)^2 = 1{,}006009 = 1 + \frac{6}{1000} + \frac{9}{1000000}.$$

Dafs es nun hier zweckmäßig sein kann, die Stelle mit der Ziffer 9 gegenüber der der Ziffer 6 zu vernachlässigen, erhellt schon aus den mehreren Nullen, durch die beide Ziffern getrennt sind. Diese Vernachlässigung wird aber physikalisch sogar unvermeidlich, wenn z. B. die Zahl 1,003 die Maßzahl von Metern ist und der Maßstab nur auf Millimeter genau zeigt. Denn angenommen, die wahre Länge wäre noch um $^3/_{10}$ mm gröfser gewesen, also $1{,}003_3$, dann ist $1{,}003_3^2 = 1{,}00661089$,



wo also die früher zwischen 6 und 9 stehenden Nullen schon ganz überdeckt sind durch andere Ziffern. — Allgemein ist

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \doteq 1 + 2x \,. \quad (I)$$

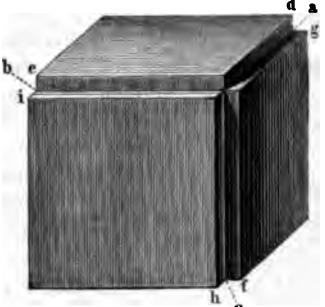
und zwar um so genauer, je kleiner x gegen 1 ist. — Ebenso

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \doteq 1 + 3x \,. \quad (II)$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x^2 + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \cdots \doteq 1 + nx \,. \quad (III)$$

Von diesen Gleichungen gestatten (I) und (II) die graphischen Veranschaulichungen in Fig. 59. Es ist nämlich sofort ersichtlich, dafs, wenn die Strecke x nur ein kleiner Zuwachs zur Quadrat-, bezw. Würfelseite 1 ist, im Vergleich zu der Fläche der Streifchen die des kleinen Quadrates, im Vergleich zum Volumen des Würfels und der drei ihm aufliegenden Platten das Volumen der drei Stäbchen und das des einen Würfelchens vernachlässigt werden können.

Fig. 59.



Die Gl. (III) wird nützlich, wenn n ein gebrochener oder negativer Exponent ist. Es ist nämlich dann

$$(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} \doteq 1 + \tfrac{1}{2}x \ldots\ldots (IV)$$

$$(1+x)^{1/3} = \sqrt[3]{1+x} \doteq 1 + \tfrac{1}{3}x \ldots\ldots (V)$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - + \ldots \doteq 1 - x \ldots\ldots (VI)$$

„Unendlich kleine Gröfsen". — Denken wir uns in einem Ausdruck von der Form $1 + x$ die Gröfse x nicht nur „klein", sondern **„unendlich klein"** gegen 1 (z. B. wenn im obigen Beispiel die Ziffern 1 und 3 statt durch 2, später durch 3, 4 ..., schliefslich durch „unendlich viele" Nullen getrennt wären), so würde in $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$ das Glied x^2 **unendlich klein zweiter Ordnung** im Vergleich zu $2x$, dem **unendlich kleinen Gliede erster Ordnung.**

Ein anderes typisches Beispiel einer unendlich kleinen Gröfse zweiter Ordnung bietet in Fig. 46 der „Pfeil" $\left(\text{d. i. } 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$ im Vergleich zur Sehne $\left(\text{d. i. } 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ und zum Bogen, falls diese beiden unendlich klein erster Ordnung im Vergleich zum Radius angenommen werden.

Man beachte in den Tafeln der natürlichen (und den Logarithmen der) goniometrischen Funktionen, dafs bei kleinen Winkeln anfangs die Funktion Cosinus sich fast gar nicht ändert. — Dies führt auf folgendes erste Beispiel für eine strengere Begründung annähernder Rechnungen:

Dafs die Funktion Sinus sich anfangs fast proportional dem Winkel ändert und, falls der Winkel ξ im absoluten Maß ausgedrückt ist, die Werte von ξ und $\sin\xi$ einander fast gleich sind, entspricht der mehrfach angewendeten Gleichung $\frac{\sin\xi}{\xi} \doteq 1$

66, 170, 227. Anh. 19

(§ 12, § 107, LA 166, 170, 227 u. s. f., Anh. Nr. 19). Ein strenger Beweis für d Grenzgleichung $\frac{\sin \xi}{\xi} = 1$, sobald $\xi = 0$ wird, ist folgender: Für jeden absolut spitzen Winkel ξ gelten die Ungleichungen $\sin \xi < \xi < tg\, \xi$, $\sin \xi < \xi < \frac{\sin}{co}$ $1 < \frac{\xi}{\sin \xi} < \frac{1}{\cos \xi}$, also auch $1 > \frac{\sin \xi}{\xi} > \cos \xi$. Erreicht ξ den Wert 0, erreicht $\cos \xi$ den Wert 1. In diesem Grenzfalle ist also $\frac{\sin \xi}{\xi}$ nur mehr geschlossen zwischen den Grenzen 1 und 1, d. h. jener Bruch ist genau gleic

Ein zweites Beispiel für die strengere Begründung eines Grenzübergan sei die Ableitung der Flächenformel für die Parabel $F = {}^2/_3\, xy$. — Die Flä des ersten Quadranten inner- und aufserhalb der Parabel (Fig. 60) werde zerleg sehr schmale Streifen, deren Längsausdehnung parallel den O naten, bezw. den Abszissen ist. Je ein Paar solcher schmaler Stre habe die Flächen f_y und f_x; es ist zu beweisen, dafs für unendl schmale Streifen $fy : fx = 2 : 1$. Zu diesem Grenzwert füh dreierlei Annäherungen, indem wir nämlich die in Wahr durch die Parabelbogen MM' (Fig. 60) abgeschlossenen Stre ersetzen erstens durch die zu kleinen Rechtecke $f_y \neq y\,(x' -$ und $f_x \neq x\,(y' - y)$; zweitens durch die zu grofsen Rechte $f_y \neq y'\,(x' - x)$ und $f_x \neq x'\,(y' - y)$; drittens durch die (n etwas zu kleinen) Trapeze $f_y \neq {}^1/_2\,(y' + y)\,(x' - x)$ $f_x \neq {}^1/_2\,(x' + x)\,(y' - y)$. In allen drei Fällen benutzen wir dieselbe Gre beziehung, wie für den Richtungskoeffizienten der Parabel, nämlich dafs für $x' =$ gilt $\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{p}{y}$ (Anh. Nr. 23, S. 753). Aus dieser Beziehung, zusammen mit d der Parabelgleichung $y^2 = 2px$ entsprechenden $y^2 : px = 2 : 1$, folgt

Fig. 60.

erstens

$$f_y : f_x = y\,(x' - x) : x\,(y' - y) = \frac{y}{x} : \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{y}{x} : \frac{p}{y} = 2$$

zweitens

$$f_y : f_x = y'\,(x' - x) : x'\,(y' - y) = \frac{y'}{x'} : \frac{y' - y}{x' - x} \neq \frac{y}{x} : \frac{p}{y} = 2$$

drittens

$$f_y : f_x = {}^1/_2\,(y' + y)\,(x' - x) : {}^1/_2\,(x' + x)\,(y' - y) = \frac{y' + y}{x' + x} : \frac{y' - y}{x' - x} \neq \frac{2y}{2x} : \frac{p}{y} = 2$$

Eine vierte Annäherung wäre die, etwa den Parabelbogen MM' durch de Bogen eines Kreises (oder einer anderen Kurve, deren Fläche bekannt ist) zu er setzen; aber offenbar wäre eine solche Genauigkeit während der Rechnung über flüssig, wenn schon die viel ungenaueren obigen Ersetzungen durch zu kleine od zu grofse Rechtecke oder durch Trapeze zu demselben Grenzwerte geführt haben. —

Anh. 9.

Als ein drittes Beispiel für die strengere Begründung annähernder Rech nungen vergl. die des Mittelwertes rr_1 zwischen r^2 und r_1^2 im Anh. Nr. 9, S. 721. —

Anh. 13, 15.

Von den „unendlichen Gröfsen“ („unendlich grofsen“ wie „unendlich kleinen“ hat die ganze Infinitesimalrechnung ihren Namen. Ihre beiden Grund operationen sind das Differenzieren und ihre inverse Operation, das Integrieren (vgl. Anh. Nr. 13, 15). Eine mathematische Behandlung der Naturerscheinungen kann fast nirgends die offene oder versteckte Anwendung der diesen beiden Teile

r höheren Mathematik entnommenen Methoden entbehren, da eben auch fast alle öfsen in den Naturerscheinungen sich stetig, in unendlich kleinen Abstufungen, ändern. —

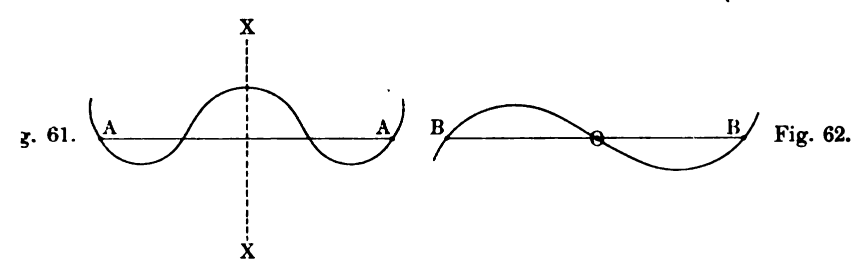
Auch viele Ableitungen der sogenannten Elementarmathematik setzen für ihr les Verständnis einen Einblick in die Grundsätze des Rechnens mit Unendlichinen voraus. So z. B. wenn die Kreisfläche als aus schmalen Sektoren bestehend lacht wird und diese als geradlinige Dreiecke nach $f = \frac{1}{2} \beta r$ berechnet werden ist ein Beispiel zum obigen Typus 2, indem, wie sich nach durchgeführter ichenberechnung des Kreises und seiner Sektoren herausstellt, die Fläche eines chen Sektors nicht etwa annähernd, sondern genau gleich ist dem halben Produkt der Bogenlänge und dem Radius). — Weitere Beispiele: Die Flächenbestimmung Ellipse, des Parabelsegmentes und dergleichen sind im Grunde Integrationen; enso auch namentlich alle Anwendungen des „Cavalierischen Prinzipes".

inige besondere geometrische Gebilde und Beziehungen.

2. Axial-symmetrische und zentral-symmetrische Gebilde.

Zwei Punkte A, $\bar{A}$ (Fig. 61) sind einander in Bezug auf die Symetrieachse XX **axial-symmetrisch** zugeordnet, wenn XX im Halbiengspunkte der Strecke $A\bar{A}$ auf dieser senkrecht steht.

Zwei Punkte B, $\bar{B}$ (Fig. 62) sind einander in Bezug auf ein mmetriezentrum O **zentral-symmetrisch** zugeordnet, wenn O der albierungspunkt der Strecke $B\bar{B}$ ist.



g. 61. Fig. 62.

Ein ebenes Gebilde heifst **axial-**, bezw. **zentral-symmetrisch,** nn sich eine Achse XX, bezw. ein Zentrum O angeben läfst, in zug auf das jedem Punkte des Gebildes ein Punkt desselben Gebildes geordnet ist.

Beiderlei Gebilde gelangen mit sich selbst zur Deckung bei einer ehung von 180° um die Symmetrieachse, bezw. um eine im mmetriezentrum normal zur Ebene des Gebildes errichtete Gerade.

Anwendungen: Lage der Kräfte in Figg. 83—88, S. 114. — An Stelle der nmetrieachse **XX** (Fig. 61) kann auch eine Symmetrieebene treten: typisch rfür **ist das physikalische** Beispiel des Planspiegels (z. B. das Spiegelbild einer hten **Hand** ist räumlich kongruent einer wirklichen linken Hand). Warum ist in er lotrechten Spiegelfläche nur rechts und links, nicht auch oben und unten versecht? Wie verhält sich hierin eine wagrechte Spiegefläche, z. B. ein Wasserspiegel?

23. Parabel, Ellipse, Hyperbel. — Kegelschnitte.

Im folgenden werden zuerst einzelne Eigenschaften der Parabel (d physikalischen Unterricht am frühesten benötigt wird, §§ 7, 11, 13), der El (einschließlich des Kreises) und der Hyperbel, sodann der innere Zusamm dieser drei Kurven durch ihre Scheitelgleichungen, durch ihre allgemeine schaft als Kegelschnittslinien und durch ihre Polargleichungen ent

I. Parabel. Da sich die Parabel innerhalb der Physik am häufig ihrer Eigenschaft als Wurflinie aufdrängt und da sie diese ihre Gestalt de stande verdankt, daß z. B. beim horizontalen Wurf den wagrechten Weg c, $2c$, $3c$ ... ct die lotrechten Fallstrecken a, $4a$, $9a$ ... at^2 entsprechen, so wir auch für die Geometrie der Parabel aus von folgender

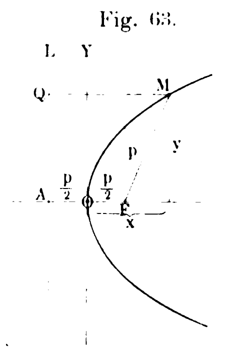
arithmetischen Definition der Parabel: Eine Parab die graphische Darstellung der Gleichung $y = x^2$ (Fig. 29, S. 72 gemeiner $y = Cx^2$, noch allgemeiner $y = Cx^2 + Dx + E$). F Kurve $y = x^2$ ist Anfangspunkt Scheitel der Parabel, die Y zugleich die geometrische Achse der Parabel. Durch Vertaus der veränderlichen Größen x und y nimmt die Parabelgleichun Form an: $x = y^2$ oder $y = \pm\sqrt{x}$, allgemeiner $y = \pm\sqrt{Px}$). Fü Kurve $y = \pm\sqrt{x}$ (und ebenso für $y = \pm\sqrt{Px}$) ist wieder der dinatenanfangspunkt Scheitel der Parabel; geometrische A der Parabel ist aber jetzt die X-Achse (Fig. 31, S. 728). —

Man beachte, daß in der Kurve $y = x^2$ die Ordinaten rascher wachs die Abszissen; umgekehrt in der Kurve $y = \pm\sqrt{x}$ (vergl. Fig. 39, S. 735).

Bemerkung: In einem allgemeineren Sinne des Wortes „Parabel" w auch die Kurven mit den Gleichungen $y = x^3$, $y = x^4$ . . als Parabel d vierten . . Grades (ferner $y = Cx^{3/2}$ als semikubische Parabel . .) bezeichnet Fig. 39, S. 735. — Im Vorigen und Nachfolgenden wird unter „Parabel" ku nur die Parabel zweiten Grades verstanden.

Brennpunktsdefinition der Parabel: Die Parabel ist geometrische Ort aller Punkte, die gleichen Abstand von e festen Punkte, dem **Brennpunkte**, und einer festen Geraden, **Leitlinie**, haben (Fig. 63). Diese Definitions chung $FM = MQ$, umgesetzt in eine Bezie zwischen den Koordinaten, gibt $y^2 = 2px$.

Fig. 63.



Ableitung: Die Größe p sei zuerst defi als Abstand FA des Brennpunktes von der L linie. Wird als Abszissenachse die durch F gel auf LL Normale und als Koordinatenanfangspun der Halbierungspunkt von FA gewählt, so liefert Definitionsgleichung $FM = QM$ die Beziehung zwi den Koordinaten: $\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$, w $y^2 = 2px$ oder $y = \pm\sqrt{2px}$.



Lehrsätze: 1. **Der Parameter der Parabel** (definiert als rdinate **im Brennpunkt**[1]) ist gleich p.

Beweis: Für den Brennpunkt ist $x = \frac{p}{2}$ und $y = {+\atop(-)}\sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = p.$

2. Der **Richtungskoeffizient der Parabel** ist $A = \frac{p}{y}$.

Ableitung: $y^2 = 2px$, $y'^2 = 2px'$; daher $y'^2 - y^2 = 2px' - 2px$ oder $(y' + y)(y' - y) = 2p(x' - x)$.

Hieraus: $tg\,\sigma = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{2p}{y' + y}$ und $tg\,\tau = A = \frac{2p}{y + y} = \frac{p}{y}$. —

Auf Grund der Kenntnis von A ergeben sich dann (wie für jede Kurve) in kannter Weise die „sechs Berührungsgröfsen". So ist u. a. die

3. **Subnormale der Parabel** $= p$. (Vgl. Nr. 26.)

Beweis: Allgemein: $Sn = yA$; also speziell für die Parabel $Sn = y \cdot \frac{p}{y} = p$.

II. Ellipse. Ellipsen begegnen uns bekanntlich in perspektivischen eichnungen überall dort, wo ein Kreis so dargestellt werden soll, dafs die vom uge zu seinem Mittelpunkt gezogene Sehlinie mit der Ebene des Kreises einen hiefen Winkel bildet. Ebenso zeigt der Schatten einer undurchsichtigen Kreisäche auf einem ebenen Schirme im allgemeinen elliptische Gestalt; desgleichen n schiefer Schnitt durch einen geraden Kreiszylinder (z. B. durch eine Wurst). olche Beobachtungen führen zu folgender nächstliegender

perspektivischen Definition der Ellipse: Eine Ellipse enteht, wenn in einem Kreise vom Halbmesser a alle Ordinaten in onstantem Verhältnisse $b : a$ (wo $b < a$) verkürzt werden (Fig. 64). Dann eifst a die **grofse Halbachse**, b die **kleine Halbachse** der Ellipse laher $2a$ die grofse, $2b$ die kleine Achse). — Um von dieser Defiition der Ellipse zu ihrer Mittelpunktsgleichung zu gelangen, gehen

---

[1]) Das Wort Parameter wird in mehreren Bedeutungen gebraucht, nämlich 1. für e Ordinate im Brennpunkt (wie oben definiert), 2. für die im Brennpunkt auf er grofsen Achse normale Sehne [die dann gleich ist der doppelten Ordinate n Brennpunkt. — Also im Sinne der Definition 2 wird dann die Ordinate im Brennunkt oft auch Halbparameter genannt, und wenn man die ganze Sehne Parameter nennt nd mit P bezeichnet, so lautet die Gleichung der Parabel $y^2 = Px$. Der obigen Defiition 1 bedient sich z. B. SERRET-HARNACK, wo $y^2 = 2px$ geschrieben und p Parameter enannt wird; ebenso definiert EPSTEIN, Geonomie: Parameter der Ellipse ist gleich der rdinate im Brennpunkt. — Die beiden Definitionen 1 und 2 setzen voraus, dafs die Kurve nen Brennpunkt und eine Hauptachse habe, dafs diese in die Abszissenachse falle und dafs as Koordinatensystem ein rechtwinkliges sei. Dabei soll hier auf eine allgemeine Definition er Begriffe „Brennpunkt" und „Hauptachse" nicht näher eingegangen werden; vielmehr erden sie in ihrer hier allein vorkommenden Anwendung auf Kegelschnitte als bekannt orausgesetzt]. In einem allgemeineren 3. Sinne nennt man Parameter jede für die beondere Gröfse und Gestalt einer Kurve charakteristische Strecke; endlich in einem och allgemeineren 4. Sinne überhaupt jede (willkürlich gedachte) konstante Gröfse im egensatz zu den Variabeln.

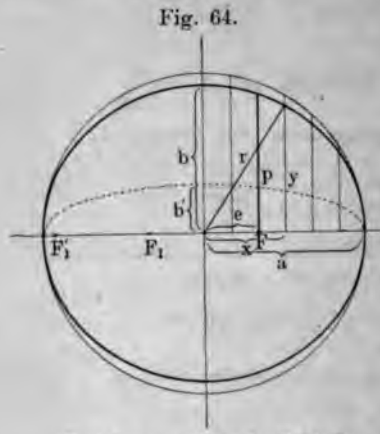
wir aus von der Mittelpunktsgleichung des Kreises $x^2 + Y^2 = a^2$ oder $Y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$. Da für die Ordinaten der Ellipse gilt $y = \frac{b}{a} Y$, so ist die Gleichung der Ellipse $\boldsymbol{y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}$ ... (1)

oder rational gemacht:

$\boldsymbol{b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2}$ oder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

oder $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .. (2)

Fig. 64.



Vergleichung der letzten Form mit der Knotengleichung der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. — Zunächst unabhängig von der obigen „perspektivischen" Definition ist die

Brennpunktsdefinition der Ellipse: Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte M, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen Punkten F und F_1, den **Brennpunkten**, gleich ist einer gegebenen Strecke, der **grofsen Achse $A_1 A_2$.**

Ist $OA_1 = OA_2 = a$ **(grofse Halbachse)**, $OF = OF_1 = e$ **(lineare Excentrizität)**, so ist in der Definition (wieso?) als für die Ellipse wesentlich vorausgesetzt, dafs $a > e$. Daher ist $a^2 - e^2$ jedenfalls eine positive Gröfse, kann also gleich gesetzt werden b^2, so dafs die Beziehungen bestehen $a^2 - e^2 = b^2$, $a^2 - b^2 = e^2$, $b^2 + e^2 = a^2$. (Dafs und warum b die **kleine Halbachse**, s. u.) Das Verhältnis $\frac{e}{a} = \varepsilon$ heifst die **numerische Excentrizität** der Ellipse. —

Beziehen wir die Ellipse auf ein Koordinatensystem, dessen X-Achse durch F_1, F geht und dessen Anfangspunkt O der Halbierungspunkt der Strecke $F_1 F$ ist, so setzt sich jene Definition um in die Beziehung zwischen den Koordinaten:

$$\sqrt{y^2 + (x - e)^2} + \sqrt{y^2 + (x + e)^2} = 2a.$$

Dies ist schon eine Form der Gleichung der Ellipse. Sie geht durch eine hier als bekannt vorauszusetzende Transformation über in die beiden obigen Formen. —

Wird in obige Gleichung $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ eingesetzt $x = e$, so wird $y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - e^2} = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{b^2} = \pm \frac{b^2}{a}$. Man nennt die **Ordinate im Brennpunkte** einer Ellipse den **Parameter** p (vgl. die Anmerkung zu S. 753). Daher ist $\boldsymbol{p = \frac{b^2}{a}}$; in Worten!

Der Halbmesser r eines Umfangspunktes der Ellipse mit den Koordinaten x und y hat den (im Gegensatz zum Kreis) **nicht konstanten**, sondern von x abhängigen Wert $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)\, x^2 + a^2 b^2}$. — Der kleinste Halbmesser entspricht $x = 0$, nämlich $\boldsymbol{r = b}$, weshalb b die **kleine Halbachse** heifst. Ebenso ist für $x = a$ und $\boldsymbol{r = a}$ der gröfste Halbmesser, weshalb eben a die **grofse Halbachse** heifst (Fig. 64).

Lehrsätze: 1. Der **Flächeninhalt** der Ellipse ist $F = ab\pi$.

Beweis unmittelbar anschaulich aus der perspektivischen Definition: denn wird der Kreis mit der Fläche $a^2\pi = a.a.\pi$ nach einer Dimension im Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkürzt, so wird auch die Fläche $f = a \cdot a \cdot \pi \cdot \frac{b}{a} = ab\pi$. [Behufs strengerer formeller Durchführung dieses Gedankens wird jeder der schmalen Streifen, in die die Ellipse durch beliebig nahe nebeneinander gezogene Ordinaten zerlegt gedacht werden kann, zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, nämlich zwei Rechtecke, die die nämliche Breite wie die Ellipsenstreifen haben und deren Höhe bei dem einen die gröfsere, bei dem anderen die kleinere Ellipsenordinate ist.] (Vgl. Nr. 15, 21.)

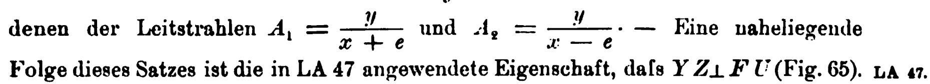
2. Der **Richtungskoeffizient der Ellipse** ist $A = -\frac{b^2x}{a^2y}$.

Ableitung: Aus $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ und $b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$ folgt in bekannter Weise $\frac{y'-y}{x'-x} = -\frac{b^2(x'+x)}{a^2(y'+y)}$; hierin dann zu setzen $x' = x$, $y' = y$. — Eine der Anwendungen von A ist die Gleichung der Tangente $\eta - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(\xi - x)$, worin x und y die Koordinaten des Ellipsenpunktes, ξ und η die laufenden Koordinaten der Tangente als gerader Linie sind. Durch bekannte Transformation wird dann die leicht einzuprägende Form erhalten

$$b^2x\xi + a^2y\eta = a^2b^2 \quad \text{oder explizit} \quad \eta = -\frac{b^2x}{a^2y}\xi + \frac{b^2}{y}.$$

3. Die zu einem Punkte gezogenen Leitstrahlen schliefsen mit der Tangente (und daher auch ebenso mit der Normale) des Punktes gleiche Winkel ein.

Fig. 65.



Beweis in bekannter Weise aus den Richtungskoeffizienten der Ellipse $A = -\frac{b^2x}{a^2y}$ und denen der Leitstrahlen $A_1 = \frac{y}{x+e}$ und $A_2 = \frac{y}{x-e}$. — Eine naheliegende Folge dieses Satzes ist die in LA 47 angewendete Eigenschaft, dafs $YZ \perp FU$ (Fig. 65). LA 47.

4. **Werden von den beiden Brennpunkten auf eine Tangente die Normalen n_1 und n gefällt, so gilt allgemein $n_1 n = b^2$ (Fig. 65).**

Beweis: Die allgemeine Perpendikelformel $n = (\pm)\frac{y_1 - Ax_1 - B}{\sqrt{1+A^2}}$ wird zweimal angewendet auf die Brennpunkte $y_1 = 0$, $x_1 = -e$ und $y_1 = 0$, $x_1 = +e$ und auf die obige explizite Gleichung der Tangente:

$$n_1 = \frac{0 - \frac{b^2x}{a^2y}\cdot e - \frac{b^2}{y}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)^2}}, \qquad n = \frac{0 + \frac{b^2x}{a^2y}\cdot e - \frac{b^2}{y}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)^2}},$$

wonach für $n_1 n$ nach einigen Reduktionen (Ersetzungen: $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x$, $e^2 = a^2 - b^2$) sich ergibt $n_1 n = b^2$. — Anwendung: LA 47. LA 47.

LA 121. **III. Hyperbel.** — Anknüpfend an Fig. 32 (S. 728) und an die LA 121, wo sich als graphische Darstellung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes $pv =$ Konst. die gleichseitige Hyperbel ergibt, gehen wir aus von folgender einfachster

arithmetischen Definition einer Hyperbel: Eine Hyperbel ist die graphische Darstellung der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ und allgemeiner $y = \frac{k}{x}$. Es sind dies **gleichseitige Hyperbeln**, ihre Asymptoten sind die Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems (vgl. Fig. 32).

Werden die nämlichen Gleichungen bezogen auf ein schiefwinkliges Parallelkoordinatensystem, so stellen sie alle beliebigen Hyperbeln vor, wenn als jeweiliger Achsenwinkel der der Asymptoten gewählt wird, Fig. 32a und 32b (S. 728).

Transformieren wir das rechtwinklige System in ein anderes von demselben Anfangspunkt wie das frühere und mit dem Transformationswinkel $\alpha = 45°$, so dafs die allgemeinen Transformationsformeln

$$x = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha \quad \text{und} \quad y = \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha$$

übergehen in $x = \xi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \eta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad y = \xi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \eta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

so wird aus der Gleichung $y = \frac{k}{x}$ oder $xy = k$ die Gleichung $\xi^2 - \eta^2 = 2k$.

Wird hier $2k = a^2$ gesetzt, so kann diese Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ ebenso aus der allgemeineren Hyperbelgleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (deren Ableitung auf Grund der Brennpunktsdefinition, siehe unten, hier als bekannt vorausgesetzt wird) für $a = b$ hervorgegangen gedacht werden, wie aus der Ellipsengleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ für $a = b$ die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ hervorgeht.

Die Brennpunktsdefinition der Hyperbel **unterscheidet** sich von der der Ellipse nur dadurch, dafs bei der Hyperbel die **Differenz** $r_2 - r_1 = 2a$ **konstant** ist, während bei der Ellipse die Summe $r_2 + r_1 = 2a$ konstant war.

Anwendung dieser Brennpunktsdefinition zur Erklärung der Hyperbeln bei Interferenzerscheinungen, z. B. in Fig. 255 (S. 241), in Fresnels Spiegelversuch (LA 175). LA 176.

Asymptoten der Hyperbel. Aus der einfachsten Gleichungsform $y = \frac{1}{x}$ oder $y = \frac{k}{x}$ der Hyperbel ist auch sofort ersichtlich, dafs mit wachsendem x die Hyperbel sich immer mehr der X-Achse anschliefst, ohne sie doch je zu erreichen; ähnlich für abnehmende x der Y-Achse. Für die auf die Haupt- und Nebenachse der Hyperbel als Koordinatenachsen bezogene Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ haben die Asymptoten die Doppelgleichung $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Erster Beweis: Mit der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ koexestiere die Gleichung $y = Ax$ einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, die wir uns um den Mittelpunkt gedreht denken, indem wir $A = tg\,\alpha$ von 0 bis ∞



wachsen lassen. Die Abszisse des gemeinschaftlichen Punktes beider Linien hat allgemein die Form $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 A^2}}$. Hier bildet der Fall $b^2 - a^2 A^2 = 0$ oder $A = \pm \frac{b}{a}$ die Grenze zwischen den reellen und imaginären Werten von x und zwar rückt für die Grenzlage $y = \pm \frac{b}{a} x$ der gemeinschaftliche Punkt ins Unendliche. — Dafs sich Hyperbel und Gerade im Unendlichen (nicht schneiden, sondern) berühren, zeigt folgender

Zweiter Beweis: Um in der Gleichung der Hyperbeltangente $b^2 x \xi - a^2 y \eta = a^2 b^2$ die Abszisse des Berührungspunktes in ∞ übergehen zu lassen, setzen wir $b^2 \xi - a^2 \eta \cdot \frac{y}{x} = \frac{a^2 b^2}{x}$. Hier ergibt sich der Grenzwert für $\frac{y}{x}$ aus $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ oder $1 - \frac{a^2}{b^2} \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2}$; denn weil für $x = \infty$ jetzt $\frac{a^2}{x^2} = 0$, so wird $\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$ und wegen $b^2 \xi - a^2 \eta \cdot \pm \frac{b}{a} = 0$ geht wieder die Tangente in die Asymptote $\eta = \pm \frac{b}{a} \xi$ über. —

Der Anfänger suche sich einen Blick dafür anzueignen, worin sich der Verlauf eines Hyperbelastes von dem eines Parabelastes charakteristisch unterscheidet; es weisen zwar beide sozusagen eine Tendenz zum Geradewerden auf, aber entschiedener die Hyperbel durch ihren Anschlufs an die Asymptote; dagegen die Parabel, in der z. B. ein horizontal geworfener Körper sich bewegt, nähert sich zwar auch einer vertikalen Geraden, längs der ein frei fallender Körper sich bewegt, indem im Vergleich zur immer gröfser werdenden vertikalen Geschwindigkeitskomponente die konstant bleibende horizontale Geschwindigkeitskomponente immer mehr zurücktritt. Weil aber infolge der sich erhaltenden wagrechten Anfangsgeschwindigkeit jene lotrechte Fallstrecke gleichsam immerwährend von der geometrischen Achse der Parabel wegrückt, so kann man bei einer Parabel nicht von einer Asymptote sprechen. — Die Bewegung eines Kometen dagegen, der mit so grofser Anfangsgeschwindigkeit das Perihel passiert hatte, dafs er in einem Hyperbelaste sich bewegt, nähert sich, je ferner er der Sonne ist, um so mehr der geraden, gleichförmigen Bewegung eines blofs infolge der Trägheit sich bewegenden Körpers. Der Schüler gewöhne sich, alle Zeichnungen von Parabeln und Hyperbeln mindestens mit einem solchen Maß von Sorgfalt auszuführen, dafs der Unterschied von parabolischer und hyperbolischer Krümmung in den Zeichnungen auch anschaulich zur Geltung kommt.

Scheitelgleichungen von Ellipse, Parabel, Hyperbel.

Vorbemerkung: Aus der allgemeinen Gleichung des Kreises $(x - m)^2 + (y - n)^2 = a^2$ ergibt sich für $m = a$, $n = o$ die

Scheitelgleichung des Kreises $y^2 = 2ax - x^2$.

Ähnlich ergibt sich aus den Mittelpunktsgleichungen der Ellipse (bzw. Hyperbel) durch Verschiebung des Koordinatenursprungs aus dem Mittelpunkt in den Scheitel, also um $+ a$ (bzw. um $- a$)

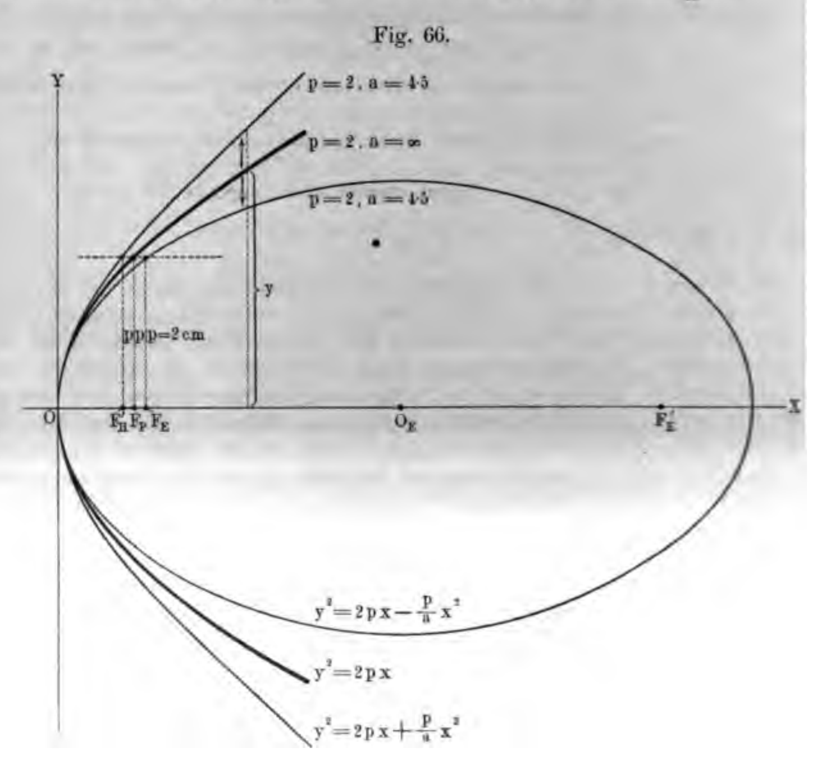
die Scheitelgleichung der Ellipse $a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 (x - a)^2 = b^2 \cdot [a^2 - x^2 + 2xa - a^2]$ und $y^2 = 2 \frac{b^2}{a} \cdot x - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$. Wird hier $\frac{b^2}{a} = p$ eingeführt, so ergibt sich als

Scheitelgleichung der Ellipse $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$

Analog die Scheitelgleichung der Hyperbel $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$

Von der Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$, die sc
Scheitelgleichung war, unterscheiden sich also die beiden and
um das abzuziehende, bzw. hinzuzufügende Glied $\frac{p}{a}x^2$.

Fig. 66.



Daher die Namen Ellipse von ἐν-λείπειν, darin bleiben, und Hyper
von ὑπερβάλλειν, darüber hinausreichen. Diese von APOLLONIUS eingeführ
Namen weisen also schon auf tiefere Kenntnisse der (auch von ARCHIMEDES un
suchten) drei Kurven und ihrer Beziehungen zueinander hin. An diese anti
Theorien der Kegelschnitte hat KEPLER nach seinem eigenen Zeugnisse unmittel
angeknüpft — ein schönes Beispiel zu PLATONS bedeutsamem Worte:
ἔχοντες διαδώσουσιν ἀλλήλοις.

Bemerkung: Die obigen Formen der Scheitelgleichungen von Elli
und Hyperbel, in denen y in der zweiten, x in der ersten und zweiten Pot
vorkommt, sind gebunden an eine bestimmte Lage zum Koordinatensyst
Die allgemeinste Form der Gleichung einer Kurve zweiten Grades
$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$



Ellipse (einschl. **Kreis**), **Parabel, Hyperbel** als **ebene Schnitte** des (geraden oder schiefen) **Kreiskegels** [„**Kegelschnitte**“].

Beweise und Diskussion nach Figg. 67 bis 72 und den folgenden, auf die Scheitelgleichungen der drei Kurven führenden planimetrischen Rechnungen:

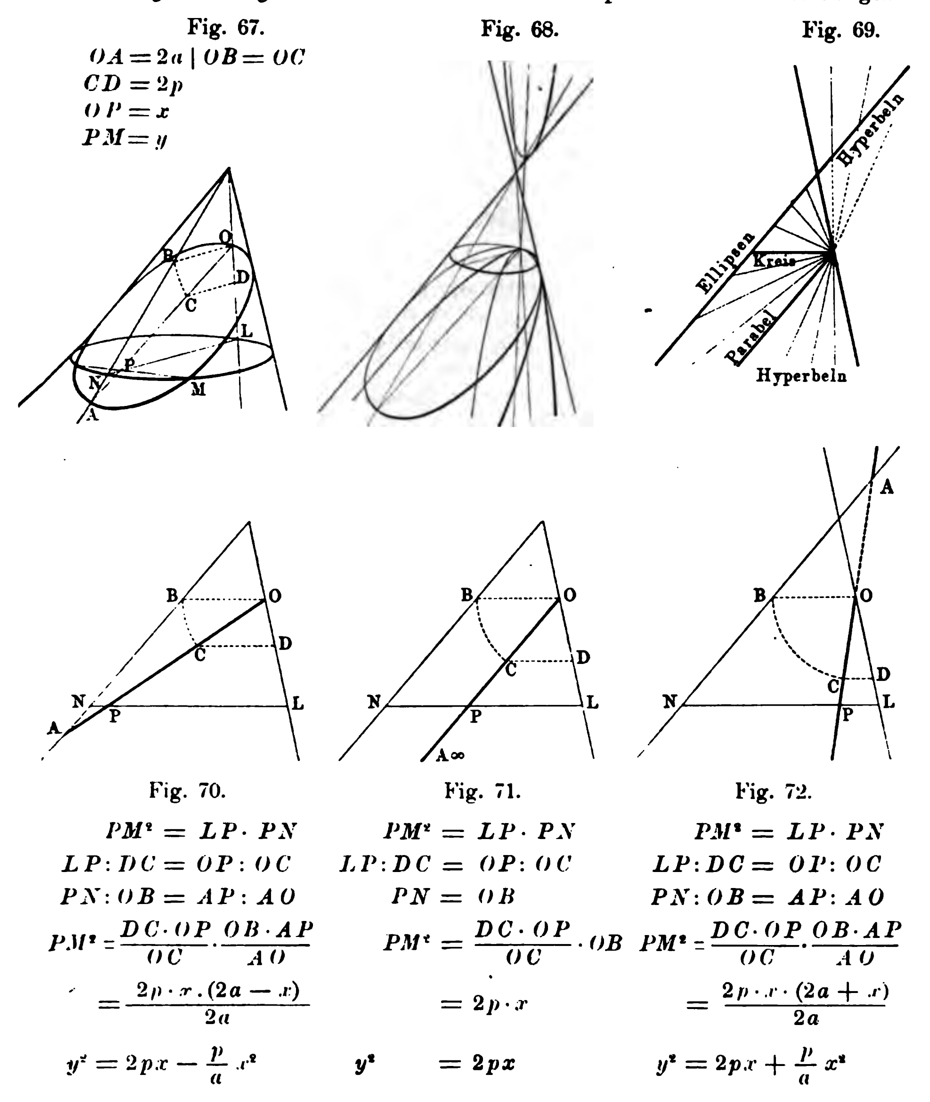


Fig. 70.

$$PM^2 = LP \cdot PN$$
$$LP : DC = OP : OC$$
$$PN : OB = AP : AO$$
$$PM^2 = \frac{DC \cdot OP}{OC} \cdot \frac{OB \cdot AP}{AO}$$
$$= \frac{2p \cdot x \cdot (2a - x)}{2a}$$
$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2$$

Fig. 71.

$$PM^2 = LP \cdot PN$$
$$LP : DC = OP : OC$$
$$PN = OB$$
$$PM^2 = \frac{DC \cdot OP}{OC} \cdot OB$$
$$= 2p \cdot x$$
$$y^2 = 2px$$

Fig. 72.

$$PM^2 = LP \cdot PN$$
$$LP : DC = OP : OC$$
$$PN : OB = AP : AO$$
$$PM^2 = \frac{DC \cdot OP}{OC} \cdot \frac{OB \cdot AP}{AO}$$
$$= \frac{2p \cdot x \cdot (2a + x)}{2a}$$
$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2$$

Veranschaulichung der drei Arten von Kegelschnittslinien durch ein Gefäß (z. B. zwei Glastrichter in Metallfassungen, die an den Spitzen und durch ein aufsen angebrachtes Rohr miteinander kommunizieren), in das kleinere oder gröſsere Mengen einer gefärbten Flüssigkeit gefüllt sind, und das verschieden gegen die Wagrechte geneigt wird.

Polargleichungen der Kegelschnitte.

I. Als **Pol** werde der eine Brennpunkt F (Fig. 73), als Polar[...] die Richtung der grofsen Achse des Kegelschnitts gewählt. — Dann [...] $x = e + r\cos\varphi$, $r = a - \frac{ex}{a}$, wo für die **Ellipse** $o < e < a$. — Da[...]

$$r = a - \frac{e}{a}(e + r\cos\varphi) = \frac{b^2 - e\,r\cos\varphi}{a}$$

LA 63. und nach r aufgelöst $r = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$, wo $0 < \varepsilon < 1$. — [...]lich ergibt sich als allgemeine Polargleichung der Kegelschnitte $r = \frac{p}{1 + \varepsilon[...]}$ und zwar

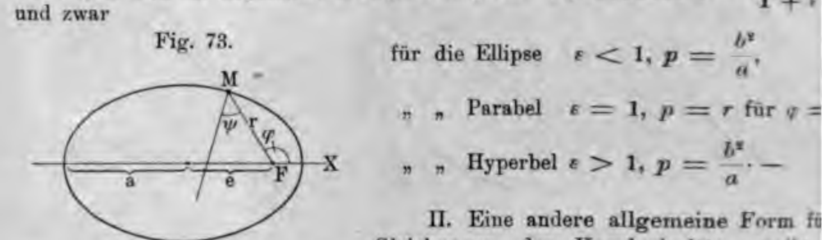


Fig. 73.

für die Ellipse $\varepsilon < 1$, $p = \frac{b^2}{a}$,

„ „ Parabel $\varepsilon = 1$, $p = r$ für $\varphi =$ [...]

„ „ Hyperbel $\varepsilon > 1$, $p = \frac{b^2}{a}$. —

II. Eine andere allgemeine Form fü[r die] Gleichungen der Kegelschnitte ergibt [sich,] wenn wir statt des Polarwinkels φ den Winkel ψ zwischen dem Radiusve[ktor] und der Normale n (Fig. 65, S. 755) als unabhängige Gröfse einführen, nä[mlich]

$$r^2 \mp 2ar = \mp\frac{b^2}{\cos^2\psi}.$$ (Anwendung LA 63.)

Beweis, zunächst für die Ellipse: Aus $r + r_1 = 2a$ und $r = \frac{n}{\cos\psi}$, $r_1 =$ [...]

also $rr_1 = \frac{n\,n_1}{\cos^2\psi} = \frac{b^2}{\cos^2\psi}$, folgt $r(2a - r) = \frac{b^2}{\cos^2\psi}$ oder $r^2 - 2ar = -$ [...]

Wenn in $2r - \frac{r^2}{a} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\cos^2\psi}$ mit dem Grenzübergang $a = \infty$ auch [...] wächst, dafs $\frac{b^2}{a} = p$ bleibt, ergibt sich für die **Parabel** $2r =$ [...]

Die Gleichung der Hyperbel ergibt sich aus der für die Ellipse, i[ndem] an Stelle von $r + r_1 = 2a$ tritt $r_1 - r = 2a$, woraus dann $r^2 + 2ar =$ [...]

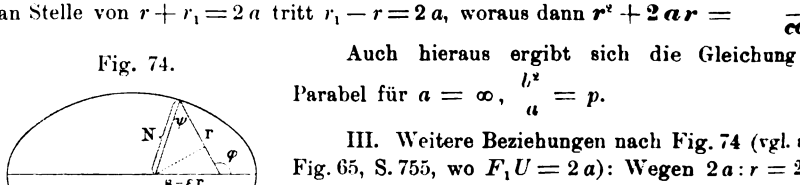
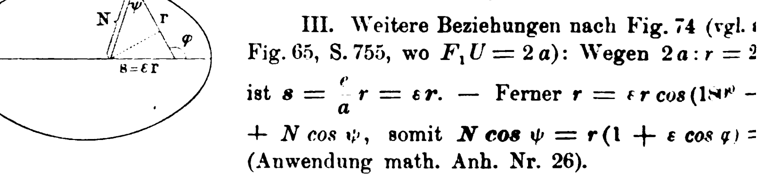


Fig. 74.

Auch hieraus ergibt sich die Gleichung [der] Parabel für $a = \infty$, $\frac{b^2}{a} = p$.



III. Weitere Beziehungen nach Fig. 74 (vgl. [...] Fig. 65, S. 755, wo $F_1U = 2a$): Wegen $2a : r = 2$[...] ist $s = \frac{e}{a}r = \varepsilon r$. — Ferner $r = \varepsilon r\cos(180^0 -$ [...] $+ N\cos\psi$, somit $N\cos\psi = r(1 + \varepsilon\cos\varphi) =$ [...] (Anwendung math. Anh. Nr. 26).

24. Zykloiden.

Der Umfang eines Kreises vom Radius a rolle längs einer Geraden; je ein Punkt dieses Umfanges beschreibt dann eine **gemeine Zykloide** (Fig. 75).

Fig. 75.

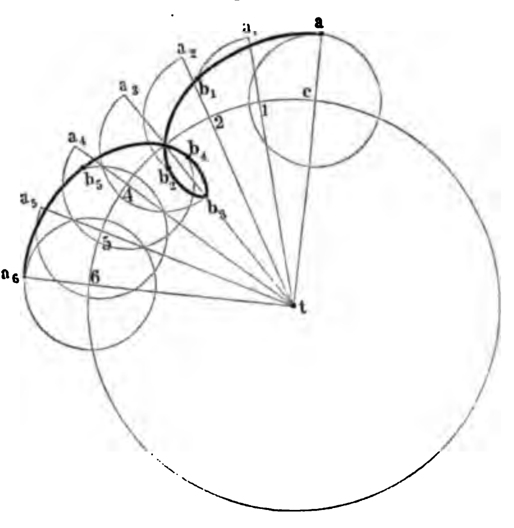
Eine solche sehen wir z. B. ein Papierblatt beschreiben, das am Umfang des Rades eines auf ebener Strafse dahinrollenden Wagens klebt. (Über die physikalische Wichtigkeit der gemeinen Zykloide als Tautochrone und Brachistochrone vgl. LA Nr. 24.) Die Gleichung der gemeinen Zykloide ergibt sich so:

LA 24

Die gegebene Gerade werde als Abszissenachse und als Koordinatenanfangspunkt in ihr einer derjenigen Punkte gewählt, in denen der gegebene Punkt M des Kreisumfanges die Gerade berührt. — Hat sich von dieser Stellung aus der Kreis um den Centriwinkel ω (Wälzungswinkel, gemessen im absoluten Maß) gedreht, so hat sich ein Bogen von der Länge $a\,\omega$ an der Abszissenachse abgerollt, und der Punkt M hat nun die Koordinaten $x = a(\omega - \sin\omega)\ldots(1)$, $y = a(1 - \cos\omega)\ldots(2)$. (Aus diesem Gleichungspaar ergäbe sich eine direkte Beziehung zwischen x und y, nämlich durch Elimination von ω nämlich $x = a\left[\operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{\frac{y}{a}\left(2 - \frac{y}{a}\right)}\right]\ldots(3)$. Wegen der Unübersichtlichkeit dieser Gl. (3) pflegt man aber lieber (1) und (2) selbst als Gleichungspaar der gemeinen Zykloide zu verwenden.) —

Während der Kreisumfang wie bei der gemeinen Zykloide längs einer Geraden abrollt, beschreibt ein Punkt des Radius selbst eine **verkürzte Zykloide,** die statt der Spitzen stetig gekrümmte Bogen hat, und zwar von um so geringerer Krümmung, je näher der Punkt dem Mittelpunkt liegt. — Ein Punkt auf dem verlängerten Radius beschreibt **verlängerte Zykloiden,** bei welchen sich statt der Spitzen Schleifen zeigen.

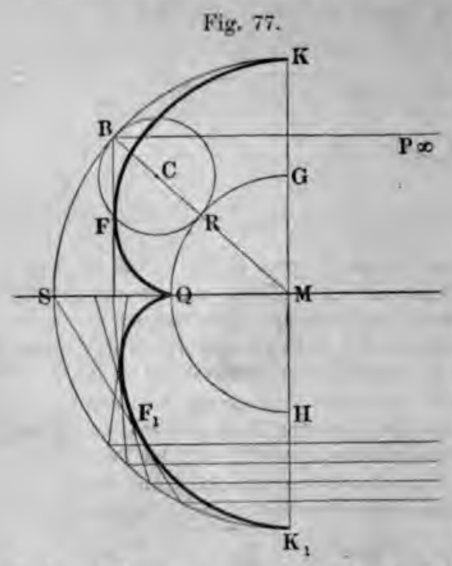
Fig. 76.



Epizykloiden beschreibt ein Punkt a (Fig. 76), der eine Kreisung auf dem Umfang eines Kreises (Epizykel) ausführt, während der Mittelpunkt c dieses Epizykels eine Kreisung auf dem Umfang eines anderen Kreises (Deferent) mit dem ruhenden Mittelpunkt t ausführt. Dies ist die dem Ptolemäischen Weltsystem zugrunde liegende Vorstellung (§§ 174, 183, Figg. 668, 669).

Hypozykloiden entstehen, wenn der Umfang eines Kreises auf der in
Seite eines anderen Kreises abrollt. Ist der Halbmesser dieses abrollenden
ein Viertel vom Halbmesser des i
(Fig. 77), so nimmt die Hypo
speziell die Form der Herzlini
dioide) an, die physikalisch ein
spielt als Katakaustika an
spiegeln (vgl. Nr. 27).

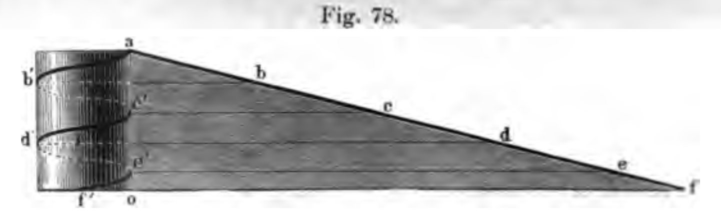
Fig. 77.



25. Schraubenlinie

Auf den Mantel eines g
Kreiszylinders von der Höh
dem Basisumfange u sei ein
winkeliges Dreieck von de
theten h und u so aufgeroll
h längs einer Seite des Zyl
zu liegen kommt. Die
tenuse bildet dann eine ein
Schraubenlinie; h ist die
u ist der Umfang e
Schraubenganges. — Ein ähnliches Dreieck von den Kathet
und nu, wo n eine ganze Zahl ist, bildet auf einem Zylinder, de
gleichen Umfang u hat, n Schraubengänge (Fig. 78).

Fig. 78.



Schraubenlinien verwickelterer Art kann man sich nicht nur auf Zylin
sondern auch z. B. auf Kugeloberflächen verzeichnet denken. Eine solche Schra
linie stellt z. B. die jährliche Bahn der Sonne am Himmelsgewölbe dar;
die Sonne geht am 21. März im (genau: sehr nahe dem) Ostpunkte auf, e
sich bis Mittag $90° - \varphi$ über den Horizont eines Ortes von $\varphi°$ geographi
Breite, geht nahe dem Westpunkt unter, beschreibt am nächsten Tage
Bahn, die mit der des Vortages nicht zusammenfällt, sondern mit ihr n
parallel ist u. s. f. (Sehr häufig wird diese Sonnenbahn als eine „Spirale"
zeichnet; mit Unrecht, denn Spiralen sind ebene Kurven von der Art de
Fig. 21, S. 24, dargestellten, wogegen Schraubenlinien doppelt gekrüm
Kurven sind, Anhang Nr. 26.)

Warum projiziert sich eine einfache Schraubenlinie auf eine zur Zylir
achse parallele Ebene als Sinuslinie (z. B. der Aufrifs einer Wendeltrep
Daher Verwendung der Schraubenlinie bei manchen Wellenapparaten.



26. Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt.

Fährt ein Wagen in „scharfer Biegung“ um die Ecke, so sagt man schon im gewöhnlichen Leben, dafs die Bahn des Wagens eine stark gekrümmte gewesen sei. Gemeint ist hiermit, dafs schon auf kleine Wegstrecken grofse Änderungen der Richtung kommen. An diese Vorstellung knüpfen sich folgende Definitionen und Maßbestimmungen:

Der Kreis (und nur dieser) hat an allen Stellen seines Umfanges gleiche Krümmung. Kreise von kleinem Halbmesser haben grofse Krümmung, grofse Kreise kleine Krümmung. Die Gröfse (Stärke) der Krümmung eines Kreises wird gemessen durch den reziproken Wert des Kreishalbmessers, und zwar wird als **Einheit der Krümmung die Krümmung des Einheitskreises** gewählt. Der Kreis von r cm Halbmesser hat $\frac{1}{r}$ Krümmungseinheiten.

Der alltäglichen Anschauung dürfte die Eigenschaft des Kreises, dafs er die Linie von konstanter Krümmung sei, in der Regel sogar noch viel eher sich aufdrängen als die in der Geometrie gewöhnlich zugrunde gelegte Definition, dafs der Kreis die ebene geschlossene Linie von konstantem Halbmesser sei. — Denken wir uns einen Kreis gezeichnet und den Mittelpunkt nachmals wieder unkennbar gemacht, so können wir ihn finden, wenn wir zu zwei Bogenelementen des Kreises Normalen errichten (wie verhält sich dieses Verfahren zu dem, zu zwei beliebigen, nur nicht parallelen Sehnen die Streckensymmetralen zu ziehen?). Läfst man die beiden Bogenelemente immer näher aneinander rücken, so rücken auch ihre Normalen einander immer näher. Sie werden aber nicht parallel, sondern ihr Schnittpunkt bleibt immer der Kreismittelpunkt. Dieses Verfahren läfst sich nun auch übertragen auf beliebig anders gestaltete Linien, und wir definieren allgemein:

Krümmungsmittelpunkt einer beliebigen Kurve an einer beliebigen Stelle ist der Durchschnittspunkt zweier daselbst unendlich benachbarter Normalen.

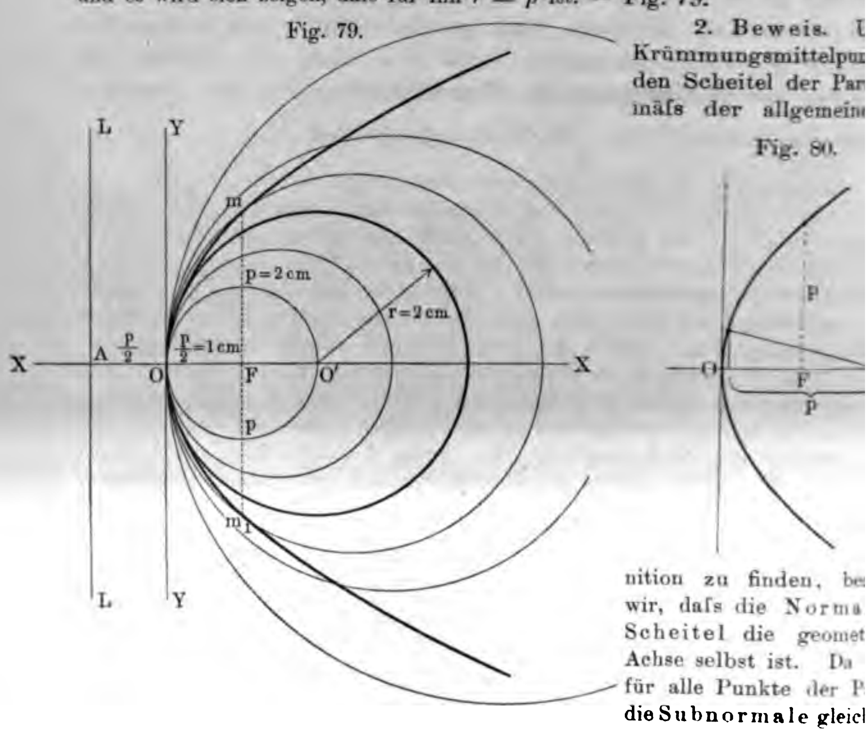
Die Gerade läfst sich auffassen als Kreis vom Halbmesser $r = \infty$, und die Krümmung der Geraden ist überall gleich Null. — Dagegen läfst sich eine scharfe Ecke auffassen als Bogen eines Kreises vom Halbmesser Null, und ihre Krümmung ist unendlich grofs.

In krummlinigen, nicht kreisförmigen Bahnen ändert sich die Krümmung von Stelle zu Stelle (Fig. 13, S. 11). Für je ein Element einer beliebigen Kurve gibt es aber einen (und nur einen) Kreis von gleicher Krümmung, wie die des Elementes selbst: er heifst der **Krümmungskreis** dieses Elementes, sein Halbmesser der **Krümmungshalbmesser** und sein Mittelpunkt der **Krümmungsmittelpunkt.**

Schon das Verfahren praktischer Zeichner, Kurven beliebiger Gestalt aus Kreisbogen zusammenzusetzen, die dann bestimmte Mittelpunkte haben müssen, entspricht dieser Vorstellungsweise. In Fig. 97, S. 821, sind die Krümmungsmittelpunkte und Krümmungshalbmesser an mehreren Stellen der Wurfparabel angegeben. Insbesondere benutzten wir mehrmals (§ 13, ferner, indem wir uns einen Kugelspiegel durch einen parabolischen und umgekehrt ersetzt dachten) den Satz:

Der Krümmungshalbmesser im Scheitel einer Parabe gleich deren Parameter; $r_0 = p$.

Zur Begründung: 1. Ist eine Parabel von dem gegebenen Parameter lichst genau gezeichnet und werden beliebig viele kleine und grofse gezeichnet, deren Mittelpunkte auf der Parabelachse liegen und die du Scheitel der Parabel gehen, so ist auf den ersten Blick zu sehen, dafs die k Kreise zu starke, die gröfsten zu schwache Krümmung im Vergleich zum l elemente nächst dem Scheitel haben. Es läfst sich so schon durch Auspro ein Kreis finden, der sich der Parabel im Scheitel möglichst genau ansc und es wird sich zeigen, dafs für ihn $r = p$ ist. — Fig. 79.



2. Beweis. U Krümmungsmittelpun den Scheitel der Par mäfs der allgemein nition zu finden, be wir, dafs die Norma Scheitel die geomet Achse selbst ist. Da für alle Punkte der P die Subnormale gleic (S. 753), so ist auch für eine der Achse unendlich benachbarte Normale der Al zwischen dem Fufspunkt der Ordinate und dem Krümmungsmittelpunkt gle Im Vergleich zu dieser Strecke aber ist der Abstand zwischen dem Scheitel und Fufspunkt verschwindend klein, also ist auch $OC = p$. — Fig. 80.

3. Beweis. Die Scheitelgleichung des Kreises $y^2 = 2rx - x^2$ geh verschwindend kleine x über in $y^2 = 2rx$, und diese Gleichung stell Parabel $y^2 = 2px$ in der Nähe von O nur dann dar, wenn $r = p$ gesetzt wir Dieser Gedanke läfst sich strenger gestalten in folgendem

4. Beweis. Lassen wir mit der Scheitelgleichung der Parabel $y^2 =$ die Scheitelgleichung des Kreises $y^2 = 2rx - x^2$ von einstweilen beliet Radius r koexistieren, so dafs $2rx - x^2 = 2px$, so haben die beiden Kr jedenfalls den Wert $x = 0$ gemeinsam, entsprechend der Voraussetzung, beides Scheitelgleichungen sein sollen. Die zurückbleibende Gleichung $2r - x =$

oder $x = 2(r - p)$ stellt die Abszisse eines zweiten gemeinsamen Punktes nur dann dar, wenn $r > p$; denn für $r < p$ würde x negativ, zu negativen Abszissen aber gehören (bei $p > o$) keine reellen y-Werte der Parabel. Dann und nur dann, wenn $x = p$, fällt auch der zweite Punkt in den Scheitel. [Es ist dies arithmetisch ausgedrückt derselbe Umstand, auf den bei der in 1. beschriebenen Zeichnung der Zeichner achtet, indem er den anfänglich zu grofs genommenen Kreis so lange verkleinert, bis der Durchschnittspunkt von Kreis und Parabel in den Scheitel rückt.]

Für alle Kegelschnitte gelten die Gleichungen $\varrho \cos^2\psi = N$ ... (I), $N\cos\psi = p$ ... (II), also $\varrho \cos^3\psi = p$ ... (III), wo N die Normalenstrecke, ϱ den Krümmungshalbmesser und ψ den Winkel zwischen ϱ und r für je einen Punkt der Kurve, endlich p den Parameter (also für Ellipse und Hyperbel $p = \frac{b^2}{a}$) bedeutet (Anwendung in LA 47). LA 47.

Beweis (speziell für die Ellipse) zu Gl. (I): Zu zwei benachbarten Punkten M, M' der Ellipse (Fig. 81) seien die Leitstrahlen r, r', r_1, r_1' und ihre Winkelhalbierenden ϱ, ϱ' gezogen. Mit verschwindendem Bogen $\widehat{MM'}$ wird $\varrho' = \varrho$ der Krümmungshalbmesser, $\angle(r'\varrho') = (r\varrho) = \psi$. Die Winkel $(rr') = \alpha$, $(r_1 r_1') = \alpha_1$, $(\varrho\varrho') = \nu$ haben die Beziehung $\nu = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_1) \cdots (1^*)$. Da die Winkel in absoluten Einheiten (Anh. Nr. 2) die Bogen im Einheitskreis messen, so ist $\nu \cdot \varrho = \widehat{MM'}$, $\alpha . r = \widehat{MM'} \cos\psi = \alpha_1 . r_1$; daher $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)\cos\psi \cdots (2)$. Hier ist $\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{2a}{rr_1}$ (wegen $r + r_1 = 2a$); ferner ist $\frac{2a}{rr_1} = \frac{2\cos\psi}{N}$ $\Big($wegen $\triangle\, FUF_1 \sim FMQ$, woraus $\frac{2a}{r} = \frac{F_1U}{N} = \frac{2r_1\cos\psi}{N}\Big)$; daher $\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\psi}{N}$, also (Gl. I).

Fig. 81.

Beweis zu Gl. (II) vgl. Nr. 23, Ende (S. 760 u.).

Krümmung von Flächen. — Wie der Kreis die ebene Linie von konstanter Krümmung (über doppelt gekrümmte Linien s. u.), ist die Kugel eine Fläche von konstanter Krümmung. Die Definitionen der **Krümmung**, des **Krümmungshalbmessers**, **Krümmungsmittelpunktes** von kugeligen Flächen sind benutzt in §§ 103, 107.

) Erster Beweis für die Gl. (1): In Bezug auf eine beliebige feste Richtung sind die Richtungsunterschiede der Winkelhalbierenden die arithmetischen Mittel aus den Richtungsunterschieden der Schenkel 1 und 5, bzw. 2 und 6 (Fig. 82). Zweiter Beweis aus Winkelsummen.

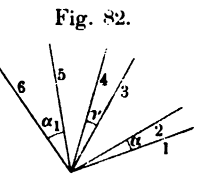


Fig. 82.

Auch die Fläche eines geraden Kreiszylinders ist nach populärer Auffassung gekrümmt, aber nicht wie die Kugel nach allen Seiten, sondern die Krümmung ist Null längs der Seitenlinie, sie ist am gröfsten normal zur Seitenlinie, d. h. längs des erzeugenden Kreises, und hat Zwischenwerte längs aller schiefen Schnitte, entsprechend den an den Scheiteln der kleinen Achsen verschieden gekrümmten Ellipsen. — Nach Gauss wird die Krümmung jeder Fläche in einem ihrer Punkte gemessen durch das Produkt der Krümmungen zweier Schnittlinien, die zueinander und zur Tangentialebene in jenem Punkte normal sind. Da nun bei einem Zylinder die eine dieser Krümmungen Null ist, so ist nach diesem Gaufsschen Maße die Krümmung des ganzen Kreiszylinders überall Null, und ebenso auch Null bei jeder auf eine Ebene abwickelbaren Fläche (z. B. einer Kegelfläche). — Beim Erdellipsoid ist die Krümmung am stärksten am Äquator, am schwächsten an den Polen (wofür oft mifsverständlich gesagt wird: Die Erde sei eine an den Polen abgeplattete Kugel). — Die Krümmung an Spitzen ist unendlich, insofern wir sie uns etwa durch eine Halbkugel von verschwindend kleinem Halbmesser gebildet denken. Hieraus Erklärung der sehr grofsen elektrischen Dichte an Spitzen und Kanten geladener Leiter.

Doppelt gekrümmte Linien. Wird z. B. durch eine Kugel vom Radius R ein gerader Kreiszylinder vom Radius $r < R$ so gesteckt, dafs die Zylinderachse durch den Kugelmittelpunkt geht, so ist die Schnittlinie ein Kreis. Geht aber die Zylinderachse nicht durch den Kugelmittelpunkt, so ist die Schnittlinie eine doppelt gekrümmte Linie, im Gegensatz zu denen alle in der Planimetrie betrachteten Kurven einfach gekrümmte Linien heifsen.

Auch die ellipsenartigen Linien, in denen das Kegelpendel schwingt (§ 12, *Versuch* 8) wenn seine Amplituden nach zwei zueinander senkrechten Vertikalebenen ungleich sind, sind doppelt gekrümmte Linien. — Vgl. ferner Fig. 55, S. 743.

27. Einhüllende Linien und Flächen.

Zeichnet man z. B. sehr viele Kreise vom Halbmesser ϱ, deren Mittelpunkte alle auf dem Umfange eines Kreises vom Halbmesser r liegen (Fig. 84), so vereinigen sich die dem Mittelpunkte des grofsen Kreises am fernsten (und ebenso die am nächsten) liegenden Bogen der kleinen Kreise zu einem neuen Kreise vom Halbmesser $r + \varrho$ (bzw. $r - \varrho$). Man nennt diesen Kreis die **einhüllende Linie** der kleinen Kreise. — Ähnlich ergibt sich eine **einhüllende Fläche** zu analog konstruierten Kugelflächen: Anwendung in Huygens Prinzip von den Elementarwellen (§ 68).

Eine andere Anwendung wird von dem Begriffe der einhüllenden Linie (bzw. Fläche) gemacht bei der Brennlinie eines Hohlspiegels, Fig. 352 (S. 327) und Fig. 77 (S. 762); desgleichen überhaupt bei der Bestimmung aller kaustischen Linien und Flächen, vgl. S. 327 und LA 168.

LA 168.

Die rechnerische Bestimmung einer einhüllenden Kurve besteht darin, daß man den geometrischen Ort der Durchschnittspunkte je zweier unendlich benachbarter gegebener Kurven sucht; ein Beispiel hierfür bietet LA 18, zweiter Beweis. — Ein anderes Beispiel ist folgendes: Von einer Schar Kreise liegen die Mittelpunkte auf der Abszissenachse und die Radien sind der jeweiligen Abszisse des Mittelpunktes proportional ($r = km$); zu zeigen, daſs zwei Gerade durch den Anfangspunkt P die Einhüllenden dieser Kreise sind (Fig. 83). — Die Gleichung eines Kreises ist $(x-m)^2 + y^2 = r^2 = (km)^2 \ldots (1)$ und die Gleichung seines Nachbarkreises $(x - m')^2 + y^2 = r_1^2 = (km')^2$. Daher $(m' - m)(2x - m - m') = k^2(m + m')(m - m')$ und $2x - m - m' = -k^2(m + m')$. Für $m' = m$ ergibt sich hieraus $2x - 2m = -2k^2 m$ oder $x - m = -k^2 m$ und hieraus $x = m(1 - k^2)$. Trägt man den Wert von $x - m$ in die Gl. (1) ein, so folgt $(k^2 m)^2 + y^2 = k^2 m^2$, also $y^2 = k^2 m^2 - k^4 m^2 = k^2 m^2 (1 - k^2)$, somit $y = \pm km\sqrt{1 - k^2}$. Eliminiert man aus den Ausdrücken für x, y die Gröſse m, so folgt $\frac{y}{x} = \pm \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}$. Für $k = \sin\psi$ wird $\frac{y}{x} = \pm tg\,\psi$.

Fig. 83.

Vorstehende Aufgabe findet physikalische Anwendung in der Erklärung der bei den durch ein fahrendes Schiff zu seinen beiden Seiten aufgeworfenen Wellen, die bekanntlich einen um so spitzeren Winkel bilden, je schneller das Schiff fährt (nähere Erklärung aus Huygens' Prinzip).

Fig. 84.

Ein drittes Beispiel bildet die Erklärung der Kreis- (und Kugel-) Wellen nach Huygens' Prinzip (vgl. Fig. 262, S. 247); rechnerisch: Von einer Schar Kreise (Fig. 84) liegen die Mittelpunkte („sekundäre Erregungscentra") auf dem Umfange eines anderen Kreises (dessen Mittelpunkt das „primäre Erregungscentrum" ist). Dann ist für diesen „primären" Kreis $X^2 + Y^2 = r^2 \ldots (1)$, für jeden sekundären Kreis $(x - X)^2 + (y - Y)^2 = \varrho^2 \ldots (2)$. — Für einen unendlich benachbarten primären Kreis wird $X'^2 + Y'^2 = r^2 \ldots (3)$ und $(x - X')^2 + (y - Y')^2 = \varrho^2 \ldots (4)$. Aus (1) und (2) folgt: $x^2 + y^2 - 2Xx - 2Yy = \varrho^2 - r^2$, ebenso aus (3) und (4): $x^2 + y^2 - 2X'x - 2Y'y = \varrho^2 - r^2$, also $2x(X' - X) + 2y(Y' - Y) = 0$ oder $x + y \cdot \frac{Y' - Y}{X' - X} = 0$. Hierin geht $\frac{Y' - Y}{X' - X} = -\frac{X' + X}{Y' + Y}$ für $X' = X$ über in $-\frac{X}{Y}$ (wie bekannt vom Richtungskoeffizienten des Kreises); somit $x - y \cdot \frac{X}{Y} = 0$ oder $xY - yX = 0 \cdots (5)$. Nun sind aus (1), (2), (5) zu eliminieren X und Y; am besten durch Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen $Xx + Yy = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - \varrho^2 + r^2)$ und (5). Dann wird $X^2(x^2 + y^2) + Y^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - \varrho^2 + r^2)^2 = r^2 . (x^2 + y^2)$ und hieraus $x^2 + y^2 = (r \pm \varrho)^2$; das sind aber die Gleichungen der zum Kreise (1) in Abständen ϱ gleichlaufenden Kreise, als äuſsere und innere Einhüllende der sekundären Kreise.

Anh. Nr.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	gattung	
Anh. 1	Unbenannte Zahl	$a, b, c \ldots n \ldots x, y, z$	Arithmetische (absolute, ganze) Einheit	0	
Anh. 2	Winkel	$\alpha, \beta, \gamma;\ \varphi, \psi$	Winkelgrad, $1^0 = {}^1/_{360}$ des vollen Winkels; abs. W. E. $= 57^0\ 17'\ 44{,}8''$	0	

Gröfsen im C-S-G-System (Centimeter-Sekunden-Gramm-System, abs. mechanisches Maßsystem).

A. Gröfsen der Phoronomie.

Anh. 3 § 3	**Raumstrecke** Weg Weg in der 1. Sek. Länge (Pendel-, Wellen-) Höhe Abstand, Radius Leitstrahl (Radiusvektor)	— s (spatium) u (Anfangsweg, Amplitude) l, λ h, H a, r, R r	**Zentimeter, cm** Meter, m Kilometer, km Millimeter, mm $= {}^1/_{1000}$ m Mikron, $\mu = {}^1/_{1000}$ mm ${}^1/_{1000}$ Mikron, $\mu\mu = 10^{-6}$ mm Erdweite } astronomische Lichtjahr } Längeneinheiten	cm	1 Erdmeridianquadrant $= 10000859$ m $\neq 10^4$ km $= 10^7$ m $= 10^9$ cm 1 geogr. Meile = 111 km 1 Erdweite $= 2 \cdot 10^7$ geographische Meilen 1 Lichtjahr $\neq$ $\neq 6 \cdot 10^4$ Erdweiten $\neq 9{,}5 \cdot 10^{12}$ km
Anh. 26	Krümmungshalbmesser Umfang Streckenkoordinaten	r (konstant), ϱ (variabel) u $x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta$			
	Fläche; Volumen	b (Basis); v	cm^2, m^2, mm^2; cm^3 . . .	cm^2; cm^3	
§§ 3, 181	**Zeitstrecke** (kurz: Zeit)	t (tempus)	**Sekunde, sec**	sec	Mittleres tropisches Jahr; Tag mittlerer Sonnenzeit (bürgerlicher Tag) $= 1{,}002\,737\,9$ Sterntage
§§ 12, 22, 187	Umlaufszeit, Schwingungsdauer	T	Minute min; Stunde h; Tag d; Jahr		
§§ 12, 31 LA 88	Umlaufszahl, Tourenzahl, Schwingungszahl	n	Umläufe (Schwingungen) per Sekunde	sec^{-1}	Wegen $n = \frac{1}{T}$ ist Dim n **nicht** gleich der einer Zahl (d. h. nicht 0)
§ 4	**Geschwindigkeit** (Bahngeschwindigkeit)	c (celeritas, constant) v (velocitas, veränderlich variabel)	**Cel** (d. h. Geschwindigkeit von 1 cm per sec)	cm sec^{-1}	Zum Vorschlag des Namens *Cel* vgl. S. 12, Anm.

28. Trajektorien.

Ein System von Niveaulinien mit dem zu ihm gehörigen System von linien (Tafel I und II, a—d bei S. 108) gibt ein Beispiel zu dem Begriffe **orthogonaler Trajektorien:** So nennt man zwei Systeme S_1 u von Kurven, in welchen je eine Kurve des einen Systems alle K des anderen unter rechten Winkeln durchkreuzt.

Beispiele: 1. Es seien gegeben die Systeme der gleichseitigen Hy (Fig. 85) von den Gleichungen $xy = C_1$ und $x^2 - y^2 = C_2$, wo die Konstanten C_1 und C_2, indem ihnen immer andere und andere spezielle Wert werden, auch immer anderen speziellen Hyperbeln angehören. Es sind d Richtungskoeffizienten A_1 und A_2 für die Hyperbeln

$$A_1 = -\frac{C_1}{x^2};\quad A_2 = +\frac{x}{y}. \text{ — Daher } A_1 A_2 = -\frac{C_1}{x^2}\cdot\frac{x}{y} = -\frac{C_1}{xy} = \cdot$$

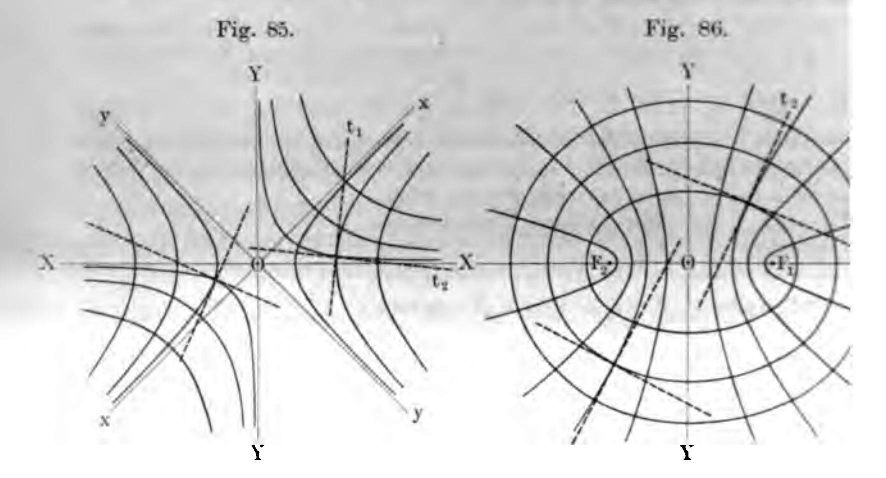


Fig. 85. Fig. 86.

2. Es seien gegeben die Systeme konfokaler Ellipsen und Hyperbeln (Fig. solcher, die bei beliebigen Haupt- und Nebenachsen a, b, α, β dieselben punkte F_1 und F_2 und die gemeinsame Excentrizität $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{}$ haben, weshalb $a^2 - b^2 = \alpha^2 + \beta^2$ oder $a^2 - \alpha^2 = b^2 + \beta^2$.

Es sind dann die Richtungskoeffizienten $A_E = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, $A_H =$ und $A_E A_H = -\frac{b^2 \beta^2}{a^2 \alpha^2}\cdot\frac{x^2}{y^2}$, wo sich die x^2, y^2 des Schnittpunktes erge

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\\[4pt] \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.\end{array}\right|\quad \text{nämlich}\quad \left|\begin{array}{l} x^2 = \frac{a^2\alpha^2(b^2+\beta^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}\\[4pt] y^2 = \frac{b^2\beta^2(a^2-\alpha^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}\end{array}\right|,\quad \text{also}\quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2\alpha^2(b}{b^2\beta^2(a}$$

$$\text{Daher wird } A_E A_H = -\frac{b^2\beta^2}{a^2\alpha^2}\cdot\frac{a^2\alpha^2(b^2+\beta^2)}{b^2\beta^2(a^2-\alpha^2)} = -\frac{b^2+\beta^2}{a^2-\alpha^2} = -1.$$

Anh. Nr.				gattung	
Anh. 1	Unbenannte Zahl	$a, b, c \ldots n \ldots x, y, z$	Arithmetische (absolute, ganze) Einheit	0	
Anh. 2	Winkel	$\alpha, \beta, \gamma;\ \varphi, \psi$	Winkelgrad, $1^0 = \frac{1}{360}$ des vollen Winkels abs. W. E. $= 57^0\ 17'\ 44,8''$	0	

Grölsen im C-S-G-System (Centimeter-Sekunden-Gramm-System, abs. mechanisches Maßsystem).

A. Grölsen der Phoronomie.

Anh. 3 § 3	**Raumstrecke** Weg Weg in der 1. Sek. Länge (Pendel-, Wellen-) Höhe Abstand, Radius Leitstrahl Radiusvektor) Krümmungshalbmesser Umfang Streckenkoordinaten	— s (spatium) a (Anfangsweg, Amplitude) l, λ h, H a, r, R r r (konstant), ϱ (variabel) u $x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta$	**Zentimeter, cm** Meter, m Kilometer, km Millimeter, mm $= \frac{1}{1000}$ m Mikron, $\mu = \frac{1}{1000}$ mm $\frac{1}{1000}$ Mikron, $\mu\mu = 10^{-6}$ mm Erdweite } astronomische Lichtjahr } Längeneinheiten	cm	1 Erdmeridianquadrant $= 10000859$ m $\neq 10^4$ km $= 10^7$ m $= 10^9$ cm 1 geogr. Meile $= 111$ km 1 Erdweite $= 2.10^7$ geographische Meilen 1 Lichtjahr $\neq$ $\neq 6.10^4$ Erdweiten $\neq 9,5.10^{12}$ km
Anh. 26	Fläche; Volumen	b (Basis); r	cm^2, m^2, mm^2; cm^3 . . .	cm^2; cm^3	
§§ 3, 181	**Zeitstrecke** (kurz: Zeit)	t (tempus)	**Sekunde, sec**	sec	Mittleres tropisches Jahr; Tag mittlerer Sonnenzeit (bürgerlicher Tag) $= 1,002\ 737\ 9$ Sterntage
§§ 12, 22, 187	Umlaufszeit, Schwingungsdauer	T	Minute min; Stunde h; Tag d; Jahr		
§§ 12, 31 LA 88	Umlaufszahl, Tourenzahl, Schwingungszahl	n	Umläufe (Schwingungen) per Sekunde	sec^{-1}	Wegen $n = \frac{1}{T}$ ist Dim n nicht gleich der einer Zahl (d. h. nicht 0)
§ 4	**Geschwindigkeit** (Bahngeschwindigkeit)	c (celeritas, constant) v (velocitas, veränderlich variabel)	**Cel** (d. h. Geschwindigkeit von 1 cm per sec)	cm sec^{-1}	Zum Vorschlag des Namens *Cel* vgl. S. 12, Anm.

Vrgl. § .. bzw. Anh. Nr.	Name der Gröſsengattung	Zeichen (und Merkwort) der Maßzahl	Name und Zeichen der Maßeinheit	Dimension der Gröſsengattung	Anmerkung
§§ 12, 31	Winkelgeschwindigkeit	α (konstant), ψ (variabel)		sec^{-1}	
LA 43	Flächengeschwindigkeit	∇		$cm^2\ sec^{-1}$	
§§ 5, 6	**Beschleunigung**	b (**B**eschl., **b**leibend) w (**W**achsen, **w**echselnd)	**Accel** (d. h. Geschwindigkeitszuwachs von 1 Cel per sec, d. h. von 1 cm sec^{-1} per sec)	$cm\ sec^{-2}$	Vorschlag des Namens ***Accel*** vgl. S. 15, Anm.
§§ 2, 6, 31	Schwerebeschleunigung	g, G, γ (gravitas)			Über die Zeichen **g** (Schwerebeschleunig.), **g** (Massengramm), **𝔤** (Kraftgramm) vgl. S. 62, Anm.
§ 13	Normal (Centripetal)-beschleunigung	$b_\perp$ (bleibend, konstant) $w_\perp$ (wechselnd, variabel)			
§ 31	Winkelbeschleunigung	β (konstant), ω (variabel)		sec^{-2}	

Bα. Gröſsen der Dynamik im engeren Sinn.

Vrgl. § .. bzw. Anh. Nr.	Name der Gröſsengattung	Zeichen (und Merkwort) der Maßzahl	Name und Zeichen der Maßeinheit	Dimension der Gröſsengattung	Anmerkung
§ 16 Anh. 5	**Masse**	m, M	**Gramm** (Massengramm), g	g	1 g $\neq$ der Masse eines cm^3 Wasser bei 4° C
§ 16	**Kraft**	k (**K**raft, **k**onstant) f (**f**orce, **v**eränderlich)	**Dyn**,		Der manchmal gebrauchten Bezeichnung „die Dyne“ ist „das Dyn“ vorzuziehen wegen der Kürze und wegen der Analogie zu „das Erg“.
§§ 14, 16	Beschleunigende Kraft; Spannung, Druck, Zug als statische Wirkung d. Kraft.		Megadyn = 10^6 Dyn	$cm\ sec^{-2}\ g$	
	Gewicht	p (**p**ondus)			
§§ 16, 41	Dichte (spezifische Masse)	d, D	Gramm per cm^3	$cm^{-3}\ g$	
	Spezifisches Gewicht	s, S	Dyn per cm^3	$cm^{-2}\ sec^{-2}\ g$	
	relative Dichte relatives spezifisches Gewicht	$\delta = \sigma$		0	Verhältnis zur Dichte (zum spez. Gew.) des Wassers, der Luft.
§ 19	Centripetalkraft und Centrifugalkraft	$k_\perp$ (**k**onstant) $f_\perp$ (**v**eränderlich)	Dyn	$cm\ sec^{-2}\ g$	
§ 21	Gravitationskonstante	$\varkappa$		$cm^3\ sec^{-2}\ g^{-1}$	Dimensionsgleich mit mechanischer Arbeit

§ 23	**Lebendige Kraft** (Energie der Bewegung, kinetische Energie)	L	Joule = 10^7 Erg Wattstunde = 3600 Joule	$cm^2\, sec^{-2}\, g$	
§ 22	Leistung, Effekt (Arbeitsstärke, Zeitarbeit)		Sekundenerg **Watt** = Joule per sec = 10^7 Erg per sec	$cm^2\, sec^{-3}\, g$	
§ 24	Gravitationspotential	V	Erg per g	$cm^2\, sec^{-2}$	

Dynamische und energetische Gröfsen im irdischen (terrestrischen) Maßsystem.

§ 16	Kraft, Gewicht	p (pondus)	Gramm (Kraftgramm), g Kilogramm (Kraftkilogramm), kg		1 g (Kraftgramm) = 981 Dyn 1 kg (Kraftkilogramm) = 981000 Dyn ≠ 10^6 Dyn
§ 44	Flächendruck		Atmosphäre at		1 at = 1,0336 kg per cm^2
§ 22	Arbeit	A	Meterkilogramm, mkg		1 mkg = 981 . 10^5 ≠ 10^8 Erg ≠ 10 Joule
§ 22	Leistung		Pferdestärke PS = 75 mkg per sec = 736 Watt Horsepower HP = 746 Watt		

Thermische und kalorische Gröfsen im C-S-G-System und im irdischen System.

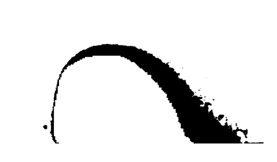
§ 71	Wärmegrad (Temperatur)	t^0 C (sprich t Centigrad) T^0 absolute Temperatur ($T = 273^0 + t^0$)	Centigrad (= $^1/_{100}$ des Fundamentalabstandes ES)	0	
§§ 72, 82	Wärmemenge	Q	cal (Grammkalorie, kleine kalorie) Cal (Kilogrammkalorie, große kalorie)	$cm^2 sec^{-2} g$	Einheit (Benennung) und Dimension von Wärmemenge ist gleich der von Arbeit und Energie. — 1 Cal = 424 mkg
§ 72	Spezifische Wärme	s	cal per g; Cal per kg	$cm^2 sec^{-2}$	

Optische Gröfsen im beleuchtungstechnischen System.

§ 117	Leuchtkraft (Lichtstärke)	i, I	Hefnerkerze HK		1 HK = 1,2 NK (Normalkerze)
§ 117	Lichtmenge	$Q = 4\pi \,.\, I \,.\, t$	Lichtmengeneinheit, theoretisch: Erg per sec und per cm^2; praktisch: Die von 1 HK per sec in die Einheit des räumlichen Winkels gestrahlte Lichtmenge		Lichtstärke × Zeit
§ 117	Beleuchtungsstärke (Beleuchtung, Erhellung)		Lux Lx		

Elektris

Vrgl. §.. bzw. Anh. Nr.	Name der Gröſsengattung	Zeichen der Maßzahl	Name, Definition, Zeichen,	
			elektrostatischen C-S-G-Sy	
§ 135	**Ladungsmenge** (Elektrizitätsmenge)	ε, E	**Ladungseinheit** (st. LE) ist die Ladung, die auf eine ihr gleiche in 1 cm Abstand mit 1 Dyn abstoßend wirkt.	$cm^{3/2}$
§ 143	**Polstärke** (Menge des freien Magnetismus)	μ, m		cm
§§ 136, 149	El. **Potential** und el. **Potentialdifferenz** (elektromotorische Kraft, EMK, „Spannung" im elektrotechnischen Sinn)	V, v	Einheit der Potentialdifferenz (st. PE) kommt zwei Stellen eines elektrischen Feldes zu, wenn die Verschiebung von 1 st. LE von einer zur andern 1 Erg erfordert.	$cm^{1/2}$
§ 139	**Kapazität**	C, c	Einheit der Kapazität (st. CE) hat ein Leiter, dessen Potential durch Zuführung von 1 st. LE einen Zuwachs um 1 st. PE erfährt	
§§ 140, 148	**Stromstärke**	i, I	Die Stromstärkeneinheit (st. SE) hat ein Strom, in dem 1 st. LE per sec durch den Querschnitt des Leiters geht.	$cm^{3/2}$
§ 149	**Widerstand**	w, W		cm



;ische Gröſsen

rechnungszahlen der Maßzahlen, bzw. der Maßeinheiten im

d elektromagn. C-S-G-System		elektromagnetischen technischen System	
	$cm^{1/2}\, g^{1/2}$	**1 Coulomb** $= 3 \cdot 10^9$ st. LE $= {}^1/_{10}$ m. LE	$(10^9\ cm)^{1/2}\, (10^{-11}\ g)^{1/2} = {}^1/_{10}\, cm^{1/2}\, g^{1/2}$
›ol oder Pol- einheit ist die eines Pols, f einen ihm n in 1 cm Ab- nit 1 Dyn ab- l wirkt.	$cm^{3/2}\, sec^{-1}\, g^{1/2}$		$(10^9\ cm)^{3/2}\, sec^{-1}\, (10^{-11}\ g)^{1/2} = 10^8\ cm^{3/2}\, sec^{-1}\, g^{1/2}$
	$cm^{3/2}\, sec^{-2}\, g^{1/2}$	**1 Volt** $= {}^1/_{300}$ st. PE 10^8 m. PE	$(10^9\ cm)^{3/2}\, sec^{-2}\, (10^{-11}\ g)^{1/2} = 10^8\ cm^{3/2}\, sec^{-2}\, g^{1/2}$
	$cm^{-1}\, sec^2$	**1 Farad** $= 9 \cdot 10^{11}$ st. CE $= 10^{-9}$ m. CE	$(10^9\ cm)^{-1}\, sec^2 = 10^{-9}\, cm^{-1}\, sec^2$
›mstärkenein- .SE) hat ein der den Bo- cm im Ein- eis durchflie- ıuf den Ein- l im Kreis- unkt mit 1 ırkt.	$cm^{1/2}\, sec^{-1}\, g^{1/2}$	**1 Ampère** $= 3 \cdot 10^9$ st. SE $= {}^1/_{10}$ m. SE	$(10^9\ cm)^{1/2}\, sec^{-1}\, (10^{-11}\ g)^{1/2} = {}^1/_{10}\, cm^{1/2}\, sec^{-1}\, g^{1/2}$
	$cm\ sec^{-1}$	**1 Ohm** $= \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ st. WE $= 10^9$ m. WE 1 Ohm ist der Widerstand eines Leiters, in dem ein Strom von 1 Amp. die Leistung von 1 Watt verrichtet.	$(10^9\ cm)\, sec^{-1} = 10^9\, cm\ sec^{-1}$

B. Zusätze aus der Logik und Psychologie.

30. Physische und psychische Erscheinungen.

Leuchten, Tönen, einen Blitz, einen Knall, die Bewegungen einer Maschine, das Wachsen und Welken einer Pflanze, das Zucken eines Muskels, die Leistungen unserer Sprachwerkzeuge... nennen wir **physische Erscheinungen.** — Freude, Trauer, einen Wunsch, einen Entschluß, Zweifeln, Glauben, Überzeugtsein, Sich erinnern, Etwas erwarten... nennen wir **psychische Erscheinungen.**

Die psychischen Erscheinungen wieder gliedern sich in solche des **Denkens** (Vorstellen, Urteilen) und des **Gemütes** (Fühlen, Begehren). Wie die physischen Erscheinungen den Gegenstand der Naturwissenschaften, machen die psychischen Erscheinungen den der Geisteswissenschaften aus. In besonders enger Beziehung zu dem Psychischen stehen alle **philosophischen** Disziplinen; nämlich die Logik als Lehre vom richtigen Denken, die Ethik als Lehre vom guten Wollen u. s. f. Die Psychologie ist die grundlegende unter allen Wissenschaften von psychischen Tatsachen, sowie die Physik unter allen Wissenschaften von physischen Tatsachen. —

Trotz der tiefgehenden Verschiedenheit ihrer Gegenstände fehlt es doch nicht an Berührungspunkten zwischen Physik und Philosophie. — Eine solche Beziehung besteht vor allem darin, dafs auch das Denken des Physikers über physische Erscheinungen (z. B. über das Fallen eines Steines) selbst wieder eine freilich sehr spezielle Art psychischer Erscheinungen darstellt. Da die Physik unter allen Erfahrungswissenschaften den verhältnismäßig einfachsten Gegenstand hat, so ist auch die logische (und erkenntnistheoretische) Reflexion auf die vom Physiker praktisch ausgeübten Denktätigkeiten vorbildlich für die Erkenntnistheorie was immer für einer Erfahrungswissenschaft.

Ein anderes Beispiel im grofsen für das Ineinandergreifen von Natur- und Geisteswissenschaften, nämlich von Physik und Physiologie einerseits, Psychologie andererseits, stellt das Verhältnis der physikalischen, der physiologischen und der psychologischen Optik dar (und ähnlich bei der Akustik); vgl. Nr. 38 und 42 bis 44. — Endlich über die Grenze zwischen Physik und Philosophie der Physik (insbesondere auch zwischen Physik und Philosophie) in Nr. 45.

Im folgenden seien nur die einfachsten und der Erkenntnispraxis des Physikers am frühesten sich aufdrängenden Hilfsbegriffe und Sätze aus der Logik und Psychologie[1]) zusammengestellt.

a) Aus der Logik (und Erkenntnistheorie).

31. Methode der Physik: Die einer Erfahrungs- (empirischen) Wissenschaft.

Niemand wüfste, dafs Körper (Steine, Regentropfen, Baumblätter, Menschen) unter bestimmten Umständen fallen, wenn er es nicht gesehen (getastet —

[1]) Wenn im folgenden einigemal L § . . und Ps § . . citiert wird, so bezieht sich dies auf HÖFLER, Grundlehren der Logik und der Psychologie (Dritte Auflage 1903).

oder als von anderen gesehen ... berichten gehört), kurz und allgemein: **erfahren** hätte. Und hat er es von noch so vielen Körpern und noch so oft gesehen oder sonstwie erfahren, so wird es zwar immer weniger wahrscheinlich, dafs ein anderer Körper an anderem Ort und zu anderer Zeit unter den gleichen Umständen einmal nicht falle; doch lassen auch noch so viele Erfahrungen einer Art die Möglichkeit (genauer: eine immer kleiner werdende Wahrscheinlichkeit) einer neuartigen Erfahrung für die nämliche Gattung von Erscheinungen offen.

Ganz anders, wenn z. B. der Satz von der Winkelsumme im Dreieck an einem Dreieck bewiesen ist; hier ist uns schon nach dem einmaligen Beweis der Satz völlig gewifs (nicht nur wahrscheinlich), und das Durchführen je eines besonderen Beweises an Dreiecken von anderer Gröfse, Lage, Farbe u. dgl. erscheint uns mit Recht überflüssig.

Können wir nun nicht ähnlich wie die Geometrie durch blofses Schliefsen, **Deduzieren** aus unmittelbar einleuchtenden Sätzen (Axiomen), auch „beweisen", dafs alle freien Körper fallen „müssen"? Nein. Denn wer z. B. so schlösse: „Es gibt eine allgemeine Schwerkraft, mittels dieser Kraft zieht die Erde alle Körper an u. s. w." hätte übersehen, dafs er von dem Bestehen einer solchen „Schwerkraft" ja selbst nur aus seinen Erfahrungen über das Fallen der Körper etwas wissen kann. Und ebenso bei allen übrigen vermeintlich rein deduktiven Behandlungen der Erscheinungen des freien Falles oder was immer sonst für einer Naturerscheinung. —

Ein klassisches Beispiel für diejenige Methode, die zur Erforschung der Naturerscheinungen und auch speziell der physikalischen Erscheinungen unentbehrlich ist, die man als **induktive Methode** oder kurz als **Induktion** bezeichnet, hat Galilei in der Entdeckung seiner Fallgesetze $v = gt$ und $s = \frac{g}{2}t^2$ gegeben. Doch gibt eben der reich gegliederte Gedankengang, durch den Galilei als erster unter allen Sterblichen zur richtigen Erkenntnis dieser Gesetze gelangt ist, auch ein deutliches Beispiel dafür, dafs innerhalb des induktiven Denkens auch für das deduktive noch reichlich Raum bleibt.

Als im engsten Sinn **induktiv** bezeichnet man jedes **Schliefsen aus einzelnen Erfahrungen auf allgemeinere Sätze.** Dieser Schlufs (insoweit nicht andere Gedanken die „Induktion stützen") ist nie ein Gewifsheits-, sondern immer nur ein Wahrscheinlichkeitsschlufs; unter übrigens gleichen Umständen wird die Wahrscheinlichkeit um so gröfser, eine je gröfsere Zahl induzierender Fälle dem Schlufs zugrunde gelegt wird.

Z. B. Hätte jemand durch Versuche an einer entsprechend geneigten schiefen Ebene für die viererlei Fallzeiten von 1, 2, 3, 4 sec die Fallstrecken von 5, 20, 45, 80 cm durch direkte Messung gefunden, so könnte er aus diesen vier Einzelversuchen auf keinerlei Art mit Gewifsheit schliefsen, welche Fallstrecken den Fallzeiten von 5, 6, 7 . . . sec entsprechen würden. Aber auch schon jene vier Zahlen für sich legen die Frage nahe, ob sie sich nicht unter ein allgemeines „Gesetz" bringen lassen. Da nun $5 = 5.1^2$, $20 = 5.2^2$, $45 = 5.3^2$, $80 = 5.4^2$, so ist $s = 5t^2$ ein solches allgemeines Gesetz [1]). Wir können dann durch Einsetzen

[1]) Dafs sich jene vier Zahlwerte 5, 20, 45, 80 auch noch unter beliebig viele andere allgemeine Gesetze einfügen liefsen, wird aus folgendem geometrischen Gleichnis erhellen:

(den dynamischen Bestimmungsstücken, die ihrerseits erst aus den erfahrungsmäßigen Gesetzen erschlossen werden können, vgl. Nr. 35). — Allgemein:

Alle Erklärung setzt irgend ein Maß von Beschreibung voraus; denn wer erklären will, warum etwas ist, mufs vorher wissen, dafs (wie, was) es überhaupt ist. — Wenn aber auch in diesem Sinne die beschreibenden Disziplinen für die erklärenden eine unentbehrliche Grundlage bilden, so findet doch nirgends das Erkennen in der blofsen Beschreibung (Konstatierung) von Tatsachen wirkliche Befriedigung, sondern erst in dem Begreifen, Verstehen ihrer Gründe, d. i. in der **Erklärung** der Tatsachen.

Der typische Unterschied des Beschreibens und Erklärens nimmt im gewöhnlichen und wissenschaftlichen Denken mannigfache besondere Gestaltungen an, auf deren feinere Vergleichung bei jeder wissenschaftlichen Tätigkeit wohl zu achten nicht genug empfohlen werden kann. Ausdrücklich liegt er zugrunde der Gegenüberstellung von beschreibenden und erklärenden Naturwissenschaften. Aber auch innerhalb einer und derselben Wissenschaft (ja einer einzelnen Untersuchung) teilt sich die Arbeit jenem Unterschiede gemäß mehr oder weniger scharf; so in der Mechanik des Punktes die Phoronomie (§§ 2—13) und Dynamik im weiteren Sinne (§§ 15—24).

33. Beobachtung. Experiment.

Die gelegentliche Wahrnehmung von Naturerscheinungen, die auch den Nichtphysiker alsbald mit zahlreichen Kenntnissen von physikalischen Tatsachen und Beziehungen versorgt, mufs zur **Beobachtung** der Tatsachen gesteigert werden, wenn diese nach induktiver Methode erforscht werden sollen. Über die blofse Wahrnehmung geht die Beobachtung dadurch hinaus, dafs sie mit absichtlicher Aufmerksamkeit erfolgt; überdies aber erfafst sie das Wahrnehmbare nicht blofs als ein Ganzes, sondern möglichst in seine Teile und Merkmale analysiert. — Z. B. Eine Sternschnuppe mag dem Nichtastronomen ebensosehr auffallen wie dem Astronomen; der letztere aber begnügt sich nicht mit dem Anblick, sondern fragt sich sofort, bei welchem Sternbild die Sternschnuppe sichtbar geworden, bei welchem sie verschwunden ist, wie lange etwa sie sichtbar geblieben war u. s. w. — Die astronomischen Erscheinungen geben ein Beispiel dafür, dafs manche Naturwissenschaft ganz oder zum gröfseren Teil auf blofse Beobachtung angewiesen ist.

Wo immer es möglich ist, beschränkt sich der Naturforscher nicht auf das blofse Beobachten der Erscheinungen, sondern er ruft sie behufs eingehenderer Beobachtung selbst hervor — er stellt **Versuche, Experimente** an. Dabei hat das Experiment namentlich den Vorteil, die notwendigen Antezedenzien und Folgen (Nr. 35) gegebener Erscheinungen: 1. in viel mannigfaltigerer Weise, 2. unter weitergehender Sonderung der Umstände, 3. in beliebig häufiger Wiederholung festzustellen.

Nicht selten ist ein Fortschritt der Erkenntnis nicht so sehr dem wirklichen Durchführen eines Versuches zu verdanken, als schon einem sachgemäß ersonnenen

II. Methode des Unterschiedes: Wenn ein Fall einer zu errschenden Erscheinung alle Umstände bis auf einen gemeinsam hat it einem Fall, in dem die Erscheinung nicht eintritt, so ist dieser nterscheidende Umstand die Ursache oder Wirkung jener Erscheinung.

Beispiele: Wenn mehrere zusammengesetzte Medikamente, die nur in einem estandteil übereinstimmen, gleiche Heilwirkung haben, so schliefsen wir nach I., fs jener Bestandteil der wirksame gewesen sei; dagegen dasselbe nach II., enn die Wirkung gerade immer nur dann ausbleibt, sobald wir jenen Bestandteil eglassen. — Wenn elektrische Apparate scheinbar regellos versagen, wird man e sorgfältig abtrocknen, abstauben oder (nach neuestem Vorschlag) abwaschen; as beweist der Erfolg bzw. Mifserfolg je einer dieser Maßregeln?

Als Abarten von I. und II. gibt Mill ferner an:

III. Die Methode der Rückstände. Z. B. Ebbe und Flut zeigen sich der auptsache nach abhängig von den Stellungen des Mondes zur Erde; die Abeichungen der Spring- und Nippfluten von der durchschnittlichen Flutgröfse ssen überdies noch einen schwächeren Miteinflufs der Sonne erkennen.

IV. Die Methode der Begleitveränderungen. Z. B. Dafs sich ein Körper it der Verzögerung Null bewegen würde, wenn die Reibung streng Null wäre, fst sich nicht direkt durch Versuche zeigen; deshalb bleibt man darauf anewiesen zu beobachten, dafs gröfseren Werten der Reibung gröfsere Verzögerungen, einreren kleinere entsprechen. —

Im ganzen ist die vornehmste Methode des Experiments die des nterschiedes (II. und IV.), wogegen man sich für blofse Beobachtung meist it der der Übereinstimmung (I. und III.) begnügen mufs.

Experimentum crucis. So nannte Bacon entscheidende Experimente, die renn man wie an einem Kreuzweg steht) über die Wahl des richtigen Weges ntscheiden („translato vocabulo a crucibus quae erecta in bivio indicant et signant arum separationes"). Diesen Ausdruck übernahm dann Newton für dasjenige iner Experimente (zwei Prismen mit parallelen, nicht mit „gekreuzten" Kanten), em er eine besondere Überzeugungskraft dafür beimaß, daß die Farben des Spekums nicht wieder so zusammengesetzt und zerlegbar seien wie das Sonnenlicht.

34. Begriff eines wissenschaftlichen Gesetzes.

Das unmittelbare Ergebnis einer einzelnen Beobachtung ist immer ur die Feststellung einer einzelnen Tatsache. Aber nicht dem Erebnis einer solchen und auch nicht der blofsen Summe von Ergebissen einer Reihe von Beobachtungen pflegt sich das wissenschaftliche nteresse zuzuwenden, sondern dem in einer Reihe von Einzeltatsachen ch kundgebenden „Gesetze".

Der ursprüngliche Sinn des Wortes Gesetz war der bekannte einer von enschen eingesetzten Rechtsbestimmung. Mit diesem praktischen Sinne hat der bertragene theoretische, in dem von Naturgesetzen gesprochen wird, nur so el gemeinsam, dafs wir uns die Naturgesetze als ebenso allgemein gültig und snahmslos denken, wie es die richtig gehandhabten Rechtsgesetze sind oder enigstens — sein sollen. —

Für den von allen solchen Analogien überhaupt unabhängigen Sinn, in dem an von Naturgesetzen und speziell von physikalischen Gesetzen spricht, bieten

Darstellung arithmetischer, geometrischer, physikalischer . .
„Gleichungen" zwischen einer abhängig und einer oder mehreren
änderlichen: $y = f(x)$, $z = F(x, y)$ . . . Darstellung durch Ku

Eine tiefer gehende Frage ist die folgende: Gehört das Auf
setzes" noch zur Beschreibung oder schon zur Erklärung d
Unstreitig sind z. B. die Galileischen Fallgesetze $s = at^2$ und $v =$
ihrem unmittelbaren Inhalte nach nur beschreibender Art — sie
werden, ohne dafs Galilei an die Ursache der Fallbewegung d
Gleichwohl ist nicht zu verkennen, dafs man jene Beziehunger
nennen würde, wenn man nicht mehr oder weniger bestimmt
die in jenen Formeln zum Ausdrucke kommende Regelmäßi
stimmten Grund habe und aus ihm oder dem Zusammenwirk
gründe erklärt werden könnte. Wirklich begreifen wir heute j
$v = gt$, aus der Konstanz der Schwerkraft innerhalb mäßige
wissen aber auch, dafs jenes Gesetz nicht genau gelten kann und
das wahre Geschwindigkeitsgesetz frei fallender Körper darbietet,
Gravitationsgesetz die Schwere von der Erdoberfläche an nach a
nimmt (wonach vielmehr jenes Geschwindigkeitsgesetz die Funk
sich schliefst, wie höhere Rechnung zeigt).

Vergleichen wir mit solchen eigentlichen Gesetzen blofse R
dafs die Krebse in den Monaten ohne R am besten schmecken, o
Monate mit 31 Tagen in bekannter Weise aus dem Abzählen
knöcheln im Gedächtnisse behalten lassen), so bestätigt es si
Weise, dafs wir in letzteren Regeln eben nur Regelmäßigkeit o
kelt vor uns haben, und dafs somit die hier vermifste Notwen
jenige ist, was uns dort an den wirklichen Gesetzen als das eigent
Einsicht vorschwebt und zur Forschung anlockt.

Im Vergleich zu diesem Ziele des Aufdeckens von Notwendig
in der Natur („Naturnotwendigkeiten", „Naturzusammenhäng
suchen der gesetzmäßigen Regelmäßigkeiten selbst nur ein
ist für das Auffinden des Gesetzes wieder die Induktion, un
Induktion das Experiment blofs ein Mittel. — Wo es dem G

.bwarten, daſs uns die Einzeltatsachen sogar bei noch so gehäuften Beobchtungen oder zahlreichen, aber planlosen Experimenten etwas von den wirk-.chen Gesetzen verraten werde, nur eine verschwindende Wahrscheinlichkeit für ich hat. Wir verpönen das bloſs zufällige Herumtappen in den Erkenntnismitteln ines Naturforschers eben deshalb, weil wir auch in seinen Erkenntniszielen mehr ls jene bloſs zufälligen Regeln (wie die von den Krebsen und Fingerknöcheln) erlangen. — Zur Beleuchtung dieser tiefstgehenden Beziehungen zwischen Forscherätigkeit (Erkenntnisakt) und Forschungsziel (Erkenntnisgegenstand) greift ꞁANT (in der Vorrede zur zweiten Auflage der „Kritik der reinen Vernunft“) auf .ie klassischen Beispiele der Naturwissenschaft zurück: „Als GALILEI seine Kugeln .ie schiefe Fläche mit einer von ihm selbst gewählten Schwere herabrollen, oder 'ORRICELLI die Luft ein Gewicht, was er sich zum voraus dem einer ihm bekannten Vassersäule gleich gedacht hatte, tragen lieſs, oder in noch späterer Zeit STAHL Ietalle in Kalk und diesen wiederum in Metall verwandelte, indem er ihm etwas ntzog und wiedergab, so ging allen Naturforschern ein Licht auf. Sie begriffen, .aſs die Vernunft nur das einsieht, was sie selbst nach ihrem Entwurfe hervor-ringt, daſs sie mit Prinzipien ihrer Urteile nach beständigen Gesetzen vorangehen .nd die Natur nötigen müsse, auf ihre Fragen zu antworten, nicht aber sich leichsam von ihr allein am Leitbande gängeln lassen müsse; denn sonst hängen ufällige, nach keinem vorher entworfenen Plan gemachte Beobachtungen gar nicht u einem notwendigen Gesetze zusammen, welches doch die Vernunft sucht .nd bedarf. Die Vernunft muſs mit ihren Prinzipien, nach denen allein über-:ommene Erscheinungen für Gesetze gelten können, in einer Hand, und mit dem Experiment, das sie nach jenen ausdachte, in der anderen an die Natur gehen, war um von ihr belehrt zu werden, aber nicht in der Qualität eines Schülers, ler sich alles vorsagen läſst, was der Lehrer will, sondern eines bestallten Richters, ler die Zeugen nötigt, auf die Fragen zu antworten, die er ihnen vorlegt. Und so ıat sogar die Physik die so vorteilhafte Revolution ihrer Denkart lediglich dem Einall zu verdanken, gemäß demjenigen, was die Vernunft selbst in die Natur hineinegt, dasjenige in ihr zu suchen (nicht ihr anzudichten), was sie von dieser lernen nuſs, und wovon sie für sich selbst nichts wissen würde. Hierdurch ist die Naturvissenschaft allererst in den sicheren Gang einer Wissenschaft gebracht worden, da ie so viele Jahrhunderte doch nichts weiter als ein bloſses Herumtappen war“. —

Empirische Gesetze. Wo aus Versuchsreihen sich zwar zwischen :wei oder mehreren Reihengliedern (z. B. den Temperaturen und Spannkräften eines Dampfes) gesetzmäßige Zuordnungen ergeben ıaben, für die sich aber weder ein allumfassendes beschreibenles Gesetz, noch eine Zurückführung auf andere bekannte Gründe ıat geben lassen, dort spricht man von **empirischen Gesetzen** im ıngeren Sinne (wiewohl ja auch die eigentlichen Gesetze, z. B. Galileis 'allgesetze, nachmals haben empirisch bestätigt werden müssen).

Letzte Gesetze. Da alles Erklären gesetzmäßiger Beziehungen ıuf andere Gesetze zurückgeht, ein solcher Rückgang aber nicht ns Unendliche führen kann (*regressus in infinitum*, der ebenso ıuch beim Definieren, L § 32, und beim Beweisen, L § 96, unmöglich st), so ist die Anerkennung **letzter Gesetze** nicht etwa nur als ein ınvermeidliches Übel hinzunehmen, sondern geradezu logisch geboten.

Solche letzte Gesetze sind es, die wir als **Prinzipien** der Mec (§§ 15, 36, 43), der Elektrizitätslehre (§ 132: Faradays Worte Induktion) u. s. w. den Deduktionen, so weit solche innerhalb induktiven Wissenschaft möglich sind, zugrunde legen. Nähere solche Prinzipien Nr. 37.

Unregelmäßigkeiten, Ausnahmen. Im Begriffe eine setzes im strengen Sinne liegt schon, dafs dasselbe genau und nahmslos gelte. Wo der wirkliche Verlauf der physischen psychischen) Tatsachen „Unregelmäßigkeiten" und „Ausnahme zeigen scheint, suchen wir diese zu erklären aus dem Zusammen einer so grofsen Vielheit von Bedingungen, dafs wir diese nich überblicken können, und wo dann durch das Ausfallen ein welche uns noch nicht näher bekannt sind, der Gesamterfolg en nur modifiziert oder ganz aufgehoben wird.

Z. B. Das Gesetz, dafs alle Körper durch Reiben elektrisch werde nicht dadurch umgestofsen, dafs eine Elektrisiermaschine bei feuchtem versagt. Ebenso: Fall im lufterfüllten Raume u. dgl. m. — Der Arzt hält zu erprobendes Heilmittel schon dann für nicht wirkungslos, wenn seinem Ge auch nur in einer 50 Proz. nicht weit übersteigenden Zahl von Fällen oder Linderung folgt. Vgl. § 202, Punkt 6 über Wetterprognose. Ebenso: stische Gesetze überhaupt. Wie weit ihnen zu trauen ist, lehrt die scheinlichkeitsrechnung („Fehlertheorie") mit grofser logischer Schärfe beurt

Der in vorstehendem aus dem gewöhnlichen Denken als bekannt voraus Begriff der „Notwendigkeit" soll nun in der nächsten Nummer noch be untersucht werden, und zwar namentlich in seiner Eigenschaft als Kern des erklärenden Naturwissenschaften unentbehrlichen Begriffes der **Ursache.**

35. Die Begriffe Ursache, Kraft und Energie. — Kausalgesetze.

Das „Kausalproblem", eines der interessantesten und am m bearbeiteten philosophischen Probleme, gliedert sich in eine verschiedener Fragen, namentlich: 1. Was stellen wir uns vor, wen etwas **„Ursache"** (*causa*) nennen (logischer Inhalt des K begriffes)? 2. Woher haben wir diese Vorstellung (psychologis Entstehen des Kausalbegriffes)? 3. Mit welchem Recht halte etwas für eine Ursache (logische Begründung eines Kausalurt

I. Zum Kausalbegriff. Wird z. B. ein Feuerschwamm durch die eines Hohlspiegels auf ihn konzentrierten Sonnenstrahlen entzündet, so fass dieses Entzünden als eine „Wirkung" davon auf, dafs der von Luft um Feuerschwamm durch die gesammelten Sonnenstrahlen bis zur Entzün temperatur erhitzt war. Man beachte aber, dafs im gewöhnlichen Sprech „Ursache" häufig sehr unvollständig angegeben zu werden pflegt, so daf nur eine oder einige der auffallendsten **Teilursachen** namhaft macht, ohne die übrigen für entbehrlich zu halten. Z. B. Auf die Frage, was war die U

der Entzündung des Schwammes, wird leicht geantwortet werden: der „Spiegel“ oder die „Sonnenstrahlen“ u. s. w. Aber weder der Spiegel für sich (so z. B. solange er im Kasten steht) noch die Sonnenstrahlen für sich (wenn sie eben nicht hinreichend konzentriert sind), noch auch beide zusammen (wenn nämlich der Schwamm nicht von Sauerstoff umgeben ist) — sondern nur alle diese Teilursachen zusammen bilden die **Ursache,** der die Entzündung als Wirkung folgt. —

Auch diese **Wirkung** wird häufig ungenau angegeben. Z. B. Wenn man sagt, der Schmied sei die Ursache der Pflugschar, so ist eigentlich gemeint, die Arbeit des Schmiedes (zusammen mit dem Erweichtsein des Eisens durch Erhitzung . . .) sei die Ursache, dafs das Eisen statt seiner früheren die neue Gestalt einer Pflugschar angenommen habe. Dafs sie dagegen von da an ihre Gestalt behält, bedarf nicht einer besonderen Ursache, vielmehr fragen wir nur bei jeder neuen Veränderung, z. B. Rosten, Verbogenwerden . . . um die Ursache eben dieser Veränderung. — —

Ist nun alles, was einer Veränderung vorausgeht, sogleich als Ursache dieser Veränderung zu bezeichnen? Offenbar nicht: Denn schon die gewöhnliche Sprache unterscheidet deutlich zwischen Folgen (blofser Sukzession) und Erfolgen (Kausation). Der Satz *Post hoc*, *ergo propter hoc* (Nach diesem, also durch dieses) verspottet einen solchen voreiligen Schlufs. (Z. B. Wenn im Frühjahr die Frösche frühzeitig quaken und darauf wird es grün, so glauben wir nicht, dafs jenes Quaken die Ursache des Grünens sei.) Vielmehr wenden wir den Begriff der Ursache nur dort an, wo wir einzusehen glauben, dafs auf das Vorausgehende notwendig die Veränderung hat eintreten müssen; d. h.: Verursachtsein = **Erfolgen** = **notwendiges Folgen.** — Zusammenfassend:

Den Begriff der **Verursachung** wenden wir dort an, wo eine **Veränderung** mit **Notwendigkeit** eintritt, weil ein **Komplex von Tatsachen** eingetreten (vollständig geworden) war. — Jede einzelne dieser Tatsachen ist eine **Teilursache** der bewirkten Veränderung. Häufig nennt man die zuletzt eintretende Teilursache letzte Ursache (auch Veranlassung — in der Sprache der Energetik speziell auch „Auslösung“), die übrigen Teilursachen nennt man Bedingungen (Vorbedingungen). —

Unter den Bedingungen wieder führen den besonderen Namen **Kraft (Fähigkeit, Vermögen, Disposition),** diejenigen Teilursachen, die wir als mehr oder minder **bleibende Bedingungen** zwar **nicht direkt wahrnehmen** können, deren Bestehen wir aber aus dem gesetzmäßigen Stattfinden der Erscheinungen **erschliefsen.**

Z. B.: In welchem Sinne glauben wir an das Bestehen einer „allgemeinen Schwerkraft“ und denken uns also speziell etwa die Erd- oder Sonnenkugel von einem „Kraftfeld“ umgeben, dessen Stärke mit dem Quadrat der Entfernung vom Kugelmittelpunkt abnimmt? Wäre es nicht vorsichtiger, sich einer solchen Annahme ganz zu enthalten, da das, was wir beobachten können, ja doch nur die Bewegungen der Steine zur Erde, des Mondes um die Erde, der einzelnen Planeten um die Sonne sind? — Hierauf ist zu erwidern, dafs wir mit der Annahme einer solchen Kraft allerdings weit über das hinausgehen, was uns die Wahrnehmung direkt lehrt. Denn Newtons Gravitationsgesetz $f = \varkappa \frac{Mm}{r^2}$ will ja keineswegs

nur für diejenigen Werte des Abstandes r gelten, innerhalb welcher schon ein Planet (Komet, Meteorit . . .) sich bewegend beobachtet wurde, geschweige gar nur für dasjenige Element der Bahn, in der er sich augenblicklich bewegt. Sondern jenes nicht blofs beschreibende, sondern erklärende (kausale) Gesetz besagt, dafs, wenn auch z. B. in den Raum zwischen Jupiter und Saturn etwa ein neuer Komet hineingelangt, auch dieser sogleich jener „Kraft“ unterliege. Wenn aber auch durch jene Annahme einer Kraft in Räumen, die unendlichmal umfassender sind als diejenigen, in denen kosmische Massen schon beobachtet worden sind, diese direkte Beobachtung sozusagen ins Unendliche überschritten wird, so ist doch jene Annahme keineswegs unberechtigt (unlogisch); denn die bisher nie enttäuschte Erwartung, dafs auch in Orten der Umgebung der Sonne, wo sich unmittelbar vorher noch keine Körper befunden hatten, sogleich die Beschleunigung des Körpers nach jenem Gesetz eintritt, sobald der Körper dort eintrifft, führt auf die weitaus wahrscheinlichste Annahme, dafs eine Teilbedingung für das Eintreten der Beschleunigung auch schon **vor** dem Eintreffen der Masse vorhanden gewesen sei (und auch weiterhin so bleiben wird). Nicht mehr und nicht weniger meinen wir, wenn wir schon der Sonne für sich ein „Kraftfeld“ zuschreiben. — Freilich versteht es sich dabei von selbst, dafs eine andere ebenso notwendige Teilbedingung auch das Vorhandensein eines zweiten Körpers ist, der eine Beschleunigung zur Sonne hin erleiden soll; ein wirkliches Beschleunigen findet also nur in den zusammengesetzten Kraftfeldern statt (was in einfachster Weise schon im Gegenwirkungsprinzip ausgesprochen ist). Das Eintreffen der Planetenmasse in einem bestimmten Punkte des Kraftfeldes der Sonne ist dann die „letzte Teilbedingung“ für das „Aktualisieren“ der schon vorher vorhanden gewesenen Kraft, nämlich der Fähigkeit (Disposition) der Sonne und der Planeten, einander bei diesem bestimmten Abstande r diese bestimmte Beschleunigung zu erteilen. —

Schon von altersher hatten einzelne Denker Bedenken gegen die Annahme von Kräften, d. i. von blofsen Fähigkeiten (einem *δυνάμει ὄν*) im Gegensatz zur wirklichen Betätigung dieser Fähigkeiten (— dem *ἐνεργείᾳ ὄν*; man beachte hier den etymologischen Zusammenhang zwischen „wirken“, „wirklich“. *ἔργον* = Werk und *ἐνέργεια*). Diesem Bedenken ist aber schon von Aristoteles mit Recht entgegengehalten worden, dafs ja dann nur der ein Baumeister wäre, der wirklich baut, nicht auch schon der des Bauens fähig ist, ohne wirklich zu bauen; ferner, dafs zwischen einem Blinden und einem in einen lichtlosen Keller eingeschlossenen Sehtüchtigen kein Unterschied wäre u. s. w. Die mittelalterliche Spekulationsweise freilich liebte es, dann überall sogleich „verborgene Fähigkeiten“ oder „verborgene Eigenschaften“ (qualitates occultae) anzunehmen (was Molière verspottet, der das Einschläfern durch Opium aus einer „einschläfernden Kraft“ des Opiums erklären läfst; was aber nicht etwa falsch, sondern nur zu richtig, nämlich selbstverständlich und auch nur darum wertlos ist). Hätte Newton die tatsächlich zu beobachtenden Beschleunigungen, ohne vor allem diese selbst näher quantitativ gemessen („vollständig beschrieben“) zu haben, ebenso summarisch nur durch eine „beschleunigende Kraft“ erklärt, so hätte dies unser physikalisches Wissen nicht über das Selbstverständliche hinaus erweitert. Indem er aber von dieser Kraft selbst wieder in genauen mathematischen Beziehungen die Abhängigkeit von der streng begrenzten Anzahl der drei Bedingungen M, m und r anzugeben vermochte, und indem seine Nachfolger dieses Gesetz für alle Körper des Weltalls ausdehnen konnten, ist durch diese wissenschaftliche Leistung der beste Beweis gegeben, um wieviel eine solche Annahme von quantitativ



genau bestimmten Kräften über die selbstverständliche Annahme einer Kraft überhaupt hinausgeht.

II. Zu den Kausalurteilen. Die bisherige Anaylse des Begriffs der Ursache ergab als dessen wesentlichsten Kern den Begriff der **Notwendigkeit.** Bekanntlich sprechen wir von Notwendigkeit auch in Gebieten, die mit Verursachung nichts zu tun haben. — Sagen wir z. B.: „Ein Dreieck mit gleichen Seiten hat notwendig gleiche Winkel", so ist hiermit offenbar eine besondere Art von Beziehung (Relation) zwischen der Gleichseitigkeit und der Gleichwinkligkeit erkannt und ausgesagt. Einem solchen Urteil über Notwendigkeit ist logisch äquivalent (Nr. 38, 2) das Urteil: „Ein gleichseitiges Dreieck kann nicht ungleichwinklig sein". — Insoweit könnte es Manchem scheinen, als sei Notwendigkeit (und Unmöglichkeit) nur etwas unserem Urteil Anhaftendes (wonach es dann nur „Denknotwendigkeiten", aber keine „Naturnotwendigkeiten" gäbe). Dieser Schein hat aber nicht mehr Berechtigung, als wenn man behaupten wollte, in dem Urteile „$2 \times 2 = 4$" oder „Meine beiden Zeigefinger sind einander gleich" sei die erkannte und ausgesagte Relation der Gleichheit nur Sache unseres Urteilens (es gebe also nur „Denkgleichheiten", keine „Naturgleichheiten"). Ohne auf die hieran sich schliefsenden allgemein erkenntnistheoretischen Mifsverständnisse und Berichtigungen einzugehen, kann wenigstens ein Teil der Bedenken gegen das Bestehen von Naturnotwendigkeiten durch die Feststellung behoben werden, dafs wir das Bestehen einer Notwendigkeitsrelation zwischen zwei Vorgängen in der aufserpsychischen Welt nur nicht mit gleicher Unmittelbarkeit erkennen, wie z. B. das Bestehen einer Gleichheits- oder einer Verschiedenheitsrelation zwischen zwei Daten der inneren Wahrnehmung. Vielmehr sind wir für das Erkennen einer Naturnotwendigkeit und im besonderen für jedes Kausalurteil auf den Schlufs aus der Regelmäßigkeit auf die Notwendigkeit angewiesen. Die Prüfung der logischen Berechtigung jedes solchen Schlusses liegt in folgender Frage und Antwort:

Mit welchem logischen Recht greifen wir über den Inhalt der Beobachtung, dafs eine Tatsache W bisher eine andere U zum regelmäßigen Antecedens gehabt habe, hinaus zu dem Glauben, dafs U das **notwendige Antecedens** von W sei? — Antwort: Aus der Notwendigkeit wird die Regelmäßigkeit erklärlich; ohne Annahme einer Notwendigkeit bliebe die tatsächliche bisherige Regelmäßigkeit unerklärlich („ein Zufall"). — Hierin liegt auch der letzte Grund für die Berechtigung der Induktionsschlüsse überhaupt.

Als **spezielle Kausalgesetze** werden alle Urteile bezeichnet, die irgend welche nähere Angaben über die besondere Art der Ursache und Wirkung enthalten. — Dagegen sagt das **allgemeine Kausalgesetz** nur aus, dafs jede Veränderung irgend eine Ursache hat (wenn wir sie im einzelnen auch noch so wenig kennen).

Beispiele spezieller Kausalgesetze sind also das der allgemeinen Massenanziehung: denn es besagt, was für eine Beschleunigung zweier gegebener Massen bei gegebenem Abstand notwendig eintritt. — Ferner das Gay-Lussacsche Gesetz, denn es besagt, was für eine Ausdehnung in einem Gase bei bestimmter Temperaturerhöhung notwendig eintritt; und so die meisten physikalischen Gesetze.

bewirken und die entgegengesetzte Veränderung verbindern. Sinne kann man dann auch sagen, dafs das Wasser „von selbst“ und nicht hinaufströmt; man weifs eben, dafs für jene „natü richtung“ durch die allezeit bereite Schwerkraft gesorgt ist.

36. Hypothese; Exklusion, Verifikati Indirekte induktive Methode. — Wissenschaftl

Das Gebiet der **Hypothese** betritt man überall über die unmittelbar beobachtete Tatsache hinaus durch das Aufstellen von Gesetzen (verallgemein bungen = **Beschreibungshypothesen**), sei es, inden sachen und ihre Gesetze durch vermutete Notwendigk zu erklären versuchen **(Erklärungshypothesen).**

Meistens bieten sich in den früheren Stadien d eines Gegenstandes mehrere Hypothesen als möglic läufig gleich wahrscheinlich dar: dann müssen dur und Vertiefung unserer Kenntnis der Tatsachen Grü werden, um alle Hypothesen bis auf eine **auszuschliefs** dieren) und diese eine zu **bestätigen** (zu verifiziere

Alles Prüfen einer Hypothese erfolgt so, dafs wi eine (in sich widerspruchslose) Annahme zur vera Beschreibung, bzw. zur Erklärung einführen, dann di in ihre Konsequenzen verfolgen und diese nun ih mit beobachtbaren Tatsachen vergleichen. **Für** einer solchen Prüfung gelten die folgenden Sätze:

Erstens: **Widerspricht auch nur eine Kons Hypothese den Tatsachen, so ist die Hypothese**

lypothese ausgesonnen werde. Immerhin aber wird die durch ihre Ìbereinstimmung mit den Tatsachen verifizierte Hypothese **um so vahrscheinlicher, je gröfser die Zahl der Übereinstimmungen vird** und je weniger es trotz aufgewandter Bemühungen bis dahin çelungen ist, noch andere ebenso fruchtbare Hypothesen zu ersinnen.

Beispiele für blofse Beschreibungshypothesen gibt das Interpolieren und Extrapolieren von Wertepaaren zu den direkt beobachteten Gliedern einer Verıuchsreihe, wie dies schon (in Nr. 31) an dem Beispiele von vier Einzelversuchen iber den freien Fall (z. B. $t = 1, 2, 3, 4$ sec; $s = 5, 20, 45, 80$ m) erläutert wurde. Niemand gibt sich mit 4 oder auch 100 oder 1000 solchen einzelnen Wertepaaren zufrieden, sondern er sucht das zwischen ihnen waltende Gesetz (Nr. 34). Wenn nun aber dieses Gesetz, insoweit es ein rein beschreibendes ist, ıoch für beliebig inter- und extrapolierte Wertepaare durch wirkliche Versuche oestätigt werden könnte (im Gegensatz zu den Erklärungshypothesen, wo wir die vermuteten Kräfte nie wahrzunehmen vermögen), so müssen wir uns doch nur wieder mit einer blofsen Auswahl von Einzelversuchen schon darum begnügen, weil wir mit den unendlich vielen Wertepaaren in Wirklichkeit nie fertig würden. In der Tat aber häuft auch der sinnige Forscher die Einzelbeobachtungen niemals über Not, sondern sein Genie bewährt sich darin, dafs er schon an einer recht kleinen aber glücklich gewählten Auswahl von Einzelversuchen (namentlich für die „ausgezeichneten Punkte“ einer die gesuchte Funktion darstellenden Kurve) das hypothetische Gesetz entnimmt und es dann selbst wieder durch eine sparsame weitere Zahl verifiziert. Ein schönes Beispiel hierfür bietet Hipparchs Aufstellung des exzentrischen Kreises für die Sonnenbahn; vgl. LA 220. LA 219.

Beispiele von erklärenden Hypothesen bieten im grofsen die Kant-Laplacesche Hypothese, die Molekular- und Atom-Hypothese (§ 57, § 209), die kinetische Wärme-Hypothese (§ 83), die Emissions- und Undulations-Hypothese des Lichtes (§ 123). Insbesondere das letzte Beispiel ist für die Logik der Hypothesenbildung klassisch: erstens wegen der für viele Erscheinungen (geradlinige Ausbreitung, Reflexion u. s. w.) gleich ungezwungenen und daher insoweit gleich grofsen Wahrscheinlichkeit beider Hypothesen; zweitens wegen der unwidersprechlichen Exklusion, die endlich die Emissionshypothese durch Foucaults Versuch über das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in Luft und Wasser für die besondere Erscheinung der Brechung fand: drittens wegen der innerhalb der verifizierten Hypothese, nämlich der Undulations-Hypothese, offen gebliebenen weiteren Ausgestaltung als Elastizitäts- und elektromagnetische Theorie; viertens wegen der überwiegenden Wahrscheinlichkeit, die von diesen beiden Subhypothesen (wie wir sie nennen könnten) die elektromagnetische Lichttheorie gefunden hat, und zwar nicht so sehr wegen eines einzelnen entscheidenden Experimentes (in der Weise des Foucaultschen), sondern wegen der einheitlicheren Darstellung sehr vieler Lichterscheinungen zusammen mit den elektrischen und magnetischen, die die Annahme eines elastischen Äthers bei weitem nicht ebenso gut erlaubt hatte. Fünftens insbesondere aber ist die Wellenlehre des Lichtes (wieder unabhängig von den beiden genannten Subhypothesen) namentlich dadurch ein glänzendes Vorbild, was eine gute Hypothese dem Forscher zu leisten hat, dafs diese Hypothese, nachdem sie einmal den Lichtstrahl als Wellenstrahl erklärt hat, die Optik mindestens ebenso viele sich unterscheidende Merkmale an einem Lichtstrahle empirisch aufzuzeigen einladet, wie die Mechanik in dem Wellenstrahle zu unterscheiden gelehrt hat.

Die allgemeine Wellenlehre als ein Zweig der Mechanik unterscheidet näml einem Wellenstrahl (gleichviel, ob es selbst wieder mechanische oder mechanische Wellen sind, vgl. § 60, S. 227) mindestens folgende determin Merkmale: Die Wellen müssen 1. periodisch oder aperiodisch sein; 2 müssen eine bestimmte Ausbreitungsgeschwindigkeit haben; 3. die peri müssen bestimmte Wellenlängen haben; 4. beide müssen transversal oder long sein oder bestimmte Komponenten beider Schwingungsrichtungen aufweisen So hat sich dann in der Tat aus Beugungs- und Interferenzversuchen die länge (§ 124, S. 387) der Lichtstrahlen, aus Polarisierungsversuchen ihre versalität (§ 128, S. 396) u. s. w. ergeben. Selbst wenn je noch die Und theorie des Lichtes auch in ihrer modernsten Ausgestaltung als elektromag Lichttheorie sich als unhaltbar erwiese, wird die gewonnene Mannigfaltig Einzelbestimmungen eines Lichtstrahles nicht mehr fallen gelassen werden In solchen Mannigfaltigkeiten der Einzelbestimmungen liegt dann auch gemein der heuristische Wert solcher **Arbeitshypothesen** (*working hypot* Indem endlich die elektromagnetische Lichttheorie die während eines große des XIX. Jahrhunderts unentschiedene Streitfrage, ob die Schwingungs polarisierter Lichtstrahlen senkrecht zur Schwingungsebene (nach F oder in sie (nach NEUMANN) zu liegen kommt, überraschender Weis schlichtete, dafs die elektrischen Wellen der Fresnelschen, die magn Wellen der Neumannschen Hypothese genügen, machte dieses Ergebnis n lich darauf aufmerksam, dafs jene vermeintliche Alternative keine voll Disjunktion gewesen war, sondern, dafs man drei Subhypothesen hätte a können und sollen, von denen sich dann herausgestellt hätte, dafs die zw genannten den Tatsachen nicht vollständig nachkommen konnten, wohl dritte, die für beide Arten der Seitlichkeit des Lichtstrahles eine Deutung

Als **Hilfshypothesen** bezeichnet man solche Zusätze zu Hypothese, durch die einzelne Unverträglichkeiten, in d Hypothese mit der Wirklichkeit gerät, beseitigt werden solle mehr solcher Hilfshypothesen (1., 2. . . . Ordnung) nötig werde so mehr sinkt die Wahrscheinlichkeit der ursprünglichen Hyp

Das typische Beispiel einer Hilfshypothese sind die Epizykel 2., 3. O die als Zugabe zur epizyklischen Theorie des Ptolemäus nach und nach er lich wurden. — Wäre die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen von Hilfshyp die der Reihe nach sozusagen aufeinandergepfropft werden, je $\frac{1}{2}$, so wi die Wahrscheinlichkeit der so modifizierten Hypothese.

Man beachte den wesentlichen Unterschied zwischen solchen unwillkom Hilfshypothesen und den willkommenen Gelegenheiten zur Ausgesta einer zuerst nur in allgemeinen Zügen entworfenen Hypothese: dieser Unte liegt darin, dafs beim Ausgestalten einer abstrakt gehaltenen Hypothese sie der jedenfalls konkreten Wirklichkeit vollständig nachkommen soll. konkrete Züge, die mit den bisherigen verträglich sind, hinzugefügt w müssen, bis auch das hypothetische Gedankenbild ein konkretes geworden i der Regel wird ein solches lückenloses Ausgestalten der Hypothese nur ei Grenzziel für unser Erklärungsbestreben bleiben. [Über den gegenwärti gebrauchten Ausdruck „Bild“ im Sinne von Erklärungshypothesen (z. „Bild“ schwingender Moleküle zur Erklärung der Wärmeerscheinungen) vgl



Nr. 39.] — Den Hilfshypothesen dagegen ist es wesentlich, dafs sie einen in das hypothetische Gebilde aufgenommenen konkreten Zug durch einen anderen ersetzen müssen, mit dem der erstere unverträglich ist.

Auch die für alle empirische Forschung überaus fruchtbare **indirekte induktive Methode** fällt unter den allgemeinen Begriff des Verifizierens einer Hypothese.

Schon deshalb ist eine „hypothesenfreie Naturforschung", wie sie gegenwärtig nicht selten verlangt wird, undurchführbar. — Für den allgemeinen Begriff jener wichtigen Methode biete ein erstes Beispiel wieder GALILEIS Methode bei der Induktion der phoronomischen Fallgesetze. Da er von vornherein nur überhaupt eine einfache Gesetzmäßigkeit zwischen irgend welchen phoronomischen Bestimmungsstücken beim freien Falle vermutete, waren die Beziehungen, welche wir in der Form $v = v_1 . s$ . . . (I) und $v = gt$ . . . (II) schreiben, als möglich ins Auge zu fassen. Dabei gelangte Galilei (merkwürdigerweise durch einen mathematischen Fehlschlufs) alsbald dazu, die Beziehung (I) auszuschliefsen (in der Tat gilt ja auch nicht $v = v_1 . s$, sondern $v = v_1 \sqrt{s}$, wo $v_1 = \sqrt{2g}$). Die, wie wir jetzt wissen, richtige Gleichung (II) konnte aber nicht direkt verifiziert werden, weil es an einem direkten Maße der Werte von v fehlt. Daher verfolgte Galilei die einstweilen nur vermutete, also hypothetisch aufgestellte Beziehung $v = gt$ in ihre mathematischen Konsequenzen, indem er durch das in § 6 (Fig. 14) dargelegte graphische Verfahren aus $v = gt$ ableitete: $s = \frac{g}{2} t^2$ . . . (III). Und da nun in dieser Beziehung (III) die Gröfsen s und t der Messung zugänglich waren und durch den Versuch mit der Fallrinne sich wirklich als in dieser Beziehung stehend erwiesen, so war auch die Beziehung (II) verifiziert.

Ein zweites Beispiel gibt die Bestätigung des Trägheits- und Beharrungsgesetzes. Denn nicht in dem Herstellen einer möglichst reibungslosen horizontalen Ebene, auf die GALILEIS Worte: *Mente concipio . . . . . corpus super planum non inclinatum projectum* . . . zunächst hinweisen, bestand nachmals das entscheidende Experiment für die Gültigkeit jenes Gesetzes; sondern erst, indem die himmlische Mechanik Newtons die eine (tangentiale) Komponente der Planetenbewegungen als gemäß dem Beharrungsgesetze gleichförmig, eine zweite (zentrale) Komponente als gegen die Sonne hin gerichtet und beschleunigt annahm und beide Komponenten nach dem Bewegungsparallelogramm zusammensetzte, verifizierte sie mit der höchsten möglichen Genauigkeit die Gültigkeit des Beharrungsgesetzes. — Man kann also sagen: Auf die Gesetze einer geradlinig gleichförmigen Bewegung wird geschlossen aus Bewegungen, die keineswegs auch nur annähernd geradlinig sind; dies wäre völlig paradox, wenn es nicht neben der direkt induktiven Methode die indirekte gäbe. Sie ist allgemein so zu beschreiben:

Die **indirekte induktive Methode** leitet (wie alle Hypothesenbildung) aus zunächst nur angenommenen (vermuteten) Gesetzmäßigkeiten solche Bestimmungen ab (teils durch blofs mathematische Schlüsse, teils durch Verbindung der zu prüfenden Gesetzmäßigkeit mit schon anderweitig erkannten Erfahrungssätzen), die sich mit Tatsachen direkt vergleichen und aus ihnen bestätigen lassen. —

Von Hypothesen überhaupt sind wesentlich verschieden die **wissenschaftlichen Fiktionen.** Sie werden überall dort eingeführt,

scheinlich eingeführt wird) zurück. Wenn wir eine Betrachtu
beginnen: „Angenommen, dieser Stab bleibe auch bei de
wirkungen unverbogen“, so können wir von dem Nichtvorkom
Systeme völlig überzeugt sein und sehen uns doch nicht gehin
in ihre mathematischen Konsequenzen logisch zu verfolgen.

Die bisher beschriebenen Fiktionen haben also zum Zwe
vereinfachte Beschreibung der beobachteten Tatsache
Gewinnung einer Erklärung wenigstens für jene künstlich einf
der Tatsachen selbst. Fiktionen anderer Art sind z. B. die der
die, wenn wir an sie glaubten, sogleich den Zweck von Erkl
erfüllen würden, und die wir, auch nachdem sie uns aus ande
Mifstrauen gegen Imponderabilia überhaupt) unglaubwürdig gew
bis zur Aufstellung und Bewährung einer besseren Erkläru
weiter benutzen, gleichsam als Mahnung, dafs hier die bess
auszusinnen sei.

37. Begriff einer wissenschaftlichen Th
Prinzipien. Definitionen.

Die Erforschung einer kleineren oder gröfseren G
sachen und Beziehungen, die ihrem Gegenstande n
gehören, gilt erst dann als vollendet, wenn für sie
aufgestellt und begründet ist. — Als **„Theorie“** ein
bezeichnet man das umfassende System derjenigen E
schreibender wie erklärender Art, welches die diesen
treffenden spezielleren Gesetze in möglichst einhei
darstellt und aus ihren Gründen begreiflich mach

Haben wir einmal diese Gründe, **„Prinzipien“**, e
uns ein logisches Bedürfnis, auch die äufsere Darstell

Anders in der Mathematik: Hier sind die Prinzipien allerdings zugleich **auch** unmittelbar einleuchtend und heifsen dann **Axiome**. Z. B. Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches. Zwei Gerade können sich nur in einem Punkte schneiden. Alle rechten Winkel sind einander gleich u. dergl. — Doch hat selbst hier das Denken erst spät, nachdem schon eine gröfsere Zahl mittelbar einleuchtender Sätze gefunden ist, ein eigentliches Bedürfnis, diese mannigfaltigen Sätze auf eine möglichst kleine Zahl unmittelbar einleuchtender Sätze zurückzuführen, indem es von diesen als Axiomen ausgehend durch ganze Reihen von Beweisketten nach und nach zu allen einzelnen Lehrsätzen fortschreitet.

Namentlich darf man sich auch nicht einbilden, physikalische Sätze, in demselben Sinne wie mathematische, „beweisen" zu können; die nicht selten gebrauchten Bezeichnungen „Pendelbeweis", „Linsenbeweis" u. dergl. sind zum mindesten ungenau. Es sollte heifsen: „Ableitung der Pendel-, der Linsenformel", worunter dann ein Ableiten teils aus den letzten Prinzipien der Mechanik, der Optik, teils aus den schon von ihnen abgeleiteten Sätzen gemeint ist. —

Da die logische Klarheit der physikalischen Theorien lange Zeit darunter gelitten hat, dafs man gewisse sehr einfache Sätze, wie den vom gleicharmigen Hebel, von der Trägheit und Beharrung, vom Kräfteparallelogramm, von der Unmöglichkeit des perpetuum mobile u. dergl. m., ganz unabhängig von der Erfahrung einleuchtend machen zu können glaubte, so sei an den genannten und einigen anderen Beispielen die Unzulässigkeit eines solchen Überspringens der Erfahrung erläutert und erwiesen:

1. Der gleicharmige Hebel. Indem Archimedes den Satz „Gleichschwere Gröfsen (sc. Gewichte), in gleichen Entfernungen (sc. vom Unterstützungspunkt eines Hebels) wirkend, sind im Gleichgewicht", ohne weitere Begründung an die Spitze seiner Statik stellt, scheint er ihn für unmittelbar einleuchtend gehalten zu haben. In der Tat liegt es hier sehr nahe, es geradezu „undenkbar" zu finden, dafs bei der symmetrischen Anordnung der zwei Kräfte ihrer Gröfse und Lage nach die Symmetrie durch eine Drehung des Hebels in dem einen Sinne gestört werden sollte. Denn warum nicht ebenso gut im anderen Sinne? Und da also beide Bewegungen gleich möglich sind, so sind sie eben hierdurch gleich unmöglich, d. h. der Hebel mufs in Ruhe bleiben. — Dennoch hat diese scheinbar zwingende, rein logische Überlegung (deren Verallgemeinerung als „Satz des fehlenden zureichenden Grundes", abgekürzt: Satz vom Grunde, bezeichnet wurde) höchstens dann Beweiskraft, wenn wir schon überdies wissen, dafs die Bewegung nur von der Kraft und dem Kraftarm, nicht z. B. von der Farbe der Hebelarme abhängt: eben dies aber können wir nicht wieder durch reines Denken, sondern nur aus Erfahrung wissen. — Dafs aber selbst dort, wo für die sinnliche Wahrnehmung die Symmetrie durch nichts gestört erscheint, wie beim Fliefsen eines elektrischen Stromes parallel zur ruhenden Deklinationsnadel, jenes Schlufsverfahren für sich trügerisch ist, zeigt die Erfahrung, dafs das Ergebnis des Versuches ein ganz anderes ist, als es die blofse Symmetrieerwägung lehren würde. Nach dem „Satz vom Grunde" müfsten wir nämlich das Ruhigbleiben der Nadel erwarten (denn es ist kein logischer Grund einzusehen, warum der Nordpol eher zur Linken des Schwimmers, als zur Rechten abweichen sollte); und dennoch zeigt Örsteds Versuch, dafs der Nordpol nur zur Linken des Schwimmers abweicht. Die tiefer gehende Theorie sucht freilich hier in dem Zustande des stromdurchflossenen Leiters und des Magnetpoles eine Asymmetrie aufzuzeigen, indem sie beide Zustände auf Wirbel zurückführt, die nur in je einem Sinne kreisen. Ebensolche Asymmetrien könnten aber auch beim Wirken

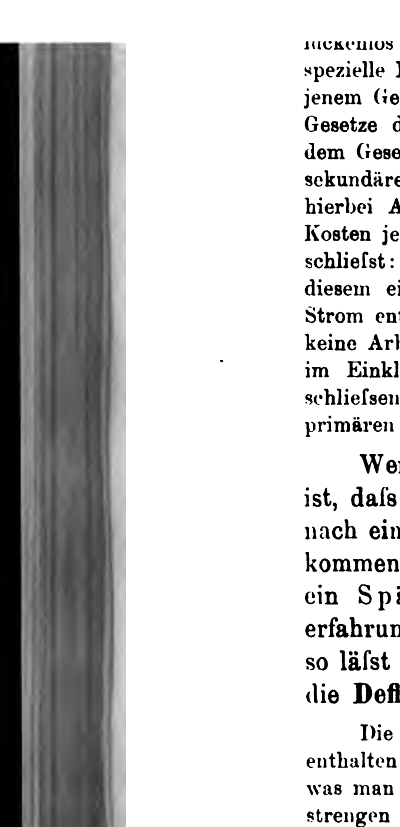
Anschauung entsprechen (was selbst wieder zum Teil in symmetrischen Körperbau seine physiologisch-psychologische mag), den künstlicheren Gesetzen über die Zusammensetzung starren Systemen vorangestellt zu werden (fast wie „Axiome").

3. Der Satz vom Kräfteparallelogramm. Diesen glaul für zwei gleiche Kräfte ebenfalls sofort aus Symmetriebetrachtı können (was aber dann die Richtung, noch nicht die Gröfse ergibt), und diesen besonderen Fall glaubte man ähnlich zum des Kräfteparallelogramms erweitern zu können, wie ARCHIME für den gleicharmigen Hebel den für den ungleicharmigen abgel Beweise sind seit einigen Jahrzehnten als Scheinbeweise erwies näher dargetan werden soll). Bedenken wir, dafs der Satz vo gramm sich ergeben hat (§ 17), indem zu dem wirklich rein pl Zuhilfenahme besonderer Erfahrungen) einzusehenden Satze vom parallelogramm noch das zweite Prinzip der Mechanik (das Unabh hinzugenommen wird, und da dieses wie die beiden andere Mechanik (s. u.) der Bewährung in der Erfahrung nicht entb einen induktiven Kern enthält, so erscheint es von vornherein dafs auch ohne Hinzukommen eines solchen induktiven Kern Kräfteparallelogramm rein logisch einzusehen sein sollte.

4. Die drei Prinzipien der Mechanik. Vom Träg man lange Zeit geglaubt, es sei unmittelbar einleuchtend, dafs selbst" weder seine Richtung noch seine Geschwindigkeit ändern Beibehalten der Richtung berief man sich wieder auf Symmet und es gilt daher für diesen Beweisgrund das oben Gesagte. Mi Gründe wurden für das Beibehalten der Geschwindigkeit geltend sie wäre es zwar kein stichhaltiger Einwand, dafs man bis zu das allmähliche Vermindern der Geschwindigkeit für einleuchten denn dieses Vorurteil rührte ja nachweislich davon her, dafs m hatte, den Anteil der Reibung und des Luftwiderstandes wenigs auszusondern. — Aber auch nachdem GALILEI unter Berücksichti wegungshindernisse" das richtige Gesetz der Trägheit und Beh

mit den wirklichen Erfahrungen vergleichen und für die Abweichungen (vgl. die Worte *omni secluso impedimento*) ebenfalls bestimmte Ursachen in Gedanken erfassen und in der Erfahrung aufzeigen müssen. — Speziell zum **Unabhängigkeitsprinzip** ist sogar zu bemerken, dafs vielleicht künftighin sich herausstellen wird, es gelte nur in erster Annäherung. Ein Anzeichen hierfür liegt u. a. in Wilhelm Webers Untersuchungen darüber, dafs die elektrodynamischen Kräfte nicht unabhängig seien von der Gröfse der jeweilig vorhandenen Geschwindigkeit. — Hiervon abgesehen ist es aber eine rein gedankliche Stütze für alle drei Prinzipien der Mechanik, dafs sie die jeweilig einfachste denkbare Beziehung als auch in der Natur verwirklicht annehmen (nämlich zum ersten Gesetz: das Beibehalten von Richtung und Geschwindigkeit ist „einfacher" als etwa das Abnehmen um 0,000 001 Proz. binnen einem Jahre; zum zweiten Gesetz: die volle Unabhängigkeit der Kraftwirkung von der vorhandenen Geschwindigkeit ist „einfacher" als ein wie immer schwaches Beeinflussen durch eine wie immer grofse Geschwindigkeit; ebenso zum dritten Gesetz: die volle Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ist „einfacher" als jedes sonst auszudenkende Gesetz der Ungleichheit). Insofern kann das Gesetz der **Einfachheit der Natur** als ein noch höheres Prinzip der Physik angesehen werden und kommt auch wirklich allenthalben in der Erkenntnispraxis schon darin zur Geltung, dafs wir die einfachere Erklärung der verwickelteren vorziehen. — Doch mufs der Anwendungsbereich auch dieses Gesetzes überall erst durch Erfahrung festgestellt und bewährt werden; ja schon in der Wahl, welche von zwei anzunehmenden Arten einer Erscheinungsgattung (z. B. Bahnform, „Geschwindigkeitsgesetz") „einfacher" sei, schwankt oft unser Denken. Ja die vorschnelle Anwendung des Gesetzes der „Einfachheit" hat sogar die richtige Erkenntnis tatsächlicher Gesetze öfters auf lange Zeit verhindert. So in den Vorurteilen des Hipparch, dafs die Bahnen der himmlischen Körper reine Kreise und ihre Geschwindigkeit eine konstante sein müsse, von welchem Vorurteil nicht einmal Kopernikus, sondern erst Kepler sich frei machte; ferner die Meinung Galileis, dafs die Bewegung fallender Körper eine genau gleichmäßig beschleunigte sei, was wegen Abnahme der Schwere nach oben als nicht genau zutreffend erkannt ist. Aber selbst das die genannten Vorurteile nachmals berichtigende Gravitationsgesetz Newtons, in welchem die verkehrte zweite Potenz mit Rücksicht auf die Ausbreitung der Schwere gleichsam über immer wachsende Kugeloberflächen das denkbar „einfachste" Abstandsgesetz zu sein scheint, mufs nicht genau richtig sein; es könnte statt der zweiten Potenz etwa auch die 2,000 01 ste Potenz gelten, wenn es die genauere Nachprüfung der tatsächlichen himmlischen Bewegungen so verlangte; und wir würden eine solche Abweichung sogar begreiflich finden, wenn sich für das Gravitationsgesetz eine weiter zurückgehende Erklärung aus Nahewirkungen u. dergl. ergeben sollte. — Auf alle Fälle erwarten wir nur eine wirkliche Einfachheit der Natur nur in deren letzten Gesetzen, nicht in abgeleiteten, wie es die Fallgesetze und die Keplerschen Gesetze sind.

5. Das Gesetz der Erhaltung der Energie. Auch hier dürfte nicht das als ein Einwand gegen das unmittelbare Einleuchten des Gesetzes geltend gemacht werden, dafs so lange Zeit viele Verstandskräfte auf die Erfindung des *perpetuum mobile* verwendet worden sind; denn das Lockende einer solchen Erfindung hätte ja immerhin besseres Wissen übertäuben können. Aber einerseits konnten schon auf mechanischem Gebiete nur diejenigen Erfahrungen, die den Gleichungen $p = mg$ und $s = \frac{v^2}{2g}$ zugrunde liegen, auf das Maß der Energie



lückenlos gültig angenommen wird, bleibt es eine logische Erschle
spezielle Naturtatsachen, wie immer gut sie sich auch jenem Gese
jenem Gesetz rein logisch folgend hinstellen wollte. So füg
Gesetze der Elektro- und Magnetoinduktion gemäß der Lenzsc
dem Gesetze der Erhaltung der Energie; indem nämlich z. B. be
sekundären Leiters an den primären ein entgegengesetzter Str
hierbei Arbeit verbraucht wird, kann man sich den induziert
Kosten jener Arbeit entstanden denken. Es ist aber „zuviel bew
schliefst: Wird einem primären Stromleiter ein sekundärer genä
diesem ein entgegengesetzter Strom entstehen u. s. w. Denn wenn
Strom entstände, so fände auch keine Abstofsung statt, es würd
keine Arbeit verbraucht, und auch dies wäre mit der Erhaltung
im Einklang. (Überdies könnte man, wenn jener Schlufs rich
schliefsen, dafs auch beim Annähern eines geschlossenen Bi
primären Leiter in jenem ein Strom entstehen müfste.)

Wenn nun durch die vorstehenden Beispiele ersich
ist, dafs alle Prinzipien der Physik, wiewohl sie schon
nach ein Erstes, Grundlegendes sein wollen, doch für
kommen unserer physikalischen Erkenntnisse als erfa
ein Spätes und Letztes bilden (ja durch Bereich
erfahrungsmäßigen Wissens sogar wieder umgestofsen we
so läfst sich nun das über die Prinzipien Gesagte um so i
die **Definitionen** der Physik übertragen.

Die Prinzipien enthalten Sätze (genauer: Urteile), die
enthalten Begriffe (Vorstellungen); und da man erst über das
was man sich in bestimmter Weise vorgestellt hat, so schein
strengen Darstellung der Physik die Definitionen ebenso den Pri
aus ihnen abgeleiteten Sätzen) vorangeschickt werden zu müssen,
die Definitionen den Axiomen (und diese den Lehrsätzen) voransc
aber ist zu sagen, dafs in der wirklichen Entwickelung des physik

wiewohl sich der Begriff einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung freilich rein mathematisch aus den Vorstellungselementen der Zeitstrecken, Wegstrecken, Geschwindigkeiten aufbauen liefs, so entstand doch das Bedürfnis nach dieser Begriffsbildung erst im Hinblick auf die tatsächlichen Erscheinungen beim freien Fall und beim Falle auf schiefen Ebenen.

Was hier von der Definition gesagt wurde, gilt ebenso von der Einteilung (L § 94. „Definition und Einteilung als Formen systematischer Begriffsbildung" — hierzu § 95, „Wissenschaftliche Namengebung"; vgl. hier die allmählich völlige Umbildung des Begriffes „Säure"; über den in ihrer Definition liegenden „logischen Zirkel" vgl. Nr. 38).

Das im Vorstehenden über Prinzipien und Definitionen (über physikalische Urteils- und Begriffsbildung) Gesagte zeigt sich in noch umfassenderer Weise in dem Unterschied, ja dem scheinbar manchmal gegensätzlichen Verhältnisse der experimentellen und theoretischen Physik.

Diese Unterscheidung entspricht praktisch genommen dem Bedürfnisse nach Arbeitsteilung, indem sowohl die experimentellen, wie die mathematischen Methoden der physikalischen Forschung sich sehr vermannigfaltigt haben. — Aber auch theoretisch kommt in jenem besonderen Unterschiede der beiden Arbeitsrichtungen der Physik der allgemein logische Unterschied zwischen der deduktiven (progressiv-synthetischen) und der induktiven (regressiv-analytischen) Gedankenbewegung zum Ausdruck. Die theoretische Physik stellt die höhere Stufe des physikalischen Erkennens dar, die aber ohne die experimentelle völlig in der Luft schweben würde. Nur die streng logische Form verlangt es, dafs dann die rein theoretische Behandlung der Physik unter scheinbarer Überspringung der vorausgegangenen Erfahrungen mit scheinbar ganz willkürlichen „Definitionen" und scheinbar ebenso willkürlichen „Annahmen" ihre Betrachtung einsetzt und erst nachmals wieder durch allseitige Deduktionen aus jenen frei gewählten Ausgangspunkten mit den experimentellen Einzeltatsachen Fühlung gewinnt; womit dann nachgewiesen ist, dafs jene Ausgangspunkte doch nicht willkürlich gewählt und durch die Natur selbst vorgeschrieben waren.

β. Aus der deduktiven Logik.

38. Einige Begriffe und Kunstausdrücke aus der logischen Elementarlehre.

1. Definition. Konstitutive und konsekutive Merkmale. Notwendige und ausreichende Bedingung. — Z. B. wir **definieren** als „freie Achse" eines starren Körpers eine solche, in Bezug auf welche die bei der Rotation um diese Achse auftretenden Fliehkräfte einander das Gleichgewicht halten. — Aus dieser allgemeinen Definition selbst ist aber noch nicht zu ersehen, was für eine besondere Lage eine Rotationsachse im Körper haben mufs, damit sie diesem **konstitutiven Merkmale** einer freien Achse Genüge leiste, ja nicht einmal, ob überhaupt auch nur eine solche Achse in einem Körper von beliebiger Gestalt und Massenverteilung möglich ist. Es gilt also diejenigen **konsekutiven Merkmale** aus jener Definition und aus den Prinzipien der Mechanik abzuleiten, die für das Bestehen einer freien Achse „notwendig und ausreichend" sind.

Notwendig, aber nicht ausreichend wäre z. B. die Bedingung, dafs die Drehachse durch den Schwerpunkt geht.

Ausreichend, aber nicht notwendig wäre z. B. die Bedingung, dafs die Drehachse eine Symmetrale des Körpers (in Bezug auf Gestalt und Massenverteilung) sei.

Die richtige **notwendige und ausreichende Bedingung** dafür, dafs eine Achse eine „freie" sei, ergibt sich als Folgesatz eines sehr allgemeinen Satzes der höheren Mechanik starrer Systeme. Denken wir uns nämlich vom Schwerpunkt eines Körpers von beliebiger Gestalt und Massenverteilung nach allen Richtungen Gerade gelegt und auf ihnen vom Schwerpunkt Strecken aufgetragen, die den reziproken Quadratwurzeln aus den Massenmomenten des Systems für je eine dieser Geraden proportional sind, so bilden die Endpunkte dieser Strecken jedesmal die Oberfläche eines Ellipsoids („Zentralellipsoid"); dieses geht in besonderen Fällen in ein Rotationsellipsoid (z. B. für einen homogenen Zylinder) bzw. in eine Kugel (z. B. für eine Kugel, einen Würfel) über. Die gesuchte notwendige und ausreichende Bedingung für die freie Achse ist dann, dafs sie mit einer der drei Hauptachsen des Zentralellipsoids zusammenfalle. — Soll die freie Achse überdies eine stabile Achse sein, so mufs sie mit der längsten Achse des Zentralellipsoids zusammenfallen. Anwendung dieser Bestimmungen z. B. auf ein homogenes, rechtwinkliges Parallelepiped.

Analoge (viel einfachere) Anwendung der Ausdrücke „notwendig und ausreichend" für das Gleichgewicht und speziell das stabile Gleichgewicht eines starren Körpers in Bezug auf reine Translation.

2. Logisch identische und logisch äquivalente Sätze. — **Logisch identisch** sind zwei Sätze, die sich nur durch ihren Wortlaut, nicht durch das in ihnen ausgedrückte Urteil unterscheiden. Z. B. die folgenden Sätze a) und a'):

Satz a): **Wirkt auf einen Massenpunkt keine Kraft, so hat er keine Beschleunigung.**

Satz a'): Wirkt auf einen Massenpunkt keine Kraft, so hat er konstante Bewegung (einschliefslich des Grenzfalles Ruhe).

Fragt man dagegen, ob im Vergleich zum Satz a) der

Satz b): **Hat ein Massenpunkt Beschleunigung, so wirken auf ihn Kräfte,** eine neue physikalische Wahrheit darstelle oder nicht, so wird ein logisch Ungeschulter zunächst unschlüssig sein. Um zu zeigen, dafs die Sätze a) und b) **logisch äquivalent** sind, ist die wiederholte Anwendung der allgemeinen logischen Regeln[1] der Schlüsse nach Äquipollenz [aus SaP folgt *per aequipollentiam* Se (*non* P)] und nach Konversion [aus SeP folgt *per conversionem* PeS] ausreichend.

Beginnen wir mit dem Satz b): Hat ein Massenpunkt Beschleunigung, so wirken auf ihn Kräfte. Mit ihm ist logisch identisch: Ein Massenpunkt mit Beschleunigung ($B = S$) unterliegt Kräften ($K = P$); also lautet Satz b) symbolisch: BaK. — Aus diesem Satz b) folgt *per aequ.* Be (*non* K), hieraus *per conv.* (*non* K) eB — also Satz a).

Beginnen wir umgekehrt mit dem Satz a): Wirkt auf einen Massenpunkt keine Kraft, so hat er keine Beschleunigung, symbolisch (*non* K) a (*non* B), so folgt aus diesem Satz a) *per aequ.* (*non* K) e (*non non* B) oder (*non* K) aB; ferner hieraus *per conv.* Be (*non* K), endlich hieraus *per aequ.* Ba (*non non* K) oder BaK — also Satz b).

---

[1]) Dabei bedeuten die Symbole S und P Subjekt und Prädikat, a allgemeine Bejahung, e allgemeine Verneinung; also

SaP heifst: Alle S sind P. SeP heifst: Kein S ist P.

Es soll nicht geleugnet werden, daſs der gesunde Menschenverstand auch ohne die hier vorgezeigten logischen Krücken an sein Ziel gelangen kann. Dieses Ziel besteht diesmal darin, einzusehen, daſs das Trägheitsgesetz a) und das Beharrungsgesetz b) nur „zwei Seiten" eines und desselben Sachverhaltes — ohne Gleichnis: daſs sie logisch äquivalent (nicht logisch identisch) sind.

3. Progressiver und regressiver Beweis. — **Progressiv** (synthetisch) heiſst derjenige Beweisgang, welcher von anerkannten Sätzen durch Schlüsse oder Schluſsketten zur Thesis als letzter Conclusio führt; **regressiv** (analytisch) heiſst der Beweisgang, welcher zeigt, daſs aus der Thesis anderweitig als richtig erkannte Sätze mit Notwendigkeit folgen.

Z. B. Der Beweis der goniometrischen Grundformel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, welcher nur auf dem pythagoreischen Lehrsatze $a^2 + b^2 = c^2$ und den Definitionen $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ beruht, läſst sich auf folgende zwei Arten darstellen:

Progressiv:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad q.e.d$$

Regressiv:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Auch in der Physik wird bald die eine, bald die andere Richtung des Beweisganges eingehalten (vgl. LA 42). Da aber in der Physik als empirischer Wissenschaft (im Gegensatz zur Mathematik als apriorischer) immer solche Tatsachen (und die ihnen entsprechenden Sätze), die für unser Erkennen die früheren (*πρότερον πρὸς ἡμᾶς*) sind, der Sache nach selbst schon hervorgegangen sind aus weiter zurückliegenden Realgründen (*πρότερον τῇ φύσει*), so findet in der Physik ein eigentliches „Beweisen" (ähnlich dem der Mathematik) überhaupt nicht statt (vgl. oben Nr. 37 das über die schiefen Ausdrücke „Pendelbeweis", „Linsenbeweis" Gesagte). Führt man aber die physikalischen Prinzipien, von denen der Beweis als solcher ausgeht, zuerst nur als Annahmen ein, so kann von ihnen aus in progressiver Richtung zu neuen Folgerungen vorgeschritten werden: eben darum müssen aber die so „bewiesenen" Sätze nachmals erst noch durch die Erfahrung verifiziert werden, wodurch dann auch erst für diese Annahmen der regressive Beweis erbracht ist.

4. Logische Zirkel. — Ein Beispiel eines **Zirkels im Definieren** gibt das Ineinandergreifen der beiden Definitionen für „Säure" und „Salz" (§ 217). Ein Beispiel eines **Zirkels im Beweisen** gibt NEWTONS Mondrechnung, LA 44. — Diese beiden Beispiele zeigen, daſs die Physik gegen Zirkel der einen und der anderen Art nicht ebenso schlechterdings ablehnend sich zu verhalten braucht, wie die Mathematik. Dies rechtfertigt sich aus dem Unterschied zwischen dem apriorischen Charakter der Mathematik und dem empirischen der Physik; denn die Mathematik hat nur mit Beziehungen zwischen den von ihr durch Definitionen und Annahmen eingeführten Vorstellungsgegenständen, die Physik dagegen mit den wirklichen Dingen zu tun, an deren Existenz zu glauben wir letztlich durch unsere Sinneswahrnehmungen (im Gegensatze zu bloſsen Halluzinationen und sonstigen Einbildungen) genötigt und berechtigt sind.

b) Aus der Psychologie (und Physiologie).

39. Die allgemeinen Aufgaben der physikalischen, der physiologischen und der psychologischen Empfindungslehre.

In die Untersuchung der Empfindungen von Temperaturen, Klängen, Farben u. s w. teilen sich die Physik, die Physiologie und die Psychologie; so unterscheidet man z. B. eine physikalische, eine physiologische und eine psychologische Optik (vgl. §§ 85, 114; Nr. 43, 44).

Auch der physikalisch und physiologisch ganz Ununterrichtete denkt sich bei den Worten Licht (Farbe, Rot, Blau u. s. w.), Schall (Geräusch, Knall, Klang Ton a^1, Tonleiter u. s. w.), Wärme (Hitze des Ofens, Kälte des Wassers u. s. w.) etwas ganz Bestimmtes. Wollen wir nur diese, schon dem Alltagsleben geläufigen Begriffe (ganz absehend von unserem späteren Wissen über die physikalischen und physiologischen Bedingungen für das Auftreten z. B. von Lichtempfindungen) in Definitionen fassen, so können wir nur sagen: **Licht** im psychologischen Sinne ist der **Inhalt unserer Gesichtsempfindungen** (vollständiger: Licht ist der Gegenstand unserer Gesichtswahrnehmungen, wie er uns aus den Inhalten unserer Gesichtsempfindungen bekannt ist); ähnlich **Schall, Wärme** der **Inhalt unserer Gehör-, bzw. Wärmeempfindungen.**

Die rein psychologische Empfindungslehre beschränkt sich auf die Anführung der einzelnen Gattungen und Arten der Empfindungsinhalte und auf die **Beschreibung** ihrer einzelnen Eigenschaften; z. B., dafs die Tonhöhe eines Klanges eine Qualität, sein Laut- oder Leisesein eine Intensität, seine Dauer eine zeitliche Bestimmung sei u. s. f. — Ferner: Reihen von Empfindungsmerkmalen.

Die Physik als solche dagegen hat es nicht mit den Empfindungen selbst, sondern mit den äufseren Empfindungserregern zu tun, z. B. den Schallwellen, den Lichtwellen, und weiterhin mit den solche Wellen erregenden Schwingungen (der Teilchen schwingender Saiten, glühender Gase u. s. f.). Jene **„physikalischen Reize“** erregen ihrerseits die Empfindungungsorgane (Auge, Ohr, Tastnerven u. s. w.), deren **Funktionen** zu beschreiben und zu erklären Aufgabe der physiologischen Empfindungslehre ist. Diese physiologischen Funktionen bilden ihrerseits die **„physiologischen Reize“** für das schliefsliche Auftreten der Empfindungen selbst.

Es liegt also eine dreigliedrige Kausalkette vor: Physikalischer Reiz (I — z. B. Luftschwingung); physiologischer Reiz (II — z. B. Schwingungen des Trommelfelles bis zu den Schwingungen der peripheren Gehörnervenendigungen und den Vorgängen im Gehörnerv bis zu den zentralen Gehörnervenendigungen). Empfindung (III — z. B. Hören eines Klanges.)

Die physikalische Erforschung der Empfindungs**erreger** sucht sich von den physiologischen und psychologischen Teilbedingungen, von welchen das Eintreten bestimmter Wärme-, Schall-, Lichtempfindungen mit abhängig ist, möglichst unabhängig zu machen, indem sie z. B. Temperaturen statt nach der Wärmeempfindung nur nach dem Stande des Thermometers, die Intensität von Lichtstrahlen mittels des Photometers u. s. w. beurteilt. Ein Physiker, welcher eine ihm eingesendete Stimmgabel darauf zu prüfen hat, ob sie im Normal-a^1 tönt, achtet kaum oder gar nicht darauf, wie die Gabel **klingt** (wogegen der Klavierstimmer oder Violinspieler beim Stimmen seines Instrumentes direkt die **Tonhöhe** der Saite mit der der Stimmgabel vergleicht); sondern indem sich der Physiker der Methode der Schwebungen bedient, achtet er statt auf die Tonhöhe (Ton**qualität**) nur auf die ab- und zunehmende **Intensität** des von beiden Gabeln zusammen erregten Schalles (desgleichen bei der Methode der Lissajouschen Figuren auf deren wechselnde oder bleibende **Gestalt**). Ebenso meint der Physiker, wenn er von einem bestimmten Rot spricht, nicht ein Rot, welches genau so **aussieht**, wie ein gegebenes rotes Papier oder dergl.; auch nicht, ob es ein reines Rot oder ein Rot mit einem Stich ins Gelbe, ein gesättigtes oder nicht gesättigtes Rot ist, sondern er bestimmt das Rot durch die Nachbarschaft zur Fraunhoferschen Linie *A* oder *a* oder *B* u. s. f., oder er charakterisiert das Rot durch die Wellenlänge. In diesem Sinne kann auch ein Farbenblinder von bestimmten Farben sprechen.

Durch solche physikalische Methoden ist es also möglich geworden, sich von der unmittelbaren Rücksicht auf die jeweiligen Sinnesempfindungen zum Teil frei zu machen; immerhin nur zum Teil: denn das An- und Abschwellen der Intensität bei den Stimmgabelschwebungen erkennen wir doch wieder nur durch das **Hören**, die Lage bestimmter Farbennüancen neben einer bestimmten Fraunhoferschen Linie nur durch das **Sehen**, desgleichen den Stand des Thermometers u. s. f.

Wenn aber so der Physiker nicht mehr darauf angewiesen ist, auf die Qualitäten seiner Sinnesempfindungen zu **achten**, so versteht es sich doch von selbst, dafs auch für ihn diese Sinnesqualitäten nicht aufhören, als dasselbe weiter zu **existieren**, als was sie jedem Nichtphysiker von jeher bekannt waren. Z. B. Auch der Physiker kauft sich eine Konzertkarte, nicht, damit er Schwingungen, sondern damit er Klänge höre. — Häufig irreführend war für die richtige Würdigung der kinetischen Theorien der Wärme, des Schalles und des Lichtes der Ausdruck: „Wir haben in den hypothetischen Bewegungen der Gasmoleküle nur ein **Bild** für die wirklichen Wärmezustände“. Denn niemand glaubt in den schwingenden Molekülen ein auch noch so entfernt **ähnliches** Bild der gegebenen Wärmeempfindung zu haben; sondern jene hypothetischen Bewegungen sollen ja nicht in einer Ähnlichkeits-, sondern in einer **Kausal**beziehung [also nicht in einer **Vergleichsrelation**, sondern in einer **Notwendigkeitsrelation**, vgl. L. § 25 und oben, S. 875, Nr. 35] zur Wärmeempfindung stehen.

Nur mit diesen Einschränkungen also gilt die zusammenfassende Bezeichnung „Physik der Sinnesqualitäten“ für die Lehre von der Wärme, vom Schall und vom Licht (S. 251 ff.). Allgemein ist in dem **Gesetz der spezifischen Sinnesenergien** (vergl. Nr. 44, S. 814) ausgesprochen, inwieweit eine Sinnesempfindung von dem physiologischen und von dem physikalischen Reiz abhängig ist und inwieweit nicht. Die Besinnung auf die völlige Verschiedenheit der schliefslich erregten Sinnesempfindung von ihren physiologischen und physikalischen Vorbedingungen führt zur unwidersprechlichsten Widerlegung einerseits aller „materialistischen“, andererseits aller „phänomenologischer“ Mifsverständnisse.

Von solchen weitausschauenden Beziehungen zwischen den Wissenschaften

vom Physischen und Psychischen zwar unabhängig, aber doch eine erste exakte Beziehung zwischen ihnen herstellend, sind die zunächst kurz zu besprechenden Untersuchungen über „Empfindlichkeit“.

40. Empfindlichkeit. — Die Messung des Psychischen.

Da das Wort „Empfindlichkeit“ von „empfinden“ kommt, und Empfinden ein psychischer Vorgang ist („Empfindungen“ sind Wahrnehmungsvorstellungen von möglichst einfachem physischem Inhalt, Ps. § 8), so enthält der physikalische Begriff der Empfindlichkeit einer Wage, eines Thermometers und jedes anderen physikalischen Meſsinstrumentes einen mahnenden Hinweis auf die Empfindlichkeit unserer Sinnesorgane und auf die Unterscheidungsfähigkeit unserer Sinnesurteile. Für diese Empfindlichkeit im physiologischen und psychologischen Sinne haben Fechner (1860) und Spätere bestimmte Maßmethoden ein- und durchgeführt (Ps. § 29 und § 36) und dadurch der modernen Psychologie ein neues und weites Forschungsgebiet erschlossen.

Z. B. Der Orgelbauer Appunn und der Physiologe Preyer haben die „Unterschiedsempfindlichkeit“ für Tonreize untersucht und fanden sich imstande, Töne von der Schwingungszahl $r_1 = 500$ und $r_1' = 500{,}3$ (nahe dem Ton h^1) zu unterscheiden; man sagt dann: der eben noch merkliche relative Reizunterschied in dieser Reizregion sei $\frac{r_1' - r_1}{r_1} = \frac{500{,}3 - 500}{500} = 0{,}0006$. — In der um eine Oktave höheren Reizregion betrug der eben noch merkliche relative Reizunterschied $\frac{r_2' - r_2}{r_2} = \frac{1000{,}5 - 1000}{1000} = 0{,}0005$. Indem nun als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit die **reziproken Werte** jener eben noch merklichen **relativen Reizunterschiede** gewählt werden, beträgt für diese Versuchspersonen

in der Tonregion h^1 die relative Unterschiedsempfindlichkeit $\frac{1}{0{,}0006} = 1666$,

in der Tonregion h^2 die relative Unterschiedsempfindlichkeit $\frac{1}{0{,}0005} = 2000$.

Wäre in dem angeführten Beispiel (etwa für andere Beobachter) in der höheren Reizregion statt des Tones mit der Schwingungszahl 1000,5 erst der mit 1000,6 von dem Ton der Schwingungszahl 1000 unterschieden worden, so hätte sich ergeben $\frac{r_2'' - r_2}{r_2} = \frac{1000{,}6 - 1000}{1000} = 0{,}0006$. Es wäre also dann die Unterschiedsempfindlichkeit in der einen und in der anderen Reizregion die gleiche, nämlich 1666; und dies wäre ein Beispiel zu der von Fechner als „Webers Gesetz“ bezeichneten Beziehung, die sich zuerst bei Wilhelm Webers Versuchen über eben merkliche Gewichtsunterschiede (s. u.), über Augenmaß u. s. w. mehr oder minder annähernd gültig zeigte, und von der Fechner erkannte, daſs sie für die meisten Sinnesgebiete in mehr oder weniger grofsem Umfange gilt; in einfachster Formulierung lautet

Webers Gesetz: Die relative Unterschiedsempfindlichkeit ist unabhängig von der absoluten Reizgröſse; oder etwas ausführlicher: **Die relative Unterschiedsempfindlichkeit ist für dieselbe** Empfindungsgattung (z. B. Licht, Druck) **und für dieselben Empfindungsmerkmale** (Intensität, Qualität u. s. w.) **in verschiedenen Reizregionen die gleiche.**



So fand WILHELM WEBER (1845), dafs man bei bewegter Hand noch eine Verschiedenheit von 100 und 110 g, ferner eine von 200 und 220 g, von 300 und 330 g u. s. w. bemerkt, also die relative Unterschiedsempfindlichkeit überall 10 ist, aufser bei allzu kleinen (der „Reizschwelle“ nahen) und allzu grofsen (der „Reizhöhe“ nahen) Gewichtsempfindungsreizen.

Aus Webers Gesetz glaubte FECHNER weiterhin eine mathematische Beziehung zwischen Empfindung und Reiz aufstellen zu können, deren einfachster Typus wäre $e = log\,r$. Da nämlich z. B. den nach geometrischer Reihe steigenden Schwingungszahlen 1, 2, 4, 8, 16 . . . die immer gleichen Tonintervalle je einer Oktave entsprechen, also gleichsam eine arithmetische Reihe bilden, so wäre die graphische Darstellung für die Zuordnung dieser beiden Reihen eine logarithmische Kurve (math. Anh. Nr. 10, 17). Doch kann man nicht von den Empfindungen selbst sagen, dafs sie den Logarithmen der Reize zugeordnet sind, sondern nur für die Gröfsen der **Verschiedenheiten von Empfindungspaaren** gilt ein logarithmisches Gesetz in Bezug auf die Reize. So sind z. B. die gleichen musikalischen Intervalle einer Oktave nicht gleiche Empfindungsverschiedenheiten; denn in sehr tiefen und sehr hohen Lagen erscheint uns die Verschiedenheit eines Tones von seiner Oktave viel weniger grofs, als in mittlerer Tonlage. — So hat denn auch die von FECHNER auf Grund jener logarithmischen Maßformel erhoffte Messung des Psychischen (und zwar ein indirektes Messen des Psychischen nach den direkt oder indirekt gemessenen physikalischen Reizen) sich bisher nicht verwirklicht, aber es ist doch eine mittelbare Messung nach den Relationen zwischen psychischen Elementen angebahnt. — (Näheres hierüber Ps. § 29 und § 36.)

Einige Empfindlichkeitsgröfsen.

I. Absolute Empfindlichkeiten („Reizschwellen“): In der mittleren Tonregion genügt zur Erregung einer Schallempfindung eine kinetische Energie von weniger als 10^{-8} Erg (nach BOLTZMANN und TÖPLER und neuestens wieder nach ZWAADEMAKER). — LANGLEY bestimmte die Empfindlichkeit des Auges für Strahlen mittlerer Wellenlänge, indem er es nach längerer Dunkeladaption und 1 m Entfernung einen 1 mm breiten Spalt beobachten liefs, der mehrmals für etwa $^1/_2$ sec schwach erhellt und dann wieder verdunkelt wurde. So ergab sich, dafs die während $^1/_2$ sec dem Auge zugeführte Energie nur $^1/_{35}$ Milligramm-Milliontelmillimeter ($^1/_{35}$ mg $\mu\mu$ = $28 . 10^{-10}$ Erg) betrage. Für Rotorange oder Violett war schon eine 200 mal so grofse Energie zum Erregen eben merklicher Empfindungen nötig (die Unsicherheit der Berechnung schätzt LANGLEY auf 100 Proz.)

II. Die Unterschiedsempfindlichkeit des Auges ist für die verschiedenen Teile des Spektrums sehr verschieden, z. B. klein bei Rot (so dafs der gröfsere Teil im Rot, trotz sehr verschiedener Wellenlängen, nur fast unmerklich verschiedene Empfindung gibt), am gröfsten in Gelb und dann wieder in Blaugrün. Innerhalb des ganzen Spektrums werden etwa 160 (unter sehr günstigen Bedingungen höchstens 500) Farbentöne voneinander unterschieden, wozu noch die vielen Unterschiede in ungesättigten Farben und sonstigen Mischfarben kommen.

Durch die kunstvollen Mefsinstrumente der Physik ist es gelungen, die Empfindlichkeit der unbewaffneten Sinnesorgane durchweg um das Hundert- oder Tausendfache zu übertreffen. Z. B. Unsere wägende Hand schätzt ein Gewicht auf 10 Proz. genau, die Empfindlichkeit der Wage ist $2 . 10^7$ so grofs. Unterschiede im Luftdruck spüren wir erst bei Bergbesteigungen, Ballonfahrten; das Barometer zeigt 10^{-5} at. Räumliche Abstände unterscheiden wir mit dem Tast-

sinn der Zunge von 1 mm an; das Auge unterscheidet bei 10 cm Entfernung noch $\frac{1}{40}$ mm, das Mikroskop ist noch 200 mal so empfindlich. Der Farbensinn des Auges unterscheidet im Spektrum etwa 160 (nach anderen Angaben etwa 500) Abstufungen, ein Beugungsgitter und Bolometer dagegen 40 000 Abstufungen. Der Zeitsinn unseres Ohres unterscheidet noch $\frac{1}{500}$ sec, Chronoskope sind 200 000 mal so empfindlich; unser Temperatursinn unterscheidet noch etwa $\frac{1}{3}°$ C. (manchmal $\frac{1}{10}°$ C.), das Bolometer ist 200 000 mal so empfindlich.

41. Die Vorstellungselemente der Mechanik: Raum, Zeit, Spannung.

So wie sich die Physik der Wärmeerscheinungen, der Schall- und Lichterscheinungen gründen mufs auf bestimmte Wärme-, Schall-, Lichtempfindungen, müssen sich auch für die Mechanik bestimmte Gruppen von Vorstellungsinhalten namhaft machen lassen, auf welche alle noch so zusammengesetzten und abstrakten Begriffe dieses Gebietes letztlich sich aufbauen lassen.

Man pflegt als Gegenstand der Mechanik gewöhnlich überhaupt nur die „Bewegungen“ zu bezeichnen. Dabei ist aber schon die Vorstellung von „Bewegung“ offenbar noch kein letztes Element, sondern weist zurück auf die Vorstellungen von **Raum** und **Zeit**.

Die Psychologie der **Raum**vorstellungen weist ihrerseits nach, was an diesen als die letzten Elemente zu betrachten sind. Erfahrungsmäßig psychologisch genommen, sind es die kleinsten, eben noch merklichen Flächen- (nach Hamann schon dreidimensionale Raum-) Elemente, welche wir eben noch als ausgedehnt namentlich in unseren Gesichts- und Tastempfindungen bemerken können. In künstlich logischer Bearbeitung gehen wir über diese psychologischen Raumelemente noch hinaus zum Begriffe des mathematischen Punktes. — Der Abstand zweier Punkte stellt schon eine Relation, nämlich eine örtliche Verschiedenheit dieser zwei Punkte, dar. Aufser dem Abstande aber begründen jene zwei Punkte auch noch die Vorstellung einer Richtung. — Liegen drei Punkte A, B, C so, dafs die Richtung AB gleich der Richtung BC ist, so sagen wir, die drei Punkte liegen in einer „Geraden“. Erst unendlich viele Punkte „bilden“ aber eine Gerade. — Ähnlich gestaltet sich die Analyse und Synthese aller jener Unzahl räumlicher Gebilde, welche schon die vorwissenschaftlichen Raumanschauungen und weiterhin die Geometrie, Phoronomie, Dynamik u. s. f. wissenschaftlich behandeln.

Die Begriffe eines „absoluten Raumes“ (und der „absoluten Bewegung“) bilden ein bis heute nicht entschiedenes Problem aus dem Grenzgebiete der Geometrie, der Physik und der Philosophie. — Sicher ist, dafs wir beide Begriffe, wenn überhaupt, so nicht aus direkten Wahrnehmungen haben können; denn schon aus dem Trägheitsgesetz folgt, dafs sich eine konstante Bewegung mit irgend einer Richtung oder Geschwindigkeit nicht durch irgend eine Kraft (also auch nicht durch eine, die auf eines unserer Sinnesorgane wirken könnte) von was immer für einer anderen konstanten Bewegung unterscheidet. Das Problem beginnt aber wesentlich bei einer Abschätzung darüber, wie weit wir in Ermangelung direkter Wahrnehmung von absoluten Raumbestimmungen indirekte Kenntnis durch Schlüsse auf solche Bestimmungen ziehen können und ziehen müssen, falls auf gegebene relative Ortsbestimmungen und Bewegungen das relationstheoretische Grundgesetz: „Keine Relation ohne (in letzter Instanz) absolute Fundamente“ Anwendung findet.

Die **Zeit**vorstellung kann nicht im eigentlichen Sinne auf „Zeit-Empfindungen" zurückgeführt werden; denn jede noch so kleine Zeitstrecke erstreckt sich schon über die Gegenwart hinaus, entweder nach der Vergangenheit oder in die Zukunft oder nach beiden Richtungen zugleich. „Empfinden" aber im strengen Sinne können wir nur etwas streng Gegenwärtiges. Die Hauptquelle der Zeitvorstellungen sind aber unsere Erinnerungsvorstellungen (und wahrscheinlich erst auf Grund dieser die Erwartungsvorstellungen). — Wie beim Raume der „mathematische Punkt", so ist für die Zeit der Zeitpunkt das letzte logisch auszusondernde Element; und aus solchen Elementen bauen sich dann wieder die Relations- und Komplexionsvorstellungen Zeitdistanz, Zeitstrecke, Dauer u s.w. auf. — Gemessen wird die Zeit für die wissenschaftlichen Zwecke der Physik bekanntlich durch den Stundenwinkel der Erde (§ 176 und Anh. Nr. 4); deshalb ist aber die Zeit ebensowenig dieser Stundenwinkel, wie etwa der hohe Wärmegrad, welchen wir bei Annäherung der Hand an siedendes Wasser empfinden, der Teilstrich 100 (oder die Raumstrecke zwischen 0° und 100°) der Thermometerskala ist.

Reaktionszeiten. — Bekanntlich sind wir nicht imstande, z. B. die Ausführung eines Kommandos genau in dem nämlichen Zeitpunkt zu beginnen, in dem es ausgerufen wird; denn es vergeht zuerst eine Zeit für das Auffassen des Gehörten, dann eine für die Innervation der entsprechenden Muskelbewegung. Beiderlei Zeiten können mittels Chronoskop (math. Anh. Nr. 4) gemessen werden; sie betragen je nach der Art des Reizes, der Geübtheit, dem Ermüdungszustand u. s. w. bestimmte Bruchteile von Sekunden. — Insbesondere sind diese von der Psychophysik vielfältig durchexperimentierten Erscheinungen auch praktisch wichtig geworden für jeden Beobachter des zeitlichen Eintritts von Erscheinungen, z. B. des Durchgangs von Sternen durch das Fadenkreuz des Fernrohres. Es hat sich hierbei gezeigt, daſs verschiedenen Beobachtern eine verschiedene **„persönliche Gleichung"** zukommt, und derjenige Beobachter ist ein guter, bei dem die Zeitverschiebung zwischen dem wirklichen Eintritt der Erscheinung und dem von ihm (z. B. durch Niederdrücken eines Telegraphentasters) angegebenen sich recht nahe einem konstanten Werte hält, mag dies übrigens auch ein ziemlich groſser sein. Sogar eine „negative Zeitverschiebung" kommt bei manchen Beobachtern vor, indem sie in bestimmter Erwartung, z. B. des dem Fadenkreuz schon nahen Sternes, immer zu früh markieren; was ebenfalls nicht schadet, falls nur auch diese Zeitdifferenz sich als konstante herausstellt.

Die im § 14 als das dritte Element mechanischer Erscheinungen angeführten „mechanischen Spannungen" erkennen wir in den **Spannungsempfindungen**, namentlich der Muskeln, Sehnen, Gelenke, auch der Haut. Wie diese Empfindungen qualitativ beschaffen sind, läſst sich ebensowenig beschreiben oder definieren, als wie Rot aussieht, wie der Ton *c* klingt u. dergl.; wohl aber kennt jeder diese Spannungsempfindungen ebenso gut aus eigener Erfahrung, wie die Gesichts-, Gehörs-, Wärmeempfindungen.

Es soll also keine Definition mehr, sondern schon wieder nur eine Bestimmung über das Entstehen dieser Empfindungen sein, wenn wir sagen: „Die Spannungsempfindungen treten ein, wo ein mit Tastorganen (dieser Ausdruck im weitesten Sinne, nicht nur für die Berührungsempfindungs-Organe der Haut verstanden) versehener Teil unseres Leibes in ein Massensystem eingeschaltet ist, innerhalb dessen mechanische Spannungen herrschen. Diese sind ihrerseits

in Zug-, bzw. Druckspannungen einzuteilen, denen ein Unterschied der Zug-, bzw. Druckempfindungen entspricht." — Solche Empfindungen haben wir, wenn uns z. B. ein fallender Körper auf die Hand stöfst, aber qualitativ ähnliche auch dann noch, wenn er ruhig auf die Hand drückt.

Da die Schwerkraft auch an unserem eigenen Leibe angreift, so ergibt sich bestimmte Empfindungen, welche man speziell als **„statischen Sinn"** bezeichnet, der uns über die Stellung unseres Leibes und seiner einzelnen Teile zur Richtung der Schwere belehrt. — Im Groben sind es die Empfindungen des Gewichts der äufseren Teile unseres Leibes; im Feineren nach MACH und BREUER Empfindungen, die im Labyrinth des Ohres ihre speziellen Organe haben (§§ 95, 96), und zwar ist es teils das Gewicht der Hörsteinchen (Otolithen), das solche Empfindungen auslöst, teils der Stofs des Labyrinthwassers gegen die halbzirkelförmigen Gänge. Indem diese annähernd nach den drei Hauptebenen des Kopfes orientiert sind, können je nach Bewegungen in je einer dieser Ebenen oder in Zwischenlagen deutlich unterscheidbare Empfindungen ausgelöst werden; man darf sich aber nicht einbilden, dafs hierbei die halbzirkelförmigen Gänge oder ihre Lagen selbst wieder empfunden werden (wie man ja auch z. B. nicht die Netzhaut und das Bild auf ihr empfindet; Nr. 44, S. 809).

42. Aus der psychologischen und physiologischen Wärmelehre.

Dafs **kalt, kühl, lau, warm, heifs** eine Qualitätenreihe, und zwar eine von zwei verschiedenen Qualitätenarten (kalt-kühl einerseits, lau-warm-heifs andererseits) darstellt, ist psychologisch unbestreitbar und wird nicht umgestofsen durch den ebenfalls richtigen, aber nur auf die physikalischen Wärmezustände gehenden Satz: „Die Kälte ist nur ein geringerer Grad von Wärme".

Gemeint ist mit letzterem Satz: Die in unseren Wärmeempfindungsorganen die Empfindung von kalt oder kühl bewirkenden Wärmezustände äufserer Körper unterscheiden sich nur graduell (nicht selbst wieder qualitativ) von solchen Wärmezuständen, die uns die Empfindungen von lau, warm, heifs hervorrufen. (Im Sinne der kinetischen Wärmehypothese z. B. unterscheiden sich die Geschwindigkeiten der Teilchen heifser Luft nur graduell von den Geschwindigkeiten der Teilchen kalter Luft).

Die beiden Reihen des Wärmeempfindungskontinuums weisen einen Nullpunkt auf, den man als physiologischen Nullpunkt zu bezeichnen pflegt, der aber zunächst eigentlich ein **psychologischer Nullpunkt** ist.

Bekanntlich erregt uns z. B. Wasser von 10°, 12° und 14° in der Hand noch die Empfindung von kühl, Wasser von 20°, 22° und 24° schon die Empfindung von warm. Dazwischen mufs es also einen physikalischen Wärmegrad geben (etwa bei 15° C.), dem überhaupt keine Wärmeempfindung, weder eine solche der Kälte-, noch der Wärmereihe entspricht. — Dieser Nullpunkt verschiebt sich bekanntlich nicht unbeträchtlich nach oben, wenn wir nicht nur die Hand, sondern den ganzen sonst durch Kleider verwöhnten Leib in ein Bad tauchen. Es erregen dann auch 18°, 19°, 20° noch die Empfindung der Kühle, bei einem Wannenbad selbst noch 25°. Diese Wandelbarkeit des physiologischen Nullpunktes

weist auf die verwickelten physiologischen Bedingungen für das Zustandekommen dieser oder jener Wärmequalitätsempfindung hin. — Insbesondere auffällig sind hier alle Erfahrungen der **Wärmeadaptation,** d. i. die Anpassung unserer Wärmeempfindungsorgane, wie sie durch kurz vorausgegangene Berührung mit einem hinreichend weit unter bzw. über dem normalen physiologischen Nullpunkt liegenden Wärmegrade bewirkt wird; typisch hierfür ist LOCKES *Versuch* über das Eintauchen der erhitzten und der abgekühlten Hand in dasselbe laue Wasser.

Während im Bisherigen die Verschiedenheiten unserer Wärmeempfindungen als qualitative beschrieben wurden, sind doch auch Unterschiede der Intensität bei gleicher oder ähnlicher Qualität unverkennbar. Wir sprechen ja von starker Kälte, starker Hitze. Doch sei ebenfalls darauf aufmerksam gemacht, dafs sich z. B. starke Kälte von schwächerer Kälte nicht nur der Intensität, sondern auch der Qualität nach (vielleicht auch durch quasi-räumliche und Tastqualitäts-Bestimmungen, „prickelnde, schneidende Kälte") unterscheidet.

Die Unterschiedsempfindlichkeit für Wärmegrade kann in der mittleren Temperaturregion eine sehr feine sein.

So übertraf bei FECHNERS ersten Versuchen zur Bestätigung des Weberschen Gesetzes für Wärmeempfindungen seine unmittelbare Unterscheidungsfähigkeit sogar die Empfindlichkeit seines (noch Zehntelgrade anzeigenden) Thermometers.

Zur Streitfrage, ob die Wärmegrade eine Gröfsenreihe darstellen oder nicht, ist vor allem wieder zu unterscheiden zwischen den psychologischen und den physiologischen Wärmezuständen. Für erstere gilt alles, was über psychologische Messung überhaupt gesagt wurde (Nr. 40). Dafs aber in der Tat auch die physikalischen Wärmegrade eine Gröfsenreihe bilden (und nicht nur konventionelle Zahlen an der Skala eines Thermometers aus beliebigen thermometrischen Substanzen), geht schon daraus hervor, dafs sich die Angaben verschiedener Thermometer mittels verschiedener Korrekturen auf THOMSONS absolute Temperaturskala beziehen lassen und dafs diese absolute Skala wegen ihrer Beziehung auf Reihen von mechanischen Arbeiten, deren Gröfsencharakter von niemand bezweifelt wurde, selbst einer wenigstens mittelbaren Messung, nicht blofs einer Numerierung oder gar nur Benamsung fähig ist.

Nach neueren physiologischen Untersuchungen fallen den einzelnen Tastnervenfaser-Endigungen in der Haut insofern ganz getrennte Aufgaben zu, als an bestimmten Punkten der Haut was immer für einem hinreichend scharf lokalisierten Reize eine Kälte-, an anderen eine Wärme-, an noch anderen eine Druckempfindung entspricht („Kälte-, Wärme-, Druckpunkte").

43. Aus der psychologischen und physiologischen Akustik.

A. 1. Sowohl die Unterscheidung der **Geräusche** und **Klänge,** sowie innerhalb der Klänge die der **Klangfarbe** und der **Tonhöhen** betreffen qualitative Verschiedenheiten unserer Gehörsempfindungen. Dabei bilden die Tonhöhen eine eindimensionale Reihe; die graphische Darstellung des Tonempfindungskontinuums ist eine Linie.

Bekanntlich machen wir aber in der Musik keineswegs von diesem Kontinuum als solchem Gebrauch (ein stetiges Emporziehen eines Tons durch längere Tonstrecken macht den Eindruck des Heulens, und schon das Ineinanderschleifen von

Tonhöhen gilt dem Musikalischen als Unart); vielmehr liegt aller „Tonkunst“ die folgende psychologische Tatsache zugrunde:

Die Musik hat aus dem Kontinuum möglicher Töne, von einem beliebigen Grundton ausgehend, ganz bestimmte **Intervalle** herausgehoben (in der gegenwärtigen europäischen Musik die der Ganz- und Halbtöne). Psychologische Beobachtungen und Versuche zeigen, daſs zwischen je zwei Tönen der Tonleiter ein bestimmtes Empfindungsverhältnis besteht, das Stumpf als den Grad der **Tonverschmelzung** bezeichnet.

Die Verschmelzung ist die innigste für Grundton und Oktav, dann minder innig in absteigender Reihe für Grundton und Quint, Quart, Terz. Keine (fast keine?) Verschmelzung gehen ein: Grundton und Septim, Grundton und Sekund.

In dieser psychologischen Tatsache der Verschmelzungsgrade liegt auch der letzte psychologische Grund für die verschiedenen Grade der **Konsonanz** und **Dissonanz.**

Die von Helmholtz gegebene Erklärung aus den Schwebungen der Partialtöne (vgl. LA 157) erklärt nur einen Teil des die Dissonanzen begleitenden Unlustgefühls; dagegen kann das positive Lustgefühl der Konsonanz nicht aus dem bloſsen Fehlen der Schwebungen erklärt werden.

2. Die Schallintensitäten bilden eine eindimensionale Reihe; ihre graphische Darstellung ist eine einerseits durch Null (entsprechend der völligen Stille) begrenzte, andererseits (nach der Richtung immer stärkerer *Forte*) unbegrenzte Gerade für die denkbaren Tonstärken; dagegen für die wirklich hörbaren Tonstärken ein ebenfalls begrenztes Kontinuum schon deshalb, weil bei allzu starken Tonreizen das Empfindungsorgan beschädigt und unempfindlich (taub) wird. —

Auf die bisherigen psychologischen Beschreibungen[1]) der Schallempfindungen gründen sich nun die den Gegenstand der physikalischen Akustik bildenden

B. Beziehungen zwischen den Reihen der Schallempfindungsmerkmale und den Reihen der physikalischen Schallreize, nämlich: 1. Der psychologischen Unterscheidung der Schallqualitäten in Geräusche und Klänge entspricht physikalisch die Unterscheidung der den Schall erregenden Bewegungen in unperiodische und periodische. An den periodischen Bewegungen oder Schwingungen entspricht die Schwingungs**zahl** der Tonhöhe, die Schwingungs**form** der Klangfarbe, die Schwingungs**weite** der Klangstärke.

Man beachte aber, daſs der Periodizität der physikalischen Schwingungsvorgänge keinerlei merkbare Periodizität der bewirkten Klangempfindungen, sondern eben nur ihre ruhig andauernde Qualität und Intensität entspricht. Schon deshalb ist es völlig unzulässig, in die Klangempfindungen als solche noch etwas von den Schwingungszahlen hineinzuverlegen; und eben deshalb wieder darf die wissenschaftliche Psychologie jene Zahlen und Zahlenverhältnisse nicht zur Erklärung der Tonvorstellungen, Tonurteile und Tongefühle heranziehen (wie es uns

[1]) Die ausführlichere deskriptive Psychologie der Schallempfindungen vgl. Ps. § 23 A.

zu häufig in der vermeintlichen Erklärung geschieht, dafs uns Grundton und Oktav am meisten, Grundton und Quint schon weniger, Grundton und Sekund deshalb gar nicht als konsonant erscheinen, weil das Ohr an den einfachen Zahlenverhältnissen 1 : 2 und 1 : 3 ein gröfseres und kleineres Wohlgefallen, an den verwickelten 8 : 9 ein Mifsfallen habe).

C. **Indem die physiologische Funktion des Gehörorgans wesentlich im Mitschwingen der peripheren Enden des Gehörnerven (nebst den daran sich schliefsenden, bisher noch völlig unbekannten Vorgängen im Verlauf des Gehörnerven und an seinen zentralen Endigungen) besteht, ist dieses Organ wesentlich ein mechanischer Sinn für die physiologische Analyse aperiodischer und periodischer Bewegungen der Luft nächst dem äufseren Ohr (auch von ebensolchen Bewegungen des Schädelknochens, ausnahmsweise auch bei innerer Reizung des Gehörnerven, entsprechend den Gehörhalluzinationen).**

Wählen wir als zusammenfassendes Beispiel für die physikalischen, physiologischen und psychologischen Vorgänge beim Hören das folgende: Drei Sänger singen in ein Klavier bei gehobenem Deckel und Pedal den Dreiklang *Es-G-B* etwa auf verschiedene Vokale *u*, *o*, *a*); nach gleichzeitigem Aufhören der Singtöne klingen aus dem Klavier gleiche Töne in gleicher Klangfarbe, und wir bemerken nicht nur die drei Grundtöne, sondern auch einige von den an jedem einzelnen Klang beteiligten Obertönen. Es fanden also folgende Zusammensetzungen (Synthesen) und Zerlegungen (Analysen) statt: 1. Eine physikalische Synthese der durch die drei Paare von Stimmbändern erregten Schwingungen in der einen Luftmasse zwischen den Sängern und den Saiten. 2. Eine physikalische Analyse der zusammengesetzten Schwingungen der Luft in die den einzelnen Saiten entsprechenden Grund- und Obertöne, und zwar jedes in entsprechender relativer Stärke. 3. Eine physikalische Synthese der durch diese Saitenschwingungen erregten Schwingungen der Luft bis zum Trommelfell, der Gehörknöchelchen und endlich des Labyrinthwassers. 4. Eine physiologische Analyse dieser zusammengesetzten Schwingungen des Labyrinthwassers durch die Fasern der *membrana basilaris* und Fortleitung der einzelnen Tonreize durch die einzelnen Fasern des Gehörnervs (eine solche Trennung auch noch in den Fasern und den entsprechenden Endorganen im Gehirn müssen wir, wiewohl wir die näheren physiologischen Vorgänge hierbei gar nicht mehr kennen, aus dem psychologischen Grunde annehmen, weil sonst ein nochmaliges Heraushören der einzelnen Teiltöne psychisch unmöglich wäre). 5. Eine psychische Synthese der einzelnen Teiltöne, infolge deren wir zunächst den Dreiklang und um so mehr die einzelnen Teiltöne jedes einzelnen der drei Klänge als etwas Einheitliches auffassen. 6. Eine psychische Analyse, insoweit wir durch Lenkung der Aufmerksamkeit die einzelnen einfachen Töne aus dem Zusammenklang heraushören.

44. Aus der psychologischen und physiologischen Optik.

A. Von den Bewufstseinsinhalten, die uns der Gesichtssinn vermittelt, sind 1. qualitativer Art die **Farben,** die neben dem **Farbenton** noch verschiedene **Sättigungsgrade** zeigen (z. B. reines Rot, weifsliches Rot); 2. intensiver Art sind die gröfsere oder geringere **Lichtstärke** (wobei die Ausdrücke **„hell“** und **„dunkel“** teils quali-

tative, teils intensive Merkmale bezeichnen). Hierzu kommen 3. die **räumlichen** Merkmale des Gesehenen; die Richtung „vom Auge weg“ heifst **Tiefendimension**, alle zu dieser Richtung normalen Richtungen fallen in die **Flächendimensionen.**

Entsprechend der für die Physik sich empfehlenden Aufeinanderfolge von „geometrischer Optik“ (S. 323 ff.) und „Farbenlehre“ (S. 357 ff.), sei hier nun zuerst der „**Raum**sinn des Auges“ besprochen. — Man bezeichnet den Inbegriff aller durch den Gesichtssinn wahrnehmbaren Raumbestimmungen als Gesichtsraum, dies auch namentlich im Unterschied vom Tastraum. Diese beiden Sinne sind allen übrigen in ihren Leistungen als Raumsinne weit überlegen. — Ob der Gesichtssinn seine Raumauffassung erst dem Tastsinn sozusagen ablernt, oder ob die Entwickelung unserer Raumvorstellungen in der umgekehrten zeitlichen Ordnung erfolgt, oder ob endlich beiderlei Sinne gleich ursprüngliche Raumempfindungen haben, ist eine seit langem verhandelte psychologische Streitfrage; die Entscheidung neigt sich gegenwärtig immer mehr der dritten Theorie zu, so dafs auch im folgenden öfter von **Raumempfindungen**, speziell auch solchen des Gesichtssinnes, gesprochen werden darf.

B. Indem der Augapfel physikalisch wie eine Sammellinse zum Auffangen der physikalischen Bilder nach dem ersten und zweiten Linsenfall wirkt, lassen sich auch umgekehrt die physikalischen Teilbedingungen für ein räumlich scharfes Sehen auf die Bedingung für das Zustandekommen scharfer Netzhautbilder zurückführen. — Ihnen entsprechen namentlich auch alle physikalischen Einzelheiten der Akkommodation.

C. Von einer leblosen Linse und Dunkelkammer unterscheidet sich aber das lebendige Auge nicht nur α) dadurch, dafs die Netzhaut (im Gegensatze zu der nur im übertragenen Sinne „lichtempfindlichen“ Platte im photographischen Apparat) dank ihrer Verbindung mit den Verzweigungen des Sehnerven Lichtempfindungen auslöst; sondern auch β) durch die Art, wie der Augapfel auf Lichtreize schon reflektorisch und dann auch mit grofser Feinheit willkürlich die passendsten Einstellungsbewegungen vornimmt (unter anderem auch bei der Akkommodation); endlich auch γ) durch die Art, wie das Doppelauge zu nicht blofs flächenhaften, sondern zu plastischen (auch nach der Tiefendimension Unterschiede aufweisenden „stereoskopischen“) Eindrücken gelangt.

Zu α). Wenn uns auch die physikalische und physiologische Optik lehrt, dafs im Vergleich zum gesehenen Gegenstande das Netzhautbildchen verkehrt (verkleinert und flächenhaft gekrümmt) ist, so darf uns dies doch nicht zur an sich unberechtigten Frage verleiten, wie es komme, dafs wir die Gegenstände aufrecht und nicht verkehrt sehen. Diese Frage ist unberechtigt, weil sie schon eine gewisse unrichtige Vormeinung einschliefst, nämlich die, dafs wir uns zuerst des Netzhautbildchens als solchen bewufst seien und erst aus diesem Netzhautbildchen die äufseren Gegenstände „konstruieren“, „projizieren“, „erschliefsen“ u. dgl. m. Niemand aber, wenn er auch noch so gut sieht, aber nicht

von anderen gehört hat, dafs er ein Netzhautbild hat, weifs auch nur das Geringste von diesem (es ist dies ebenso, wie wir den Zucker als etwas Süfses schmecken, ohne etwas von den chemischen Vorgängen in den Geschmackwärzchen zu spüren u. dergl. m.). — Eben hiermit aber tritt allerdings die andere, viel allgemeinere Frage auf, warum wir überhaupt, wenn sich unsere Sinnesorgane in bestimmten physiologischen Reizungszuständen befinden, bestimmte Empfindungen, u. a. auch Raumempfindungen und unter diesen wieder solche von Raumorten aufserhalb der Raumorte unseres eigenen Leibes haben. Diese Frage ist nun zwar nicht unberechtigt, aber die Anwort auf die Frage kann nur lauten, dafs es sich hier um letzte Tatsachen handelt, und dafs es aller Voraussicht nach ebensowenig je gelingen wird zu „erklären“, warum wir z. B. mit beiden Augen, einen Lichtpunkt in 1 m Abstand von uns fixierend, diesen Punkt als in 1 m Abstand von uns befindlich erblicken, wie es ja auch wohl schwerlich jemals einzusehen sein wird, warum unser Ohr bei der Reizung durch 435 Schwingungen uns die Empfindung des Tones a^1 und nicht die eines anderen Tones oder gar die einer Farbe oder eines Geschmackes vermittelt. Es ist also z. B. beim Anblick der Spitze *A* einer Kerzenflamme (Fig. 349, S. 327) nicht weiter zu erklären, dafs und warum wir in *A* den leuchtenden Gegenstand erblicken (denn wie sollten wir auch aus den durch die Hornhaut eingedrungenen, dann wiederholt gebrochenen Lichtstrahlen „zurückschliefsen“ können auf den Verlauf, den sie aufserhalb des Auges von *A* her genommen hatten!). Wohl aber wird, wenn das Sehen von Gegenstandspunkten einmal als Tatsache hingenommen und zugegeben ist, das Sehen von Bildpunkten (*B* in Fig. 350 und 351, S. 327) verständlich, weil jetzt die Vorgänge im Auge und daher auch die Empfindungen ganz dieselben sind, wie wenn der Bildpunkt ein wirklich leuchtender Punkt wäre.

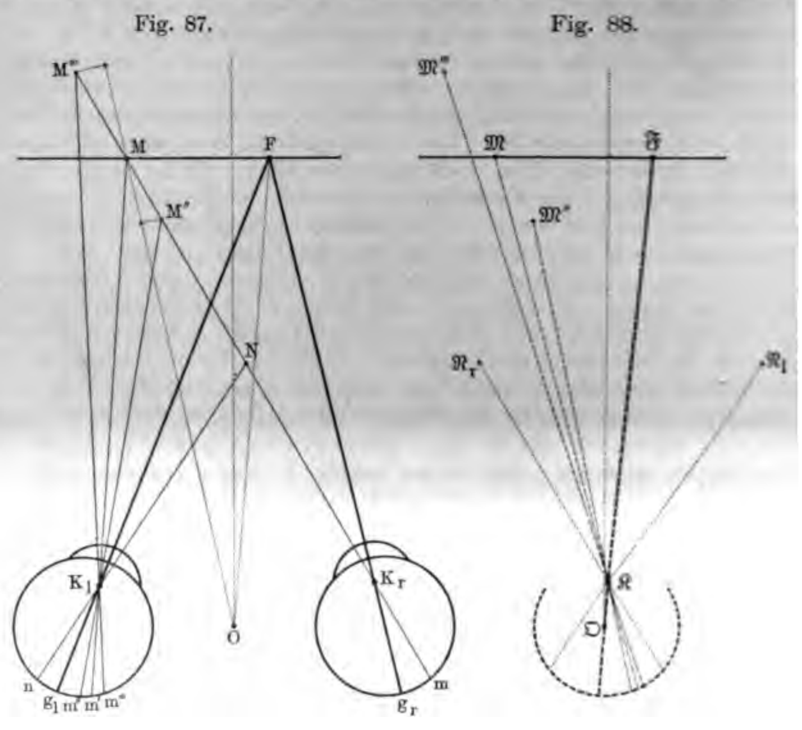
Zu β). Wenn wir uns in einem lichtlosen Raume befinden, und es blitzt seitlich von der Richtung, nach der wir zufällig die Augen gewendet halten, ein Lichtreiz auf, so wenden wir unwillkürlich das Auge dem Licht zu (dieser Bewegungsreiz ist kein unwiderstehlicher, aber immerhin ebenso lebhaft wie z. B. der, uns dort zu kratzen, wo es juckt). Dieser Trieb zur orientierenden Einstellung des Auges ist erst dann befriedigt und das Auge hält nunmehr unwillkürlich still, wenn die vom Lichtpunkt *A* durch den Kreuzungspunkt *K* gezogene Gerade in ihrer Verlängerung die lichtempfindlichste Stelle *g* der Netzhaut (die Netzhautgrube im gelben Fleck) trifft. Man sagt dann, das Auge fixiere den Punkt *A*. — Fig. 87 (a. f. S.). — Anteil der Aufmerksamkeit beim Fixieren.

Zu γ). **Stereoskopischsehen.** *Versuch*: Halten wir die rechte Hand flach ausgestreckt in die Median- (Symmetrie-) Ebene des Kopfes so, dafs der Daumen dem Gesichte zugekehrt ist, so erblickt das rechte Auge den Handrücken, das linke Auge die Innenfläche der Hand. Es müssen also die beiden Netzhautbilder voneinander sehr verschieden sein. Nichtsdestoweniger pflegt man beim kunstlosen Sehen der Verschiedenheit der beiden Eindrücke sich wenig oder gar nicht bewufst zu sein, sondern man sieht die Hand als ein, u. zw. als ein räumliches Gebilde in bestimmtem Abstand vom Auge.

Man könnte meinen, dafs hier das Bewufstsein des Abstandes, in dem sich die Hand vom Auge befindet, durch Tastraumempfindung des ausgestreckten Armes vermittelt werde. Bekanntlich vollzieht sich aber das räumliche Sehen nicht wesentlich anders auch dann, wenn ein lebloser Gegenstand, z. B. ein aus-

gestopfter Handschuh, an jener Stelle des Sehraumes sich befindet. — Die näh[illegible] psychologische und physiologische Analyse des Vorganges beim räumlichen Se[illegible] (die hier nicht in allen Einzelheiten verfolgt werden soll) ergibt folgendes:

Wenn ein Punkt F (der in Fig. 87 etwas rechts von der Medianebene [illegible] Kopfes angenommen ist) von beiden Augen fixiert ist, so dafs sein Bild auf [illegible] Netzhautgruben g_r des rechten und g_l des linken Auges fallen, so werden d[illegible] einen z. B. links von F gelegenen Punkt M die Netzhautpunkte m und m' gere[illegible] und zwar heifsen diese Punkte m und m' die **korrespondierenden Netzpunkte** den Punkt M, der in der durch F bestimmten **Kernfläche des Sehraumes** ([illegible]



Das Doppelauge (Fig. 87) sieht die Lichtpunkte F, M, M'', M''' als **einfache** Punk[illegible] 𝔉, 𝔐, 𝔐'', 𝔐''' im Sehraum des „imaginären Einauges" (Zyklopenauges, Fig. 88).

nach Hering die zur Frontalebene parallele Ebene) gelegen war. Das psych[illegible] logische Ergebnis einer solchen gleichzeitigen Reizung von m und m' ist da[illegible] dafs wir im Sehraum einen Punkt 𝔐 (Fig. 88) erblicken, u. zw. **einfach**, trotzde[illegible] wir mit zwei Augen sehen (**binokulares Einfachsehen**). Durch Lichtpunk[illegible] M'' und M''' werden bei fortdauernder Fixierung des Punktes F zu einem Pun[illegible] m die **nicht mehr korrespondierenden Punkte** m'' und m''' **gereizt**; dem e[illegible] spricht dann das Sehen der Sehpunkte 𝔐'' und 𝔐''' **vor** bzw. **hinter** der Ker[illegible] fläche des Sehraumes (**binokulares Tiefensehen**). — Ein allzuweit vor (od[illegible] hinter) der Kernfläche gelegener Punkt N erzeugt **binokulares Doppelsehe[illegible]**

Die Bedingungen des Plastischsehens wurden künstlich nachgeahmt dur[illegible] Wheatstones **Spiegelstereoskop** (Figg. 89, 90) und Brewsters **Linsenstereo[illegible]**

Fig. 89.

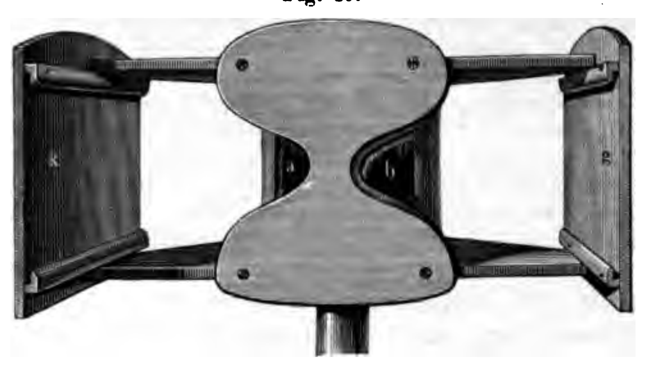
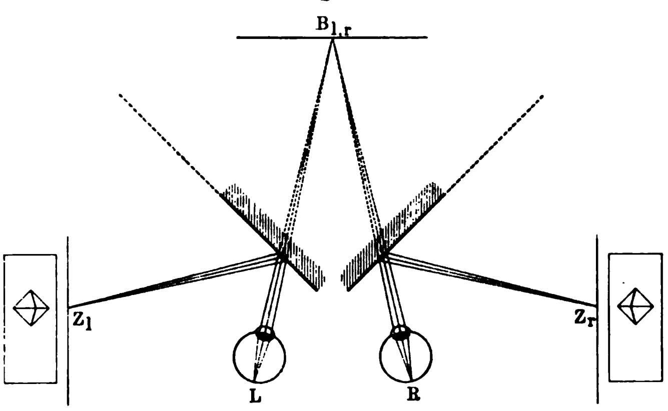


Fig. 90.



n den Zeichnungen Z_l und Z_r erzeugen die unter 45° gegen die Medianebene geneigten Planspiegel die in $B_{l,r}$ zusammenfallenden Bilder.

Fig. 91.

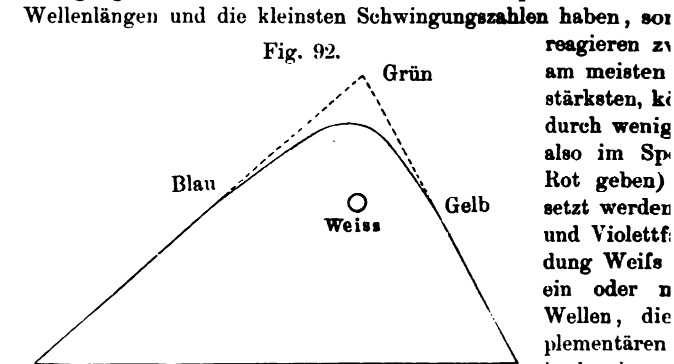


zu unterscheiden sind, so zeigt sich die Zeichnung plastisch.

Aus der psychologischen und physiolog lehre. — Auch darin unterscheidet sich die Netzh wöhnlichen photographischen Platte, dafs ihre Rei Farbenempfindungen auslöst. Die Zuordnung d Reize zu den Qualitäten der Empfindungen ist aber bei weitem weniger einfach als beim Klangsinn. I sachliche Grund dafür, dafs bis in die Gegenwar weichende physiologische Theorien des Farbensinn bestehen. Im folgenden werden kurz die Grundged HELMHOLTZschen und HERINGschen Farbentheorie m

THOMAS YOUNG nimmt dreierlei Arten von Nervenfasern je eine für die Empfindung des Rot, des Grün, des Violett. die Rotfasern nicht etwa nur auf die Erregung solcher Lichtst Zerlegung im Prisma in die roten Teile des Spektrums fall Wellenlängen und die kleinsten Schwingungszahlen haben, so

Fig. 92.



reagieren z am meisten stärksten, k durch wenig also im Sp Rot geben) setzt werden und Violettf dung Weifs ein oder n Wellen, die plementären

dem ein solches Verhältnis der Sektoren für je zwei gegebene Farben gesucht .rd, dafs bei hinreichend rascher Drehung des Kreisels der Gesamteindruck eifs (oder vielmehr der eines Grau, das aber weder etwas von dem einen, noch m anderen Farbenton zeigt), auf das Auge hervorgebracht wird.

HERINGS Farbentheorie lehrt in ihrem physiologischen Teile, dafs e „Sehsubstanz" in dreifach verschiedener Weise chemischer Ver- ıderungen fähig ist (oder dafs es drei Sehsubstanzen gibt), die nach ›n dabei auftretenden Empfindungen als Weifs-Schwarz-, Rot-Grün- ıd als Blau-Gelb-Prozefs bezeichnet werden, und deren jeder als ıabhängig von den beiden anderen gedacht wird.

Nach HERING kommt z. B. die Bezeichnung als reinstes Gelb („Urgelb", Fig. 93) rjenigen Farbe zu, die erregt wird durch Strahlen von $\lambda = 0{,}000\,577$ mm; ; kommt im Spektrum nahe der Fraunhoferschen Linie D (gegen E hin) zu gen. Dagegen sehen wir z. B. nächst der Linie C Gelbrot, nächst E Gelbgrün. ejenigen einfachen Lichtwellen, welche im Prismen- (bzw. Beugungs-) Spektrum die Stellen nächst C bzw. E fallen, erregen also jedesmal schon zweierlei hsubstanzen. bzw. Empfindungen. Auch in der Empfindung des Rot nächst r Linie A ist noch ein Zusatz von Gelb zu bemerken. Umgekehrt findet sich

Fig. 93.

weiß
blau gelb
H_1 H G F b E D C B a A
Violett urblau urgrün urgelb Rot
rot rot
weiß

ieder ein Anteil von Rot in allen violetten Farbentönen jenseits des „Urblau". ; schliefsen sich also nach HERING nur Gelb und Blau einerseits, Rot und Grün ıdererseits aus. Dagegen wird Weifs durch Strahlen aller Wellenlängen mit- ·regt; d. h. keine Spektralfarbe darf als im psychologischen Sinne völlig ge- .ttigt gelten. — Zur weiteren Erklärung dieser Verhältnisse nimmt die Theorie ı, dafs, wenn z. B. die Weifs-Schwarz-Substanz von einem physikalischen Licht- iz getroffen wird, in ihr **„Dissimilierung"**, d. h. eine Zersetzung jener Sub- anz (ähnlich wie bei einer vom Licht getroffenen photographischen Platte) ein- itt, worauf dann jene Nervensubstanz mit der positiven Empfindung Weifs agiert. Aber auch wenn jeder physikalische Reiz aufhört, so dafs der physi- ılische Nullzustand völliger Finsternis herrscht, reagiert dennoch die Weifs- :hwarz-Substanz mit der positiven Empfindung des Schwarz, indem jetzt ırch die physiologischen Ernährungsvorgänge in der Sehsubstanz (also höchst ahrscheinlich durch die infolge der Blutdurchströmung eintretenden chemischen msätze) eine Wiederherstellung **(Assimilierung)** der Substanz sich vollzieht hnlich, wie wenn eine gebrauchte photographische Platte von der verbrauchten romsilbergelatineschicht befreit und mit neuer belegt wird). — Diese physio-



grauen Grunde einen grünen Fleck von der Gestalt

Ein positives Nachbild folgt jedem Lichteindruck, d
kurz, dafs es nicht bemerkt wird. — Wird z. B. eine glühe
Kreise geschwungen, so kann man bekanntlich den Weg der
zeren oder längeren Kreisbogen oder bei hinreichender Rasc
auch als geschlossene Kreislinie sehen, worauf sich auch ein
stimmung der Dauer solcher Nachwirkungen gründet. — Anwe
den positiven Nachbildern **Stroboskop** und **Kinematograph.**

Den simultanen Kontrast zeigt besonders auffällig
Auf einem Bogen grellfarbigen, z. B. roten Papiers wird ei
Papiers (besser ein Ring von etwa 2 cm innerem und 3 cm äufs
und über das Ganze ein Bogen weifsen, durchscheinenden Seid
Das graue Papier erscheint dann grünlich. — Beobachtungen
farbige Schatten.

Die spezifischen Sinnesenergien des Sehnervenaj
THOMAS YOUNGS Hypothese (s. o.) von den dreierlei Sehnerver
je eine zwar auf je eine Art von Wellen am stärksten (z. B.
auf langwellige), aber doch zum Teil noch auf andere Reize
spezielles Beispiel zu dem sehr allgemeinen Gesetze von JOHAN
von den **spezifischen Energien der Nervensubstanz.** N
reagiert jede Art von Nerven (die drei Hauptgattungen: moto
Muskelkontraktion, sekretorische für Drüsenabsonderung,
Empfindungen; unter diesen wieder für verschiedene Sinne Se
nerven u. s. f.; und innerhalb dieser wieder Nerven für die bes
innerhalb je eines Sinnes, z. B. die verschiedenen Farbentöne
nicht auf was immer für äufsere Einwirkungen; wenn aber
der Sehnerv) auf irgend einen physikalischen oder chemischen I
Lichtstrahlen, elektrischer Schlag, Zerrung oder Durchschneidu
Kochsalzlösung, Berührung mit einem heifsen Draht) überhaup
schieht es nur mit einer Art von Empfindung (im Beispiel des
nur mit Lichtempfindung, u. zw. so, dafs kein anderer als

Lichtempfindungen, in der Leibeshaut Wärmeempfindungen errege. Die Gründe, die um die Mitte des XIX. Jahrhunderts zur endgültigen Entscheidung der Frage in dem letzteren Sinne führten, sind namentlich folgende (nach HELMHOLTZ):

1. Innerhalb eines gegebenen Strahles sind das Leuchtende und das Wärmende schlechterdings nicht voneinander zu trennen, wie sich bei sorgfältigsten physikalischen Untersuchungen zeigte. 2. Man kann nicht die Leuchtkraft eines Strahles schwächen, ohne gleichzeitig und in demselben Verhältnis auch seine wärmende und seine chemische Wirkung zu verringern.

Dies ist völlig begreiflich, wenn man als physikalischen Vorgang nicht schon das Leuchten und das Wärmen selbst, sondern nur die schwingende Bewegung (sei es mechanische, sei es elektromagnetische Schwingung) innerhalb des Strahles auffaſst. Denn dann (und nur dann) muſs jeder Vorgang, der die schwingende Bewegung des Äthers aufhebt, auch alle Wirkungen der schwingenden Bewegung schwächen und aufheben, das Leuchten, das Wärmen, die chemische Wirkung, die Erregung der Fluoreszenz usw.

§ 45. Analogien zwischen physikalischen und psychischen Erscheinungen. Grenzen zwischen Physik und Philosophie.

Die psychologische Forschung hat gelehrt, daſs die meisten psychologischen Namen (z. B. vorstellen, begreifen . . .) zuerst von physischen Vorgängen auf psychische übertragen worden sind. Ein Beispiel von der umgekehrten Übertragung gab (Anh. Nr. 40) der Ausdruck „Empfindlichkeit". — Über diese bloſsen Beziehungen der Namengebung hinaus gehen aber die zahlreichen sachlichen Analogien zwischen physischen und psychischen Vorgängen, die man von altersher zu finden geglaubt oder wirklich gefunden hat. So hat schon EMPEDOKLES Freundschaft (φιλία) und Zwist (νεῖκος) als verbindende und trennende („anziehende" und „abstoſsende") Kräfte in der Natur und wieder SCHOPENHAUER einen „Willen in der Natur" gelehrt.

Auf die Prüfung solcher ganz allgemeiner Gedanken soll hier nicht eingegangen werden. Wohl aber mag ein sehr spezielles Beispiel, das des *horror vacui*, die Gründe zum Bewuſstsein bringen, warum sich die physikalische Betrachtung als solche von allen Annahmen psychischer Kräfte unabhängig machen muſs, so zwar, daſs sie über ihre Zulässigkeit auſserhalb einer physikalischen Betrachtung als solcher weder etwas im positiven noch negativen Sinn zu behaupten braucht:

Solange das Aufsteigen des Wassers in einem Pumpenkolben aus einem „*horror vacui*" zu erklären versucht wurde, war diese Erklärungsweise physikalisch völlig wertlos: 1. weil die Hypothese, es finde neben dem physischen Vorgange des Emporsteigens auch der psychische Zustand eines solchen *horror* statt, physikalisch weder verifiziert noch exkludiert werden konnte; 2. weil diese Hypothese von vornherein unfähig war, zu einer Abänderung der Erscheinung Anregungen zu geben, die auf neue physische Tatsachen geführt hätten; und zwar war 3. insbesondere weder für die quantitative Beschreibung noch Erklärung der vorliegenden Tatsachen etwas gewonnen. — Im Vergleich hierzu war schon die bloße Beobachtung der Pumpenmacher, daſs das Wasser dem Kolben nicht höher als 10 m folge, eine wertvolle

Erweiterung der Erfahrung. Und wiewohl die Erklärung aus einer „Kraft des Vakuums“, die GALILEI an Stelle des *horror vacui* setzte, von uns heute für mindestens ebenso unrichtig wie jene erkannt ist (denn das „Nichts“ kann jedenfalls noch weniger wirken als eine psychische Kraft des „Abscheues“), so bildete doch die Voraussicht GALILEIS, dafs infolge der gleichen Kraft eine Quecksilbersäule nur bis zu einer 13,6mal so kleinen Höhe im Pumpenrohre emporsteigen werde, einen naturwissenschaftlich wertvollen Gedanken, da er quantitativ bestimmt und der Verifikation fähig war. — Die weiteren Schritte, die dann TORRICELLI durch die wirkliche Anstellung des Versuches und PASCAL durch seine Erklärung aus dem Luftdruck nach Analogie kommunizierender Gefäfse mit verschiedenen Flüssigkeiten getan haben, waren von der Frage, ob neben den physischen Wirkungen des Luftdruckes sich auch irgend welche psychischen Zustände abspielen oder nicht, völlig unabhängig.

Offenbar kann aber aus den Erscheinungen an zusammengeprefsten Gasen, emporschiefsenden Flüssigkeitssäulen u. dgl. der Physiker auch niemals auf Grund der von ihm in Betracht gezogenen Wahrnehmungselemente zu einer bejahenden oder verneinenden Entscheidung darüber kommen, ob es etwa dem geprefsten Körper unangenehm, dem emporschiefsenden wohl zumute ist. Und daher ist auch sogar die methodologische Frage, ob eine mit den psychischen Erscheinungen sich beschäftigende Wissenschaft, nämlich die unser Weltbild durch die Mitberücksichtigung des Psychischen ergänzende Philosophie, zu irgend welchen Wahrscheinlichkeiten für oder gegen jene physiopsychischen Hypothesen gelangen könne, in keiner Weise mehr Sache des Physikers.

Es wird Sache einer künftigen Entwickelung exakt physikalischer und exakt philosophischer Weltbetrachtung sein, namentlich diejenigen Analogien unter gleichmäßiger Handhabung physikalischer, biologischer, psychologischer und metaphysischer Methoden auf ihre Sachlichkeit (nicht nur Namensgleichheit) zu überprüfen, auf die uns Begriffe wie der der **Arbeit** hinweisen. Denn dieser Begriff hat seinen Ursprung längst in vorwissenschaftlichen Zeiten auf dem psychologischen Gebiete genommen (*arebeit* = Mühsal) und hat sich erst viel später auch in den physischen Wissenschaften von umfassendster Anwendbarkeit erwiesen.

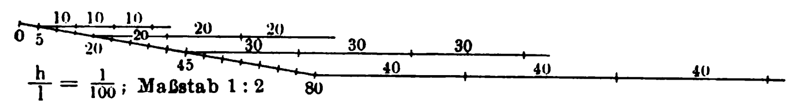
Für das Verhältnis von Namen und Begriffen ist hierbei auch insbesondere lehrreich, dafs GALILEI, HUYGENS, LEIBNIZ sich des Begriffes „Produkt aus Kraft und Weg“ längst mit Erfolg bedient hatten, ehe die Mechaniker PONCELET (1826) und CORIOLIS (1829) für diesen Begriff den Namen „Arbeit“ mit richtigem Sprachgefühl der Verkehrssprache entnahmen; und dafs später wieder durch ROBERT MAYERS Entdeckung des Gesetzes der Erhaltung der „Kraft“ (im Sinne von „Energie“ = Fähigkeit, Arbeit zu leisten) jener Begriff von dem blofs mechanischen auf alle übrigen physischen Gebiete erweitert werden konnte. Zu einer analogen systematischen Ausdehnung auf das Gebiet der psychischen Tatsachen durch die Begriffe „psychische Arbeit“ und „psychische Energie“ besitzen wir gegenwärtig erst Anfänge.

Leitaufgaben.

I. Gleichförmige und beschleunigte Bewegungen.

1. Ein Wagen gehe, nachdem er sich 1, 2, 3, 4 . . . sec lang an einer schiefen Ebene von der Neigung $^1/_{100}$ bewegt hat, auf eine wagrechte Ebene über. Welche Wegstrecken legt er auf dieser binnen 1, 2, 3, 4 . . . sec zurück? (Der Anfangsweg beim freien Falle werde $a \doteq 500$ cm angenommen; von Reibung und Luftwiderstand, sowie vom Stofse beim Knie beider Ebenen werde abgesehen.) §§ 2, 3, 6.

Fig. 94.



Anleitung: Auf Grund der Gesetze $s = at^2$ (§ 2) und $s = a't$ (§ 2, hierzu $a' = 2a$, § 6) übersichtlich dargestellt in Fig. 94, wo aber die Neigung viel stärker als $^1/_{100}$ ist. Eine entsprechende Zeichnung anzufertigen für die Neigung $^2/_{100}$.

2. Man forme aus folgenden Zahlenangaben von durchschnittlichen Geschwindigkeiten numerische Aufgaben zu den allgemeinen Formeln $c = \frac{s}{t}$, $s = ct$, $t = \frac{s}{c}$: § 4.

		Centimeter per Sekunde, cm sec^{-1} (kurz: Cel)
Soldat im Marsch (120 Schritte à 65 cm in 1 Minute)	1,3 m sec^{-1} =	130
Pferd im Galopp 18 km h^{-1}	5 m sec^{-1} =	500
Ozean-Passagier-Dampfer	10 m sec^{-1} =	1000
Fahrrad (Maximalgeschwindigkeit)	15 m sec^{-1} =	1500
Eisenbahnzug (gesetzliches Maximum: 90 km h^{-1}) . .	25 m sec^{-1} =	2500
Schwalbe im Fluge	58 m sec^{-1} =	5800
Geschofs des Infanterie-Gewehres	620 m sec^{-1} =	62000
Gröfste Geschwindigkeit von Geschossen	1 km sec^{-1} =	10^5
Schall in Luft	333 m sec^{-1} =	33300
Licht 40000 Meilen per sec = 300000 km sec^{-1} = .	3.10^8 m sec^{-1} =	3.10^{10}
Wasserstoffausbrüche (Protuberanzen) auf der Sonne	100 km sec^{-1} =	10^7
Irdische Orkane 50 (bis 65) m sec^{-1}	50 m sec^{-1} =	5000
Sternschnuppe (im Mittel) 45 km sec^{-1}	45000 m sec^{-1} =	$4,5.10^6$
Erde in ihrer Bahn 4 Meilen per sec = 30 km sec^{-1} . .	30000 m sec^{-1} =	3.10^6
Gröfste Eigengeschwindigkeit eines Fixsternes (1830 Groombridge im grofsen Bären) mindestens	240 km sec^{-1} =	$2,4.10^7$

Z. B. Eine Schwalbe brauchte zu den 255 km von Compiègne bis Ant… $1^h\,13^{min}$; daher ist ihre Geschwindigkeit 58 m sec^{-1}. — Sie würde dann zu … Wanderflug von 50° bis 30° geogr. Breite (ein Breitengrad = 15 geogr. … = 111 km) nur etwa 10 Stunden, d. h. kaum eine Nacht brauchen.

§ 2. **3.** Welche Fallstrecken entsprechen im freien Falle und an sc… Ebenen bei Neigungen von $^9/_{10}$, $^8/_{10}$, $^7/_{10}$ . . . $^3/_{10}$, $^2/_{10}$, $^1/_{10}$, 0 den … zeiten 0,1, 0,2 . . . 0,01, 0,02 . . . sec? Man stelle diese Fallstr… durch nebeneinander gestellte Gerade (wie am Wurfapparate Fi… S. 20) dar und erkläre, warum die die unteren Endpunkte v… dende Kurve eine nach unten konkave ist.

Bemerkung: Sind insbesondere die Fallzeiten „klein erster Ordnun… werden die Fallstrecken (wegen des Vorkommens von t^2) „klein zweiter Ord…

§ 4. **4.** Wie grofs ist die mittlere Geschwindigkeit eines … fallenden Körpers während der ersten, zweiten, dritten, vierten … Hundertstel-, Tausendstelsekunde nach Beginn der Bewegung?

Anleitung: Ist z. B. $t = 0{,}003$, $t' = 0{,}004$, so ist $v_m = 5 \,.\, (0{,}003 + 0{,}004)$ m … = 3,5 cm sec^{-1}.

§§ 4, 5, 11. **5.** Aus dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at^2 + Ct + S$ zu bere… v und w.

$$v_m = \frac{at'^2 + Ct' + S - (at^2 + Ct + S)}{t' - t} = \frac{a(t'^2 - t^2) + C(t' - \ldots}{t' - t}$$

$$= a(t' + t) + C; \qquad \text{daher } \boldsymbol{v = 2at + C}$$

$$w_m = \frac{2at' + C - (2at + C)}{t' - t} = \frac{2a(t' - t)}{t' - t}; \text{ daher } \boldsymbol{w = 2a}.$$

Es stellt daher auch obiges Weg-Zeit-Gesetz (wie $s = at^2$) noch eine gl… mäßig beschleunigte Bewegung dar, nur hat zur Zeit $t = 0$ der si… wegende Punkt vom Nullpunkt der Weg-Zählung schon den Abstand S. … welcher Zeit hat er die Geschwindigkeit C? — Verwirklicht bei vertikal a… (und aufwärts) geworfenen Körpern.

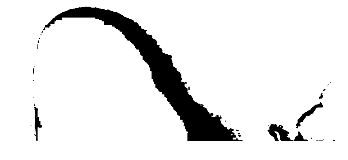
§§ 4, 5. **6.** Aus dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at^3$ zu berechnen v u…

$$v_m = \frac{a\,t'^3 - a\,t^3}{t' - t} = a\,(t'^2 + t't + t^2); \text{ daher } v = 3\,a\,t^2;$$

$$w_m = \frac{3\,a\,t'^2 - 3\,a\,t^2}{t' - t} = 3\,a\,(t' + t); \qquad \text{daher } w = 6\,a\,t.$$

Hier ist also auch die Beschleunigung noch von t abhängig und wächst w beständig mit wachsendem t. Ebenso ist es für $s = at^4$, $s = at^5$ … Müfsten Schienenbahnen diesen Weg-Zeit-Gesetzen entsprechend nach oben k… oder konkav sein? Vergleichung mit Fig. 4 (S. 9).

§ 6. **7.** Die zwei Gleichungen $s = \frac{b}{2}t^2$ und $v = bt$ enthalten … Gröfsen t, b, v, s, von denen daher je zwei gegeben sein müssen, d…



ie zwei anderen berechnet werden können. Die so entsprechenden wölf Aufgaben zu bilden und zu lösen! Man ersinne zu jeder ieser Formeln konkrete Anwendungen.

egeben:	t, b	t, v	t, s	b, v	b, s	v, s
efunden:	$v = b\,t$	$b = \frac{v}{t}$	$b = \frac{2s}{t^2}$	$t = \frac{v}{b}$	$t = \sqrt{\frac{2s}{b}}$	$t = \frac{2s}{v}$
	$s = \frac{b}{2}t^2$	$s = \frac{vt}{2}$	$v = \frac{2s}{t}$	$s = \frac{v^2}{2b}$	$v = \sqrt{2bs}$	$b = \frac{v^2}{2s}$

Z. B. Zu $v = \sqrt{2bs}$: Ein Tourist sei über eine 500 m hohe Wand abgeürzt. Angenommen, der Sturz sei im freien Fall erfolgt und es werde mit dem ınden Wert der Fallbeschleunigung g gerechnet, so sind gegeben $s = 500$ m, $= g = 10$ m sec^{-2}, somit $v = \sqrt{2 . 10 . 500} = 100$ m sec^{-1}. — Ebenso $t = 10$ sec.

8. Galileis Satz vom **Sehnenfall** zu beweisen. § 6.

Ableitung: Von demselben Punkte a (Fig. 95) beginnen gleichzeitig zwei ınkte längs einer Vertikalen $a\,c$ und einer beliebig schiefen Geraden zu fallen. ie Fallstrecken s und s_1 sind gegeben durch $s = \frac{g}{2}t^2$ und $s_1 = \frac{g_1}{2}t^2 = s . \sin \varepsilon$;arum?). Es ist also die Sehne des Halb·eises vom Durch·esser s, dessen verti·le Ebene durch die ›rgezeichnete vertikale ıd schiefe Gerade beimmt ist. (*Versuch* am 'urfapparat Fig. 17, S. 20, ı dem eine Kugel frei llt und eine andere in ıer geneigten Röhre llt.)

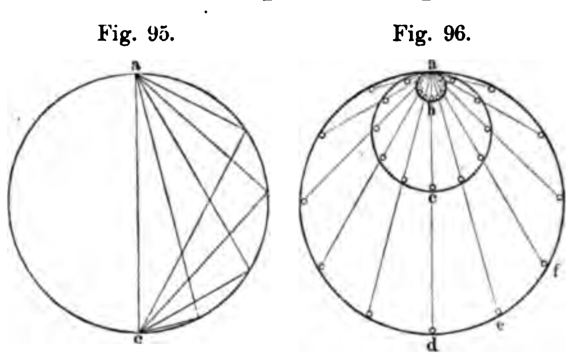


Fig. 95. Fig. 96.

Zu zeigen, dafs Kugeln, die gleichzeitig von a (Fig. 96) ausgehen, in jedem äteren Zeitpunkte in Kreisen angeordnet sind; und dies auch, wenn sie hierbei f einem beliebig schiefen Brette in vorgezeichneten Rinnen rollen (*Versuch*).

9. Aus der Gleichung für die Geschwindigkeit $v = bt$ die Gleichung r den Weg $s = \frac{b}{2}t^2$ nach arithmetischer Methode abzuleiten. — ›rgleichung mit der graphischen Methode Galileis. § 6.

Ableitung: Man denke sich die ganze Zeit von t sec zusammengesetzt aus sehr kleinen, gleichen Zeitteilchen von je τ sec, so dafs $t = n . \tau$. Dann kann : Bewegung als innerhalb je einer solchen Zeitstrecke τ annähernd gleichrmig angenommen werden. Hätte also der sich bewegende Punkt die Geıwindigkeit $g\,\tau$, die er erst am Ende des ersten Zeitteilchens τ hat, schon ıhrend dieses Zeitteilchens gehabt, so hätte er während dieses ersten Zeit-

teilchens den Weg $g\tau.\tau$ zurückgelegt (gemäß der Gl. $s = ct$). Hätte [illegible] Geschwindigkeit $2g\tau$, die er erst am Ende des zweiten Zeitteilchens [illegible] hat, schon während dieses ganzen Teilchens gehabt, so hätte er während [illegible] zweiten Zeitteilchens den Weg $2g\tau.\tau$ zurückgelegt u. s. f. — Daher ist der [illegible] während $n\tau$ zurückgelegte Weg s (*spatium*, hier aber auch *Summe*):

$$s = g\tau\cdot\tau + 2g\tau\cdot\tau + \cdots + ng\tau\cdot\tau = (1 + 2 + \cdots + n)g\tau^2.$$

Hier ist die Summe der arithmetischen Reihe $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(1+n) \neq$ [illegible] da n als sehr grofs angenommen ist; also

$$s \neq \frac{1}{2}n^2.g\tau^2 = \frac{1}{2}g(n\tau)^2 = \frac{1}{2}gt^2. —$$

Während Galilei die angenommene Proportionalität $v = gt$ sogleich [illegible] eine Gerade AM (Fig. 14, S. 17) darstellte, entspricht dem Zerlegen von [illegible] sehr viele τ und dem sprungweisen Anwachsen der Geschwindigkeit von g[illegible] $2g\tau$, $3g\tau\cdots$ eine stufenförmig gebrochene Linie.

Strenger wird der arithmetische Beweis, indem man den wirklichen [illegible] zwischen folgende untere und obere Grenzen einschliefst:

$$0 + g\tau\cdot\tau + 2g\tau\cdot\tau + \cdots + (n-1)g\tau\cdot\tau < s,$$
$$s < g\tau\cdot\tau + 2g\tau\cdot\tau + \cdots + (n-1)g\tau\cdot\tau + ng\tau\cdot\tau,$$

daher
$$\frac{1}{2}g\tau^2\,\frac{n(0+n-1)}{2} < s < \frac{1}{2}g\tau^2\cdot\frac{n(1+n)}{2}.$$

Diese untere und obere Grenze fallen zusammen für $n = \infty$, $\tau = 0$, [illegible] sowohl $n - 1 \neq n$, wie auch $n + 1 \neq n$, also wieder $s = \frac{1}{2}n^2.g\tau^2$ u [illegible]

II. Wurfbewegungen.

§§ 7. 11. **10.** Welche Erhebung s über dem Ausgangspunkte O und w[illegible] Geschwindigkeiten v hat ein **vertikal aufwärts** geworfener K[illegible] nach 1, 2, 3 . . . sec, wenn die Anfangsgeschwindigkeit 30 m s[illegible] 60 m sec^{-1} ist?

Anleitung: Übersichtliche numerische Darstellung für $c = 30$ m sec^{-1}

Wege:

infolge der Trägheit	0	30	60	90	120	150	180	210	240 . . . m
„ „ Schwerkraft	0	5	20	45	80	125	180	245	320 . . . m
	0	25	40	**45**	40	25	**0**	— 35	— 80 . . . m

Geschwindigkeiten:

infolge der Trägheit	30	30	30	30	30	30	30	30	30 . . . m
„ „ Schwerkraft	0	10	20	30	40	50	60	70	80 . . . m
	30	20	10	**0**	— 10	— 20	**— 30**	— 40	— 50 . . . m

Wie verändern sich diese Zahlenreihen, wenn $c = 60$ m sec^{-1}? — [illegible]gleichung mit den allgemeinen Formeln (5), (6), (7), (8) in § 11.

§§ 7, 11. **11.** Mit welcher wagrechten Geschwindigkeit (und von wel[illegible] Höhe) mufs die Kugel aus der Röhre des Wurfapparates kom[illegible] damit sie die in Fig. 17, S. 20, vorgezeichnete Parabel durchläuft

Anleitung: Da das längste Lot 45 cm Senkung darstellt, so folgt aus $= 500\,t^2$, dafs $t = 0,3$ sec. Beträgt der wagrechte Abstand dieses letzten Lotes lm $= 30$ cm, so folgt $c = 30:0,3 = 100$ cm sec^{-1} $= 1$ m sec^{-1}.

Im freien Falle würde diese Geschwindigkeit bei einer Falltiefe von (nur!) cm erlangt. Die gleiche Falltiefe gilt auch unabhängig von der Form der öhre (§ 23 — mit Rücksicht auf die Reibung mufs die Auslösevorrichtung statt cm etwa 8 bis 9 cm über dem unteren Ende der Röhre eingestellt werden). § 6. § 23.

12. Konstruktion und Berechnung der Richtungen und Geschwindig- eiten eines mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 15$ m sec^{-1} wagrecht eworfenen Körpers (Fig. 97, Maßstab 1:2000). §§ 7, 11.

Anleitung: Die ichtungen der Begung sind die Parabelngenten; diese werden n bequemsten konstruiert ich dem Satze, dafs die ibnormale gleich ist dem arameter $p = \frac{c^2}{g}$; also enn $g \neq 10$ m sec^{-2}, ist $p = 22,5$ m, und tsprechend dem Maßabe 1:2000 ist p darstellen durch 11,25 mm. Die Geschwindigeiten ergeben sich aus $= \sqrt{c^2 + v_x^2}$.

Fig. 97.

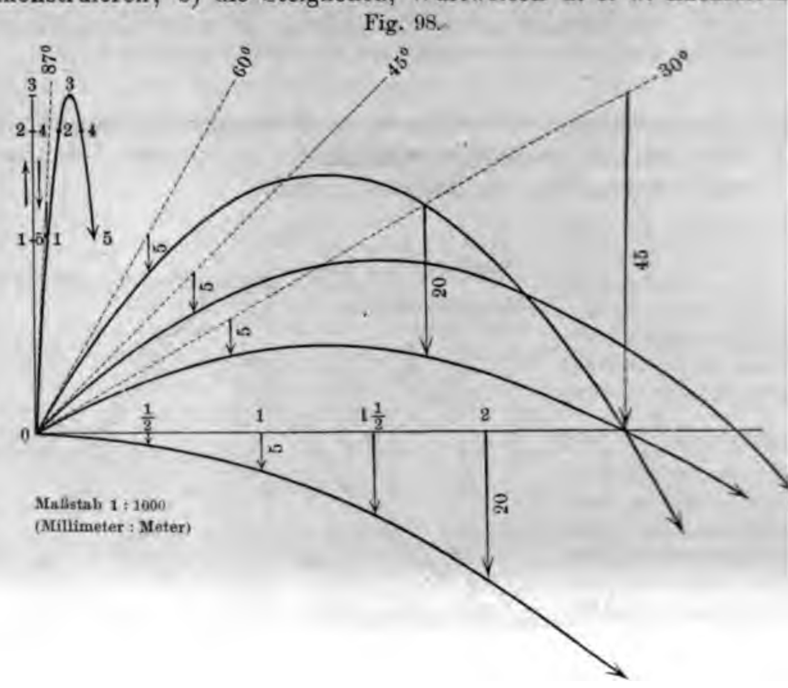
Was würde sich an g. 97 ändern, wenn man e Wurfbahn nach denlben Parallelogrammkon-uktionen wie die Bahn für die Zentralbewegungen nach Fig. 54, S. 74 kon-uieren wollte? (Warum dort das Ersetzen der stetig gekrümmten Bahn rch eine gebrochene nicht zu Widersprüchen führt, vgl. S. 74, Bemerkung.)

13. Zu beweisen: Die Parabel, die ein mit der Anfangsgeschwin- gkeit c cm sec^{-1} horizontal geworfener Körper beschreibt, hat r Leitlinie die Horizontale, die ein mit derselben Anfangsge- hwindigkeit vom selben Ausgangspunkte vertikal geworfener Körper reicht. § 11.

Beweis: Der Parameter der Wurfparabel ist $p = \frac{c^2}{g}\cdot$ In eben diesem stande vom Brennpunkt und daher im Abstande $\frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$ vom Scheitel liegt die itlinie. Die Wurfhöhe beim vertikalen Wurf aufwärts ist aber ebenfalls $\frac{1}{2}\frac{c^2}{g}\cdot$

§§ 7, 11. **14.** Die Fig. 98, welche die verschiedenen Wurflinien je z verschiedenen Elevationswinkeln bei gleicher Anfangsgeschwindig in dem angegebenen Maßstabe darstellt, a) auf Millimeterpapier n zukonstruieren, b) die Steighöhen, Wurfweiten u. s. w. nachzurech

Fig. 98.



§ 7, 11, 42. **15.** Ein Wasserstrahl geht 1 dm oberhalb einer unteren l der Tafel des Wurfapparates (Fig. 17, S. 20) mit solcher Geschwir keit C aus, dafs er den oberen Rand in der Mitte berührt und in anderen unteren Ecke wieder anlangt. Aus der hiermit gegeb Wurfhöhe $h = 8$ dm und der Wurfweite $l = 6$ dm jenen Anfangswe sowie die horizontale Geschwindigkeit c im Scheitel zu berechnen. hoch steigt der Strahl bei gleichem C, wenn die Ausflufsröhre jenem unteren Punkt der Wurfhöhe vertikal gerichtet wird? sammengesetzte Aufgabe über schiefen, horizontalen, vertikalen W

Anleitung: Rechnet man c nach den Formeln für den horizontalen W indem man in $y = 2 \cdot \frac{c^2}{g} \cdot x$ einsetzt: $y = 3$ dm, $x = 8$ dm, so gibt dies Probe für den nach den Gesetzen des schiefen Wurfes berechneten Wert v Probe am Wurfapparat durch Messung der Wurfhöhe beim vertikalen Wurf.

§ 11. **16.** Die Scheitelgleichung der Wurfparabel eines mit der Anfa geschwindigkeit c m sec^{-1} unter dem Elevationswinkel ε^0 schief wärts geworfenen Körpers abzuleiten.



Ableitung: Aus den Gl. (1), (2) für die Wegkomponenten beim schiefen Wurf

$$x = -c\sin\varepsilon\,.\,t + \frac{g}{2}t^2 \cdots (1), \qquad y = c\cos\varepsilon\,.\,t \cdots (2)$$

ergibt Eliminieren von $t = \frac{y}{c\cos\varepsilon}$ die Gl. $x = -y\,tg\,\varepsilon + \frac{g}{2c^2\cos^2\varepsilon}y^2 \cdots (3)$

In Bezug auf ein neues Koordinatensystem mit parallelen Achsen, dessen Anfangspunkt um die ganze Wurfhöhe h höher, um die halbe Wurfweite $\frac{d}{2}$ gegen die positive X-Richtung liegt, nimmt Gl. (3) die Form $y'^2 = 2px'$ an, wenn für die alten Koordinaten x und y eingesetzt wird:

$$x = x' - h = x' - \frac{c^2\sin^2\varepsilon}{2g}, \qquad y = y' + \frac{d}{2} = y' + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}2\sin\varepsilon\cos\varepsilon.$$

Aus (3) wird nach einigen Reduktionen $y'^2 = 2\,\frac{c^2\cos^2\varepsilon}{g}\cdot x' = 2px' \cdots (4)$

Von dieser Parabel fällt also der absteigende Ast zusammen mit der Bahn eines Körpers, der mit der Anfangsgeschwindigkeit $c\cos\varepsilon$ horizontal geworfen wird. In der Tat besitzt ja auch der schief aufwärts geworfene Körper bei erreichter Wurfhöhe nur mehr diese Horizontalgeschwindigkeit $c\cos\varepsilon$.

Nach diesem Gedanken hat GALILEI den schiefen Wurf auf den horizontalen zurückgeführt (vielleicht weil ihm die Verwendung des Trägheitsgesetzes auf wagrecht sich bewegende Körper geläufiger war als für andere Richtungen in Bezug auf die Erde). Dabei hatte GALILEI richtig erkannt, dafs nicht nur der aufsteigende Ast der Parabel dem absteigenden geometrisch kongruent sei, sondern dafs auch die Geschwindigkeiten beim Auf- und Absteigen in gleicher Höhe über dem Ausgangsniveau einander dem absoluten Werte nach gleich (im Grenzfalle des vertikalen Wurfes einander genau entgegengesetzt) seien.

17. Unter welchem Elevationswinkel ε^0 mufs ein Körper von gegebener Anfangsgeschwindigkeit c cm sec^{-1} geworfen (z. B. die Kugel einer Jagdflinte abgeschossen) werden, damit der Körper einen gegebenen Punkt $M(x, y)$ treffe? (Fig. 99, a. f. S.) § 11.

Anleitung: Es ist obige Gl. (3) nach ε aufzulösen. Wird $tg\,\varepsilon = z$ gesetzt, also $\frac{1}{\cos^2\varepsilon} = \sec^2\varepsilon = 1 + tg^2\varepsilon = 1 + z^2$, so liefert die Gleichung

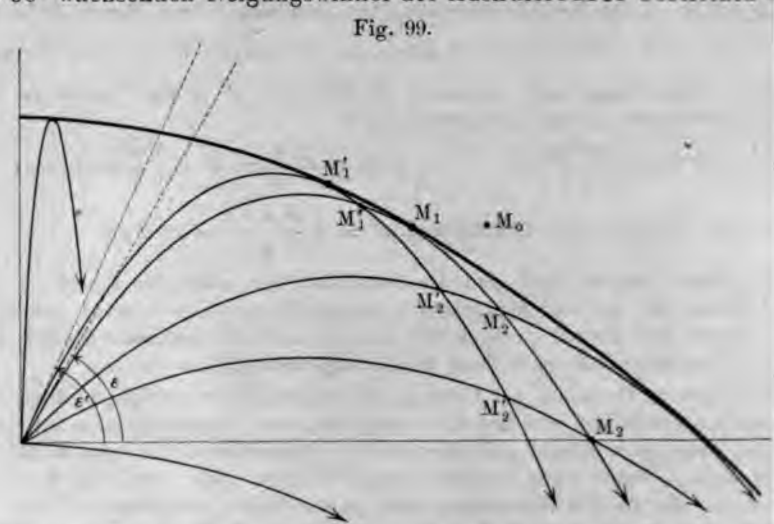
$$x = -y\,.\,tg\,\varepsilon + \frac{g}{2c^2}y^2(1 + tg^2\varepsilon)\ldots(5) \text{ oder } z^2 - 2\frac{c^2}{gy}z = 2\frac{c^2}{gy^2}x - 1\ldots(6)$$

0 oder 1 oder 2 reelle Lösungen für z (und daher auch für ε), je nachdem in (6) die Diskriminante $D = c^4 + 2c^2gx - g^2y^2 \lesseqgtr 0$. Bei gegebenem c und g sind also solche Punkte M_0 (x, y), für die $D < 0$, auf keinerlei Art erreichbar; die Punkte M_1 (Fig. 99) auf einerlei Art [sie bilden selbst wieder eine Parabel, vgl. die folgende LA 18]; die Punkte M_2 (Fig. 99) auf zweierlei Art.

Wird z. B. in (6) für die gröfste erreichbare Wurfweite $y = \frac{c^2}{g}$, $x = 0$ gesetzt, so wird $z^2 - 2z = -1$, also $z_{1,2} = 1$, $tg\,\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 45^0$. — Wieso ist der Satz 7 (§ 11) von den komplementären Elevationswinkeln ein spezieller Fall der Doppelwertigkeit für $D > 0$?

§ 11. **18.** Zu beweisen, dafs alle Parabeln, die derselben Anfa[ngs]geschwindigkeit bei verschiedenen Elevationswinkeln entsprechen, „einhüllende Kurve" (math. Anh. Nr. 27) wieder eine Parabel h[aben] [deren Fläche vom Wasserstrahl (Fig. 17, S. 20) bei einem vo[n 0] bis 90° wachsenden Neigungswinkel des Ausflufsrohres bestrichen w[ird].

Fig. 99.



Erster Beweis: Die Bedingungsgleichung in der vorigen Aufgabe, dafs Punkt mit den Koordinaten x, y von dem geworfenen Körper eben noch (zwar auf einerlei, nicht auf zweierlei Art) erreicht werden kann, stellt se[lbst] schon die Gleichung der gesuchten Parabel dar, nämlich $y^2 = 2\frac{c^2}{g}x + \frac{c^4}{g^2}$. Transformieren wir diese Gleichung auf einen um die Steighöhe beim vertik[alen] Wurf höher gelegenen Anfangspunkt, also für $X = x + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$, so wird $y^2 = 2\frac{c}{g}$ Die gesuchte Parabel ist also der beim horizontalen Wurf kongruent.

Zweiter Beweis: Betrachten wir in der Gleichung (5) der vorigen Auf[gabe] $tg\,\varepsilon = z$ als neue veränderliche Gröfse, so lauten die Wurfparabeln für zwei sehr wenig voneinander verschiedene Elevationswinkel ε und ε', wo $tg\,\varepsilon' = z'$,

$$x = -yz + \frac{g}{2c^2}y^2(1 + z^2) \ldots (5) \quad \text{und} \quad x = -yz' + \frac{g}{2c^2}y^2(1 + z'$$

Die Gleichung der einhüllenden Kurve gewinnen wir, wenn wir x und y Durchschnittspunkte der einander unendlich benachbarten Wurflinien fassen, also die beiden Gleichungen koexistieren lassen. Dann wird

$$0 = -y\,(z' - z) + \frac{g}{2c^2}y^2\,(z'^2 - z^2),$$

und nach Division durch $y\,(z' - z)$ wird $1 = \frac{g}{2c^2}y\,.\,(z' + z)$, woraus sich $z' = z$ ergibt $z = \frac{c^2}{gy}$. Dieser Wert von $z = tg\,\varepsilon$ in (5) eingesetzt gibt

$$x = -\frac{c^2}{g} + \frac{g}{2c^2}y^2\left(1 + \frac{c^4}{g^2}\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{g} + \frac{1}{2}\frac{g}{c^2}y^2, \text{ also } y^2 = 2\frac{c^2}{g}x + \frac{c^4}{g^2} \text{ oder } y^2 = 2$$



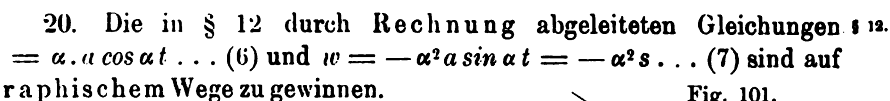
III. Kreisende und schwingende Bewegungen.

19. Eine schwingende Feder sei mit einer ·chreibvorrichtung versehen, die Sinusschwingungen ings einer wagrechten Geraden OY (Fig. 100) beschreibt, solange die Befestigungsstelle der Feder ı Bezug auf das Schreibblatt in Ruhe ist. Was ir eine Kurve wird beschrieben, wenn die Feder rei fällt (so bei NEUMANNS Fallmaschine), oder 'enn das Schreibblatt an der Feder vorüber fällt ›o bei den Fallmaschinen von LIPPICH und BABO)? §§ 2, 12.

Fig. 100.

Ableitung: Aus den Gleichungen $= a \sin \alpha t$ und $x = \frac{g}{2} t^2$ ergibt sich durch Elimination von $= \sqrt{\frac{2x}{g}}$ die Kurvengleichung $y = a \sin\left(\alpha \cdot \sqrt{\frac{2x}{g}}\right)$.

Hier ist vorausgesetzt, dafs in dem Zeitpunkte, da die allbewegung beginnt, die schwingende Feder die Mittelage passiert. — Was ändert sich an der Gleichung der Kurve, wenn sich in jenem eitpunkte die Feder in der Grenzlage befindet? — Welchen Unterschied zeigt iese Kurve gegen die der Fig. 239 (S. 229)?



20. Die in § 12 durch Rechnung abgeleiteten Gleichungen $= \alpha . a \cos \alpha t \ldots (6)$ und $w = -\alpha^2 a \sin \alpha t = -\alpha^2 s \ldots (7)$ sind auf raphischem Wege zu gewinnen. § 12.

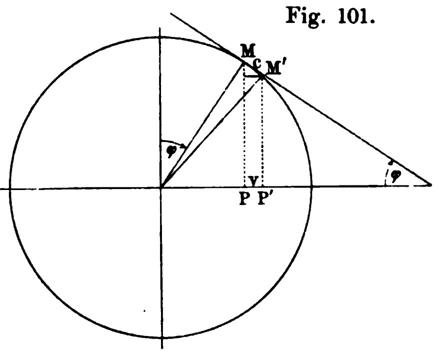


Fig. 101.

Anleitung: Zu Gl. (6): Die Ge-:hwindigkeit v auf dem Wegstückhen PP' (Fig. 101) ist die Projektion er Geschwindigkeit c auf dem Bogen IM'; also $v = c . \cos \varphi \ldots . (6')$.

$$\text{o } c = \frac{2\pi a}{T} = \alpha a, \quad \varphi = \alpha t.$$

Zu Gl. (7) vgl. den Zusammenang mit der Gleichung für die ormalbeschleunigung, LA 31. ünfte Ableitung.

21. Für eine Sinusschwingung von der Amplitude a cm und der ·chwingungsdauer T sec $\left(\text{wo } \frac{2\pi}{T} = \alpha\right)$ die Werte von s, v, w nach $, {}^1/_{12} T, {}^2/_{12} T \ldots {}^{11}/_{12} T, T, {}^{13}/_{12} T \ldots$ in einer Tafel darzustellen. §12.
Foch spezieller z. B. für $a = 10$ cm, $T = 2$ sec., also $\alpha = \frac{2\pi}{2} = 3.14$.

Anleitung: Wegen $\sin \alpha t = \sin \frac{2\pi}{T} t$ gehört z. B. zu $t = \frac{T}{12}$ der be-›ndere Wert $s = a . \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} = a . \sin \frac{\pi}{6} = a . \sin 30^0 = a \cdot \frac{1}{2}$; ferner

$\frac{\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} = \alpha a \,.\, \cos 30^0 = \alpha a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha a \,.\, 0{,}866 \ldots$ u. s. f. — (Vgl. …
ng der Winkel aus dem absoluten Winkelmaß in das Grad…
. 2; über die goniometrischen Funktionen $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{3}$ u. s. f. …
— So ergibt sich folgende Tafel:

	s in cm	v in cm sec^{-1}	w in cm sec^{-2}
0	$0 = 0{,}000\,a$	$\alpha a = 1{,}000\,\alpha a$	$0 = -0{,}000$…
$1\frac{T}{12}$	$+a \cdot \frac{1}{2} = 0{,}500\,a$	$\alpha a \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\,\alpha a$	$-\alpha^2 a \frac{1}{2} = -0{,}500$…
$2\frac{T}{12}$	$+a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\,a$	… $= 0{,}500\,\alpha a$	$-\alpha^2 a \frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}866$…
$3\frac{T}{12}$	$+a = 1{,}000\,a$	… $= 0{,}000\,\alpha a$	$-\alpha^2 a = -1{,}000$…
$4\frac{T}{12}$	$+a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}$…	… $= -0{,}500\,\alpha a$	$-\alpha^2 a \frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}866$…

u. s. f. — Vergleichung m… …ungen der Schattenflecken Fig. 34, S. …

22. Den **Isochronism…** **…Sinusschwingungen** durch die … ziehung zu den entspreche… …eisungen geometrisch zu bewei…

Vorbemerkung: Ist von zwe… …schwingungen vorausgesetzt, dafs … **ihre Weg-Zeit-Gesetze $s = a \sin \alpha t$ und $s = A \sin \alpha t$ nur durch die Amplitu… a und A, nicht durch die α unterscheiden, so ist hiermit auch der Isochronis…** schon vorausgesetzt; denn für beide ist $T = \frac{2\pi}{\alpha}$. Dabei bleibt aber noch … beweisen, dafs für beide Bewegungen trotz der verschiedenen Amplituden … und a, falls sie aber die gleiche charakteristische Beschleunigung w_1 haben. … gemein zum selben Werte von s die nämlichen Werte $W = w$ gehör…

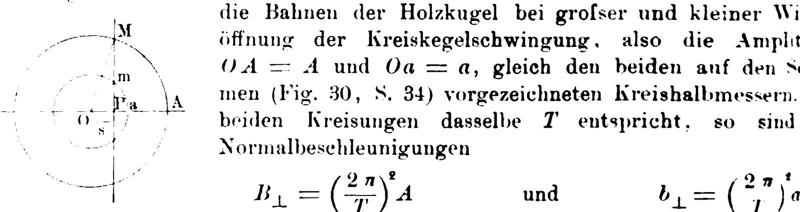


Fig. 102.

Beweis: Es seien die beiden Kreise in Fig. 102 … die Bahnen der Holzkugel bei grofser und kleiner Wink… öffnung der Kreiskegelschwingung, also die Amplitu… $OA = A$ und $Oa = a$, gleich den beiden auf den Sch… men (Fig. 30, S. 34) vorgezeichneten Kreishalbmessern. … beiden Kreisungen dasselbe T entspricht, so sind … Normalbeschleunigungen

$$B_\perp = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \quad \text{und} \quad b_\perp = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a.$$

und deren Projektionen bei gleicher Elongation s trotz verschiedener Amplitu…

$$W_\perp = B_\perp \,.\, \cos MOP = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \cdot \frac{s}{A} \text{ und } w_\perp = b_\perp \,.\, \cos mOP = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \cdot …$$

also $W_\perp = w_\perp$.

23. Für ein einfaches Pendel (oder ein Wägelchen auf ein… Kreisbahn, vgl. Fig. 4, S. 9 die bis zu **einem Halbkreis erweitert** s…

zu den Elongationen von 90°, 80°, 70° . . . 10°, 0° (bei hinreichend grofser Pendellänge auch für 10°, 9°, 8° . . . 1°, 0°) die Komponenten der Schwerebeschleunigung, bzw. der Schwerkraft zu konstruieren (Fig. 103).

Anleitung: Werden aus Fig. 33 (S. 38) nur die Komponenten *w* beibehalten, so ergibt sich Fig. 103.

Zusatz: Man denke sich die Fig. 103 um die Lotlinie gedreht und vergleiche das so sich ergebende halbkugelförmige Kraftfeld mit demjenigen ebenen (Fig. 104), in welchem ein Punkt z. B. durch elastische Kräfte zu einem festen Mittelpunkte hingetrieben wird. Auch für eine sehr sorgfältige Zeichnung unterscheidet sich dieses elastische Kraftfeld nicht merklich von demjenigen, welches man erhält, wenn man die tangentiale Komponente für 10°, 9° . . . 1°, 0° mit unveränderter Gröfse in wagrechte Richtung überträgt, wobei die Bogen in unveränderter Länge geradegestreckt angenommen werden. (Vgl. die drei folgenden Aufgaben!)

Fig. 103.

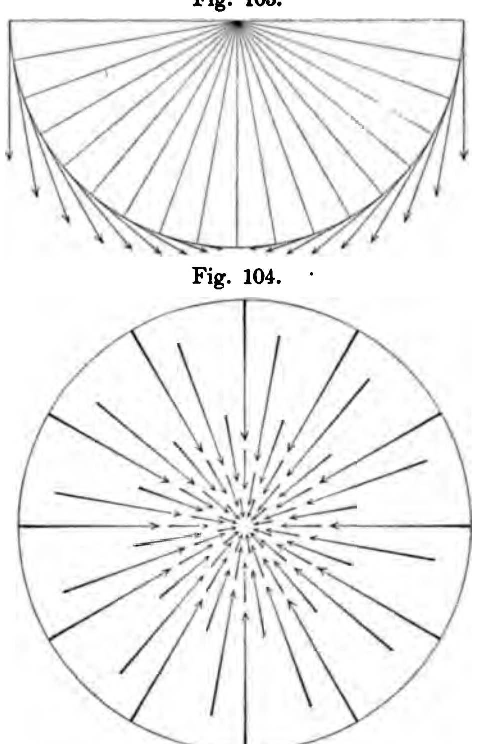


Fig. 104.

24. Anstatt der angenäherten Pendelformel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . . . (I) §§ 6, 12.

gab Galilei eine noch rohere Annäherung, die der Formel $T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}$ entspräche. Wie hängt diese mit Galileis Satz über den Sehnenfall (LA 8) zusammen?

Antwort: Für sehr kleine Amplituden scheint statt des Bogens von der Grenzlage *A* bis zur Lotlage *O* die Sehne *AO* eingesetzt werden zu dürfen. Zum Durchfallen der Sehne aber braucht der Pendelpunkt dieselbe Zeit wie zum freien Fall längs des ganzen Kreisdurchmessers $2l$. Diese Fallzeit ist $t = \sqrt{2\cdot\frac{2l}{g}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$. — Daraus folgt sogleich $T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}$, da die volle Schwingungsdauer $T = 4t$.

Zusatz: Wie die Nichtübereinstimmung von Galileis Formel mit der richtigeren Gleichung (I) zeigt, besteht aber zwischen der Fallzeit längs der Sehne und des Bogens nicht Gleichheit, sondern überraschenderweise ist die Fallzeit für den Kreisbogen kleiner als die für die gerade Verbindung zwischen denselben

Endpunkten. Es erhebt sich hiermit die Frage nach derjenigen Linie („Brachi chrone“) zwischen zwei Punkten A und O, für die die Fallzeit die mögli kleine ist. Nur in erster Annäherung ist dies jener Kreisbogen; in Wahrhe es die Zykloide (Anh. Nr. 24), deren Scheitel in O liegt, die durch A geht und erzeugender Kreis den Höhenunterschied der Punkte A und O zum Durchm hat. — Diese Linie ist auch erst wirklich die „Tautochrone“, d. h. diej Linie, für welche die Schwingungsdauer völlig unabhängig von der Schwing weite ist. (Beide Sätze hat HUYGENS bewiesen.) Inwieweit die letzteren E schaften bei dem Kreisbogen nicht zutreffen, zeigen die zwei folgenden Aufg

§§ 12, 33. **25. Als vollständige Pendelformel (III) ergibt sich durch hö (oder durch langwierige elementare) Rechnung:**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot sin^6\frac{\alpha}{2} + \cdot$$

Von dieser Reihe ist noch das zweite Glied elementar abzul

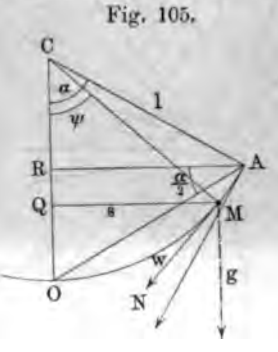


Fig. 105.

Ableitung: Bei der Herleitung der mel (I) wurde die Beschleunigung im Abs $MQ = s$ (Fig. 105) von der Lotlage mit ihrer tigen Gröfse $w = -\frac{g}{l}\cdot s$ cm sec^{-2} in Rech gesetzt; aber als Richtung dieser Beschleuni wurde die Wagrechte MQ statt der Tangente fingiert. Beträgt die Amplitude α^0, so weicht Richtung der Tangente in der Grenzlage A stärksten, nämlich um α^0 von der Wagrechten sie erlangt die wagrechte Richtung erst in der lage O. Als mittlere Richtung der Beschleunig w können wir somit die der Sehne AO unter e Winkel $\frac{\alpha^0}{2}$ gegen die Wagrechte einführen, und von dieser entfällt längs der W rechten die Komponente $w = -\frac{g}{l}\cdot s\cdot cos\frac{\alpha}{2}$. Daher tritt an Stelle von $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cdot\frac{1}{cos\frac{\alpha}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(1 - sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \doteq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(1 + \frac{1}{4}sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

§ 12. **26. Nach Gl. (II) und (III) der vorigen Aufgabe zu bestimm mit welchen Graden der Annäherung die ebenen Schwingungen Pendels als isochron betrachtet werden dürfen.**

Vorbemerkung: Man findet in manchen elementaren Lehrbüchern Behauptung, dafs die Pendelformel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdots$ (I) und hiermit „der Iso nismus der Pendelschwingungen bis etwa 5° ganz genau“ gelte, und dafs von da ab die Schwingungsdauer mit der Amplitude wachse. Eine solche Beh tung mufs aber auch schon für den Anfänger unglaubhaft sein, da sie in Sprache graphischer Darstellungen übersetzt besagen würde, dafs eine Kurve eine endliche Strecke hin mit der Abszissenachse (an der die Amplituden

getragen sind) **ganz zusammenfalle** und erst dann von ihr (in unstetiger oder stetiger Krümmung?) abbiege. Wollte man jene schiefe Behauptung nicht buchstäblich, sondern selbst nur als annähernden Ausdruck für eine besondere Eigentümlichkeit der Kurve nehmen, so könnte man erwarten, dafs die Kurve „bis etwa 5°“ der Abszissenachse **nahe** bleibe und von da ab in viel rascherem Verhältnisse sich erhebe. Doch trifft auch eine solche halbe Unstetigkeit nicht zu, wie Fig. 106 zeigt, die die folgenden strengen Rechnungsergebnisse graphisch darstellt.

Anleitung: Die Schwingungsdauer für den Grenzwert $\alpha = 0$ sei nach Gl. (I) berechnet T, für den endlichen Amplitudenwinkel α sei der Annäherungswert nach Gl. (II) berechnet T'_α, der wahre Wert nach Gl. (III) berechnet T_α; für ein beliebiges l und g ist dann $T'_\alpha = k'.T$, wo $k' = \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right]$ und $T_\alpha = k\,T$, wo $k = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots \text{in inf.}\right]$. Es ergeben sich die Werte:

α	k' nach (II)	k nach (III)
0°	$1,000\,000_0$	$1,000\,000_0$
1°	$1,000\,019_0$	$1,000\,019_0$
2°	$1,000\,076_1$	$1,000\,076_1$
3°	$1,000\,171_3$	$1,000\,171_3$
4°	$1,000\,304_5$	$1,000\,304_7$
5°	$1,000\,475_7$	$1,000\,476_2$
6°	$1,000\,684_8$	$1,000\,685_9$
7°	$1,000\,931_7$	$1,000\,933_7$
8°	$1,001\,216_5$	$1,001\,219_8$
9°	$1,001\,538_9$	$1,001\,544_2$
10°	$1,001\,899_1$	$1,001\,907_2$
15°	1,004 259	1,004 301
30°	1,016 747	1,017 408
45°	1,036 612	1,039 969
90°	1,125 000	1,179 43

Fig. 106.

Abweichungen zwischen der Schwingungsdauer nach (I) und (III) in Einheiten der sechsten Dezimale.

19 76 171 305 476 686

0° 1° 2° 3° 4° 5° 6° Amplituden

27. Die Träger der Atwoodschen Fallmaschine sind von unten durch eine sehr biegsame, $2l$ cm lange Kette verbunden, von der auf 1 cm Länge δ g Masse kommen (oder: die die „Längendichte“ $\delta\,g\,cm^{-1}$ hat; Fig. 107). Zu zeigen, dafs nach Störung des Gleichgewichtes durch Heben des einen Trägers um die beliebige Strecke a cm jeder Punkt der Kette **Sinusschwingungen** ausführt; wie grofs ist ihre Schwingungsdauer, wenn jeder Träger samt Belastung (unter Einrechnung des Trägheitsmomentes des Rädchens, LA 91) Mg Masse hat? — Grenzfall für $M = 0$? §§ 12, 18.

Anleitung: Ist der eine Träger um 1 cm über, der andere 1 cm unter der Mittellage 0, so wirkt als beschleunigende Kraft das Übergewicht der Kette von

cm, der Masse 2δ und dem Gewichte $2\delta g$. Ebenso ist allg[illegible] wenn während der Bewegung die augenblickliche Ausweichung [illegible] Trägers s cm ist. Es entspricht also hier der Faktor $2\delta g$ [illegible] Gröfse $\varkappa$ in Gleichung (6), § 18. Die zu bewegende [illegible] m ist jetzt $m = 2M + 2l\delta$. Daher

108.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2M + 2l\delta}{2\delta g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{M}{\delta g}}.$$

Werden die oberen Enden der Kette statt unter [illegible] Trägern unmittelbar an der Schnur des Rädchens angeb[illegible] und sieht man von der Masse der Schnur (sowie von de[illegible] Rädchens) ab, so wird $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; Vergleich mit dem [illegible] fachen Pendel: *Versuch!* — Ebenso:

28. [illegible] J-förmigen Röhre (Fig. 108) sei Quecksi[illegible] n $2l$ cm Gesamtlänge. Zu zei[illegible] dafs die [illegible] nach Störung des hydrostatisc[illegible] Gleicl[illegible] er Einflufs der Schwerkraft [illegible] gesehen [illegible] verzögernden Kraft der Adhäs[illegible] Sinussch[illegible] n. von der **Schwingungsda**[illegible] $T = 2$[illegible] ihrt. Warum ist diese Schwingu[illegible] dauer unabhängig vom spezifischen Gewicht der Flüs[illegible] keit und vom Röhrenquerschnitt? (Vgl. LA 27.)

12, 18, 21

29. Was für Schwingungen führt ein an ei[illegible] elastischen Spirale hängender Körper aus? (*Versu*[illegible] mit Jollys Federwage, Fig. 208, S. 201.)

Anleitung: Im Vergleich zu dem auf wagrecht[illegible] Bahn rollenden Wagen (Fig. 52, S. 70) kommt bei der a[illegible] und abwärts schwingenden Belastung einer lotrecht hängenden Feder zu d[illegible] elastischen Kräften noch die Schwere hinzu. Hierdurch tritt an Stelle [illegible] Beschleunigungsgesetzes $w = -\frac{\varkappa}{m}s$ . . (I) (welchem das Weg-Zeit-Ge[illegible] $s = a\sin\alpha t$ und wegen $\frac{\varkappa}{m} = \alpha^2$ und $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ die Schwingungsdauer $T = 2\pi$[illegible] entspricht) nunmehr das Beschleunigungsgesetz $w = -\frac{\varkappa}{m}s + g$ . . (II). Diese[illegible] entspricht das Weg-Zeit-Gesetz $s = a\sin\alpha t + \frac{g}{\alpha^2}$ . . (III) [allgemeiner $s = a_1\sin$[illegible] $+ a_2\cos\alpha t + \frac{g}{\alpha^2}$ . . (IV)]. — Der Beweis für (III) liegt darin, dafs [illegible]

$$v_m = \frac{\left(a\sin\alpha t' + \frac{g}{\alpha^2}\right) - \left(a\sin\alpha t + \frac{g}{\alpha^2}\right)}{t' - t}$$

der konstante Summand $\frac{g}{\alpha^2}$ ausfä[illegible] weshalb die Werte von v_m, v, w_m, w dieselben sind, wie beim einfachen Schw[illegible]

gungsgesetz $s = a \sin \alpha t$. — Da die Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ nur von dem Faktor α, nicht von dem konstanten Summanden $\frac{g}{\alpha^2}$ in (III) abhängt, so ist auch für die vertikal (in der Richtung der Kraftlinien des homogenen Kraftfeldes der Erde) schwingende Feder die Schwingungsdauer dieselbe wie bei horizontaler Schwingungsrichtung (oder wie bei der Feldstärke Null).

Numerisches Beispiel: Wird die Feder durch eine Belastung von $m = 1$ g, d. i. durch die Kraft von $mg \doteq 10^3$ Dyn, um 10 cm verlängert, so gehören zur Verlängerung um 1 cm nur $x = 10^2$ Dyn. Somit $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{100}} = 0{,}628$ sec.

30. Schon GALILEI hat die Frage aufgeworfen, wie sich ein Stein bewegen würde, der an der Mündung eines die ganze Erde längs eines Durchmessers durchsetzenden Schachtes freigelassen würde. Zu zeigen, dafs der Körper Sinusschwingungen von der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels machen würde, dessen Länge gleich dem Erdradius ist (die Erde als homogene Kugel vorausgesetzt). § 12, 18, 51.

Anleitung: GALILEI hatte richtig erkannt, dafs der Körper auf seinem Wege bis zum Erdmittelpunkte eine Beschleunigung zu diesem Punkte hin erhalte und sich infolge seiner Trägheit über diesen weiter hinaus mit Verzögerung und zwar bis zum entgegengesetzten Ende des Durchmessers bewegen müsse. Er hatte aber darin geirrt, dafs er sich die Beschleunigung, bzw. Verzögerung als eine konstante dachte, was im Erdmittelpunkte eine plötzliche (diskontinuierliche) Veränderung der Beschleunigung verlangt hätte. (Die mittelalterlichen Vorstellungen über das Umschlagen der Schwere im Erdmittelpunkt entwickelt DANTE in der „Göttlichen Komödie", Ende der „Hölle" XXXIV. Gesang, Vers 70 ff.)

Dafs vielmehr (unter der freilich ebenfalls nicht verwirklichten Annahme konstanter Dichte der Erdkugel) die Anziehung des sich im Innern des Schachtes bewegenden Körpers einfach direkt proportional dem jeweiligen Abstande s cm vom Erdmittelpunkte ist, wird in LA 49 gezeigt werden. Aus der dort abgeleiteten Gl. $w = -\frac{g}{R} \cdot s$ folgt wieder $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$.

31. Die Gl. $b_{\perp} = \frac{c^2}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r$ auf verschiedene Arten abzuleiten und den inneren Zusammenhang dieser Ableitungen darzulegen. § 13.

Erste Ableitung: Aus dem Zusammenhange zwischen Wurfbewegung und Kreisung nach Fig. 34, S. 41 (§ 13). — Zweite Ableitung: Nach Fig. 35, S. 41 (§ 13).

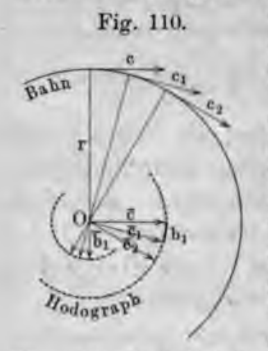
Fig. 109.

Dritte Ableitung (Fig. 109): Der kreisende Punkt habe in A und B die der Gröfse nach gleichen Geschwindigkeiten, dargestellt durch die Vektoren $AG = c$ und $BE = c_1$. Wegen der um ξ^0 veränderten Richtung läfst sich aber c_1 auffassen als Resultierende eines Geschwindigkeitsparallelogramms mit den Komponenten $BC = c$ und BD (wobei in erster Annäherung die vierte Ecke E' des Parallelogramms als zusammenfallend mit E, dem Endpunkt des Vektors c_1, angenommen werde). Dabei ist die centripetale Geschwindigkeit BD

im Vergleich zur entsprechenden Gröfse für A, die gleich Null gewesen war, ein Geschwindigkeitszuwachs, und daher ist die Beschleunigung $b_\perp$ in A Grenzwert von $\frac{BD - 0}{\tau}$, wo $\tau = \frac{AB}{c}$, also $b_\perp = \frac{BD}{\tau} = \frac{c\xi}{\frac{r\xi}{c}} = \frac{c^2}{r}$.

Vierte (hodographische) Ableitung: Der kreisende Punkt hat eine Bewe deren Geschwindigkeit ihrem absoluten Werte nach zu allen Zeiten dieselb (Fig. 110, $c = c_1 = c_2 \ldots$), deren Richtung aber i gleichen Zeitteilchen sich um gleichviel ändert. S wir die Geschwindigkeit und Richtung zusammen Vektoren dar, die alle von demselben Ursprung (gehen, so bilden ihre Endpunkte wieder einen K (Eine solche Kurve, die eine graphische Darstellur Geschwindigkeiten der sich bewegenden Punkte heifst nach HAMILTON der **Hodograph** der Geschwi keit. Jeder Bewegung mit bestimmtem Weg-Zeit-(und bestimmter Bahnform entspricht ein eigener graph. Vgl. LA 47.) Bilden wir dann zu den wechselnden Geschwindigkeiten darstellenden Kreis dem Halbmesser c noch einmal den Kreis der Vek dieser Geschwindigkeitswechsel b (Hodograph der Beschleunigung), so für die drei Kreise $r : c = c : b$; also $b = \frac{c^2}{r}$.

Fig. 110.



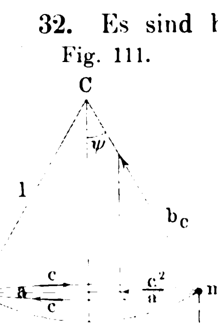
Fünfte Ableitung: Die Gleichung für die Beschleunigung bei Sinusschwingu $w = -\alpha^2 s$ wird für $s = -a$ speziell $w_a = +\alpha^2 a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a$. Diese gege Mittellage des schwingenden Punktes gerichtete Beschleunigung ist abe gleich die Normalbeschleunigung desjenigen kreisenden Punktes, als d Projektion man die Sinusschwingungen auffassen kann; denn in den Grenz ist das Element der Kreisbahn senkrecht gegen die geradlinige Bahn der S schwingungen; es ist also hier $w_a = b_\perp$ und $a = r$, somit $b_\perp = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$.

Eine sechste Ableitung der Normalbeschleunigung ergibt sich daraus. die mit ihr zusammenhängende (fünfte) Ableitung der Sinusschwingungen Teil auch energetisch (LA 62) sich darstellen läfst.

§ 12, 13, 19.

32. Es sind bei einem Kreiskegelpendel von der Masse m zwischen der Schwerebeschleunigung g, der Pen länge l, dem Radius der Kreisung a, der Ba geschwindigkeit c, der Winkelgeschwindigkei und der Umlaufszeit T bestehenden Beziehur phoronomisch und dynamisch zu erklären. Da sei der Winkel ψ zwischen der Achse und Seite des Kegels I. von beliebiger Gröfse (Fig. 1 II. von sehr kleiner Gröfse.

Fig. 111.



Anleitung zu I.: Der einmal eingeleiteten fortdauernden Kreisung entspricht die wagrec (gegen die Lotlage des Pendels normal gerichtete) N malbeschleunigung $\frac{c^2}{a}$. Dafs die kreisende Masse t



des Vorhandenseins der abwärts gerichteten Schwerebeschleunigung g keinerlei Annäherung an die Erde zeigt, weist darauf hin, dafs auch noch eine **aufwärts** gerichtete Beschleunigung vorhanden sein müsse: es ist dies die Beschleunigung b_C, die längs des Fadens von der kreisenden Masse aus gegen den Aufhängepunkt C gerichtet ist. Die Resultierende aus g und b_C ist $\frac{c^2}{a} = g\,tg\,\psi$; oder wegen $c = \alpha a$ und $a = l \sin\psi$ wird $\alpha^2 = \frac{g}{l\cos\psi}$, somit $\frac{2\pi}{\alpha} = T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\psi}{g}}$.

Zu II.: Da die Funktion $\cos\psi$ für **kleine** Werte von ψ sich nur um kleine Gröfsen zweiter Ordnung von 1 unterscheidet (sogar noch für $\psi < 15^0$ ist $\sqrt{\cos\psi} > 0{,}9828$), so gilt $T \neq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, also gleich der Schwingungsdauer für **ebene** Schwingungen.

Diese **phoronomischen** Beziehungen (— warum sind sie vom Werte der Masse m unabhängig?) **erklären** sich **dynamisch** jetzt so, dafs bei der kreisenden Bewegung des Pendelpunktes als centripetal ablenkende Kraft die Resultierende der Schwerkraft und des Fadenwiderstandes wirkt. Indem der Pendelkörper diesem Zuge nach einwärts **nicht** folgt, sondern im Kreise **bleibt**, zeigt er seinen Beharrungswiderstand gegen die beständige Richtungsänderung im horizontalen Kreise. Wäre $\frac{c^2}{a} \lesseqgtr g\,tg\,\psi$, so würde der Pendelpunkt nach aufsen, bzw. innen aus der Kreisbahn abweichen. Versucht die Hand diese Bewegungen zu verhindern, so empfindet sie einen auswärts, bzw. einwärts gerichteten Druck oder Zug. — Mit welchem Recht bezeichnet man daher das Kreiskegelpendel auch als **Centrifugalpendel**? (Vgl. *LA* 40, 41, 42.). — Dafs der **feste** Aufhängepunkt C in der Tat einem nach **auswärts** gerichteten Zug entgegenzuwirken hat, läfst sich durch den **Gegenversuch** nachweisen, dafs der Faden von m über eine an Stelle von C angebrachte Rolle, von da zu einer zweiten Rolle (in der erweiterten Ebene der ersten) geführt und jenseits mit einer der Masse m gleichen Masse belastet wird. Das Gleichgewicht wird sogleich gestört, wenn m in die kreisende Bewegung versetzt wird.

Zusatz: Setzen wir $T = \frac{1}{n}$, so ergibt sich aus $\frac{1}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\psi}{g}}$ für $n = 0$ die unmögliche Gleichung $\cos\psi = \infty$. Wie löst sich dieses Paradoxon? — Antwort: Der Aufstellung jener Gleichung liegt die Voraussetzung zugrunde, dafs der Winkel ψ während der Umdrehung **konstant** bleibt. Dies ist aber für $n = 0$, d. h. beim Aufhören gleichförmiger Umdrehungen, überhaupt nicht mehr der Fall. Denn schon für sehr kleine n beschreibt der Pendelpunkt nicht mehr Kreise, sondern Ellipsen oder strahlenförmig verschlungene Linien (wie beim Foucaultschen Pendelversuch). — Umgekehrt wird für $\psi = 0$ nicht etwa $\frac{1}{n} = \infty$ und $T = 0$, sondern es wird T gleich der Schwingungsdauer des einfachen Pendels.

33. Zu zeigen, dafs ein mit etwa 8000 m sec^{-1} = 8 km sec^{-1} Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung abgefeuertes Projektil die Erde wie ein Trabant umkreisen würde. § 13, 21.

Anleitung: Wird der Parameter der Wurfparabel, d. i. zugleich der Krümmungshalbmesser im Scheitel, gleich dem Erdhalbmesser, also $R = \frac{c^2}{g}$ und $c = \sqrt{Rg}$,

so behält der geworfene Körper seine Abstände von der Erdoberfläche; nun $R = 6370$ km, $g = 981$ cm sec^{-2}, also $c = 790504 \neq 8.10^5$ cm sec^{-1}.

Der Vorgang läfst sich nicht verwirklichen, weil 1. die gröfste bis reichte Geschwindigkeit von Projektilen nur etwa den achten Teil jen schwindigkeit beträgt; 2. weil infolge des Luftwiderstandes die Geschwin aufgezehrt und der Körper an einer nicht zu berechnenden Stelle der E fläche niederfallen würde.

§ 13, 21. **34.** Zu zeigen, dafs die Beschleunigung, mit der der Mo der Tangente seiner Bahn gegen die Erde hin abgelenkt wird $\gamma = g : 60^2$ sei (NEWTONS **„Mondrechnung"**).

Anleitung: In $\gamma = (2\pi/T)^2 . r$ ist r annähernd gleich 60 Erdradien rechnen in cm) und T annähernd gleich $27^1/_3$ Tagen (ein siderischer Monat rechnen in sec); ferner $g = 981$ cm sec^{-2}. Hieraus ergibt sich $g : \gamma = 3625$, Genauere Werte: Mittlerer Abstand Erde — Mond = 60,2778 Er gröfster Abstand 63,5875; kleinster 56,9681 (vgl. LA 217). Die entspre Werte von γ sind 0,272, 0,287, 0,257 cm sec^{-2}.

IV. Kräfte und Massen.

§ 16. **35.** Folgende Veranschaulichungen der absoluten K einheit **1 Dyn** (ferner 1 Megadyn = 10^6 Dyn) zu begründen

a) 1 Dyn = $\frac{1}{981}$ Kraftgramm $\neq$ dem Gewichtsdruck eines Milligramm

Schon das Gewicht einer Mücke (vgl. LA 53) von 1 Centigramm bis gramm Masse beträgt also 10 bis 100 Dyn. — Ein Bogen von 100 Brief hat eine Masse von etwa $3^1/_2$ Massengramm (wiegt $3^1/_2$ Kraftgramm = $3^1/_2 \times 98$ das Gewicht einer Briefmarke ist also 0,035 g [lies: 0,035 Kraftgramm] = 34 — 1 Megadyn $\neq$ 1 kg [lies: ein Kraftkilogramm].

b) 1 Dyn = der Kraft, mit der eine Masse $m = 1$ g durch die Schw komponente längs einer schiefen Ebene von der Neigung $\frac{h}{l} = \frac{1}{g} \neq \frac{1}{1000}$ gezogen wird (§ 17).

c) 1 Dyn = der Kraft, mit der eine Masse $m = 1$ g als Pendelpunk einfachen Pendels von der Länge $l = g$ cm $\neq$ 10 m bei einem wagrech stande von der Lotlage $s = 1$ cm durch die Schwerkraftkomponente ge Lotlage hin gezogen wird (§ 17).

d) 1 Dyn = der Kraft, mit der derselbe Pendelpunkt bei der Pend $l \neq 5$ m um $s = \frac{1}{2}$ cm aus der Lotlage abgelenkt wird. — Allgemeiner?

e) 1 Dyn = der Kraft, mit der zwei gleichnamig geladene elektrische von je 5 m Fadenlänge und je 1 g Masse aus einem Abstande von 1 cm e abstofsen. (Jede Kugel hat dann 1 elektrostatische Ladungseinheit, § 135; I

f) 1 Dyn = der elektrostatischen Spannung an einer auf 3000 Volt gel Leiterkugel vom Radius $R = 10$ cm (LA 182).

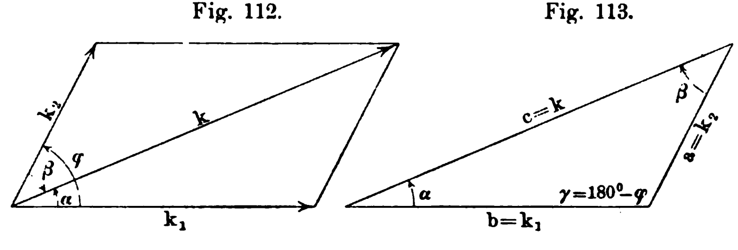
§ 17. **36.** Es sind die acht Aufgaben aufzustellen und zu löse denen die sechs Gröfsen k, k_1, k_2, φ, α, β des Kräfteparallelogr (Fig. 112) und des diesem Parallelogramm entsprechenden K dreiecks (Fig. 113) Anlafs geben.



Anleitung: Da zur Dreiecksauflösung je drei Stücke gegeben sein müssen, so sind zunächst $C_3(6) = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ Kombinationen denkbar. Von diesen ist aber vor allem φ, α, β kein Auflösungsfall, und von den übrigen sind z. B. $k\,k_1\,\alpha$ und $k\,k_2\,\beta$ physikalisch gleichwertig. Es verbleiben nur

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Gegeben:	$k_1\,k_2\,\varphi$	$k_1\,k_2\,\alpha$	$k\,k_1\,\varphi$	$k\,k_1\,\alpha$	$k\,k_1\,\beta$	$k_1\,\alpha\,\beta$	$k\,\alpha\,\beta$	$k\,k_1\,k_2$
Gefunden:	$k\,\alpha\,\beta$	$k\,\beta\,\varphi$	$k_2\,\alpha\,\beta$	$k_2\,\beta\,\varphi$	$k_2\,\alpha\,\varphi$	$k\,k_2\,\varphi$	$k_1\,k_2\,\varphi$	$\alpha\,\beta\,\varphi$

Fig. 112. Fig. 113.



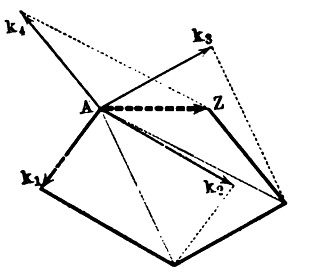
In Worten z. B.: 1. Gegeben sind zwei unter einem Winkel φ^0 wirkende Kraftkomponenten k_1, k_2; wie grofs ist die Resultierende k und welche Winkel schliefst sie mit den beiden Komponenten ein?

8. Eine gegebene Kraft k soll zerlegt werden in zwei Komponenten, von denen die Gröfsen k_1 und k_2 gegeben sind. Welche Winkel α, β müssen sie mit den Komponenten einschliefsen?

Lösungen durch planimetrische Konstruktion und trigonometrische Berechnung nach dem Ersatzdreiecke $a\,b\,c\,\alpha\,\beta\,\gamma$.

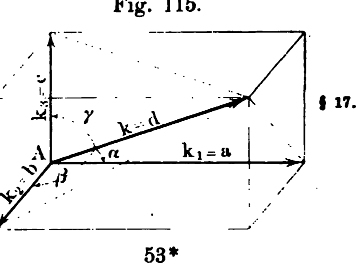
37. Die Resultierende beliebig vieler an einem Punkte angreifender Kräfte a) durch wiederholte Parallelogrammkonstruktion, b) durch Polygonkonstruktion zu finden. Welche Bedingung mufs dieses **Kräftepolygon** (mufs es ein ebenes sein?) erfüllen, wenn die Kräfte im Gleichgewichte sein sollen? § 17.

Fig. 114.



Anleitung: Ist A (Fig. 114) der Angriffspunkt, so ist die schliefsliche Resultierende bekannt, wenn der Endpunkt Z gefunden ist. Seine Lage in Bezug auf A ist aber durch die Polygonseiten bestimmt. — Gleichgewicht herrscht, wenn Z nach A fällt, also das Polygon geschlossen ist — gleichviel, ob eben oder nicht.

Fig. 115.



38. a) Zu zeigen, dafs die Resultierende von drei an einem Punkte A angreifenden, nicht in einer Ebene liegenden Kräften durch die von A ausgehende Diagonale desjenigen **Kräfteparallelepipeds** dar- § 17.

gestellt wird, dessen Seiten die Komponenten darstellen. b) We Beziehung besteht zwischen den Winkeln α, β, γ, wenn das Para epiped ein rechtwinkliges ist (Fig. 115, a. v. S.)?

Anleitung zu a): Wiederholte Parallelogramm- oder einfacher Poly konstruktion wie in der vorigen Aufgabe.

Zu b): Da $\cos\alpha = \frac{a}{d}$, $\cos\beta = \frac{b}{d}$, $\cos\gamma = \frac{c}{d}$ und $a^2 + b^2 + c^2$ (warum?), so ist $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Wie verhält sich diese F zur goniometrischen Grundformel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$?

§ 17. **39.** Was hat es physikalisch zu bedeuten, dafs Fig. 45 (S den Eindruck eines Parallelepipeds macht, von dem zwei eina gegenüberliegende Ecken sich perspektivisch decken?

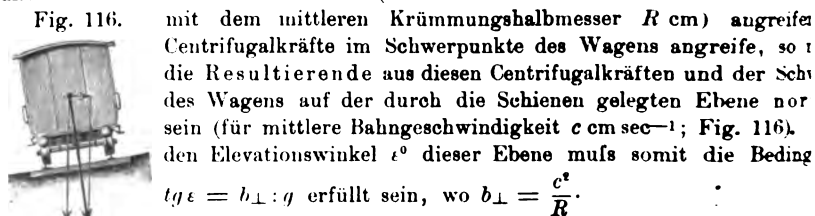
Antwort: Liegen drei Kräfte nicht in einer Ebene und blickt man au Kräfteparallelepiped in der Richtung seiner Diagonale, so stehen die Projekt der drei Komponenten auf eine zur Blicklinie normale Ebene untereinande Gleichgewicht.

§ 19. **40.** Nach welcher geometrischen Konstruktion wäre die im I geschwungene Schleuder loszulassen, wenn das Geschofs einen gegeb Punkt treffen soll, a) ohne Rücksicht auf die Schwerebewegung sinkenden Geschosses, b) mit Rücksicht hierauf?

Antwort zu a). Es hätte z. B. David die Tangente, die von der Stirn Goliath aus an den vom Schleuderstein beschriebenen Kreis führt, konstruiert d und beim Passieren des einen Tangierungspunktes den Strang loslassen mü (Bekanntlich denkt der im Schleudern Geübte an Kreise und Tangenten eb wenig, wie der Werfende an Parabeln.)

Zu b). Vom Augenblick des Loslassens an ist die Bewegung Wurfbeweg daher Konstruktion der Wurfebene und des Elevationswinkels.

§§ 19, 31. **41.** Durch Zeichnung und Rechnung zu begründen, zu welc Zwecke bei Bahnkrümmungen die äufseren Schienen höher lie



Anleitung: Wird in erster Annäherung angenommen, dafs die Resultier aller an den in krummen Bahnen (von freilich etwas verschiedener Krümn

Fig. 116.

mit dem mittleren Krümmungshalbmesser R cm) angreife Centrifugalkräfte im Schwerpunkte des Wagens angreife, so i die Resultierende aus diesen Centrifugalkräften und der Schw des Wagens auf der durch die Schienen gelegten Ebene nor sein (für mittlere Bahngeschwindigkeit c cm sec^{-1}; Fig. 116). den Elevationswinkel ε^0 dieser Ebene mufs somit die Beding $tg\,\varepsilon = b_\perp : g$ erfüllt sein, wo $b_\perp = \frac{c^2}{R}$.

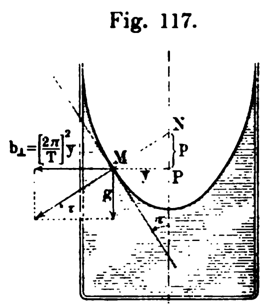
§ 19, 31, 42 **42.** Zu beweisen, dafs in einem um seine vertikale Achse rotier den Trinkglase der Wasserspiegel parabolische Krümmung annim

Regressiver Beweis (log. Anh. Nr. 38): Geht man von der Annahme dafs ein vertikaler Schnitt durch die Oberfläche die Parabel von der Gleich



$y^2 = 2px$ (Fig. 117) darstelle, so erhält ein Punkt in M zur lotrechten Schwerebeschleunigung g die wagrechte Centrifugalbeschleunigung $b_\perp$. Die Diagonale des Beschleunigungsparallelogramms mufs die Normale MN der Parabel und $NP = p$ die Subnormale sein, daher $b_\perp : g = y : p$; und weil $b_\perp = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 . y$, so wird $T = 2\pi \sqrt{\frac{p}{g}}$. Vergleichung mit der Pendelformel. — Der progressive Beweis hat die Natur der Kurve als noch unbekannt anzunehmen; es gilt aber $tg\,\tau = \frac{g}{b_\perp}$ $= \frac{g}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot y} = \frac{Konst}{y}$; ein Richtungskoeffizient von der Form $\frac{Konst}{y}$ kommt aber nur der Parabel zu, wo dann $Konst = p$.

Fig. 117.



43. Für eine beliebige Zentralbewegung die Beziehungen zwischen der **Flächengeschwindigkeit** $\mathfrak{f}$ und der Winkelgeschwindigkeit α des Leitstrahles r, sowie der Normale n aus dem Zentralpunkt auf die Bahntangente aufzustellen (Fig. 118). § 19.

Fig. 118.

Anleitung: So wie ein Maß für die Bahngeschwindigkeit der in 1 sec zurückgelegte Weg v, ein Maß für die Winkelgeschwindigkeit der in 1 sec zurückgelegte Winkel α bildet, so bildet das Maß für die „Flächengeschwindigkeit" eines Leitstrahles die vom Leitstrahle in 1 sec zurückgelegte Fläche $\mathfrak{f}$. Binnen τ sec wird dann der Weg $\sigma = v.\tau$, der Winkel $\alpha.\tau$, die Fläche $\mathfrak{f}.\tau$ zurückgelegt. Da nun geometrisch Fläche $\mathfrak{f}.\tau = \frac{1}{2} rr' sin(\alpha\tau) \doteq \frac{1}{2} r^2 \alpha\tau$, so ist $\mathfrak{f} = \frac{1}{2} r^2 \alpha$ (somit $\alpha = \frac{2\mathfrak{f}}{r^2}$; Anwendung in LA 47, hodographische Ableitung). Ferner

$$\mathfrak{f}.\tau = \frac{1}{2}\sigma' n \doteq \frac{1}{2}\sigma . n = \frac{1}{2} v\tau . n, \text{ daher } \mathfrak{f} = \frac{1}{2} vn.$$

Ist ferner ψ der Winkel zwischen dem Leitstrahl r und einer im Punkte M auf dem Bogenelement errichteten Normalen (z. B. dem Krümmungshalbmesser von M, vgl. Fig. 81, S. 765), so ist $n = r\cos\psi$ und daher $\mathfrak{f} = \frac{1}{2} v . r \cos\psi$ (oder $v \cos\psi = \frac{2}{r} . \mathfrak{f}$; Anwendung in LA 47, Rechnerische Ableitung).

V. Irdische und allgemeine Gravitation.

44. 1. Inwieweit folgt aus Newtons Mondrechnung (LA 34), dafs „die irdische Schwere bis zum Monde reicht"? 2. Inwieweit ist dieser Schlufs ein Zirkelschlufs? §§ 20, 21.

Antwort zu 1. Die Rechnung von LA 31 lehrt unmittelbar überhaupt nichts über Kräfte, sondern nur, dafs der Mond eine 60^2mal so kleine Be-

schleunigung gegen die Erde hin hat, als die Körper an der Erdoberfläche. Nachdem aber einerseits GALILEI und seine nächsten Nachfolger gelehrt hatten, dafs und wie aus der Gröfse einer Beschleunigung auf die Gröfse einer beschleunigenden Kraft zu schliefsen sei, und da andererseits für die von Galilei offen gelassene Frage, wie weit sich das Kraftfeld der Erde erstrecke, und ob es Anzeichen für eine solche Erstreckung in kosmische Räume gebe, vor allem der Mond in Betracht kam, so mufste die von NEWTON zahlenmäßig bestimmte Beschleunigung des Mondes gegen die Erde auch auf eine an dem Mond angreifende und gegen die Erde hin gerichtete beschleunigende Kraft gedeutet werden. Und wie es am ungezwungensten ist zu denken, dafs es „dieselbe Schwerkraft“ sei, die z. B. einen aus dem Meer emporspritzenden Wassertropfen an die Meeresfläche zurückzieht und „dieselbe Schwerkraft“, die eine Lawine von einem hohen Berggipfel mit nur unmerklich kleinerer Beschleunigung als jenen Tropfen herabsinken macht, so war es auch gerechtfertigt, dafs es „dieselbe Schwerkraft“ sei, die auch noch auf den Mond, nur hier mit 60^2mal so kleiner Stärke, wirkt. (Die Erzählung, dafs Newton durch einen fallenden Apfel zur Frage veranlafst worden sei, ob die irdische Schwere bis zum Monde reiche, ist eine erst um die Mitte des XVIII. Jahrhunderts entstandene Legende, indem damals NEWTONS Gravitationslehre anfing populär zu werden, u. a. durch VOLTAIRE, EULER.)

Zu 2. Wollte man blofs daraus, dafs die Beschleunigung γ des Mondes 60^2mal so klein ist als die Beschleunigung der Körper an der Erdoberfläche, auf das Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ schliefsen, so wäre das ein logischer Zirkel. Denn mit welchem Recht führt man als „Abstände“ gerade die vom Erdmittelpunkte ein? Freilich war es schon den Alten und dem ganzen Mittelalter (vgl. die in LA 30 erwähnte Stelle aus DANTES „Hölle“) geläufig, den Erdmittelpunkt als „Sitz der Schwere“ zu denken; und eben vom Erdmittelpunkt sind die Körper an der Erdoberfläche 1 R (Erdradius), der Mond 60 R entfernt. Aber erst NEWTON selbst hat erklärt, in welchem Sinne und mit welchem Rechte der Erdmittelpunkt gleichsam Sitz der Schwere ist. In Wahrheit gehen nämlich die Kräfte von allen Teilen der Erde aus und nur[1]), wenn schon angenommen ist, dafs das Abstandsgesetz $\frac{C}{r^2}$ gelte, ist die Resultierende nach Richtung und Gröfse eine solche, als ob sie vom Erdmittelpunkt ausginge (vgl. LA 48). — NEWTONS Planetenrechnung (§ 21 und LA 47) ist von solchen Voraussetzungen unabhängig; und auch für den Mond wird der Schlufs einwandfrei, wenn (unabhängig von der Gröfse der Kräfte) aus den Beobachtungen der Mondbewegung entnommen wird, dafs für sie der Flächensatz in Bezug auf den Erdmittelpunkt gilt.

§ 21. **45.** Für die Erdbahnellipse aus $a = 2 \cdot 10^7$ Meilen, $\varepsilon = 1/_{60}$, $T = 1$ Jahr die Gröfsen e, b und p (LA 43) numerisch auszuwerten.

Anleitung: Lineare Excentrizität $e = a \times \varepsilon = \frac{2 \cdot 10^7}{60} = 3{,}3 \cdot 10^5$ Meilen.

[1]) NEWTON hat bewiesen, dafs jene Ersetzbarkeit einer homogenen Kugel durch ihren Mittelpunkt sowohl beim Kraftgesetze $\frac{C}{r^2}$, wie auch beim Kraftgesetze $A \cdot r$ gelte. Erst LAPLACE hat bewiesen, dafs jene Ersetzbarkeit nur für jene beiden Kraftgesetze $\left(\text{und für deren Superposition } f = A \cdot r + \frac{C}{r^2}\right)$ gelte.

Kleine Halbachse $b = \sqrt{a^2 - a^2 \varepsilon^2} = 2 \cdot 10^7 \sqrt{1 - \frac{1}{60^2}} \neq 1{,}9999 \cdot 10^7$ Meilen.

Flächengeschwindigkeit $f = \frac{a\,b\,\pi}{1 \text{ Jahr}} = 1{,}257 \cdot 10^7$ Quadratmeilen per sec
$= 6{,}943 \cdot 10^{18}\ \text{cm}^2\ \text{sec}^{-1}$.

46. Die Konstante des Sonnensystems $\frac{a^3}{T^2} = \boldsymbol{konst}$, sowie $4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \boldsymbol{Konst}$ numerisch auszuwerten. § 21.

Anleitung: $\frac{a^3}{T^2} = konst = 1$ (Erdweite, Erdjahr) $= 3{,}298 \cdot 10^{24}$ (cm, sec).

$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = Konst = 4\pi^2$ (Erdweite, Erdjahr) $= 1{,}302 \cdot 10^{26}$ (cm, sec).

Hierbei ist angenommen: Erdweite $a = 2 \times 10^7$ Meilen, 1 Meile $= 7{,}432$ km, 1 Erdjahr $= 365{,}242 \ldots \times 86400$ sec. — Für die genauere Verwandlungszahl 1 Meile $= 7{,}4204$ km wird $konst = 3{,}282 \cdot 10^{24}$, $\boldsymbol{Konst} = \mathbf{1{,}296 \cdot 10^{26}}$.

47. Aus Keplers Gesetzen ist **Newtons Abstandsgesetz** $f = \frac{C}{r^2}$ **abzuleiten** für irgend einen Punkt einer Planetenbahn. (Vgl. die inverse Aufgabe in LA 63.) § 21.

I. Rechnerische Ableitung. Die Halbachsen der Bahnellipse seien a und b, daher der Parameter $p = \frac{b^2}{a}$, die ganze Fläche $F = ab\pi$; ferner seien für einen beliebigen Punkt P (Fig. 119) der elliptischen Bahn der von der Sonne S aus gezogene Leitstrahl r, der Krümmungshalbmesser ϱ, der Winkel zwischen beiden ψ. In jenem Punkte habe der Planet gegen die Sonne die Beschleunigung w_r, seine Normalbeschleunigung sei w_ϱ, seine Bahngeschwindigkeit v, seine konstante Flächengeschwindigkeit f. Dann gelten folgende Gleichungen:

Fig. 119.

$w_r = \frac{w_\varrho}{\cos\psi}$ (denn w_ϱ läſst sich als eine Komponente von w_r auffassen);

$w_\varrho = \frac{v^2}{\varrho}$ (allgemeine Gleichung für die Normalbeschleunigung, § 13);

$\varrho \cdot \cos^3\psi = \frac{b^2}{a}$ (diese Eigenschaft aller Kegelschnitte vgl. math. Anh. Nr. 26);

$r\cos\psi = \frac{2}{r} \cdot f$ (vgl. LA 43);

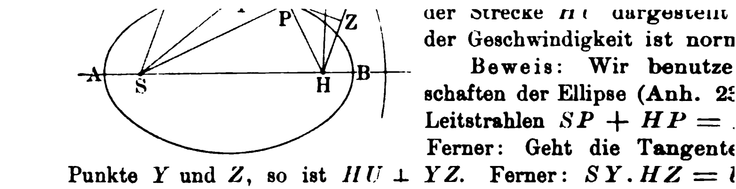
$f = \frac{ab\pi}{T}$ (denn der ganzen Umlaufszeit des Planeten entspricht die ganze Fläche seiner Bahnellipse).

Durch schrittweises Eliminieren der übrigen Gröſsen ergibt sich:

$w_r = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$, wo $4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = Konst = 1{,}296 \cdot 10^{26}$ (LA 46).

Über die Beziehung zwischen $Konst$ und $C = \varkappa M m$ vgl. LA 51.

II. Hodographische Ableitung: Die Sonne stehe in dem einen Brennpunkte S der Bahnellipse, H sei der andere Brennpunkt (Fig. 120). Der Planet



der Strecke HU dargestellt der Geschwindigkeit ist norn

Beweis: Wir benutze schaften der Ellipse (Anh. 2 Leitstrahlen $SP + HP =$ Ferner: Geht die Tangente Punkte Y und Z, so ist $HU \perp YZ$. Ferner: $SY.HZ = l$ Bahngeschwindigkeit v in P die Richtung der Tangente PY die Flächengeschwindigkeit f in P die Beziehungen: $f = \frac{1}{2}$ $= v \cdot \frac{b^2}{2HZ} = v \cdot \frac{b^2}{HU}$, woraus $v = \frac{f}{b^2} \cdot HU$. Setzen wir den $\frac{f}{b^2} = k$, so ist HU der Gröfse nach proportional der Geschwin dem Proportionalfaktor $\frac{1}{k}$, und da der Richtung nach $v \perp H$ U auf HU errichtete Normale $v = k \,.\, HU$ der Gröfse und Bahngeschwindigkeit v in P dar.

Die Gesamtbeschleunigung im Punkte P ergibt sich, nach $\tau = 1$ sec erreichten Nachbarpunkt P' den zugehörigen P graphen konstruieren: dann stellt UU' den Zuwachs der Gesch das ist die Beschleunigung dar. Da $UU' \perp SU$, und da di $v \perp HU$ errichtet zu denken war, so ist die durch UU' dar nigung gegen die Sonne hin gerichtet. — Überdies ist die Beschleunigung $\frac{v' - v}{\tau}$, wo $\tau = 1$ sec, also $w_r = k\,(HU' -$ (denn es liegt im Wesen der Vektorenmethode, math. Anh. N Resultierende einfach gleich der Summe der beiden Komponen eine Komponente gleich der Differenz aus der Resultierende Komponente setzt). Da nun UU' ein Bogen im Kreis mit d dem Centriwinkel $\alpha\tau$ für $\tau = 1$ sec ist; und da ferner für die Wi geschwindigkeit α die Beziehungen gelten $\alpha = \frac{2f}{r^2}$ (LA 43) und

äufsere Punkte zu beweisen, wobei sich unter a) für den inneren und äufseren Punkt zum Teile die gleichen Rechnungsausdrücke darbieten; im Beweise b) wird der Satz für innere Punkte als bewiesen vorausgesetzt.

a) Es sei ein beliebiger innerer Punkt J (Fig. 121) einer Kugelfläche der gemeinschaftliche Scheitel von Doppelkegeln, durch die die ganze Oberfläche in Paare von Flächenelementen, z. B. PN, $P'N'$ zerlegt wird. Die Winkelöffnung eines dieser Kegel sei ω im absoluten Maße räumlicher Winkel (math. Anh. 2): die längste Seitenlinie dieses Kegels sei r. Die mit dem Radius r um den Mittelpunkt J beschriebene Kugel bildet dann das Element PQ, das mit PN den Flächenwinkel α einschliefse. Es hat dann das Element PQ die Fläche $r^2\omega$, das Element PN die Fläche $\frac{r^2\omega}{\cos\alpha}$. Ist die Flächendichte der Kugelschale δ, so ist seine Masse $\frac{r^2\omega}{\cos\alpha}\cdot\delta$, und diese Masse wirkt auf eine Masse von 1 g im Abstande x mit der Kraft $f_x = \varkappa\delta\cdot\frac{\omega}{\cos\alpha}\cdot\frac{r^2}{x^2}$.

Für den inneren Punkt J ist $x = r$, und daher sind die Kräfte $\varkappa\delta\cdot\frac{\omega}{\cos\alpha}$, die von je einem Elementenpaar ausgehen, einander gleich und ihre Resultierende Null. — Für einen äufseren Punkt A (Fig. 122), wo $OA = a$ und $PA = R$, ist die Kraft $f_R = \varkappa\delta\cdot\frac{\omega}{\cos\alpha}\cdot\frac{r^2}{R^2}$. Hier hat also der Faktor $\frac{r^2}{R^2}$ einen mit der Lage von P veränderlichen Wert. Um ihn durch einen konstanten Wert zu ersetzen und so die Reihe der von den einzelnen Elementen ausgehenden Kräfte summierbar zu machen, ordnen wir dem Punkt A einen Hilfspunkt J so zu, dafs $JP : AP = OP : OA$ oder $\frac{r}{R} = \frac{\varrho}{a}$. Hier ist dann $f_R . \cos\alpha = \varkappa\delta\omega\cdot\frac{\varrho^2}{a^2}$ die Komponente parallel OA (wogegen die zu OA normalen Kraftkomponenten einander wechselseitig aufheben). Dann ist $\Sigma f_R . \cos\alpha = \varkappa\delta\frac{\varrho^2}{a^2}\cdot\Sigma\omega = \varkappa\delta\frac{\varrho^2}{a^2}\cdot 4\pi = \varkappa\cdot\frac{M}{a^2}$. — Also:

Fig. 121. Fig. 122.

Die Gesamtanziehung der Kugelschale auf den äufseren Punkt ist nach Richtung und Stärke gleich der Anziehung einer im Mittelpunkte der Kugel befindlich gedachten Masse M.

b) Der Beweis mittels der Niveauflächen vergleicht die Arbeiten, die erfordert werden, um einer Masse m die Verschiebung AA' zu erteilen, entgegen der Anziehung der Masse M, wenn M einerseits an der Kugeloberfläche homogen ausgebreitet, andererseits M in O konzentriert gedacht wird. — Zu diesem Zwecke denken wir uns aus der Anfangskonfiguration (M als Kugelschale, m in A) diese Massen übergeführt in die Endkonfiguration (M als Kugelschale, m in A'); und zwar so, dafs wir uns durch A und A' die Kugelflächen K und K' mit O als Mittelpunkt gelegt (Fig. 123) und dann folgende zwei Reihen von je vier Verschiebungen ausgeführt denken:

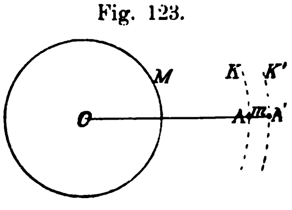


Fig. 123.

Einerseits:	Andererseits:
1. Verschiebung von m aus A nach A'.	5. Gleichmäßige Verteilung von m
2. Gleichmäßige Verteilung von m auf der Fläche K'.	der Fläche K.
3. Konzentrierung von M in O.	6. Konzentrierung von M in O.
4. Wiedervereinigung von m in A'.	7. Wiedervereinigung von m in A.
	8. Verschiebung von m aus A nach

Von diesen Verschiebungen erfordern 2., 4., 5., 7. keine Arbeit, keine Änderung des Abstandes der anziehenden Teilchen stattfand; 3. und 6. fordern keine Arbeit, weil die Verschiebung im Innern der anziehenden Ku flächen K und K' stattfand. Die geleisteten Gesamtarbeiten sind aber beiden Reihen von Verschiebungen gleich, da die Anfangs- und Endkonfig tionen dieselben sind. Es müssen also auch die einzelnen Arbeiten 1 un einander gleich sein, und da die Verschiebung von m auf A' beide Male nämliche ist, so müssen auch die Kräfte einander gleich gewesen sein. Zur Beweiskraft dieser Schlüsse gehört, daſs eine Verschiebung im Inneren e Kugel nur dann keine Arbeit erfordert, wenn die Kugelschale mit einer n dem Newtonschen Abstandsgesetze wirkenden Masse (oder einer nach dem Coulo schen Gesetze wirkenden elektrischen oder magnetischen Menge) belegt ist; in § 21, III bewiesen worden ist.

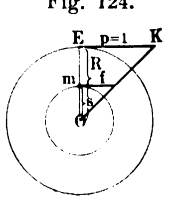
§§ 20, 21.

49. Die Gröſse der Schwerkraft der als homogene Kugel dachten Erde für alle inneren und äuſseren Punkte rechneris und graphisch darzustellen.

Anleitung: Es sei der Erdradius $OE = R$ (Fig. 124 und 125). Für inneren, d. h. unterhalb, der Erdoberfläche gelegenen Punkte sei der Abst vom Erdmittelpunkt $s < R$ (Fig. 124), für die äuſseren Pun sei $r > R$ (Fig. 125). — In beiden Figuren ist durch die Stre $EK = 1$ cm die Gröſse des Gewichtes, das der Körper an Erdoberfläche zeigt, graphisch dargestellt; wobei auch die w rechte Richtung für die in Wahrheit lotre gerichtete Kraft willkürlich als die für Zeichnung bequemste Richtung gewählt ist.

Fig. 125.

Fig. 124.



Daſs die Anziehung für innere Punk direkt proportional dem Abstand s vo wächst und also durch eine **Gerade** darzustellen ist, zeigt folgende Überlegung: F die Vollkugel von s cm Halbmesser ist m äuſserer Punkt. Das Volumen dieser Kugel ist $\frac{4\pi}{3}s^3$, und wenn als konsta Dichte der ganzen Erde D g cm^{-3} angenommen wird, so ist die Masse die Kugel $\frac{4\pi}{3}s^3D$. Da diese Kugel auf die in s cm vom Mittelpunkte befindlic Masse so wirkt, als wäre die ganze Kugelmasse im Mittelpunkte vereinigt, so w eine Masse $m = 1$ g gegen den Mittelpunkt hingezogen mit der Kraft $f = -\varkappa\cdot\frac{\frac{4\pi}{3}s}{}$ $= -\varkappa\frac{4\pi}{3}Ds$, wo das Zeichen „—" bedeutet, daſs die Kraft zum Erdmittelpur gerichtet ist, wogegen der Abstand s vom Mittelpunkte weg gerechnet wird.



Speziell für die Erdoberfläche ist $f = p = 1 . g = \varkappa \frac{4\pi}{3} D R$. Daher ist allgemein $\varkappa \frac{4\pi}{3} D = \frac{g}{R}$ und $f = -\frac{g}{R} \cdot s$.

Hier zeigt die Vergleichung mit der analogen Gleichung $f = -\frac{g}{l} \cdot s$ (für $m = 1$ g (§ 18), oder $w = -\frac{g}{l} \cdot s$ (§ 12)), dafs $l = R$, vgl. LA 30.

Für äufsere Punkte können wir uns die graphische Darstellung des Abnehmens der Erdanziehung mit wachsendem Abstand r vom Erdmittelpunkt, d. h. beliebig viele Punkte der **„Gravitationskurve"** verschaffen, indem zu den Abständen $r = R$, $2R$, $3R$ . . . die Kräfte $f = p$, $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{9}$ . . . gehören.

Statt durch diese rechnerische Bestimmung lassen sich die Punkte der Kurve auch durch folgende planimetrische Konstruktion finden, wobei der Einfachheit wegen sowohl $OE = R = 1$ cm, wie auch $EK = p = 1$ cm gesetzt werden möge, so dafs wieder der Einheitskreis einen gröfsten Kreis der Erdkugel darstellt. Dann lautet die Gleichung der Gravitationskurve $f = \frac{1}{r^2}$. Diese Beziehung läfst sich konstruieren, indem man von dem äufseren Punkte P die Tangente PA an den Einheitskreis zieht, den Berührungspunkt A nach B projiziert, dann B wieder auf AO nach G projiziert und G durch einen Kreisbogen nach D, schliefslich D durch die Parallele zu OP nach M überträgt. Dann ist

im $\triangle\, OAP$ $\overline{OA}^2 = OP . OB$ oder $1 = r . OB$, also $OB = \frac{1}{r}$,

im $\triangle\, OBA$ $\overline{OB}^2 = OA . OG$ oder $\left(\frac{1}{r}\right)^2 = 1 . OG$, also $OG = OD = PM = \frac{1}{r^2}$.

Um uns von der einschränkenden Annahme $EK = 1$ frei zu machen (da ja in Wahrheit das Gewicht an der Erdoberfläche $p = mg$ den Spezialwert für $f = \varkappa \frac{Mm}{r^2}$ zu $r = R$ darstellt), können entweder alle Ordinaten PM im Verhältnis $1 : p$ vergröfsert oder es kann auch die Konstruktion, statt am Einheitskreis durchgeführt zu werden, eine entsprechende Verallgemeinerung erfahren, so dafs statt $f = \frac{1}{r^2}$ allgemein $f = \frac{C}{r^2}$; wobei $C = \varkappa Mm$ (vgl. LA 51).

50. Ein Mann habe a) im Meeresniveau stehend, ein Gewicht von 100 kg. Um wieviel vermindert es sich, wenn er sich um die Höhe eines Tisches, d. i. etwa um $h = 0{,}8$ m, erhebt? (Vergleich des Gewichtsunterschiedes mit dem Gewichte einer Briefmarke, LA 35). Was ändert sich an diesen Zahlen b) für die Seehöhe von Wien (200 m)? — c) Statt $h = 0{,}8$ m die Höhe $H = 8840$ m des Mount Everest. §§ 16, 20, 21.

Anleitung: Am Meeresspiegel, d. i. im Abstande vom Erdmittelpunkt $R = 6\,370\,000$ m habe die Masse von m g das Gewicht p_0 (in g oder Dyn); in der Höhe h m über dem Meeresspiegel, d. i. im Abstande $(R + h)$ m, das Gewicht p_h. Dann ist

$$p_h = p_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} = p_0 \cdot \left(\frac{R+h}{R}\right)^{-2} = p_0 \cdot \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \doteq p_0 \cdot \left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

(Gaurisankar) entspricht: $p_0 - p_H = p_0 \cdot \frac{2H}{R} = 0{,}002\,77\ p_0$.

§ 21. **51.** Zu zeigen, dafs $\boldsymbol{Konst} = \mathbf{1{,}296 . 10^{26}}$ (c

d. h. dafs die phoronomische Gröfse $Konst = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$

vielen astronomischen Rechnungen wiederkehrenden dy
$\boldsymbol{\varkappa M}$, nämlich dem Produkte aus der Gravitationsk
der Sonnenmasse M.

Beweis: Nach § 21, Gl. (11) und (1 II) wirkt zwisch
einem Planeten, wenn die Massen dieser Körper M g, bezw. m

$f = \frac{C}{r^2}$, wo $C = \varkappa M m$. Diese Wirkung äufsert sich in d

$w_r = \frac{Konst}{r^2}$ . . . (§ 21, Gl. 6). Da nun $f = m w_r$, also $\frac{C}{r^2} =$

$C = m\,Konst$ (in Worten!). Da ferner $\varkappa M m = m\,Konst$, so

§ 21. **52.** Wie ändern sich die Dimensionsformeln de
Nr. 29, Tafel der physikalischen Gröfsen), wenn als
Gravitationskonstante die einer Geschwindigkei

Anleitung: Im C-S-G-System ergibt sich die Dimensio
konstante $\varkappa$ so: Da in der Gleichung $f = \varkappa \frac{Mm}{r^2}$ die Dim f :
ist $\mathrm{cm\,sec^{-2}\,g} = \varkappa \cdot \frac{\mathrm{g \cdot g}}{\mathrm{cm^2}}$, woraus Dim $\varkappa = \mathrm{cm^3\,sec^{-2}\,g^{-1}}$.

Da hier und in allen Beziehungen zwischen den Dimensio
besonderen Einheiten cm, sec, g nicht wesentlich sind, sonde
Qualitative von Länge (L), Zeit (T) und Masse (M) ankomm
allgemeiner: Dim $\varkappa = L^3 T^{-2} M^{-1}$.

Wird nun hier (nach einem Vorschlage von Andriessen) D

Die neuen Dimensionsformeln zeigen gegenüber den alten die Eigentümlichkeit, dafs nicht nur 1. blofs die phoronomischen Grundgröfsen Länge und Zeit vorkommen, sondern dafs auch 2. nur mehr ganzzahlige Exponenten vorkommen. — Diese beiden Umstände werden als sachliche Gründe dafür geltend gemacht, dafs die Annahme Dim $\varkappa$ = Dim Geschwindigkeit nicht nur eine willkürliche, sondern eine wahrscheinlich im Wesen der Gravitationswirkungen selbst begründete sei. (Diese Gründe gewinnen dadurch an Gewicht, dafs sich auch mit den viel mannigfacheren Gröfsen der Elektrik und Magnetik die gleichen Vereinfachungen vornehmen lassen, wenn man den reziproken Werten der Dielektrizitätskonstante und der Magnetisierungskonstante ebenfalls die Dimension einer Geschwindigkeit beilegt: vgl. auch über die Gröfse v LA 192).

VI. Mechanische Arbeit und Energie.

53. Folgende Veranschaulichungen der absoluten Arbeitseinheit 1 Erg (ferner 1 Joule = 10^7 Erg) zu begründen:

a) 1 Erg ist die Arbeit, die z. B. ein Insekt von der Masse 1 Milligramm (genauer $\frac{1}{981}$ g) durch seine Muskelenergie leistet, wenn es sich an eine um 1 cm höher gelegene Stelle des Kraftfeldes der Erde begibt (auf vertikalem, oder auf einem beliebig gerichteten und gestalteten Wege, Fig. 126).

Fig. 126.

b) 1 Joule $\neq$ 0,1 mkg ist die Arbeit beim Heben von 1 kg um 1 dm.

c) 1 Erg hat rund 1 Billiontel Pfennig Kaufwert; vgl. LA 177.

54. An einem Klavier habe die Fingerspitze, indem sie eine Taste aus der Ruhelage in die tiefste Lage drückt, einen Weg von durchschnittlich $^1/_2$ cm zurückzulegen. Durch Auflegen von Gewichten (oder von Münzen) auf diese Anschlagstelle sei gefunden worden, dafs durchschnittlich 100 g ausreichen, um die Tasten in irgend einer Zwischenlage zwischen der Ruhelage und der tiefsten Stellung festzuhalten. Wieviel Erg Arbeit hat ein Klavierspieler geleistet, während er 10000 Tasten mit keiner gröfseren Wucht anschlägt, als nötig ist, sie alle bis in die tiefste Stellung niederzudrücken? — Warum läfst sich die mechanische Verrichtung des Spielers nicht in Dyn (oder Kraftgramm, Kraftkilogramm), sondern nur in Erg (Joule oder Meterkilogramm), auch nicht in Pferdestärken oder Watt ausdrücken? §§ 22, 16.

Anleitung: 100 g (Kraftgramm) = 100 . 981 $\neq$ 10^5 Dyn; (10^5 Dyn) × ($^1/_2$ cm) = 5 . 10^4 Erg; 5 . 10^8 Erg = 50 Joule. — Unterscheide Kraft, Arbeit, Leistung!

55. Zu beweisen: Wird eine Masse vom Gewicht $p = mg$ aus dem Ruhezustande mit beliebig wechselnder Kraft f so gehoben, dafs sie an einer um h cm höheren Stelle des (als homogen vorausgesetzten) Kraftfeldes der Erde wieder zur Ruhe kommt, so ist die §§ 22, 23.

verrichtete Gesamtarbeit $A = ph$ (also **unabhängig** von der Gr der **arbeitenden** Kraft f und **nur abhängig** von der Gröfse **widerstehenden** Kraft p der Schwere, sowie der Niveaudifferen

Anleitung: Es sei hinsichtlich der veränderlichen Kraft f zuerst als ein ster Fall (wie in § 23, S. 98) vorausgesetzt, dafs auf die Masse vom Gew $p = mg$ jeweilig konstante Kräfte, nämlich im Anlauf eine $k_1 > p$, im stationären Lauf $k_2 = p$, im Endlauf $k_3 < p$ v Die während der drei Teile der Bewegung zurückgelegten verti Strecken seien h_1, h_2, h_3, so dafs $h_1 + h_2 + h_3 = h$ (— wobe jeweilig erlangten vertikal aufwärts gerichteten Geschwindigkeiten die horizontalen Ordinaten dargestellt seien; Fig. 127). — Insofern in der Definition des Arbeitsmaßes vorausgesetzt ist, dafs es oder ph jedesmal die widerstehende, nicht die Arbeit leist Kraft sei, die unter k bzw. p verstanden ist, berechnet sich die langte Arbeit als $A = ph_1 + ph_2 + ph_3 = p(h_1 + h_2 + h_3) =$ Es treten also hier die Kräfte k_1, k_2, k_3 gar nicht in die Rechnung — Dennoch macht es für die Einzelheiten des Arbeitsvorganges Unterschied, ob der Überschufs von k_1 über p ein „sehr kleiner“ ein beliebig grofser ist: Im ersteren Falle hat nämlich die Masse im statio Lauf nur eine sehr kleine, im letzteren eine beliebig grofse lebendige Kra beiden Fällen mufs dann diese lebendige Kraft im Endlauf wieder aufge werden, was dadurch geschieht, dafs hier $k_3 < p$ ist. (Es könnten auc Zeiten des Erwerbens und Wiederverlierens der Geschwindigkeit und die durch die Überschüsse der Kräfte k_1 und k_3 über p herbeigeführten posi und negativen Beschleunigungen in Betracht gezogen werden; doch sin Gröfsen Zeit und Beschleunigung der energetischen Betrachtung als solcher fr

Fig. 127.

Um den für die vollständige Beschreibung des Bewegungsvorganges nicht gl gültigen Umstand, ob z. B. der Überschufs $k_1 - p$ im Anlauf klein, der Ü schufs $p - k_3$ im Endlauf grofs war (ähnlich wie bei einem Eisenbahnzug sich nur langsam in Bewegung gesetzt hatte und dann auf der Strecke rasc bremst wird), auch energetisch zu erfassen, vergleichen wir die in der Auf vorausgesetzte Bewegung mit einer im leeren Raum (bei der Feldstärke N also für $p = 0$, wo nur mehr der Beharrungswiderstand zu überwinden ist. I bringt die längs der Strecke h_1 entgegen dem Beharrungswiderstand wirk Kraft k_1 eine Geschwindigkeit v hervor, für die $k_1 h_1 = \frac{1}{2} m v^2$ gilt. Im statio Lauf bleibt diese Geschwindigkeit v, gleichviel wie lang die Strecke h_2 ist. Endlauf mufs, da schliefslich wieder Ruhe eintreten soll, $\frac{1}{2} m v^2 = - k_3 h_3$ (d. h. wenn mit grofser Kraft gebremst wird, erfolgt das Stillstehen auf ku Strecke; bei kleiner Kraft auf langer Strecke). Es ist also $k_1 h_1 = - k_3 h_3$ $k_1 h_1 + k_3 h_3 = 0$. Kehren wir nun zum homogenen Kraftfeld der Schwere zur so können wir uns die Vorgänge in ihm auf die Vorgänge im leeren Raum zurückgeführt denken, dafs auf die Masse m im Anlauf eine Kraft $k_1 - p$ läng dann im stationären Lauf eine Kraft $k_2 - p = 0$ längs h_2, im Endlauf eine gegengesetzt gerichtete Kraft $k_3 - p$ längs h_3 wirkt. Für diese Kräfte ist Gesamtarbeit

$$(k_1 - p) h_1 + (k_2 - p) h_2 + (k_3 - p) h_3 = k_1 h_1 + k_2 h_2 + k_3 h_3 - p(h_1 + h_2 +$$

Da nun analog der Gleichung $k_1 h_1 + k_3 h_3 = 0$ jetzt $(k_1 - p) h_1 + (k_3 - p) h_3$ und das mittlere Glied $(k_2 - p) h_2 = 0$ [wegen $k_2 = p$] sind, so ist

$$k_1 h_1 + k_2 h_2 + k_3 h_3 = p(h_1 + h_2 + h_3) = ph.$$





Für eine beliebig veränderliche Kraft f lassen sich aufeinander folgende konstante Kräfte $k_1, k_2 \ldots k_n$ bei beliebig kleinen Strecken $h_1, h_2 \ldots h_n$ setzen, um dann die Betrachtung ähnlich wie oben an den Kräften k_1, k_2, k_3 durchzuführen.

56. Es ist die in § 22, S. 90 auf graphischem Wege gewonnene Gleichung $A = {}^1/_2 \varkappa s^2$ für die Arbeit entgegen Kräften nach dem Gesetz $f = -\varkappa s$ auf arithmetischem Wege abzuleiten. § 22.

Anleitung: Wie Fig. 68 (S. 90) wesentlich der Fig. 14 (S. 17) für Galileis graphische Ableitung der Gleichung $s = {}^1/_2 g t^2$ entspricht, so ist auch die arithmetische Ableitung der Gleichung $A = {}^1/_2 \varkappa s^2$ analog der Ableitung in LA 9, sowie der Gleichung $A = {}^1/_2 VE$ in § 136.

Das Gemeinsame dieser Ableitungen und der in den folgenden LA 57, 58, 59a) liegt im Wesen des arithmetischen Mittels, bzw. der arithmetischen Reihen. Es geht nämlich die Summenformel $s = \frac{n}{2}(a + t)$ für $a = 0$ und für verschwindend kleine Differenzen über in $s = {}^1/_2 t^2$; vgl. math. Anh. Nr. 9.

57. Welche mechanische Arbeit kostet es, um einen rechteckigen Rollbalken (eine Leinwand-, Stäbchen-Roulette) vom Gesamtgewicht P g und der Höhe H cm aufzurollen? § 22.

Antwort: Im Anfange des Hebens hat man die Kraft 0 g und dann im gleichmäßigen Anwachsen immer mehr vom Gewicht bis zu den vollen P g in der Höhe H zu tragen, somit $A = {}^1/_2(0 + P)H = {}^1/_2 PH$. — Ähnlich:

58. Welche mechanische Arbeit kostet es, um ein lotrechtes, prismatisches Gefäfs von der Basis b m² bis zur Höhe H m mit einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht s g cm⁻³ von einer Bodenöffnung aus vollzupumpen? §§ 22, 37, 42.

Antwort: $A = bHs \cdot \frac{H}{2}$ tgm (Begründung wie in den vorigen LA 57, 56). — Dieser Betrag von $A = \frac{1}{2} bH^2 s$ tgm ist in der Wassermenge als potentielle Energie in Bezug auf das Niveau der Bodenfläche enthalten. Vgl. LA 116.

59. Welche Arbeit erfordert es, um eine Masse von $m = 1$ g a) vom Mittelpunkt der Erde (durch einen von hier aus gehenden gedachten engen Kanal, vgl. LA 30, 49) bis an die Erdoberfläche und b) von hier ins Unendliche zu bringen? § 22.

Anleitung: Zu a). Da nach LA 49 die Kraft $f = -\frac{g}{R} \cdot s$ ist, so berechnet sich die Arbeit nach § 22, Gl. (2) $A = \frac{1}{2} \varkappa s^2$, wo jetzt $\varkappa = \frac{g}{R}$ ist; somit $A_0^R = \frac{1}{2} \frac{g}{R} R^2 = \frac{1}{2} gR$.

Zu b). Die Arbeit $A_R^\infty = gR$ (vgl. LA 66).

Es ist also in dem Arbeitsdiagramm Fig. 128 (LA 60) die Fläche der Kurve aufserhalb der Erde das Doppelte von der Fläche des Dreieckes OEK.

§§ 21, 22.

60. Die Gleichungen für die **Arbeit** $A = \varkappa \frac{Mm}{r}$, für das G... **tationspotential** $V = \varkappa \frac{M}{r}$ und für $V_2 - V_1 = \varkappa M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$ ... **Arbeitsdiagramme** d... **stellen.**

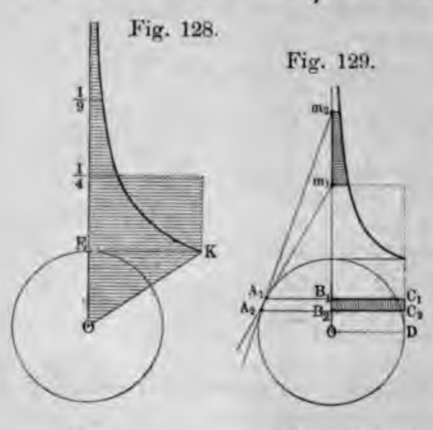


Fig. 128. Fig. 129.

Anleitung: Die gesamte A... die beim Wegtragen einer Mass... von der Erdoberfläche bis in de... stand $r > R$ entgegen den Gravita... kräften zu leisten ist, wird durc... Fläche $EKMP$ der Gravitations... (Fig. 125, S. 842) dargestellt (übe... die Arbeit beim Emportragen vom... mittelpunkt bis an die Erdober... durch die Fläche des Dreieckes O... Fig. 124, S. 842). — Da die Rech... zeigt (§ 22, Gl. 4), dafs beim ... tragen der Masse bis ins Unend... nicht selbst eine unendliche, sondern nur die end... Arbeit $A = \varkappa \frac{Mm}{r}$ zu leisten ist, so erhellt, dafs ... die **Fläche der Gravitationskurve**, wiewohl ... diese selbst ins Unendliche erstreckt, keinen unen... grofsen, sondern einen **endlichen Flächeninhalt**...

Da in LA 49 die Gravitationskurve selbst durch ... rein konstruktives Verfahren gefunden wurde, so ... Fig. 129, welchen Rechtecken OB_1C_1D, bzw. OB_2... und daher auch $B_1B_2C_2C_1$ die den Arbeiten, bzw. Arb... differenzen entsprechenden Teile der Gravitationskur... fläche flächengleich sind.

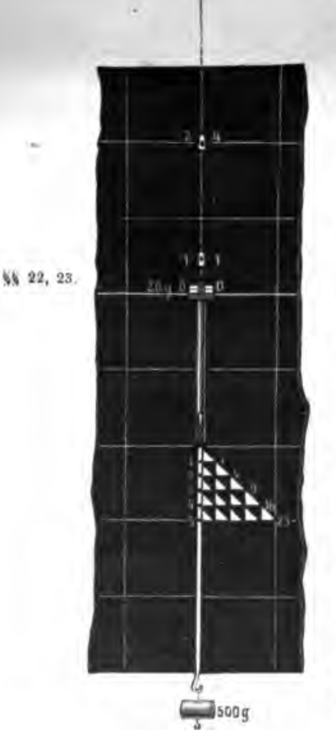


Fig. 130.

§§ 22, 23.

61. Die Feder einer Federkanone (mit ... tikaler Röhre, die vor der Tafel des Wurfappar... anzubringen ist) wird durch Anhängen ... $M = 100, 200, 300, 400, 500$ g um 2, 4, 6 ... 10 cm herabgezogen (gedrückt). Welche Arbe... sind hierbei geleistet worden? — Wie ... werden durch Freilassen der so gespannten Fe... Geschosse von $m = 10, 20, 30$ g Masse em... geschossen (von der Masse der Feder selbst ... des mit ihr verbundenen Aluminiumstabes ... gesehen)?

Anleitung: Die Gleichung für die Arbeit g... elastische Kräfte $A = \frac{1}{2} \varkappa s^2$ (§ 22, Gl. 2) läfst sich ve... schaulichen durch die schwarzen und weifsen Drei... (Fig. 130), indem den 2-, 3-, 4-, 5 mal so grofsen ...

schiebungen 4-, 9-, 16-, 25 mal so viele kleine Dreiecke entsprechen. Die Gröfse $\varkappa$ ergibt sich hier daraus, dafs die Verschiebung $s = 2$ cm durch das Anhängen von 100 g (Massengramm), also durch das Wirken des Gewichtes von 100 g (Kraftgramm) $= 100 . 981 \doteqdot 10^5$ Dyn erzielt wird. Zur Verschiebung um 1 cm gehören also $\varkappa = 100 . 981 : 2$ Dyn. Z. B. für $s = 10$ cm ist $A = \frac{1}{4} . 98100 . 100 \doteqdot 2{,}5 . 10^6$ Erg.

Wird durch Loslassen der Auslösevorrichtung (eines Sperrhakens) die potentielle Energie in kinetische Energie umgesetzt, so haben beim Passieren der Ruhelage die Masse der Feder und des Aluminiumstabes, eine ebenso grofse Energie von $2{,}5 . 10^6$ Erg. — War die Federkanone mit dem Geschofs von der Masse $m = 30$ g und dem Gewichte $p = 30 . 981$ Dyn geladen und werden gegenüber dieser Masse die der Feder und des Aluminiumstabes vernachlässigt, so berechnet sich die Steighöhe h dieser Masse aus der Gleichung $p\,h = A$ Erg, nämlich $30 . 981 . h = \frac{1}{4} . 981 . 100 . 100$, also $h = 83\frac{1}{3}$ cm. — Dafs beim *Versuch* eine viel geringere Steighöhe erreicht wird, weist darauf hin, dafs Feder und Stab nicht ihre ganze Energie an das Geschofs haben abgeben können.

62. Die Gesetze der **Sinusschwingungen** energetisch abzuleiten. § 23.

Anleitung: Eine Masse m g bewege sich mit der Geschwindigkeit c cm sec^{-1} durch die Mittellage O eines elastischen Kraftfeldes (vgl. Fig. 104, S. 827) nach dem Kraftgesetze $f = -\varkappa s$. Im Abstande s cm von O ist dann durch die Arbeit $\frac{1}{2} \varkappa s^2$ die Geschwindigkeit von c auf v vermindert worden, so dafs $\frac{1}{2} \varkappa s^2 = \frac{m c^2}{2} - \frac{m v^2}{2}$. Hieraus ergibt sich die Amplitude als die dem Wert $v = 0$ entsprechende Elongation; nämlich aus $\frac{1}{2} \varkappa a^2 = \frac{m c^2}{2} - 0$ folgt $a = c \sqrt{\frac{m}{\varkappa}}$. Ferner folgt aus $\frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} \varkappa (a^2 - s^2)$ der allgemeine Wert der Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{\varkappa}{m}} \sqrt{a^2 - s^2}$.

Hier weist uns der Ausdruck $\sqrt{a^2 - s^2}$ darauf hin, die Bewegung als Projektion einer Kreisung im Kreis von der Gleichung $y = \pm \sqrt{a^2 - s^2}$ aufzufassen. Hieraus ergeben sich dann wieder, wie im § 12, die phoronomischen Beziehungen $v = a\alpha \cos \alpha t$ und $s = a \sin \alpha t$ und die dynamische Beziehung $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\varkappa}}$ (§ 18).

63. Aus Newtons Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ und dem Flächensatze der Zentralbewegungen die verallgemeinerten **Keplerschen Gesetze abzuleiten.** (Vgl. die inverse Aufgabe in LA 47.) §§ 19, 21, 23, 24

Ableitung: Es sei von einem kosmischen Körper nur gegeben, dafs er einen Punkt des Weltraumes, der von der Sonne den Abstand r_0 hat, mit der Geschwindigkeit v_0 (unter beliebigem Winkel gegen r_0) passiere und dabei aufser seiner eigenen Beharrung nur der gegen die Sonne gerichteten Kraft gemäß dem Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ unterliege. Die Masse jenes Körpers sei $m = 1$ g (die gesuchte Bahnform, Geschwindigkeit u. s. f. hängt von der Gröfse der sich bewegenden Masse nicht ab). Die Gravitationskonstante sei $\varkappa$, die Sonnenmasse M; nach LA 51 ist dann $\varkappa M = Konst$ (der Konstanten des Sonnensystems) $= K$.

Wenn dann der Planet den um r von der Sonne abstehenden Punkt des Weltraumes mit der Geschwindigkeit v passiert, so ist nach dem **Energiesatz**

$$K\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \quad . \ . \ . \ (1)$$

Um weiter v durch r auszudrücken, hilft der **Flächensatz**, den wir hier anwenden dürfen, weil in der Aufgabe schon vorausgesetzt ist, dafs die Kraft f gegen die als festen Punkt angenommene Sonne hin gerichtet ist. Es ist dann (nach LA 43) $2F = v r \cos\psi = v_0 r_0 \cos\psi_0$ . . . (2), also

$$K\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{v_0^2 r_0^2 \cos^2\psi_0}{\cos^2\psi} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{v_0^2}{2}$$

oder

$$r^2 - \frac{2Kr_0}{2K - r_0 v_0^2} \cdot r = -\frac{v_0^2 r_0^3 \cos^2\psi_0}{2K - r_0 v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\psi}.$$

Verglichen mit der Gleichung der Ellipse (math. Anh. 23, S. 760) ist also

$$2a = \frac{2Kr_0}{2K - r_0 v_0^2}, \qquad b^2 = \frac{v_0^2 r_0^3 \cos^2\psi_0}{2K - r_0 v_0^2}.$$

Je nachdem hier $2K - r_0 v_0^2 \gtreqless 0$, somit $v_0^2 \lesseqgtr \frac{2K}{r_0}$, bleibt die Kurve eine **Ellipse** oder geht über in die **Parabel**, bzw. **Hyperbel**. Dabei wird speziell wieder die Ellipse ein **Kreis**, wenn $v_0^2 r_0 = K$, denn dann wird $a = r_0 = b$.

Physikalische Ergebnisse und Folgerungen: Die Bahn des kosmischen Körpers hängt **nur** von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ab, mit der er einen gegebenen Anfangsabstand r_0 passiert, und zwar hängt nur b^2 noch von ψ_0 ab, dagegen ist $2a$, **die grofse Achse der Bahnkurve, unabhängig von der Richtung**, mit der die Anfangslage passiert wurde. — Wäre speziell $v_0 = 0$, so stürzte der kosmische Körper in gerader Linie zur Sonne; diese Gerade stellt einen Grenzfall der Ellipse dar. Für allmählich wachsende v_0 werden **Ellipsen** beschrieben, für die die Sonne im **entfernteren** Brennpunkte steht (vgl. Fig. 53 a, S. 73). — Als Bedingung dafür, dafs die Ellipse speziell ein **Kreis** wird, also dafs $a = b$ und $\psi_0 = 0$ ist, ergibt sich aus $\frac{Kr_0}{2K - r_0 r_0^2} = \frac{v_0 r_0 \sqrt{r_0}}{\sqrt{2K - r_0 v_0^2}}$ oder $K^2 - 2Kv_0^2 r_0 + v_0^4 r_0^2 = 0$ die Beziehung $v_0^2 = \frac{K}{r_0}$. [Um zu zeigen, dafs diese Bedingung übereinstimmt mit der Gleichung $b_\perp = \frac{c^2}{r}$ (§ 13), bilde man $\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{K}{r_0^2} = \frac{\varkappa M}{r_0^2}$]. — Wird v_0 noch gröfser, so verlängert sich die **Ellipse** in der Weise, dafs nun die Sonne den **näheren** Brennpunkt zum Ausgangspunkt darstellt, r_0 also jetzt dem Perihel entspricht. — Wird $v_0^2 = \frac{2K}{r_0}$ (das **Doppelte** des zur **Kreisbahn** erforderlichen Wertes), so geht die Ellipse in eine **Parabel** über.— Bei noch gröfserer Geschwindigkeit wird die Bahn eine **Hyperbel**.

64. Ist die Gleichung der Wurfparabel energetisch abzuleiten?

Anleitung: Hier tritt an Stelle der Gleichung (1) der vorigen LA die einfachere $gx - gx_0 = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$ . . . (1′), oder für $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$ speziell $v_1^2 = 2gx$ . . . (1″). — Dagegen fehlt es hier an einem Analogon zum Flächensatz (oder der Gl. (2) der vorigen LA); denn bei Ableitung der Bahn eines ge-

worfenen Körpers als einer **Parabel** wird der Zentralpunkt (hier der Erdmittelpunkt) als in **unendlichem Abstand** liegend fingiert, und die von den Leitstrahlen durchlaufenen Sektoren gehen daher in unendlich lange Streifen mit parallelen (lotrechten) Rändern über. — Sowie wir oben zum Flächensatze der Zentralbewegungen nur gelangten, indem wir das **Trägheitsgesetz** voraussetzen (und dieses daher auch wieder als Grenzfall der Gesetze der Zentralbewegung erhalten, indem die Zentralkraft Null wird), so kommt zu Gl. (1″) für die Bewegung eines in **wagrechter** Richtung geworfenen Körpers noch hinzu $v_y = c$ ... (2′) oder $y = ct$ . . . (2″); und hieraus folgt, zusammen mit der aus (1″) folgenden Gleichung $x = \frac{g}{2} t^2$ . . . (1‴) wieder die parabolische Bahn wie in § 11.

Die LA 64 und 63 geben Beispiele dafür, dafs die Kenntnis der **Energiegleichungen allein**, wie (1) und (1′), nie die Eigenschaften einer Bewegung, wie Bahnform u. dgl., im einzelnen ausreichend bestimmt. (Gilt doch z. B. Gl. (1′) für den Erwerb einer Geschwindigkeitskomponente v_x nach lotrechter Richtung bei Senkung um x auch auf was immer für einer vorgeschriebenen Bahn!)

65. Inwiefern stellen Fig. 131 u. 132 einerseits kartographische Reliefs von Berg und Tal mit Schichtenlinien (Isohypsen) und Strömungslinien, — andererseits die Potentiale und Kraftlinien zweier benachbarter, entgegengesetzter Mengen, z. B. der Pole eines Magnetes, dar? § 24.

Anleitung: Vergleichung mit Tafel I *ab* und II *ab* bei S. 108. Dafs Berg und Tal weder ins Unendliche sich erstrecken noch Plateaus zeigen, ist eine Abweichung sowohl gegen das Potential einer punktuellen Masse (Ladung, Polstärke) wie auch gegen das Potential einer Leiterkugel.

Fig. 131.

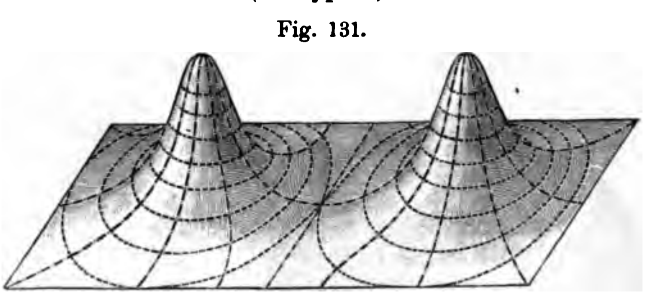
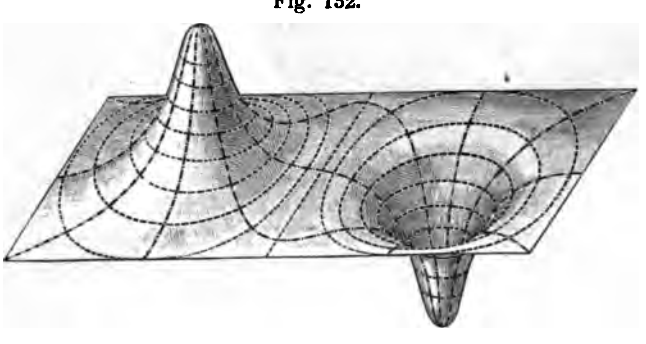


Fig. 132.



66. In welchen Beziehungen der Kraft und der Arbeit steht die Gröfse $\varkappa M$ (Gravitationskonstante × Erdmasse) zur Schwerebeschleunigung g und dem Erdradius R? §§ 21, 22.

Antwort: Nach § 21 ist $\varkappa M = gR^2$. Nach § 22 ist $A_R = gR \cdot m$ für mg,

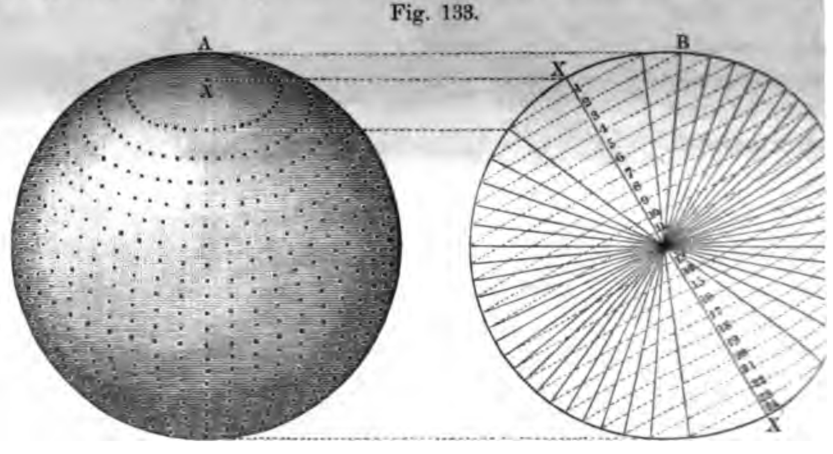
daher nach der Bezeichnung des § 24 $V_R = gR$ für 1 g. — Also auch wie $V_R = \varkappa \frac{M}{R}$ (Oberflächenpotential der Erde). — Vgl. LA 51.

§ 24. **67. Eine wie große Masse M müßte in einem Punkt kon triert gedacht werden, damit in 1 cm Abstand von diesem Punkte Gravitationspotential 6 Erg per Gramm herrsche?**

Anleitung: Aus $V = \varkappa \frac{M}{r}$ folgt wegen $\varkappa = 6{,}685 \cdot 10^{-8}$ (§ 21, $M = \frac{6}{6{,}685 \cdot 10^{-8}} = 8{,}975 \cdot 10^7$ Gramm. — Es wäre also eine ungeheure Masse an Stelle der Mengen $+6$ in Tafel I, a—d und Tafel II, a—d stehen müßte, sie bloß durch ihre Gravitationskräfte die in den Tafeln dargestellten Kräft gebe. Wie groß müßte statt der punktuell gedachten Masse M eine Kuge dem dichtesten Stoff (Dichte des Platins $22\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$) sein, damit sie in i äußeren Kraftfeld so wirkte, wie wenn jene Masse im Mittelpunkt vereinigt w

§§ 24. 144. **68. Nach Fig. 133 zu erläutern, wie die von einem Punkte gehenden sehr zahlreichen Kraftlinien räumlich zu verteilen sind, mit durch je ein Quadratcentimeter der um jenen Punkt beschriebe Kugeloberfläche durchschnittlich gleichviel Kraftlinien hindurchgel**

Fig. 133.



Anleitung: Nach dem Satz, daß Zonen der gleichen Kugel dann flächengl sind, wenn ihre Höhen gleich sind, ist der Durchmesser XX in eine Anzahl gleicher Strecken und hiernach die Kugel durch Meridiane und Parallelkreis durchschnittlich flächengleiche Teile geteilt.

VII. Zur Mechanik starrer Systeme.

§ 27. 69. Es sind die Sätze über die Äquivalenz und Zusamm setzung von **Kräftepaaren**[1]) **abzuleiten, die für die Zusamm**

[1]) Des Zusammenhanges wegen sind auch die in § 27 ausgewählten Sätze und weise a), b), c) hier nochmals angeführt; nämlich a) = 5., b) = 4., c) = 6.

ung beliebiger Paare zu einem einzigen Paare aus-
en.

A. **Äquivalenz von Kräftepaaren:** Rein fortschreitende Verschie-
n (Fig. 134, I, II, III, IV). 1. Die Kräfte werden längs ihrer eigenen
ffslinie verschoben (aus I nach II; Beweis gemäß dem Satze über die Ver-
keit einer Kraft längs ihrer Angriffslinie, § 26, II). — 2. Beide Kräfte
n um gleichviel seitlich verschoben (aus I nach III). — 3. Das Kräftepaar
in eine Ebene verschoben, die parallel ist der durch die Angriffslinien
beiden Kräfte bestimmten Ebene (aus I nach IV. — Beweise zu 2. und 3.
h wie zu 4.; nämlich: Zu den Kräften k_1, k_1' werden noch jeweilig die vier
k_2 (k_2), k_2' (k_2') hinzugefügt. Hiervon geben dann k_1 und (k_2) einerseits,
d (k_2') andererseits Resultierende, die ein-
aufheben, so dafs nur das verlegte Paar
) übrig bleibt).

Fig. 134.

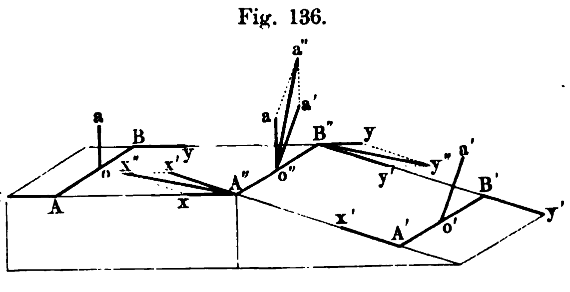
4. Drehung eines Paares innerhalb seiner
(Beweis nach Fig. 98, S. 120). — 5. Äqui-
z zweier Paare von gleichen Momenten (Be-
nach Fig. 135 als Verallgemeinerung des
ses nach Fig. 97, S. 119).

Die bisher bewiesene Äquivalenz von Paaren
folgende symbolischeDarstellung je eines
epaares zweckmäßig: Man errichtet auf
Ebene des Paares eine Senkrechte und
hnet vor allem den Sinn des Paares
den Sinn der Drehung, die durch
räftepaar an dem starren System
igeführt wird) dadurch, dafs man
enkrechte nach jener Seite der
hinzieht, von der aus gesehen
rehung im Sinne des Uhrzeigers
tsläufig) erfolgt. An dieser
echten wird eine Strecke aufgetragen, die soviel Längeneinheiten hat, als
räftepaar Momenteinheiten hat. Diese Strecke heifst dann nach Richtung
rröfse die **Achse des Kräftepaares.** Dieser Hilfsbegriff wird insbesondere
bar bei der

Fig. 135.

B. **Zusammensetzung von Kräftepaaren.** 6. Paare mit parallelen Achsen
is nach Fig. 99, S. 120). — 7. Paare, deren Achsen unter beliebigem
el gegeneinander ge-
sind: Man ersetzt
llem nach Satz 5 die
durch solche von
en Armen, z. B. *AB*
'B' (Fig. 136). Dann
man sie nach Satz 4
er Ebene so, dafs
rme parallel werden.
verschiebt man sie
Satz 1 in ihrer Ebene
fs die Arme sich decken, und indem man nun die in den gemeinschaft-

Fig. 136.



wird, ist es nicht von vornherein einleuchtend, dafs die Reihenfol
für das Ergebnis gleichgültig ist. Wohl aber, wenn die Lage des M
durch die Koordinaten $\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}$, $\eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}$, $\zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$ erm
z. B. in $\Sigma m x = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots m_n x_n$ sind die ein
$m_1 x_1$, $m_2 x_2$ ... beliebig vertauschbar. Gehen wir dabei zurüc
des Ausdruckes $m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$, so erkennen wir
den zu beweisenden Satz die arithmetisch-kombinatorische Bezie

$$(m_1 + m_2) \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + m_3 x_3 = (m_1 + m_3) \frac{m_1 x_1 + m}{m_1 + n}$$

und ähnlich für die Vertauschungen (2, 1), 3 = (2, 3), 1 = (3,
— Ebenso, wenn statt 3 Elementen n Elemente gegeben sind.

Aus den Formeln für den Massenmittelpunkt ergeben
Schwerpunkt, wenn im Zähler und Nenner mit dem Faktor g
wobei dann wegen $m g = p$ sich ergibt

$$\xi = \frac{\Sigma p x}{\Sigma p}, \quad \eta = \frac{\Sigma p y}{\Sigma p}, \quad \zeta = \frac{\Sigma p z}{\Sigma p}.$$

§ 28. 71. Die geometrischen Sätze und Beweise fü
„Schwerpunktes" des Dreieckes, der dreiseitigen Pyramide

Anleitung: Da im Dreieck ABC (Fig. 137) M und N
sind, so ist für das Strahlenbüschel mit dem äufseren Ähnlic
Ähnlichkeitsmodul 1 : 2, also $MN = \frac{1}{2} AC$. Da in den zwei
und CAs der Ähnlichkeitsmodul 1 : 2 ist, so mufs für den inn
punkt s gelten: $Ms = \frac{1}{3} MC$. (Der gleiche Beweisgang f

Fig. 137. Fig. 138. Fig. 139.

C

gezogen, so zerfällt BC in vier gleiche Teile. Den drei gleichen Teilen von mC entsprechen dann auch die drei gleichen Teile auf MC. (Gleicher Beweisgang für die Pyramide. — Lage des Schwerpunktes für mehrseitige Pyramiden nach Fig. 140.)

72. Die Lage des **Schwerpunktes** zu berechnen (konstruieren) für folgende homogene Linien, Flächen und Körper (math. Anh. Nr. 9): § 28.

Vorbemerkung. Unter „Lage des Schwerpunktes" ist zunächst seine Lage in Bezug auf die Teile des Gebildes selbst verstanden. Rechnerisch aber wird die Lage bestimmt in Bezug auf ein an das Gebilde gelegtes Koordinatensystem; z. B. $SC = \xi$ in Bezug auf XX, Fig. 141. — Ferner bezeichnen wir im folgenden mit d die Längendichte (die Masse der Längeneinheit), wiewohl behufs der statischen Momente das spezifische Gewicht der Längeneinheit einzuführen wäre, wofür aber ein kurzer Name nicht gebräuchlich ist. Der hinzuzudenkende Faktor g in $s = dg$ fällt aus den Gleichungen überall heraus.

1. **Kreisbogen** $AB = b$ (Fig. 141) mit dem Radius r. — Man denkt den Bogen in unendlich viele Teile geteilt und bestimmt deren statische Momente in Bezug auf eine durch den Kreismittelpunkt C mit der Sehne $AB = s$ parallele Gerade XX. Das statische Moment eines solchen Teiles ist $PQ \,.\, PN = QR \,.\, CP = QR \,.\, r$, folglich $\Sigma QR \,.\, CP = r \Sigma QR = \overline{AB} \,.\, r$; daher $\xi \,.\, \widehat{AB} \,.\, d = \overline{AB} \,.\, r \,.\, d$, woraus $\xi = \frac{s \,.\, r}{b}$. — Halbkreis: $\xi = \frac{2r}{\pi}$.

2. **Kreissektor** ABC (Fig. 142). Man denkt ihn durch Radien in unendlich viele Teile zerlegt, die als Dreiecke angesehen werden können. Der Schwerpunkt des Sektors fällt daher mit dem eines

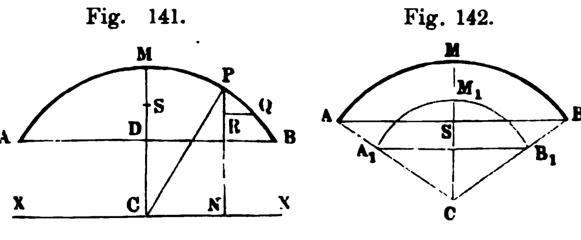


Fig. 141. Fig. 142.

Kreisbogens $A_1 B_1$ zusammen, dessen Masse gleich der des Sektors und dessen Radius $= {}^2/_3 r$ ist. Folglich $\xi = \frac{{}^2/_3 s \,.\, {}^2/_3 r}{{}^2/_3 b} = \frac{2}{3} \frac{rs}{b}$.

3. **Kreissegment** vom Inhalt F; die Fläche des Sektors $S = F + \triangle$. Für die statischen Momente dieser Teile ist:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b} \cdot \frac{1}{2} br = \xi \,.\, F + \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}, \text{ woraus } \xi = \frac{s^3}{12F}.$$

4. **Kugelzone** (und **Kugelmütze**). Der Schwerpunkt ist der Halbierungspunkt der Höhe (denn gleichen Teilen der Höhe entsprechen flächen- und massengleiche Teile der Zone).

5. **Kugelsektor.** Dieser ist als Summe von Pyramiden aufzufassen. Da der Schwerpunkt einer solchen in ${}^3/_4$ der Höhe liegt, so ist der Schwerpunkt des Kugelsektors gleich dem einer Kugelmütze vom Radius ${}^3/_4 r$ (also Figur analog Fig. 142). Ist die Höhe der Kugelmütze $AB = h$, so ist die Höhe der Kugelmütze $A_1 B_1 = {}^3/_4 h$, also liegt ihr Schwerpunkt um ${}^3/_8 h$ vom Scheitel entfernt, daher $\xi = {}^3/_4 r - {}^3/_8 h = {}^3/_8 (2r - h)$. [Geometrische Bedeutung von $2r - h$!]

6. **Kugelsegment.** Aus der Lage des Schwerpunkts von Kugelsektor und Kugel folgt $\xi = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$.

7. **Halbkugel.** Sowohl aus 5. wie aus 6. folgt $\xi = {}^3/_8 r$.

§ 28. **73. Das dynamische Maß für die Stabilität eines Körpers entwickeln.**

Vorbemerkung. Für die Gröfse der **Stabilität** sind mehrere Maße bräuchlich. In § 28 wurde als einfachstes, rein geometrisches Maß der werfungswinkel (Kippwinkel α, oder auch $tg\,\alpha$) eingeführt.

Das eine dynamische Mafs der Stabilität sei so definiert: S_1 ist das tische Moment des Gewichtes P eines Körpers in Bezug auf Kippkante. — Ist dann b der wagrechte Abstand des Schwerpunktes von durch die Kippkante gelegten vertikalen Ebene, h die Höhe des Schwerpu über der durch die Kippkante gehenden horizontalen Ebene, r der Abstan Schwerpunktes von der Kippkante, α der Kippwinkel, so ist $b = r \sin\alpha$, $h = r$ $S_1 = Pb = Pr \sin\alpha$.

Eine andere dynamische Definition lautet: S_2 ist gleich der Kraf die im Schwerpunkt wagrecht wirken mufs, um den Körper d Drehung um die Kippkante aus seiner Lage zu bringen, und zwar kleinste Wert von Q, der genügt, um dem Gewicht P das Gleichgewich halten. — Hiernach wäre $S_2 = Q = P \cdot \frac{b}{h} = P \,.\, tg\,\alpha$. Zu diesem Mal aber zu bemerken, dafs, wenn der Körper schon so aufgestellt ist, dafs Schwerpunkt lotrecht über der Kippkante liegt, er sich zwar im labilen Gl gewicht befindet, zu dessen Aufrechterhaltung aber überhaupt keine Kraft forderlich ist. — Wohl aber erfordert es eine Arbeit, um einen Körper irgend einer Lage des stabilen in jene Lage des labilen Gleichgewichtes zuführen, und dies führt zur folgenden Aufgabe:

§ 28. **74. Das energetische Maß für die Stabilität eines Körpers entwickeln.**

Aus der Definition: S_3 ist die Arbeit, die geleistet werden mufs, einen Körper bis in die Lage des labilen Gleichgewichtes zu dreh ergibt sich die Maßformel $S_3 = P(r - h) = Pr(1 - \cos\alpha) = Pr \,.\, 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

§ 28. **75.** Es sei eine grofse Anzahl n gleicher, homogener, rechtwi liger Parallelepipede von den Kantenlängen a, b, c cm gegeben, $a > b > c$; je eines hat das Gewicht p g, und ihr Gesamtgewicht $np = P$ g. Sie liegen anfänglich alle in der stabilsten Lage, d auf dem gröfsten Rechtecke (a, b). Hierauf werden aus ihnen (n der Art der Bausteine der Kinder) Türme aufgebaut, indem ein die Rechtecke (a, b), dann (a, c), dann (b, c) als wagrechte Gru flächen dienen. Wie verhalten sich die potentiellen Energ $L_c : L_b : L_a$, die sich so in den Türmen aufspeichern und bei ih Zusammenstürzen wieder in aktuelle Energie (der Wärme, des Schalles umsetzen lassen? Wie grofs wird L für den Würfel, d. h. $a = b = c$? — Vergleich mit der gröfseren oder geringeren po tiellen Energie, die sich einem bestimmten Stoffe (Metall, Glas, H beim Elektrisieren durch Reiben erteilen lassen.



Anleitung: Liegt das Prisma auf der größten Fläche (a, b), so liegt der ıwerpunkt in der Höhe $\frac{c}{2}$. Wird dann das Prisma durch Drehen um die Kante ,uf die kleinste Fläche (b, c) gestellt, so liegt der Schwerpunkt in der Höhe $\frac{a}{2}$. ist also um $\frac{a-c}{2}$ gehoben worden. Wird auf dieses unterste Prisma ein zweites gleicher Lage aufgesetzt, so ist sein Schwerpunkt noch um a cm höher, also $\frac{a-c}{2} + a$ gehoben worden, ebenso der Schwerpunkt des dritten um $\frac{-c}{} + 2a, \ldots$ der des n^{ten} um $\frac{a-c}{2} + (n-1)a$. Die Hebarbeit ist also

$$\cdot \left[\frac{a-c}{2} + \left(\frac{a-c}{2} + a\right) + \left(\frac{a-c}{2} + 2a\right) + \cdots + \left(\frac{a-c}{2} + (n-1)a\right)\right]$$

$$p\left[n \cdot \frac{a-c}{2} + a\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1)\right] = p \cdot \left[n \cdot \frac{a-c}{2} + a \cdot \frac{(n-1)n}{2}\right].$$

Wird hier n sehr groß angenommen, so ist die Arbeit $pn \cdot \frac{an}{2} = \frac{PA}{2}$ ·l. LA 56 bis 61). — Es kostet also das Erbauen der Türme von den Höhen B, C annähernd die Arbeiten $\frac{1}{2}P.A$, $\frac{1}{2}P.B$, $\frac{1}{2}P.C$; und dies sind auch die ßzahlen der in Bezug auf die Ausgangslage aufgespeicherten potentiellen Energie.

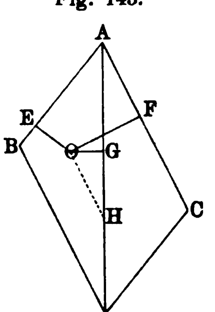
War die gegebene Masse zu n gleichen Würfeln verarbeitet, so ist die dieser sse durch Auftürmen günstigenfalls zu erteilende Energie kleiner, als bei er anderen rechtwinkligen parallelepipedischen Gestalt der einzelnen Körper. — ch dieser Analogie können wir uns vorstellen, daß demselben Äther, der zwischen Moleküle von leicht elektrisierbaren Stoffen eingebettet ist, größere elektrische ergie (gleichsam ein weniger stabiler Gleichgewichtszustand) sich erteilen und ıer in ihm auch größere Energie aufspeichern läßt, als dem Äther in schwer ktrisierbaren Stoffen.

76. Zu beweisen Varignons Satz, daß in Bezug auf jeden ınkt der Ebene (nicht nur für Punkte der Diagonale) des Kräfterallelogramms das Moment der Resultierenden gleich ist der (algebraihen) Summe der Momente der Komponenten. § 29.

Anleitung: Es sei O ein beliebiger Punkt in der Ebene des Kräfteparalleloımms, $OE \perp AB$, $OF \perp AC$, $OG \perp AD$, und überdies $OH \parallel BD$ (Fig. 143). Dann ist $\triangle AOC = \triangle AHC = \triangle AHB$ (weil die ·te aus B und C auf AH einander gleich sind). Ferner ist

$$\triangle AHB = \triangle AOB + \triangle BOH + \triangle AOH$$
$$= \triangle AOB + \triangle DOH + \triangle AOH$$
$$\triangle AOC = \triangle AOB + \triangle AOD$$
$$\triangle AOD = \triangle AOC - \triangle AOB$$
$$AD \,.\, OG = AC \,.\, OF - AB \,.\, OE.$$

Fig. 143.



Da der Drehungssinn von AB in Bezug auf den Punkt O tgegengesetzt ist dem Drehungssinn von AD und AC, ist das letzte Glied negativ.

77. Zu beweisen, daß für die Drehung um ıe fixe Achse eines starren Systems die Gleichung § 29.

ist, sind von den Kräften die in jene Ebene fallenden Kompon
— Wird durch jenen Punkt eine Drehungsachse normal zu
gebracht, so bringt jede der Kräfte für sich eine Drehung um
(Kräfte, die nicht in der zur Achse normalen Ebene liegen, br
Drehungen auch noch eine Verschiebung längs der Achse hervo
Hebelwirkung als solcher abgesehen wird). Nur wenn **das**
Resultierenden in Bezug auf jene Achse 0 ist, halten die ei
ander an dem Hebel das Gleichgewicht. In besonderen Fällen
geschehen, dafs in dem Kraftmoment ka der Resultierenden
tierende Kraft k aus allen einzelnen Kräften für sich $= 0$ is
aber (wenn nämlich die Kräfte entweder zu beiden Seiten von
und mehr oder minder nach derselben Seite gerichtet sind; g
untereinander parallele Komponenten aufweisen (Verallgemeineru
Hebels) oder wenn sie auf derselben Seite des Drehungspunkte
minder entgegengesetzten Seiten gerichtet sind (Verallgemeineru
Hebels)) herrscht Gleichgewicht, wenn der Kraftarm $a = 0$ i
Resultierende durch jene Achse selbst hindurchgeht.

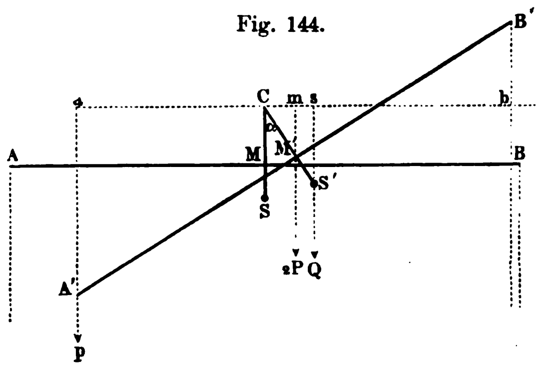
§ 30. **78. Bordas Doppelwägung erlaubt mittels ein richtigen, aber empfindlichen Wage und eines richtigen richtig zu wägen; wie?**

Anleitung: Hat ein Körper das richtige Gewicht P un
einmal P_1, dann bei Vertauschung des Körpers und der Gewi
mufs, wenn $P = \psi P_1$ ist, $P = \frac{1}{\psi} P_2$ sein, wo der Faktor ψ das
der Unrichtigkeit der Wage ist. Dann ist $P \cdot P = P_1 \cdot P_2$, als

§ 29. 79. Die Beziehung zwischen dem Ausschlags
Wage und dem Übergewicht ohne die spezielle An

greifenden gleichen Belastungen von je Pg kann man sich im Durchschnittspunkte M angreifend denken. Wird die Wage durch das Übergewicht p um den Winkel α verdreht, so greift $2P$ in M' an, und es besteht somit zwischen den statischen Momenten die Gleichung $p \,.\, Ca = Q \,.\, Cs + 2P \,.\, Cm$ oder $p\,(a \cos\alpha - h \sin\alpha) = Q \,.\, b \sin\alpha + 2P \,.\, h \cos\alpha$. Aus $tg\,\alpha = \frac{pa - 2Ph}{Qb + ph}$ ergibt sich für $h = 0$ wieder der Wert der Gl. (1). S. 133.

Fig. 144.



VIII. Mechanische Maschinen.

80. Mit welchem Rechte gilt uns die Gleichgewichtsbedingung an einer (einfachen oder zusammengesetzten, aber blofs mechanische, nicht kalorische, elektrische u. s. w. Kräfte verwertenden) Maschine zugleich auch als Arbeitsbedingung? § 80.

Antwort: Ist z. B. ein Hebebaum gemäß der Gleichgewichtsbedingung $Pp = Qq$ belastet und ist er in Ruhe, so mufs für kürzere oder längere Zeit eine andere Kraft $P' > P$ angewendet werden, um ihn überhaupt in Bewegung zu setzen, damit es zu dem für das „Arbeiten" wesentlichen Verschieben komme. Ist dabei P' nur „etwas" gröfser als P, so wird die erzielte Winkelbeschleunigung nur eine kleine sein und es wird erst nach längerer Zeit eine mäßig grofse Winkelgeschwindigkeit des Hebebaumes zustande gekommen sein. — Man beachte aber, dafs die Gleichgewichtsbedingung $Pp = Qq$ überhaupt nicht nur für den ruhenden, sondern ebenso auch für den mit einer beliebig kleinen oder grofsen konstanten Winkelgeschwindigkeit versehenen Hebebaum gilt. Während einer solchen konstanten (stationären) Bewegung werden dann von den Angriffspunkten der Kraft und der Last Wege gemäß $S:s = p:q$ zurückgelegt und es folgt also aus der Gleichgewichtsbedingung $Pp = Qq$ auch die Arbeitsbedingung $PS = Qs$. — Der in der Praxis gewöhnliche Fall, dafs der Hebebaum anfänglich in Ruhe ist und erst durch die Kraft $P' > P$ in Bewegung gesetzt, d. h. beschleunigt werden mufs, führt theoretisch wieder auf LA 55 zurück. Wie dort, sind auch hier die durch die veränderliche Kraft P (im Anlauf $P' > P$, im Endlauf $P'' < P$) verrichtete Arbeit und die durch die konstante Last Q verbrauchte Arbeit einander nur dann gleich, wenn der Hebebaum im Endzustande wieder zur Ruhe gekommen ist (allgemeiner: wenn er schliefslich wieder seine anfängliche Geschwindigkeit und somit seine kinetische Energie erhalten hat).

Für den Flaschenzug ist die entsprechende Betrachtung in § 30, S. 139 auch mit Rücksicht auf die zu überwindende Reibung durchgeführt worden, und sie ist leicht auf alle Maschinen zu übertragen.

Bemerkung: Völlig unzureichend ist es, die Verwendung z. B. des Hebels zum Heben von Lasten aus der Gleichgewichtsbedingung so zu erklären, dafs man

gewichte ein Zusammenwirken der „Kraft" und „Last" (sowie
keit" des „Unterstützungspunktes" darstellenden Kräfte) mit d
Teilchen der Hebelstange wirkenden **Molekularkräften** erf
könnte es scheinen, als sei die Fiktion einer blofsen „starren
Dicke eine überhaupt wertlose, weil sie nicht nur die wirklich
Verhältnisse nicht wiedergebe, sondern ihnen geradezu wider
Bedenken ist zu erwidern, dafs die Einführung des Begriffes
zunächst keinen anderen wissenschaftlichen Zweck hat, als fü
Drehmomente die **Kraftarme** darzustellen; bei diesen aber k
Tat nur auf die **Länge** an und somit gar nicht auf die Dicke
und die zwischen deren Teilchen wirkenden Kräfte. — Dagege
die physikalische Betrachtung der wirklichen Vorgänge an ei
unvollständig, wenn man sich auf die schliefsliche Gleichheit d
beschränken und nicht auf die über das einfache Hebelgesetz
Fragen eingehen wollte; vor allem, wie denn z. B. die Wirkung
überträgt auf die Teile der Hebelstange, an denen die „Last
vollständige Beschreibung und Erklärung der durch das Ang
eingeleiteten Vorgänge hätte sogar darauf einzugehen, dafs
Hebelstange, da diese nie vollkommen starr, sondern immer me
elastisch ist, **Wellenbewegungen** (§ 58, S. 222) bis ans
Stange fortpflanzen, dort reflektiert werden und erst durch I
seits und Umsatz in Wärme andererseits zu einem **Ruhe**
können, den man meistens als den einfachsten Fall des Gleichg
auffafst (— in Wahrheit ist für diesen aber nur konstante Gesc
stationären Ganges erforderlich; vgl. LA 55 u. 80). —
Hinsicht liefse die blofse Fiktion des „mathematischen" Hebel
ihn sich beschränkende Hebelgesetz tiefere Einsichten zu w
denn da das Hebelgesetz einen besonderen Fall der Gesetze für d
setzung von Kräften an starren Systemen bildet, d
setzung aber im Falle paralleler Kräfte sich der vorübergehen
der beiden Hilfskräfte $+H$, $-H$ (Fig. 94, S. 117) bedient, so n
werden, dafs z. B. bei einer sehr dünnen Stange diese Hilfskr

materielle **Achse** ist, sowie der sie unterstützenden Körper) eingegangen wird. — Es ist aber eben wegen der hiermit auftretenden Verwickelungen, deren mathematische Behandlung selbst überall schon wieder das Gesetz der statischen Momente voraussetzt, um so klarer ersichtlich, wie wertvoll trotz jener Einwendungen die Fiktion des mathematischen Hebels ist und bleibt, d. h. das **Abstrahieren** von allen anderen Umständen bis auf die Länge der Kraftarme. — Was insbesondere das **Gewicht** wirklicher Hebelarme betrifft, so wird es unwirksam, wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht; in jedem anderen Falle sind die Gewichte der Hebelarme ähnlich in Rechnung zu ziehen, wie es die Beispiele von den Wagebalken § 29 (S. 133) und LA 79 gezeigt haben.

82. Inwieweit trifft die theoretische Zurückführung der **Rolle** und des **Wellrades** auf den Hebel das Wesentliche in Einrichtung und Gebrauch jener Vorrichtungen? § 30.

Anleitung: Die virtuellen Verschiebungen (§ 30) haben bei den für Rolle und Wellrad substituierten Hebeln dasselbe Verhältnis, wie in Wirklichkeit. — Denkt man, nachdem Gleichgewicht hergestellt ist, die Schnur mit der Rolle fest verbunden, so mufs das Gleichgewicht bestehen bleiben; dies ist aber nur möglich, wenn das Hebelgesetz erfüllt ist. — Mehr Einsicht in das Wesen des Vorgangs gewinnt man, wenn man das **Seil** selbst als Vermittler der Kraftwirkung auffafst; die drehbare Rolle dient dann nur dazu, die Reibung beim Gleiten durch Reibung beim Rollen zu ersetzen.

83. Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für die **Rolle** (**beweglich** oder fix, bei **nicht** parallelen oder parallelen Schnüren) abzuleiten. § 30.

Fig. 145.

Anleitung: Die gleichen Kräfte $CA = CB = P$ bilden mit der Horizontalen die Winkel α und β, die Resultierende $CR = Q$ mufs im Fall des Gleichgewichts durch die Rollenachse O gehen (Fig. 145). Aus ähnlichen Dreiecken folgt: $CR : CA = ss' : sO$, oder $Q : P = 2r\cos\frac{\gamma}{2} : r$ oder

$$P = \frac{Q}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{Q}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

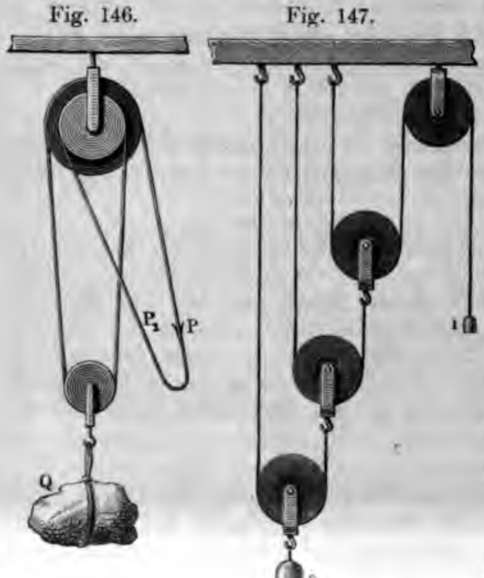
Die geometrischen Verhältnisse der Fig. 145 sind physikalisch zu verwirklichen, wenn die Achse der Rolle statt in festen Lagern etwa auf einer geschlitzten horizontalen Ebene beweglich ist; um die gewöhnlichen Verhältnisse der beweglichen Rolle zu erhalten, denke man Fig. 145 umgekehrt, die Last Q in der Richtung OC nach abwärts, die Kraft P bei A aufwärts ziehend und das Seil bei B befestigt.

84. Die Gleichgewichtsbedingung für den **Differentialflaschenzug** (und den **Potenzflaschenzug**) aufzustellen. § 30.

Anleitung: Zieht man bei P (Fig. 146) um eine Strecke s abwärts, so wird die gröfsere feste Rolle um die Bogenlänge s gedreht, von der kleineren

festen Rolle wickelt sich gleichzeitig ein Stück $\frac{s.r}{R}$ ab; daher wird die Ges[…] länge der Seilstücke, die die bewegliche Rolle tragen, um $s - \frac{sr}{R} = s\,\frac{R-r}{R}$ [… ver]kürzt, also die Last · Q um $\frac{s.(R-r)}{2R}$ gehoben. Mithin $P.s = Q\cdot\frac{s.(R-r}{2R}$

Fig. 146. Fig. 147.



Weil hier die **Differenz** R - im Zähler und daher auch Verhältnis $P:Q$ **beliebig** kl[ein] gemacht werden kann, heifst [die] Vorrichtung **Differentialflasch[en]**zug. (In Wirklichkeit sind s[tatt] des Seils Ketten angebracht, [um] das Gleiten zu vermeiden.)

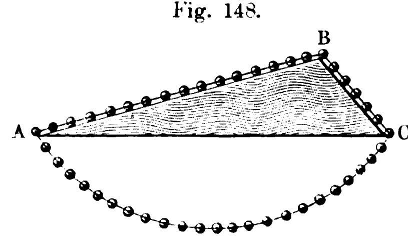
Wird die **bewegliche** R[olle] (Fig. 122, S. 135) statt z. B. du[rch] die Hand wieder durch eine bew[eg]liche Rolle, diese wieder durch e[ine] u. s. f. gehoben, so bedarf es hie[r] der Kräfte $\frac{1}{4}\,Q,\ \frac{1}{8}\,Q \cdots \frac{1}{2^n}$ daher der Name **Potenzflasch[en]**zug (Fig. 147; doch ist dieser unhandsam nicht im Gebrauch).

§ 80.

85. Stevins Ableitu[ng] der Gleichgewichtsbedi[n]gung für die schiefe Ebe[ne]

Anleitung: Da der Satz vom Kräfteparallelogramm, aus dem wir heute [das] Gleichgewicht an der schiefen Ebene am natürlichsten erklären, zur Zeit Galil[eis] und seines älteren Zeitgenossen Stevin nicht bekannt war, so half sich Ste[vin] durch ein Gedankenexperiment, das Fig. 148 veranschaulicht: Wir erwar[ten] nämlich von der über das dreiseit[ige] Prisma ABC gelegten Kette, dafs [sie] weder im Sinne ABC noch CBA „[von] selbst“ in Bewegung geraten werde (e[ine] Antezipation des Satzes von der Unmögli[ch]keit eines perpetuum mobile oder des Sat[zes] von der Erhaltung der Arbeit). Da al[so] auch der Kettenteil AC für sich [im] Gleichgewicht ist, so mufs das Bestreb[en] zu sinken, d. h. über die verschied[en] geneigten Ebenen herabzugleiten, gleich sein für die Kettenteile BA und $B[C]$. Da dies nun schiefe Ebenen von gleicher Höhe und verschiedenen Längen si[nd], so müssen die auf je eine Kugel der Kette längs der schiefen Ebene wirkend[en] Kräfte sich verkehrt verhalten wie die Anzahl der Kugeln, also auch verkeh[rt] wie die Längen der schiefen Ebenen selbst.

Fig. 148.

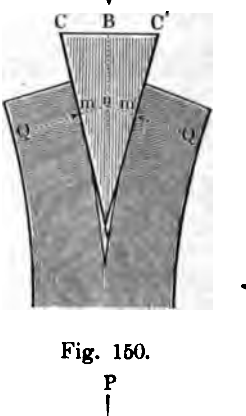


Ist BC vertikal, so folgt speziell $\frac{P}{Q} = \frac{h}{l}$ oder $Q = P\sin\varepsilon$.

86. Die Gleichgewichtsbedingung für den Keil abzuleiten. § 30.

Anleitung: Wird von der Reibung zunächst ganz abgesehen, so entspricht dem Vorgange z. B. beim Spalten eines Holzblockes (Fig. 149) am besten, wenn an die zu überwindenden Kohäsionskräfte Q des Holzes, e den Keil herauszuschnellen suchen, als normal zu en Seiten des Keiles wirkend denkt. Dagegen würden B. zwei Körper mit entsprechenden Führungen (Fig. 150) ormal gegen die Symmetrale AB des Keiles wirken. t der Winkel des Keiles 2ε, so entsprechen die beiden lle den Figg. 48 und 49, S. 67, wenn wir uns denken, fs die Symmetrieebene des Keiles unbeweglich sei und der beweglichen wagerechten Unterstützungsfläche der schiefen ene entspreche. Da aber der Keil von beiden Seiten herdrückt wird, so gilt im ersten Falle $\frac{P}{2} = Q \sin \varepsilon$, im eiten Falle $\frac{P}{2} = Q \operatorname{tg} \varepsilon$; in Worten?

Fig. 149.



Durch die Reibung wird aber dieses theoretische Verltnis bei den praktischen Anwendungen (und zwar sowohl kinetischer, wie beim Holzspalten, als auch in statiher, wie beim Befestigen mittels Keile) fast ganz verdeckt.

Fig. 150.

87. Einrichtung und Gebrauch der **Schraube** eometrisch, phoronomisch, dynamisch und ergetisch zu erläutern. § 30.

Anleitung: Geometrisch — vgl. math. Anh. 25.

Phoronomisch — vgl. § 26. — Dabei ist die Begung längs der Achse eine rein fortschreitende, die ch Abzug dieser Bewegung übrig bleibende eine rein ehende. Denken wir uns die Schraubenmutter als fest, entspricht einem Fortschreiten um die **Höhe** h eines hraubenganges eine Drehung um den **Umfang** u eines hraubenganges.

Dynamisch ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung $P : Q = h : u$, wenn r uns die Achse der Schraube als vertikal und Q längs der Achse wirkend nken. Falls nämlich dann die Spindel reibungslos in der Mutter gleiten könnte, ürde durch den Zug von Q die Spindel längs der Gänge der Mutter wie über hiefe Ebenen herabzugleiten suchen, und der hierzu erforderlichen Drehung irkt die tangential, also wagrecht am Umfang der Spindel angreifende Kraft entgegen. Es gilt also die Gleichgewichtsbedingung für die parallel der Basis r schiefen Ebene angreifende Kraft (§ 18, Gl. 4): $P : Q = h : b$, wobei $b = u$.

Energetisch ergibt sich dieselbe Gleichgewichtsbedingung daraus, dafs mäfs der phoronomischen Verschiebungen (s. oben) einem Lastweg h der Kraftg u entspricht, und $P . u = Q . h$.

Näheres zur Mechanik der Drehbewegungen.

88. Man forme aus folgenden Zahlenangaben von Umdrehungseiten (Rotationsdauern), Umdrehungszahlen (Tourenzahlen) und § 31.

Winkelgeschwindigkeiten (§§ 12, 31) numerische Aufgabe[n] den allgemeinen Formeln $n = \frac{1}{T}$ und $\alpha = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$. (Vgl. L[A]

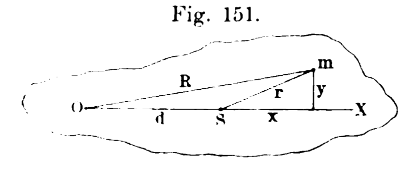
	T sec		n sec^{-1}	α sec
Sekundenzeiger	1 Minute	mittlerer Sonnenzeit	$\frac{1}{60} = 0{,}016\,7$	0,104
Minutenzeiger	1 Stunde		$\frac{1}{3600} = 0{,}000\,278$	0,001
Stundenzeiger	12 Stunden		$\frac{1}{43\,200} = 0{,}000\,023\,148$	0,000
Erde	1 Sterntag		$\frac{1}{86\,400} = 0{,}000\,011\,574$ (in 1 Sternsekunde)	0,000 (Sterns
Sonne	etwa 25 Tage		—	—
Schleifstein	„ 1 Sek.		etwa 1	etwa
Schiffsschraube	1 bis ½ „		1 bis 2	6 bis
Dynamomaschine, grofse	½		2	12
Dynamomaschine, kleine	$^1/_{20}$		20	12
Lavalsche Dampfturbine	$^1/_{100}$ bis $^1/_{500}$		100 bis 500	628 bis
Foucaults Spiegel (§ 122)	$^1/_{800}$		800	502

IX. Massenmomente (Trägheitsmomente).

§ 82. Vorbemerkung: In den LA 89 bis 95 seien Linien, Flächen und K[örper] als homogen mit Masse von der Dichte d belegt vorausgesetzt. Die Ge[samt]masse des Gebildes sei Mg und sie sei in eine sehr grofse Anzahl n gl[eicher] Elemente m geteilt, die die Abstände ϱ, 2ϱ, 3ϱ . . . von der Drehachse haben. Die Berechnungen der Trägheitsmomente laufen dann teils hina[us auf] die Summierung der Reihen $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$ (auch $1^3 + 2^3 + \cdots n^3 \doteq \frac{n^4}{4}$; $1^4 + 2^4 + \cdots n^4 \doteq \frac{n^5}{5}$; . . . Anh. Nr. 10) lassen sich Summierungen umgehen durch Kunstgriffe, wie nach Fig. 160 lassen sich mittels des allgemeinen Satzes LA 89 die Massenmomente auf berechnete zurückführen. — Man gebe die jeweilige Lage der Achse X [der] Gebilde nach den Figuren 151 bis 161 in Worten an.

89. Ein Körper von der Masse Mg habe in Bezug auf eine [durch] den Schwerpunkt S gehende Achse das Massenmoment $\mathfrak{M}_s$, in [Bezug] auf eine ihr im Abstande d cm parallele Achse das Massenmo[ment] $\mathfrak{M}_0$. — Zu zeigen, dafs $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_s + Md^2$.

Fig. 151.



Ableitung: $\mathfrak{M}_0 = \Sigma m R^2$; $\mathfrak{M}_s =$ (Fig. 151, deren Zeichenebene irgend e[ine zu] den beiden parallelen Achsen normale sei). — Es ist $R^2 = y^2 + (x + d)^2 = y[^2 + x^2] + 2xd + d^2 = r^2 + 2xd + d^2$. — $\Sigma m R^2 = \Sigma m r^2 + \Sigma m \,.\, 2xd + \Sigma m$

$m \,.\, 2\,x\,d = 2\,d\,\Sigma m\,x = 0$, weil $\Sigma m x = 0$ (LA 70). — Ferner $\Sigma m d^2 = d^2 \Sigma m$ $M d^2$. — Somit $\Sigma m R^2 = \Sigma m r^2 + M d^2$.

Speziellere und numerische Anwendungen in LA 97, 98 u. s. w.

90. Berechnung von Massenmomenten einfach gestalteter Massen: trecke (Fig. 152) und Rechteck (Fig. 153): $\mathfrak{M} = {}^1/_3\, M l^2 \ldots\ldots (1)$.

§ 32.

Beweis: Denken wir uns die Länge l unterteilt n sehr kurze, gleiche Strecken ϱ, und denken wir uns e Masse m des ersten Elementes im Abstande ϱ, die s nächsten in $2\,\varrho$, des dritten in $3\,\varrho \ldots$ cm von der chse vereinigt, so ist:

$$= m\varrho^2 + m\,(2\,\varrho)^2 + m\,(3\,\varrho)^2 + \cdots + m\,(n\,\varrho)^2$$
$$= m\varrho^2 \,.\, (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$\doteq m\varrho^2 \cdot \frac{n^3}{3} = {}^1/_3\,(m n)\,(n\varrho)^2 = {}^1/_3\, M l^2.$$

X l=nρ Fig. 152. Fig. 153. l Fig. 154. l l X

Das Massenmoment $\mathfrak{M}'$ einer Strecke ig. 154) von der Länge $L = 2\,l$ cm mit der Masse $M' = 2\,M$ in Bezug auf ne Streckensymmetrale setzt sich zusammen aus den nach Gl. (1) berechten Massenmomenten der beiden Hälften

$$\mathfrak{M}' = 2 \,.\, {}^1/_3\, M \,.\, l^2 = 2 \,.\, {}^1/_3 \,.\, {}^1/_2\,(2\,M) \,.\, {}^1/_4\,(2\,l)^2 = {}^1/_{12}\, M' L^2 \,.\,.\,.\,. \quad (2)$$

Dies ergibt sich auch nach LA 89 aus Gl. (1); denn es entsprechen einander

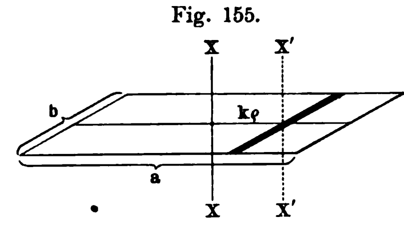
$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} = {}^1/_3\, M' L^2, \quad \mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}', \quad d = \frac{L}{2}\,.$$

so

$$\mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_0 - M' d^2 = {}^1/_3\, M' L^2 - M' \frac{L^2}{4} = {}^1/_{12}\, M' L^2.$$

Wesentlich anders gestaltet sich die Berechnung für das Massenmoment des echtecks, wenn die Drehungsachse r Ebene des Rechtecks normal ist ig. 155). Sind die Dimensionen des echtecks a cm und b cm, so läſst es sich rallel zur Seite b in Streifen von der nge b und der Breite ϱ zerlegen, die nn von der Achse XX die veränderhen Abstände $\varrho,\ 2\,\varrho,\ 3\,\varrho \ldots n\,\varrho = \frac{a}{2}$ ben.

Fig. 155.



Ist die Masse eines solchen Streifens m, so hat er in Bezug auf seine gene Schwerpunktsachse $X'X'$ das Massenmoment $\mathfrak{m}' = {}^1/_{12}\, m b^2$. In Bezug f die Achse XX hat also der $k$te Streifen (nach LA 89) das Massenmoment $= \mathfrak{m}' + m\,(k\,\varrho)^2$. Für das halbe Rechteck rechts von XX ist also das Massenoment: $\frac{\mathfrak{M}}{2} = n\,\mathfrak{m}' + m\varrho^2\,(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$. Für ein sehr groſses n ist dann

$$\frac{\mathfrak{M}}{2} = n \,.\, {}^1/_{12}\, m b^2 + m\varrho^2\,\frac{n^3}{3} = n m \,.\left[\frac{b^2}{12} + \frac{(n\varrho)^2}{3}\right] = \frac{M}{2}\left[\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{3} + \frac{b^2}{12}\right],$$

her für das ganze Rechteck $\mathfrak{M} = \frac{M}{12}\,(a^2 + b^2)$. — (Anwendung LA 98.)

An die Grundformel für den einzelnen Punkt $\mathfrak{m} = m r^2$ schlieſsen sich ferner mittelbar die Massenmomente für

Kreislinie (Fig. 156) und **Zylindermantel** (Fig. 157): $\mathfrak{M} = Mr^2$...

Beweis: Da hier r konstant, so ist $\Sigma m r^2 = r^2 \Sigma \mathfrak{m} = Mr^2$.

Dagegen **Kreislinie** (Fig. 160): $\mathfrak{M} = {}^1/_2\, Mr^2 \ldots (4)$.

Hier gelingt die Summierung, indem man je zwei voneinander um 90° stehende Massenteilchen $m_1 = m_2 = m$ des Halbkreises zusammenfafst (Fig. Denn da $mx^2 + my^2 = m(x^2 + y^2) = mr^2$, so ist für $\frac{n}{2}$ solche Paare

$$\mathfrak{M} = {}^1/_2\,(m + m + \cdots + m)\,r^2 = {}^1/_2\, Mr^2. \text{ — Ähnlich:}$$

Kreisscheibe (Fig. 158) und **Vollzylinder** (Fig. 159): $\mathfrak{M} = {}^1/_2\, MR^2$..

Hier ist zwar für je einen schmalen, ringförmigen Streifen das M moment $\mathfrak{m} = mr^2$ nach (3) zu berechnen; aber die Umfänge und daher die Massen der einz Ringe nehmen selbst der proportional dem radius r, daher die M momente der einz Ringe proportional Ist $R = n\varrho$ der äuf Radius der Scheibe des Zylinders), h die der Scheibe (bzw. die des Zylinders), so i $= R^2 \pi \,.\, h \,.\, d$. — A Scheibe ist für den von der Breite ϱ und Radius $n\varrho$ die Ring $2(n\varrho)\pi \,.\, \varrho$, daher Masse $m = 2(n\varrho)\pi \,.\, \varrho$ also $\mathfrak{m} = 2(n\varrho)\pi\varrho h d$

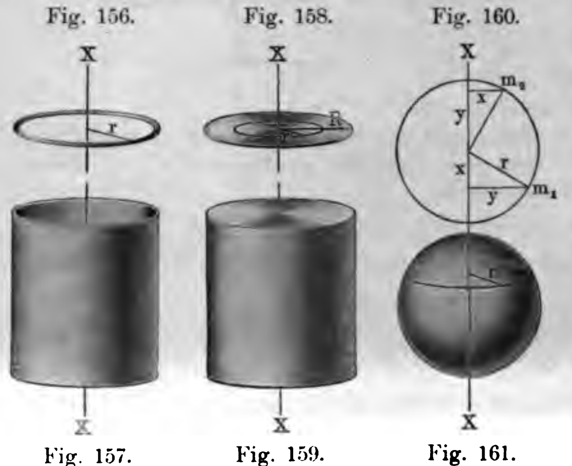


Fig. 156. Fig. 158. Fig. 160.

Fig. 157. Fig. 159. Fig. 161.

$= 2\varrho^4 \pi h d \,.\, n^3$ und $\Sigma \mathfrak{m} = 2\varrho^4 \pi h d \,.\, \Sigma n^3 = 2\varrho^4 \pi h d \cdot \frac{n^4}{4} = {}^1/_2 (n\varrho)^4$

$= {}^1/_2 (n\varrho)^2 \pi h d \,.\, (n\varrho)^2 = {}^1/_2 R^2 \pi h d \,.\, R^2 = {}^1/_2 M R^2.$

Ein **Ring** von endlicher Breite $\delta = R - r$ hat daher $\mathfrak{M} = {}^1/_2 (R^4 - r^4$
$= {}^1/_2 (R^2 - r^2) \pi h d\, (R^2 + r^2) = {}^1/_2 M(R^2 + r^2) \ldots$ (5a).

Kugel (Fig. 161): $\mathfrak{M} = {}^2/_5\, MR^2$.

Beweis: Die Kugel werde zerlegt in Kreisscheiben normal zur Achse von der Dicke h und dem wechselnden Radius r; dann ist für je eine Sc $m = r^2 \pi \,.\, h \,.\, d$ und $\mathfrak{m} = {}^1/_2 (r^2 \pi \,.\, h \,.\, d) r^2 = {}^1/_2 \pi h d \,.\, r^4$. — Für die k^{te} Sc vom Kugelmittelpunkt an ist $r^2 = R^2 - (kh)^2$, also $r^4 = R^4 - 2R^2(kh)^2 +$ — Für die Halbkugel ist dann:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \mathfrak{m} = {}^1/_2 \pi h d [n \,.\, R^4 - 2R^2h^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + h^4(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots$$

für die ganze Kugel ist also:

$$\mathfrak{M} = \pi h d \left(n \,.\, R^4 - 2R^2h^2 \cdot \frac{n^3}{3} + h^4 \cdot \frac{n^5}{5}\right) = \pi \,.\, nh \,.\, d[R^4 - {}^2/_3 R^2 \,.\, (nh)^2 + {}^1/_5 ($$

und wegen $nh = R$ ist:

$$\mathfrak{M} = \pi \,.\, R \,.\, d \,.\, R^4(1 - {}^2/_3 + {}^1/_5) = \pi R^5 d \,.\, {}^8/_{15} = {}^2/_5 \cdot {}^4/_3 \pi R^3 \cdot d \cdot R^2 = {}^2/_5$$

91. Ein zerlegbares Rädchen der Atwoodschen Fallmaschine besteht aus einem ringförmigen Radkranz vom Radius r cm und der Masse m_1 g, aus Speichen von der Gestalt rechteckiger Plättchen mit der Länge $2r$ cm und der Gesamtmasse m_2 g und aus der zylindrischen Achse vom Halbmesser ϱ cm und der Masse m_3 g (Fig. 162). Eine wie grofse Masse $2\mu'$ ist dann zur Masse 2μ der beiden unbelasteten Träger hinzuzurechnen? §§ 16, 32.

Anleitung: 1. Für den Radkranz ist $\mathfrak{m}_1 = m_1 r^2$. Z. B. für $m_1 = 19$ g und $r = 5$ cm ist $\mathfrak{m}_1 = 475$ g cm². Es wäre einfach die Masse des Radkranzes in die der Träger (also zu je einem Träger noch $9\frac{1}{2}$ g) einzurechnen, falls Speichen und Achse als massenlos angesehen werden dürften. Es ist aber 2. für die Speichen $\mathfrak{m}_2 = \frac{1}{3} m_2 r^2$. Da die Masse je einer Speiche nur 1 g, also $m_2 = 2$ g, so ist $\mathfrak{m}_2 = 16\frac{2}{3}$ g cm², somit nur $3\frac{1}{2}$ Proz. von $\mathfrak{m}_1$. Dagegen ist 3. für die zylindrische Stahlachse zwar $m_3 = 100$ g, aber wegen $\varrho = \frac{1}{4}$ cm (d. h. der Durchmesser der Achse $\frac{1}{2}$ cm) ist $\mathfrak{m}_3 = \frac{1}{2} m_3 \varrho^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (\frac{1}{4})^2 = 3\frac{1}{8}$ g cm², trotz der im Vergleich zur Masse des Radkranzes bedeutenden (fast fünffachen) Masse der Achse ihr Massenmoment doch nur $\frac{2}{3}$ Proz. vom Massenmoment des Radkranzes; also zusammen mit dem der Speichen $(3\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) = 4\frac{1}{6}$ Proz. Mit anderen Worten: Wenn die Masse von Speichen und Achse in den Radkranz übertragen wäre, gäbe dies hier nur einen Massenzuwachs von $\frac{16\frac{2}{3} + 3\frac{1}{8}}{25} = \frac{19}{24}$ g, und es sind also zu je einem Träger statt der $9\frac{1}{2}$ g einzurechnen $\left(9\frac{1}{2} + \frac{19}{48}\right)$ g $\neq 10$ g.

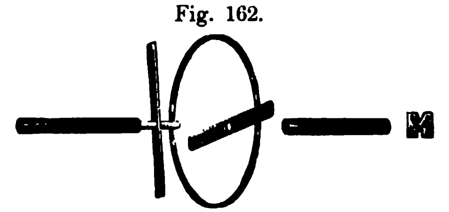


Fig. 162.

92. Numerische Auswertung der bei den Versuchen mit dem **Drehungs- und Trägheitsmomentenapparat** (vgl. Fig. 140, S. 147) **auftretenden Gröfsen: Massenmoment, Drehmoment und Winkelbeschleunigung (aus dieser dann Bahnbeschleunigung des Fadens und Fallstrecken der Träger).** § 32.

Anleitung: Die Kreisscheiben haben die Halbmesser $a_1 = 5$ cm und $a_2 = 10$ cm. Ihre Dicken sind so gewählt, dafs die Massen gleich sind 50 bzw. 200 g. Die Massenmomente sind (nach $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M a^2$) 625 bzw. 10000 g cm². Die Stäbe sind Aluminiumstreifen von $2l = 44$ cm Gesamtlänge (22 cm von der Achse an), 0,3 cm Dicke und 2 cm Breite. Die Masse je eines Stabes ist 60 g, sein Massenmoment (nach $\frac{1}{3} M l^2$) 9680 g cm², genauer 9700 (nach $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M (l^2 + b^2)$, wo $b = 1$ cm). Es kommen noch hinzu die Massenmomente der Stahlachsen von $r = 0,3$ cm und $m = 27$ g, sowie zweier die Holzscheiben an den Achsen haltenden Messingscheibchen von $r = 1,4$ cm und zusammen $m = 21$ g. Für sie ist (nach $\mathfrak{m} = \frac{1}{2} m r^2$) $\mathfrak{m}$ nur 1,22 bzw. 20,58, also zusammen 21,8 g cm². Wir können also die Massenmomente abrunden auf $2 \cdot 10^4$ und $3 \cdot 10^4$ g cm²; nämlich:

Für das kleine Gestell: $625 + 2 \cdot 9722 \neq 20000$ g cm²; Diff.: > 69, d. i. 0,3 Proz.,
für das grofse Gestell: $10000 + 2 \cdot 9722 \neq 30000$ g cm²; Diff.: < 556, d. i. 2 Proz.

Diese Abrundungen rechtfertigen sich dadurch, dafs infolge des Schli Massen von 60 g durchschnittlich noch etwas mehr von der Achse abstehe An den Schlitzen lassen sich beliebige Massen (m) in beliebigen Ab (r) von der Achse festklemmen; ihre Massenmomente ($m r^2$) werden dann z der Gestelle einfach addiert.

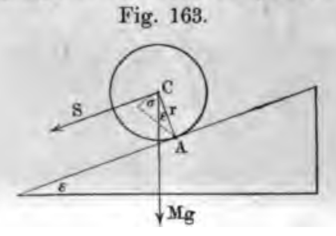
Um den Umfang jeder Scheibe ist ein Faden geschlungen, an dem ei von der Masse $\mu = 5$ g hängt, und an dem also die Schwere mit einer K 5.981 Dyn angreift. Auf ihn können noch beliebige weitere Massen m werden, so dafs das Drehmoment $= (\mu + m)\, g \,.\, a$ (Dyn, cm).

Die Winkelbeschleunigung der Gestelle und die Bahnbeschleu des Fadens berechnen sich gemäß des Versuchs § 31, S. 141 und sin *Versuche* über die Fallstrecken der Träger zu bestätigen.

§§ 2, 32. **93.** Zu beweisen, dafs die Beschleunigung beim Roll der schiefen Ebene für den Zylindermantel nur $^1/_2$, für den zylinder $^2/_3$, für die **Kugel** $^5/_7$ der Beschleunigung beim Gleit

Anleitung: Wird durch die genannten rollenden Körper eine vertikal gelegt, so legt der Mittelpunkt C (Fig. 163) des Schnittkreises in jedem Zeit τ sec längs CS die Strecken $s = \frac{g_\varepsilon}{2}\tau^2$

Fig. 163.



Dabei läfst sich s als Bogen σ eines Krei Halbmesser r auffassen, dessen Mittelpu augenblickliche Berührungspunkt A is Rollen läfst sich also als eine Drehung auffassen, deren Winkelbeschleunigung ist und bewirkt wird durch das Kraftm $m g \,.\, r \sin \varepsilon$. Da A keine Schwerpunktsachse ist, so hat das Massenmom Bezug auf A den Wert $\mathfrak{M} + M r^2$, also

$$\beta = \frac{m g \sin \varepsilon}{\mathfrak{M} + M r^2} \text{ und } b = r\beta = \frac{M r^2}{\mathfrak{M} + M r^2} \cdot g \sin \varepsilon = q \cdot g_\varepsilon,$$

wo $g \sin \varepsilon = g_\varepsilon$ und $\frac{M r^2}{\mathfrak{M} + M r^2} = q$ ein jedenfalls verkleinernder Fakt

Nach LA 90 ist für den Zylindermantel $\mathfrak{M} = M r^2$, also $q = \frac{1}{1 + 1} =$

für den Vollzylinder $\mathfrak{M} = {}^1/_2 M r^2$, „ $q = \frac{1}{{}^1/_2 + 1} =$

für die **Kugel** $\mathfrak{M} = {}^2/_5 M r^2$, „ $q = \frac{1}{{}^2/_5 + 1} =$

94. Eine Holzscheibe, die an einer Stelle der Peripherie mit Bleimasse B beschwert ist, läuft, auf eine schiefe Ebene vom Neig winkel ε gestellt, bergan. Unter welcher Bedingung und mit we Beschleunigung?

Antwort: Bei der augenblicklichen Stellung der Scheibe nach Fig. 164 die Schwerkraft mit dem Drehmomente $M g\,(s \sin \varphi - r \sin \varepsilon)$ in Bezug Achse A im Sinne einer Aufwärtsbewegung. Für diesen Augenblick ist

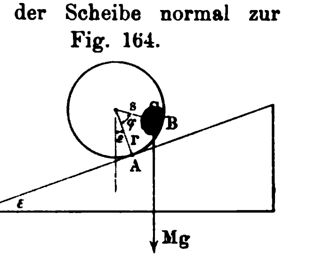
$$\beta = \frac{M(s \sin \varphi - r \sin \varepsilon)}{\mathfrak{M} + M r^2} \cdot g.$$

$s \neq r$ und $\mathfrak{M} = Ms^2 \neq Mr^2$ ist, so folgt:

$$\beta = \frac{Ms(\sin\varphi - \sin\varepsilon)}{2Mr^2}\,g \text{ und } b = \frac{g}{2}(\sin\varphi - \sin\varepsilon).$$

erbei ist b mit φ veränderlich und wird in dem Augenblicke Null, wo $\varphi = \varepsilon$, h. wo der zum Schwerpunkt S gezogene Radius der Scheibe normal zur ıiefen Ebene steht. (Was für ein Verhalten der heibe entspricht einem negativen φ?)

Fig. 164.

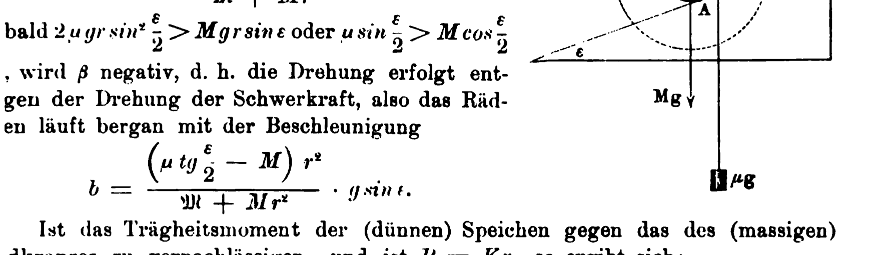


Beim „berganlaufenden Doppelkegel" (*Versuch*) wegen des variablen r die Rechnung noch verɔkelter. Wesentlich ist das Sinken des Schwernktes zugleich mit seiner geometrischen Achse, ange das Rollen nach aufwärts in einem Abwickeln ıner kleinerer Querschnittsumfänge besteht.

95. Die Welle eines Rädchens (z. B. von der Fallmaschine oder ɘ Achse der Scheiben Fig. 165) ist auf das Schienenpaar aufgesetzt, ıd an der Welle wirkt mittels Fadens ein Gewichtchen von μ g. ıter welcher Bedingung und mit welcher Beschleunigung tritt trotz nkens des Gewichtchens ein Berganrollen des Rädchens ein?

Antwort: Zum Drehmoment der Schwerkraft $Mg \,.\, r\sin\varepsilon$ in Bezug auf die genblickliche Achse A tritt noch das Moment der Kraft μg im Betrage von $\mu g(r - r\sin\varepsilon) = 2\mu g r \sin^2\frac{\varepsilon}{2}$. Die Winkelschleunigung des Systems ist somit, und zwar Sinne der Drehung infolge der Schwerkraft:

Fig. 165.



$$\beta = -\frac{Mgr\sin\varepsilon - 2\mu g r \sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{\mathfrak{M} + Mr^2}.$$

bald $2\mu g r \sin^2\frac{\varepsilon}{2} > Mgr\sin\varepsilon$ oder $\mu\sin\frac{\varepsilon}{2} > M\cos\frac{\varepsilon}{2}$, wird β negativ, d. h. die Drehung erfolgt entgen der Drehung der Schwerkraft, also das Rädeu läuft bergan mit der Beschleunigung

$$b = \frac{\left(\mu\,tg\frac{\varepsilon}{2} - M\right) r^2}{\mathfrak{M} + Mr^2} \cdot g\sin\varepsilon.$$

Ist das Trägheitsmoment der (dünnen) Speichen gegen das des (massigen) dkranzes zu vernachlässigen, und ist $R = Kr$, so ergibt sich:

$$= {}^1\!/_2\, mr^2 + (M - m)K^2r^2 \text{ und damit } b = \frac{\mu\,tg\frac{\varepsilon}{2} - M}{(^1\!/_2 - K^2)m + (1 + K^2)M} \cdot g\sin\varepsilon.$$

. Physisches Pendel. Drehschwingungen im allgemeinen.

96. Die Abhängigkeit zwischen Schwingungsdauer und Neigungsnkel bei Machs Neigungspendel (Fig. 166) zu entwickeln. § 38.

Anleitung: Bei wagrechter Drehungsachse unterliegen die einzelnen Massennkte den Schwerebeschleunigungen g bezw. $g\sin\varphi$. Wird die Drehungs-

achse aus der wagrechten Lage um ν^0 geneigt, so sind die entsprechenden Beschleunigungskomponenten nur mehr $g \cos \nu$ bzw. $g \sin \psi \cdot \cos \nu = g \cos \nu$.



Fig. 166.

Daher ist auch die Schwingungsdauer $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (wo l die reduzierte Pendellänge) nunmehr $T_\nu = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \nu}}$. Soll z. B. $T_\nu =$ ... sein, so mufs $\cos \nu = \frac{1}{4}$, also $\nu = 75^0\ 31'$ ...

§ 88. **97. Die Formel für die Schwingungsdauer des physischen zusammengesetzten Pendels zu spezialisieren für die des mathematischen (punktuellen) Pendels.**

Ableitung: In $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{M g d}}$ wird für ein Pendel mit nur einem Massenpunkt m und der Pendellänge l:

$$\mathfrak{M} = m l^2, \quad M = m, \quad d = l; \quad \text{also } T = 2\pi \sqrt{\frac{m l^2}{m g l}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

98. Der Stab des Apparates für starre Systeme (Figg. 82 (S. ...) 141 (S. 148), habe die Dimensionen $a = 50$ cm, $b = 3$ cm, $c = \frac{1}{3}$ cm, Dichte $d = 8{,}01$ g cm^{-3}. Wie grofs ist sein Massenmoment $\mathfrak{M}_s$ für die zu c parallele Schwerpunktsachse, wie grofs sind seine Massenmomente für eine in irgend welchen anderen Löchern angebrachte Drehungsachse und wie grofs die zugehörigen Schwingungsdauern? (Vgl. LA 10...)

Antwort: Die Masse $M = a b c \cdot d = 400{,}5$ g $\neq 400$ g (diese Annäherung schon mit Rücksicht auf die Massenverluste bei den Bohrungen). Ferner ist

$$\mathfrak{M}_s = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) = 83\,738 \neq 84\,000 \text{ g cm}^2$$

(diese Annäherung mit Rücksicht auf die vorspringenden Ösen an den E... Für eine Drehungsachse, die z. B. in $x = 20$ cm Abstand von der Schwerpunktsachse in der Längssymmetrale des Stabes angebracht ist, ist $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_s + \ldots$ also für die abgerundeten Werte von M und $\mathfrak{M}_s$ ist $\mathfrak{M}_0 = 244\,000$ g cm^2. ...

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_0}{P x}} = 2\pi \sqrt{\frac{244\,000}{400 \cdot 981 \cdot 20}} = 1{,}11 \text{ sec.}$$

12, 3. 99. Eine homogene Kugel von r cm Halbmesser sei L cm $= n$ ... (wo $n > 1$) oberhalb des Kugelmittelpunktes mittels eines Fa... (Drahtes) aufgehängt. Zu zeigen, dafs für dieses physische Pendel der Schwingungsmittelpunkt um $\lambda = \frac{2}{5n} r$ cm unterhalb des Kugelmittelpunktes liegt, wenn a) die Masse m des Fadens als gegen die M...

M der Kugel verschwindend angenommen wird. b) Was ändert sich an dem Ergebnis, wenn $m = \frac{1}{k} M$ (wo $k > 1$)?

Anleitung: a) Die reduzierte Pendellänge ist allgemein $l = \frac{\mathfrak{M}}{Md}$. Ferner ist für eine nicht durch den Schwerpunkt gehende Achse das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_s + Md^2$. Für die Kugel ist $\mathfrak{M}_s = {}^2/_5\, Mr^2$, also $\mathfrak{M}_0 = {}^2/_5\, Mr^2 + ML^2$. Somit $l = \frac{M({}^2/_5 r^2 + L^2)}{ML} = L + {}^2/_5 \frac{r^2}{L} \cdots (1)$. — Ist also $L = nr$, so ist $\lambda = {}^2/_5 \frac{r}{n}$, d. h. in je gröſserem Abstande von ihrem Mittelpunkte die Kugel aufgehängt ist, um so weniger kommt der Schwingungsmittelpunkt unter den Kugelmittelpunkt zu liegen, aber erst für $n = \infty$ (d. h. wenn der Kugelhalbmesser verschwindend klein ist gegenüber der Fadenlänge) wird $\lambda = 0$, und der Mittelpunkt ist wirklich Schwingungsmittelpunkt (also es wäre das physische (zusammengesetzte) Pendel in ein mathematisches (punktuelles, einfaches) übergegangen).

b) Ist der Faden nicht masselos, so ändert sich die reduzierte Pendellänge in $l' = \frac{\mathfrak{M}'}{M'd'}$, wo nach dem Satze über die statischen Momente $M'd' = (M+m)d$ $= ML + m\frac{L-r}{2}$, und nach LA 89 ist $\mathfrak{M}' = {}^1/_3\, m(L-r)^2 + {}^2/_5\, Mr^2 + ML^2$.

Daher ist: $l' = \frac{{}^1/_3\, m[(n-1)r]^2 + {}^2/_5\, kmr^2 + km(nr)^2}{{}^1/_2\, m(n-1)r + kmnr} = \frac{{}^1/_3 (n-1)^2 + {}^2/_5 k + kn^2}{{}^1/_2 (n-1) + kn} r. \ (2)$

Z. B. für eine Kugel von 5 kg und einen Draht von 10 g ist $k = 500$; bei einem Halbmesser der Kugel von 10 cm und einer Drahtlänge von 5 m, also einem Abstande des Aufhängepunktes vom Kugelmittelpunkt von 5,1 m ist $n = 51$. Dann wird $l = 50{,}99 \, . \, r$; der Schwingungsmittelpunkt liegt also $0{,}01 \, . \, r$, d. i. 1 Proz. des Kugelhalbmessers oberhalb des Kugelmittelpunktes.

Spezialfälle zu Gl. (2): α) Für einen besonderen Wert von k (d. h. bei einem bestimmten Verhältnis der Massen von Faden und Kugel) kann nun auch wieder der Schwingungsmittelpunkt in den Kugelmittelpunkt fallen. Dann ist nämlich $l = L = nr$, oder $\frac{{}^1/_3 (n-1)^2 + {}^2/_5 k + kn^2}{{}^1/_2 (n-1) + kn} r = nr$, und es muſs k zu n in der Beziehung ${}^2/_5 k = {}^1/_6 (n-1)(n+2)$ stehen.

β) Nehmen wir in Gl. (2) wieder $k = \infty$, d. h. die Fadenmasse wieder verschwindend gegen die Kugelmasse, so wird wieder:

$$\frac{\frac{{}^1/_3 (n-1)^2}{k} + {}^2/_5 + n^2}{\frac{{}^1/_2 (n-1)}{k} + n} r = \frac{{}^2/_5 + n^2}{n} r = nr + \frac{2}{5n} r = L + \lambda;$$ in Worten?

100. In der Gleichung für die reduzierte Pendellänge ist das Massenmoment $\mathfrak{M}_0$ in Bezug auf die Pendelachse zu ersetzen durch das Massenmoment $\mathfrak{M}_s$ in Bezug auf eine zur Pendelachse parallele Schwerpunktsachse. § 33.

Ableitung: $l = \frac{\mathfrak{M}_0}{Md} = \frac{\mathfrak{M}_s + Md^2}{Md} = \frac{\mathfrak{M}_s}{Md} + d.$

in Bezug auf sie die Schwingungsdauern einander gleich sind, zierten Pendellängen $l = l'$. — Behauptung: Diese reduziert zugleich der Schneidenabstand ab; also wenn die Abstände Schwerpunkte $aS = d$, $bS = d'$, so ist zu beweisen $l = l' =$ Die allgemeine Beziehung $(l - d)\,d = (l' - d')\,d'$ (LA 101) wird $(l - d)\,d = (l - d')\,d'$, was nur sein kann, wenn $l = d +$ $= ld' - d'^2$; $ld - ld' = d^2 - d'^2$; $l(d - d') = (d + d')\,(d$ Schlufs auch für $d = d'$?].

§ 33. **103.** Den Satz vom **Reversionspendel** für seinen Endpunkt und dann um den zugehörigen **Sch punkt** schwingenden **homogenen geraden Stab** zu

Anleitung: Der Stab habe die Länge L cm und die Ma zierte Pendellänge in Bezug auf den Endpunkt sei l, in Bezug „Schwingungsmittelpunkt" l'. Dann ist $l = \frac{\mathfrak{M}_0}{Md} =$ Ferner für einen Drehungspunkt im Abstande $^2/_3\,L$ vom Ende, al punkt ist $\mathfrak{M}_{0'} = M\frac{L^2}{12} + M\frac{L^2}{36} = {}^1/_9\,ML^2$. Somit $l' = \frac{^1/_9}{M}$

Numerisches Beispiel und *Versuch* nach LA 98.

§ 33. **104.** Die Gleichung $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\theta}}$ für **Drehschwing**

Anleitung: Während in der Gleichung $\omega = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}_0}$ für d $\mathfrak{K} = -Ps$ gewesen war, ist für den einfacheren Fall der Dr das Kraftmoment direkt proportional dem Verdrehungswinkel (wo das „—" bedeutet, dafs die Winkel von der Ruhelage nigungen zu ihr hin gezählt werden). Durch beiderseitige M (dem Abstand eines beliebigen Punktes von der Drehungsach

XI. Arbeit und Energie bei Rotationen.

105. Einem ruhenden System werde eine Winkelgeschwindigkeit α um eine Achse erteilt, in Bezug auf die dem System das Massenmoment $\mathfrak{M}$ zukommt; zu zeigen, dafs das Überwinden des Beharrungswiderstandes gegen Winkelbeschleunigungen die **Arbeit** $A = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\alpha^2$ kostet. § 32.

Vorbemerkung: Es sei in dieser und der folgenden Aufgabe als einfachster Fall vorausgesetzt, dafs aus der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit 0 durch konstante Winkelbeschleunigung β die schliefsliche Winkelgeschwindigkeit α werde.

Anleitung: Sind es beliebige Kräfte k mit beliebigen Kraftarmen a, die an den beliebigen Massen m mit beliebigen Massenarmen r angreifen, so ist doch immer $\beta = \frac{\Sigma k a}{\Sigma m r^2} = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}}$, wo dann eine Kraft $\mathfrak{K}$ direkt an einer Masse $\mathfrak{M}$ mit dem Arme $r = 1$ cm angreifend gedacht werden kann. — Dann ist $A = \mathfrak{K} . \sigma = \mathfrak{M}\,\beta \cdot \frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\alpha^2$ (analog der Arbeit für den Massenpunkt [§ 22, S. 88] $A = k . s = m b \cdot \frac{v^2}{2 b} = \frac{1}{2} m v^2$);

denn für $r = 1$ ist $\sigma = \frac{1}{2}\beta t^2 = \frac{1}{2}(\beta t) . t$ und $\alpha = \beta t$, woraus $\sigma = \frac{\alpha^2}{2\beta}$ (analog den Gleichungen [§ 6] $s = \frac{1}{2} b t^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot s = \frac{v^2}{2 b}$).

106. Zu zeigen, dafs ein System vom Massenmoment $\mathfrak{M}$ und von der Winkelgeschwindigkeit α die **lebendige Kraft** $A = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\alpha^2$ hat. § 32.

Anleitung: Für einen einzelnen Massenpunkt ist $l = \frac{1}{2} m c^2 = \frac{1}{2} m (\alpha r)^2 = \frac{1}{2} m r^2 . \alpha^2 = \frac{1}{2} \mathrm{m} . \alpha^2$. — Da ferner für alle Massenpunkte des rotierenden Systems α konstant ist, so ist $A = \Sigma \frac{1}{2} \mathrm{m}\,\alpha^2 = \frac{1}{2}\alpha^2 \Sigma \mathrm{m} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\alpha^2$ (ebenso wie für die Translation $L = \Sigma \frac{1}{2} m c^2 = \frac{1}{2} c^2 \Sigma m = \frac{1}{2} M c^2$).

Aus den Ergebnissen von LA 105 und 106 folgt wieder $A = A$; in Worten?

Zusatz: Für diese energetischen Beziehungen bei Drehungen starrer (auch flüssiger oder gasförmiger) Punktsysteme bilden den einfachsten Grenzfall die Kreisungen von Massenpunkten. — Z. B. a) Eine Kastanie, an eine Schnur gefädelt, die an beiden Enden gehalten und mittels der die Kastanie in Kreisung versetzt wird, kreist rascher, wenn durch Ziehen an den Schnurenden der Kreis verkleinert wird; warum? — Antwort: Wenn eine Masse von m Gramm zuerst einen Kreis von r cm mit α sec^{-1} Winkelgeschwindigkeit, dann einen Kreis von r_1 cm mit α_1 sec^{-1} durchläuft, so besteht die Energiegleichung $\frac{1}{2} m (r\alpha)^2 = \frac{1}{2} m (r_1 \alpha_1)^2$, also $\alpha_1 = \frac{r}{r_1}\alpha$. (Wie ergibt sich diese Beziehung ohne Verwendung der Energie, blofs aus der Erhaltung der Bahngeschwindigkeit bei kleiner werdendem Radius des Kreises? — *Versuch* an Galileis Hemmungspendel, wenn sich die Schnur um den Stift schlingt). — b) Ein Luftring (z. B. die Luft um den 60. Breitengrad herum), der mit einem gegebenen Parallelkreis gleiche Winkelgeschwindigkeit hatte, werde gegen den Äquator hin um ein Stückchen (etwa 1") verschoben. 1. Wie ändert sich seine Winkelgeschwindigkeit? 2. Um wieviel unterscheidet sich dieselbe von der Winkelgeschwindigkeit des erreichten Parallelkreises? Antwort: Da die den Ring verschiebenden Kräfte senkrecht gegen die vorhandenen, den Ring vergröfsernden Verschiebungen gerichtet sind, leisten sie

keine Arbeit. Der Vergrößerung des Ringes wird ferner ein merkliche
stand (abgesehen von einer Komponente der Schwerkraft) nicht geleistet,
auch Arbeitsleistung in den Verschiebungsrichtungen nicht stattfinde
Änderung der Bewegungsenergie findet demnach ebenfalls nicht statt, und
Veränderung der Winkelgeschwindigkeit $\alpha_1 - \alpha = \frac{r}{r_1}\alpha - \alpha =$
— (Über die relative Geschwindigkeit gegen die Erdoberfläche
östlicher Richtung vgl. LA 109.)

§§ 33, 82. **107.** Eine wie große Energie der Bewegung hätte sich in
Energieformen (z. B. in Wärme) umzusetzen, falls die Erde (al
gene Kugel von der Masse $m = 5{,}963 \,.\, 10^{27}$ g gedacht) a) in
jährlichen Umlauf um die Sonne, b) in ihrer täglichen D
um ihre Achse plötzlich oder allmählich ganz aufgehalten wür

Anleitung: Die kinetische Energie der jährlichen Transla
$L = \frac{Mv^2}{2}$, wo die Masse der Erde $M = 5{,}9630 \,.\, 10^{27}$ g, $v = 29{,}468$ k
$= 2{,}9468 \times 10^6$ cm sec^{-1}. Hiernach $L = 2{,}589 \times 10^{40}$ Erg $= 6{,}209 \,.\, 10^{..}$
Die kinetische Energie der täglichen Rotation:

$$A = \frac{\mathfrak{M} \,.\, \alpha^2}{2} = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{2}{5} \,.\, MR^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 3{,}832 \,.\, 10^{35}\ \text{Erg} = 9{,}192 \,.\, 10^{24}\ \text{C}$$

XII. Sogenannte ablenkende Kraft der Erdrotati

§ 34. Fig. 167.

108. Es ist be
Foucaultschen Vers
allgemeine Gleichung

$\psi = 15^0 \,.\, sin$

für den Verdrehungs
per Stunde in der geog
schen Breite φ^0 abzul

Anleitung: Es h
einem bestimmten Zeit
das Pendel in der Richtu
Meridians cd (Fig. 167
schwungen. Binnen eine
stimmten Zeit sei der de
lage des Pendels entsprec
Punkt a der Erdoberfläch
Raume nach b gerückt.
Verdrehungswinkel ist dan
$= boa = \beta^0$. Für eine zu
sehr kleine Zeit steht β^0
Drehungswinkel $amb =$
Erde in der Beziehung

$$\beta : \alpha = bm : bo \text{ oder } \beta = \alpha \cdot \frac{bm}{bo} = \alpha.$$

dieselbe Beziehung auch noch besteht, wenn das Pendel anfänglich nicht in der ene des Meridians geschwungen hat (was aber streng nur durch ein näheres Einıen auf die Zerlegung und Zusammensetzung von Rotationen zu zeigen wäre) und für 1 Stunde $\alpha = 15^0$, so gilt für den zugehörigen Wert $\beta = \psi = 15^0 \sin \varphi$.

109. Die westöstliche Abweichung a) von nordsüdlichen agrechten) Strömungen der Luft und des Wassers (analog die weichung der Geschosse u. dergl.) zu erklären. — Desgleichen westöstliche Abweichung b) für (lotrecht) fallende Körper. § 34.

Anleitung: Zu a). Ist R der Erdradius, α die Winkelgeschwindigkeit der lrotation, so sind in den geographischen Breiten φ_1 und φ_2 die westöstlichen schwindigkeiten eines Punktes der Erdoberfläche längs des Breitengrades $\cos \varphi_1$ und $R \alpha \cos \varphi_2$. Daher findet (an der Nordhalbkugel der Erde) beim nordlichen Abfliefsen eines Wasser- oder Luftteilchens eine Zunahme der Relativchwindigkeit gegen die Erdoberfläche im Betrage $\delta = R\alpha (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$ tt; war v die nordsüdliche Geschwindigkeit jenes Abfliefsens, so ist die ganze lativgeschwindigkeit des Teilchens gegen die Erdoberfläche $\sqrt{\delta^2 + v^2}$. — Zu b). Von einem Punkt in der Höhe h oberhalb des Äquators werde ein rper frei fallen gelassen. er hat dann schon im Zeitpunkte des Anfangs der wegung eine westöstliche Geschwindigkeit, entsprechend dem Radius $(R + h)$ der Winkelgeschwindigkeit α, somit der Bahngeschwindigkeit $(R + h)\alpha$; se bringt er beim Fallen an die Erdoberfläche mit, deren Teile eine Gewindigkeit $R\alpha$ haben. Er hat somit eine Relativgeschwindigkeit gegen den Fufsıkt des Ausgangspunktes im Betrage $(R + h)\alpha - R\alpha = h\alpha$. (Diese Berechnung t nur erste Annäherungen; nach KIRCHHOFF ist die Ablenkung proportional $h^{3/2}$.) tsprechend der Rechnung (und somit als ein direkter Beweis für den ersten uptsatz der Kopernikanischen Lehre, S. 571) ergab sich bei BENZENBERGS Fallsuchen am Michaelisturme zu Hamburg (1804) für $h = 76$ m eine östliche Abichung von 9 mm. — (Zu solchen westöstlichen kommen nach der genaueren eorie noch viel kleinere nordsüdliche Abweichungen). — Was ändert sich an m Vorgang, wenn der Körper statt von einem Turm in einen Schacht fällt?

XIII. Hydromechanik.

110. Zu zeigen, dafs der Seitendruck einer vertikalen Rechtksfläche im ersten Drittel der Höhe angreift (Fig. 168). § 38.

Anleitung: Die Aufgabe steht in Analogie zum Satz über den Schwernkt des Dreiecks. Man denkt sich dabei gewöhnlich ein dreieckiges, rall gleich dickes, homogenes Brettchen auf er Messerschneide balanciert, die parallel zu r Seite im ersten Drittel der Höhe angebracht Man kann sich aber auch ein Stäbchen denken, an dem einen Ende einen rechteckigen Quernitt hat und von da zum anderen Ende an Dicke chmäßig abnimmt, so dafs es an diesem Ende t einer Fläche nunmehr eine Kante hat, die zu i Kanten jener Rechtecksfläche parallel ist. Auch ses Stäbchen müfste im ersten Drittel seiner Länge unterstützt sein, damit es Schwerkräften gegenüber im Gleichgewichte sei. Wie nun hier die Schwer-

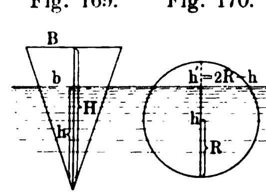
Fig. 168.

kalen Abstande gilt $H : h = S : s$. Wegen $Hs = hS$ oder βHs
zwar der für die Tiefe, in der sich jene Achse befindet, gerechn
(und daher auch der Innendruck) für beide Flüssigkeitssäulen
man könnte glauben, dafs daher die Klappe in Ruhe bleiben
aber keineswegs der Fall, ob nun die Achse als durch den Schwerp
nungsfläche gehend oder höher oder tiefer angenommen wird. Den
des Angriffspunktes des Seitendruckes jener Säulen bildet sich i
paar, das jene Klappe so lange dreht, bis sie wagrecht liegt. (
nimmt auf beiden Seiten der vertikal gedachten Trennungsfläche
für die er als gleich angenommen worden war, nach aufwärts un
schiedenem Maße ab, bzw. zu.) — Dafs nur eine wagrechte
der verschieden dichten Flüssigkeiten dem Gleichgewichte ents
sonders eindringlich, wenn man an die Übertragung des Gesetze
munikationsgefäfse auf den Torricellischen Versuch und das B
Hier ist ja die Trennungsfläche zwischen Luft und Quecksilber,
silberspiegel im offenen Gefäfs, immer nur wagrecht.

§ 40. **112. Die Tiefe des Einsinkens homogener Kör
genen Flüssigkeiten zu berechnen.**

Anleitung: Es sei das spezifische Gewicht des eintauchende
der Flüssigkeit $S > s$.

Fig. 169. Fig. 170.

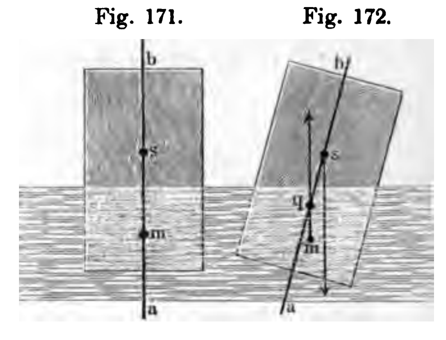


Erstes Beispiel: Ein gerade
Basis B und der Höhe H (Fig.
vertikaler Achse und abwärts gekel
zur Höhe h ein. Dann geben $1/_3$
und $b = \frac{h^2}{H^2} B$, eine rein kubisc
für $h = H \sqrt[3]{\frac{s}{S}}$.

Zweites Beispiel: Für die Kugel (Fig. 170) vom
$4/_3 R^3 \pi s = 1/_3 \pi h^2 (3R - h) S$ für h die gemischt kubis

nn s unterhalb m läge (was bei homogenen Körpern unmöglich ist). Aber auch nn s oberhalb m liegt, ist stabiles Schwimmen möglich. Der Körper sei aus · ersten Lage herausgebracht, so dafs der Angriffspunkt des Auftriebes m g. 172) an eine andere Stelle im rper als vorher rückt. Dann fallen Richtungen von Auftrieb und von iwere des Körpers nicht mehr in selbe Gerade, die beiden Kräfte len vielmehr ein Drehpaar, das den rper in die Anfangslage zurück r weiter von ihr weg dreht, je chdem die durch m gezogene trechte die Mittellinie ab des rpers unterhalb oder oberlb des Schwerpunktes schneit. Die Lage dieses Schnittpunktes demnach für das stabile Schwimmen maßgebend. Er heifst **Metacentrum.** r Körper schwimmt stabil, wenn der Schwerpunkt tiefer als das Metantrum liegt.

Fig. 171. Fig. 172.



114. Konstruktion der Skalen an Skalenaräometern. § 41.

Anleitung: a) Ist das Aräometer eine überall gleich weite, mit Quecksilber ıchwerte Röhre, so bezeichnet man die Stelle, bis zu der das Instrument in asser einsinkt, mit 100, teilt das unterhalb gelegene Stück der Röhre in 100 iche Teile und trägt eben solche Teile nach oben hin auf. Sinkt in einer leren Flüssigkeit das Instrument z. B. bis 125, so verhalten sich die Volumina icher Gewichte von Flüssigkeit und Wasser wie 125 : 100, also die Gewichte icher Volumina wie 100 : 125, daher $s = \frac{100}{125} = 0{,}8$, allgemein $s = \frac{100}{n}$.

b) Hat das Aräometer die Gestalt Fig. 168 (S. 168), so bringt man in die Röhre vas Quecksilber, so dafs das Gewicht pg beträgt und das Instrument bis zu ıer Marke einsinkt; diese Stelle bezeichnet man mit 50. Darauf vermehrt man s Gewicht durch Hinzufügung von Quecksilber auf $2p$, $3p$, bezeichnet die entrechenden Marken mit 100 und 150 und teilt die Zwischenräume in je 50 gleiche ile. Das zwischen 50 und 100 liegende Volumen ist die Hälfte des Volumens, s von dem Instrument verdrängt wird, wenn es bis 100 einsinkt; der Raum ischen zwei Teilstrichen ist also $^1/_{100}$ dieses Volumens. Man gibt zum Schlufs m Instrument das Gewicht $2p$ und verschliefst es. Taucht das Instrument nun einer anderen Flüssigkeit bis zum Teilstrich 80 ein, so verhalten sich die veringten Volumina wie 80 : 100, also $s = \frac{100}{80} = 1{,}25$, allgemein $s = \frac{100}{n}$.

115. Torricellis Satz über die Ausflufsgeschwindigkeiten § 42. chnerisch zu erläutern.

Anleitung: Die Flüssigkeitsteilchen treten durch eine Bodenfläche (Fig. 173) cht hindurch wie frei fallend, sondern wie durchgeprefst. Ist die Fläche r Bodenöffnung $ab = \beta\,\mathrm{cm}^2$, die Höhe eines darüber stehenden Flüssigkeitsismas $ac = h\,\mathrm{cm}$, so ist das Gewicht dieses Prismas $p = \beta \cdot h \cdot s\mathrm{g}$. Die Masse

§§ 37, 42. **116.** Wieviel Energie setzt sich aus potentieller i um, wenn ein prismatisches Gefäſs von der Basis b m Höhe H m mit einer Flüssigkeit vom spezifischen Ge (und der Dichte d g cm^{-3}) gefüllt ist, sich durch eine entleert? Welcher Fallhöhe x entspricht diese kinetiscl

Anleitung: Die zum Vollpumpen des Gefäſses vom Boder Arbeit ist $A = \frac{1}{2} b H^2 \mathfrak{f}$ g m (LA 58); ihr ist daher maßzahlen Gesamtmenge der beim Sinken auf das Niveau der Bodenöffnu kinetischen Energie.

Um die Fallhöhe zu ermitteln, von der die Masse bHd müssen, um mit der hierbei erlangten Endgeschwindigkeit v die g Energie zu gewinnen, setzen wir $\frac{1}{2} b H^2 d g = \frac{1}{2} b H d v^2$, wor Im Vergleiche zu der dem Torricellischen Ausfluſsgesetz entsprec geschwindigkeit $V = \sqrt{2 H g}$ ersieht man wieder, daſs $x = \frac{H}{2}$ ist ganze Masse nur zur halben Höhe gehoben gewesen und von d

§ 42. **117.** Die gegenseitige Einwirkung zweier Wirb Wirbelringe zu beschreiben und zu erklären.

Anleitung: Wenn eine in Wirbelbewegung begriffene F nicht von festen Gefäſswänden, sondern selbst wieder von Flüs ist, so treten in dieser Umgebung des Wirbels Zirkulationen es, durch die zwei in derselben Flüssigkeit vorhandene Wirbelfä faltiger Weise aufeinander einwirken, insbesondere auch Anz Abstoſsungen aufeinander auszuüben scheinen. Einige der einf nungen solcher Art sind die folgenden:

Es sollen w_1 und w_2 (Figg. 174 und 175) die Querschnitte du linige Wirbelfäden, deren Achsen senkrecht auf der Zeicheneb die beigesetzten kleinen Pfeile den Drehungssinn jedes Wirbels dar

der Drehungssinn innerhalb der beiden Wirbel entgegengesetzt (Fig. 175), so **nehmen** sie zusammen eine fortschreitende Bewegung **(Translation)** durch die **umgebende** Flüssigkeit hindurch an.

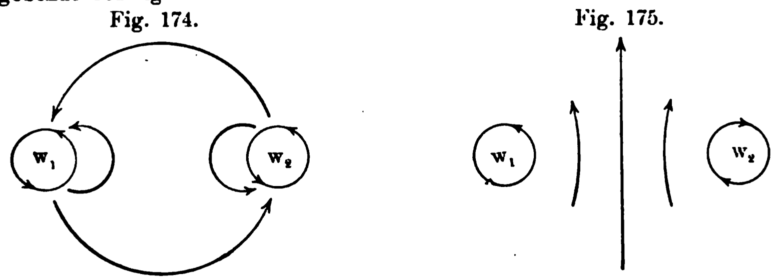


Fig. 174. Fig. 175.

Sind die Wirbelfäden nicht, wie bisher angenommen, solche von geradlinigen Achsen, sondern sind sie **Wirbelringe** (wobei in Figg. 176 und 177 die kleinen

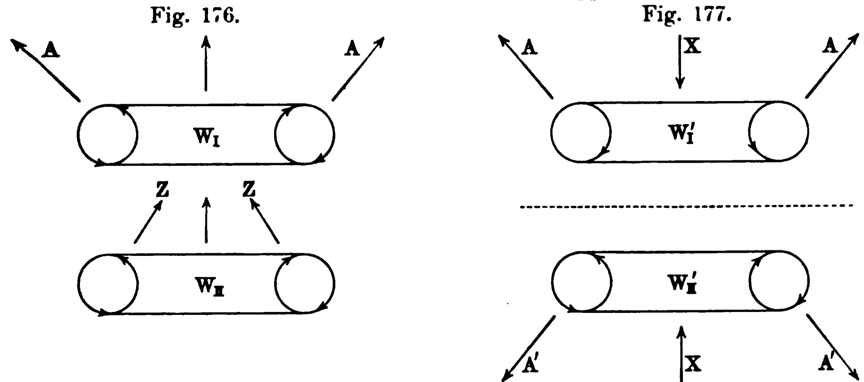


Fig. 176. Fig. 177.

Kreise mit den Pfeilen Querschnitte durch den Ring darstellen), so treten folgende Relativbewegungen der beiden Wirbelringe gegeneinander ein: Haben die Ringe gleichen Drehungssinn (Fig. 176), so übt der Ring W_{II} durch die Zirkulation seiner Umgebung auf den Ring W_I längs dessen ganzem Umfang Einwirkungen im Sinn der Pfeile A aus, der Ring W_I hingegen auf W_{II} Einwirkungen im Sinn der Pfeile ZZ. Deshalb erweitert sich der Ring W_I und verengt sich der Ring W_{II}. Nun ist mit einer Erweiterung eines Wirbelringes eine Verkleinerung, mit einer Verengerung eine Vergröfserung seiner fortschreitenden Bewegung verbunden (wie Helmholtz aus den Gleichungen solcher Bewegungen abgeleitet hat und wie es sich durch Beobachtung an Wirbelringen bestätigt). So kommt es, dafs der Ring W_{II} durch den Ring W_I hindurchschlüpft, welches Spiel sich dann wiederholt, indem der durchgeschlüpfte Ring sich erweitert, der andere sich verengt und wieder durch den vorderen hindurchschlüpft u. s. f. (also wieder eine Art Anziehung, nämlich fortwährende Durchdringung, wobei doch jeder Ring ein „Individuum" bleibt, ähnlich den „Atomen"). — Zwei Wirbelringe aber von entgegengesetztem Drehungssinn der einzelnen wirbelnden Teilchen (Fig. 177) erweitern einander gegenseitig im Sinne der Pfeile AA und $A'A'$. Wenn sie Bewegung im Sinne der Pfeile XX gegeneinander gehabt haben, so verlangsamen sie gegenseitig ihre Bewegung und es ist also, wie wenn sie sich gegenseitig abstiefsen (ähnlich zwei festen elastischen Körpern).

XIV. Aeromechanik.

§ 44. **118.** a) Die Gröfse des **Luftdruckes** bei 76 cm Quecksilberd zu berechnen. — b) Zu zeigen, dafs, wenn als Normalbarometers (statt 76 cm) **75 cm** gewählt worden wäre, der entsprechende D sehr (wie?) nahe $= 10^6$ Dyn $=$ **1 Megadyn** wäre.

Anleitung: Zu a). Wird als Wert der Dichte des Quecksilbers 13,6 g c angenommen, so ist die Masse der Quecksilbersäule 76 × 13,6 = 1033,6 g ihr Gewichtsdruck ist 1 at = 76 × 13,6 g per cm² = 1033,6 g cm⁻². — Für genaueren Wert der Dichte des Quecksilbers 13,595 wird 1 at = 1033,22 g cm Zu b). Es ist 75 × 13,595 × 981 Dyn = 1000252,125 Dyn $\neq 10^6$ I

§ 44. **119.** Die wesentlichsten **Barometerkorrektionen** an einem nu rischen Beispiel zu begründen.

Beispiel: Ist bei einem Gefäfsbarometer mit Messingskala die abgele Höhe der Quecksilbersäule h, die Temperatur t, die Kapillardepression K, Spannung der Quecksilberdämpfe τ, so ist der korrigierte Barometerstand

$$b = \frac{h}{1 + 0{,}000162 \, . \, t} + K + \tau \neq h - 0{,}000162 \, . \, h \, . \, t + K + \tau.$$

Das subtraktive Glied $0{,}000162 \, . \, h \, . \, t$ ergibt sich so: Die Höhe der Quecksilbers bei 0° ist $h_0 = h\,(1 - 0{,}000181 \, . \, t) = h - 0{,}000181\, h t$. Aber wegen der dehnung der Messingskala ist diese Höhe zu gering; da für Messing $\alpha = 0{,}00$ so folgt $b = h - 0{,}000181\, h t + 0{,}000019\, h t$.

Die Gröfse K wird aus Tabellen entnommen, die durch direkte Messung wonnen sind; für eine Röhrenweite von 10 mm ist $K = 0{,}20$ mm.

Die Größe τ wird für 20° C. zu 0,02 mm angenommen.

Zeigt also z. B. ein Barometer 732,4 mm bei 15° C., so ist unter Ven lässigung von K und τ der reduzierte Barometerstand

$$\frac{732{,}4}{1 + 0{,}000162 \times 15} = 730{,}62 \text{ mm.}$$

§ 45. **120.** Welchen numerischen Wert, welche Maßeinheit und we Dimension hat im Ausdruck für **Boyles Gesetz** $pv = Konst$ Gröfse $Konst$ für 6 cm³ Luft bei 76 cm Druck und 0° C.?

Antwort: $p = 1033{,}6$ g $= 1033{,}6 \, . \, 981$ Dyn, daher $p\,v = 1033{,}6 \, . \, 981 \, . \, 6$ Dyn Dimension cm sec⁻² g . cm³, somit $Konst = 6083769{,}6$ cm⁴ sec⁻² g.

§ 45. **121.** Zu zeigen, dafs die graphische Darstellung für Bo Gesetz die gleichseitige Hyperbel ist.

Anleitung: Ist in Fig. 178 der äufsere Druck als Abszisse, das Volum Ordinate aufgetragen, so entspricht der Gleichung $pv = Konst$ dieselbe l wie der Gleichung $xy = Konst$ oder $y = \frac{Konst}{x}$. Dafs dies eine gleich Hyperbel ist, zeigt die Transformation auf ein um 45° geneigtes System mit selben Ursprung, wobei sich ergibt $x^2 - y^2 = 2\,Konst$. (Math. Anh. 23.)

Zusatz: Da beim Zusammendrücken eines Gases die verbrauchte me nische Arbeit in Form von Wärmemengen auftritt, die den Wärme

ases und hiermit seine Spannung erhöhen würden, so ist bei dem in 178 dargestellten Versuche noch besonders dafür zu sorgen, dafs das Gas auf konstantem Wärmegrade erhalten (d. h. die beim Verdichten auftretende Wärmemenge beseitigt) werde. Obige Kurve wird daher insbesondere als „isothermische“ bezeichnet. (Vgl. dagegen über „adiabatische“ Volum- und Temperaturänderung LA 225). — Vgl. ferner die gleichseitigen Hyperbeln in Fig. 86, S. 768; Figg. 190 und 191, S. 895.

122. Warum fand ARISTOTELES beim Wägen der zuerst entleerten und dann mit Luft gefüllten Tierblase das Gewicht der vollen Blase etwas gröfser, trotz des vergröfserten Auftriebes? § 46.

Antwort: Weil er, um die Blase straff zu bekommen, Luft von gröfserer Dichte als die der äufseren Luft ist, einblasen mufste.

123. a) Man zeige, dafs beim Luftdrucke von 76 cm Quecksilberstand das Gewicht einer 10 m hohen homogen gedachten Luftsäule sehr §§ 46, 190, 197.

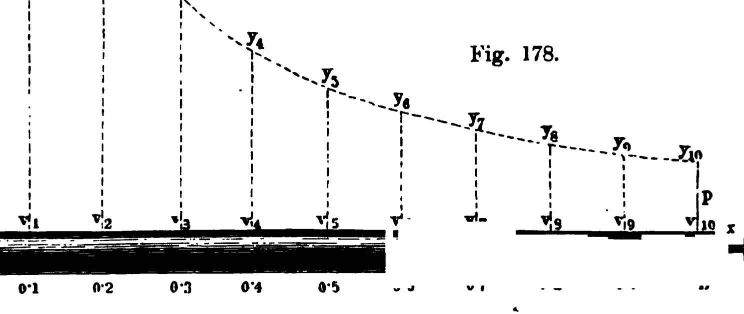


Fig. 178.

$\frac{1}{800}$ vom ganzen Luftdrucke beträgt. — b) Wie hoch müfste eine ogene Atmosphäre von der Temperatur 0° reichen, um bei der te von $1{,}293\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ den Luftdruck $1033{,}6\,\mathrm{g\,cm^{-2}}$ zu erzeugen?

Anleitung: Zu a). Da 1 Liter $= 1\,\mathrm{dm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3 = 1\,\mathrm{cm}^2 \times 10\,\mathrm{m}$, so hat Luftsäule von $1\,\mathrm{cm}^2$ Grundfläche und 10 m Höhe die Masse von 1,293 g und ewicht von 1,293 g bei 76 cm Quecksilberdruck. Für den entsprechenden ruck ist aber $1033{,}6\,\mathrm{g} : 1{,}293\,\mathrm{g} \neq 800$.

Es herrscht dann z. B. am oberen Ende der 10 m hohen Säule nur mehr ein ruck von $1033{,}6 \times \frac{799}{800}$, wieder 10 m höher nur mehr $1033{,}6 \times \left(\frac{799}{800}\right)^2$ u. s. f.

Zu b). Es ist $\frac{1033{,}6}{1{,}293} \cdot 10\,\mathrm{m} = 7994\,\mathrm{m} \neq 8\,\mathrm{km}$ (statt der **80 km,** die aus der phärischen Strahlenbrechung erschlossen sind, vgl. § 190, S. 614).

§ 46. **124.** Wie ergibt sich der numerische Wert des kons Koeffizienten $A = \frac{h}{-\log q} \neq 18400$ m in der schematischen für die **barometrische Höhenmessung?**

Anleitung: Dieser Koeffizient A läfst sich auf zwei Arten ermitteln lich erstens theoretisch, zweitens empirisch.

1. Theoretisch: War $b_0 = 76$ cm und nehmen wir der Reih Schichten von $h = 10$ m, $h' = 1$ m, $h'' = 1$ dm, $h''' = 1$ cm ..., so erh die zugehörigen Werte von $q, q', q'', q''' \ldots$ nach LA 123 und mit hin vielstelligen Logarithmen die zugehörigen Werte von $A, A', A'', A''' \ldots$

$h = 10$ m	$h' = 1$ m	$h'' = 0{,}1$ m	$h''' = 0{,}01$
$q = \frac{799}{800}$	$q' = \frac{7999}{8000}$	$q'' = \frac{79\,999}{80\,000}$	$q''' = \frac{799}{800}$
$A = 18\,409{,}4$	$A' = 18\,418{,}6$	$A'' = 18\,420{,}5$	$A''' = 184$

Man erkennt, dafs sich diese Werte einer Grenze nähern. Für u dünne Schichten (also für die stetige Verdünnung der Luft nach oben sich als Grenzübergang (ähnlich der Rechnung für organische Verzinsun Nr. 17) in der Gleichung $b = b_0 . q^n$ zunächst bei $h = 10$ m und $q = \frac{799}{800} =$ die Beziehung $b = b_0\left(1 - \frac{1}{800}\right)^n$. An ihre Stelle tritt für h'

$$b = b_0\left(1 - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{800}\right)^{10n} = b_0\left[\left(1 - \frac{\frac{1}{800}}{10}\right)^{10}\right]^n. \text{ — Für } h'' = 0{,}1$$

$$b = b_0\left[\left(1 - \frac{\frac{1}{800}}{100}\right)^{100}\right]^n$$ u. s. f. Wird hier als Nenner und Exponent ersten, zweiten ... Potenz von 10 die ins Unendliche wachsende Zah genommen, so wird $b = b_0 . e^{-\frac{1}{800}\cdot n}$. Hier war und ist überall $n = \frac{h}{l}$ und daher schliefslich $b = b_0 . e^{-\frac{H}{8000}}$.

Hieraus folgt weiter $H = 8000\,(\log nat\, b_0 - \log nat\, b)$ oder in Briggsch rithmen $H = 8000 \times 2{,}3026\,(\log b_0 - \log b)$, wo jetzt $A = 8000 \times 2{,}3026 =$

Wird statt $q = \frac{799}{800}$ genauer $1 - \frac{1{,}29305}{1033{,}3}$ angenommen, so wird $A =$

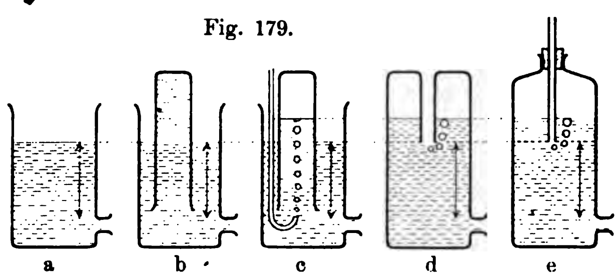
2. Empirisch: Sind für zwei Orte die Barometerstände b_0 und achtet, und ist überdies deren Höhenunterschied H trigonometrisch gem ergibt sich aus der schematischen Formel durch Einsetzung dieser drei num Werte als bekannter Gröfsen der Wert von $\frac{h}{-\log q}$ als der der Unbekannt

§ 47. **125.** Die Wirkung von **Mariottes Flasche** durch Analo **pneumatischen Wanne zu erklären (Fig. 179, a bis e).**

Anleitung: Man beachte, dafs, wenn in der pneumatischen Wanne a oder in beliebigem Abstand von ihm ein gewisser Boden-, bzw. Seit herrscht, dieser nicht verändert wird, wenn in die Wanne ein ganz oder mit Wasser gefüllter Glaszylinder getaucht wird; denn die oberhalb des

ler Wanne stehende Flüssigkeitssäule wird vom äufseren Luftdruck getragen trägt nichts zum Druck auf die tieferliegende Schicht bei. In MARIOTTES Flasche pricht dann die der Luft in Verlung stehende re dem den Zyer umgebenden traum, und umehrt dem oben chlossenen Zyer die sonst allig verschlossene sche.

Fig. 179.



XV. Mechanik der sogenannten Molekularwirkungen.

126. Zu zeigen, dafs HOOKES **Elastizitätsgesetz** und BOYLES (MARIOTTES) **Gasgesetz** für sehr kleine Änderungen von Spannung und Volumen auf die gemeinsame Form der **Arbeitsgleichung** $(v'-v)\,p = (p'-p)\,v$ führen. § 51.

Anleitung: Aus dem Gesetz für die zug- (druck-) elastische Längenveränderung $l = k\,\frac{L}{q}\,p = \frac{konst}{q}\,p$ folgt $lq = konst.p$. Hier ist $lq = v$ die Volumenänderung, die durch die Längenveränderung herbeigeführt wurde (von der Querkontraktion abgesehen); also $v = konst.p$. Für einen anderen Zug (Druck) p' $v' = konst.p'$, so dafs $v'-v = konst\,(p'-p)$ oder $v'-v = \frac{v}{p}\,(p'-p)$, woraus $(v'-v)\,p = (p'-p)\,v$. — Ähnlich läfst sich nun auch Boyles Gesetz $VP = V'P'$, wo in $P' = P+p$ und $V' = V-v$ die Gröfsen p und v zusammengehörige kleine Veränderungen des Druckes und des Volumens darstellen sollen, so schreiben: $VP = (V-v)(P+p) = VP - vP + Vp - pv$, wo das letzte Glied klein ist im Vergleiche zu den übrigen Gliedern, daher $vP = Vp$ oder $v = \frac{V}{P}\,p = konst.p$, woraus wieder $(v'-v)\,p = (p'-p)\,v$.

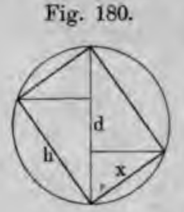
In Hookes wie in Boyles Gesetz bedeutet p den Druck per cm^2, der bei kleinen Änderungen des Volumens (von v auf v', also um $v'-v$) konstant bleibt. Auf ein Flächenelement von β cm^2 entfällt ein Druck von $p\beta$ Dyn, der bei einer kleinen Verschiebung um l cm, d. i. bei einer kleinen Volumenveränderung $= v'-v$ die Arbeit $(v'-v)\,p$ leistet.

127. Das Seitenverhältnis für den rechteckigen Balken **gröfster Biegungsfestigkeit**, der aus einem zylindrischen Stamme geschnitten werden kann, zu berechnen und zu konstruieren. § 52.

Anleitung: Für die Biegungsfestigkeit F eines rechteckigen Balkens ergibt sich aus theoretischen Gründen, die auch durch die Experimente bestätigt werden, F einfach proportional der Breite x und der zweiten Potenz der Höhe h (Fig. 180) nimmt. Es ist also $F = kxh^2$, worin k eine Konstante und $xh^2 = y$ eine von der als unabhängig veränderlich gedachten Breite x abhängig veränderliche Gröfse ist. Um zu ermitteln, für welchen Wert von x ein Maximum von y

eintritt, setzen wir $y = xh^2 = x(d^2 - x^2) = xd^2 - x^3$, woraus für einen verschwindend kleinen Zuwachs $x' - x$ folgt $\frac{y' - y}{x' - x} = d^2 - 3x^2$. Die Maximumbedingung ist dann, dafs einer Veränderung des x kein Zuwachs des y mehr entspricht, also $d^2 - 3x^2 = 0$, woraus $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ und $h = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = d\sqrt{\frac{2}{3}} = x\sqrt{2}$ folgt. Letztere Beziehung zwischen h und x wird konstruiert, indem man den Durchmesser d des Kreises (des Balkenquerschnitts) in drei gleiche Teile teilt und in den Teilungspunkten die Senkrechten nach Fig. 180 errichtet.

Fig. 180.



§ 55. **128. Welche mechanische Arbeit entgegen der Kraft der Oberflächenspannung wird verbraucht, um einen Tropfen in zwei (n) gleiche Tropfen zu zerstieben? (Vgl. LA. 154.)**

Anleitung: Es sei der Radius je einer der zwei gleichen Flüssigkeitskugeln ϱ, also ihre Oberfläche $4\pi\varrho^2$, ihr Volumen $\frac{4\pi\varrho^3}{3}$. Dann hatte die ursprüngliche Kugel das Volumen $2\cdot\frac{4\pi\varrho^3}{3}$ und die Oberfläche $4\pi\sqrt[3]{4}.\varrho^2$. Der Zuwachs an Oberfläche beim Zerspalten ist also $4\pi\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)\varrho^2$. Da man nun die Arbeit, die zur Vergröfserung der Flüssigkeitsoberfläche um 1 cm² erforderlich ist, als **Kapillaritätskonstante** α bezeichnet, so erfordert das Zerspalten in 2 Kugeln von je ϱ cm Halbmesser die Arbeit von $4\pi\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)\varrho^2 . \alpha$ Erg [ebenso das Zerspalten in n gleiche Kugeln die Arbeit $4\pi\left(n - \sqrt[3]{n^2}\right)\varrho^2 . \alpha$ Erg]. Für Wasser ist $\alpha = 77{,}09$ (bei 0° C.); also erfordert das Zerstieben eines Tropfens in zwei (10, 100, 1000) Tröpfchen von je 1 mm Radius die mechanischen (kalorischen) Arbeiten von 4 (51,9; 760; 8718) Erg. — Für Quecksilber ist $\alpha = 540$ (bei 20

§ 58. **129. Zu zeigen, dafs bei dem Stofs unelastischer Körper Verlust an kinetischer Energie eintritt.**

Anleitung: Die kinetische Energie nach dem Stofse ist

$$\frac{(m_1 + m_2)c^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2 c_1^2 + m_2^2 c_2^2 + 2 m_1 m_2 c_1 c_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= \frac{m_1^2 c_1^2 + m_2^2 c_2^2 + 2 m_1 m_2 c_1 c_2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1^2 c_1^2 + m_1 m_2 c_1^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_2^2 c_2^2 + m_1 m_2 c_2^2}{2(m_1 + m_2)}$$

$$- \frac{m_1 m_2 (c_1 - c_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} - \frac{m_1 m_2 (c_1 - c_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Das letzte Glied stellt den Verlust dar.

§ 58. **130. Für elastische Kugeln von ungleicher (von gleicher) Masse die Geschwindigkeiten nach dem Stofs zu berechnen.**

Anleitung: Die Massen der Kugeln A und B seien m_1, m_2, ihre Geschwindigkeiten (in derselben Richtung) $c_1 > c_2$. Während der Berührung gebe A die Bewegungsgröfse $m_1(c_1 - c)$ ab, während B die gleiche Bewegungsgröfse aufnimmt

Infolge der Elastizitätswirkung erfährt jede Kugel einen Rückstofs, der dem der anderen erteilten Stofs gleich ist. Daher ist nach beendetem Stofs
für A der Verlust an Bewegungsgröfse . . . . $2\,m_1(c_1 - v)$,
„ B „ Gewinn „ „ . . . . $2\,m_2(v - c_2)$
und für A die Geschwindigkeit nach dem Stofs: $V_1 = c_1 - 2(c_1 - v) = 2v - c_1$
„ B „ „ „ „ „ : $V_2 = c_2 + 2(v - c_2) = 2v - c_2$.

Da hierin (nach §§ 16 und 58) $v = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}$, so ist

$$V_1 = \frac{(m_1 - m_2)c_1 + 2\,m_2 c_2}{m_1 + m_2} \qquad V_2 = \frac{(m_2 - m_1)c_2 + 2\,m_1 c_1}{m_1 + m_2}.$$

Ist $m_1 = m_2$, so vertauschen die Kugeln ihre Geschwindigkeiten.

131. Zu zeigen, dafs bei dem Stofs elastischer Körper kein Verlust an kinetischer Energie eintritt. § 58.

Anleitung: Durch Einsetzen von V_1 und V_2 (aus LA 130) ergibt sich:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}\,\frac{[(m_1 - m_2)c_1 + 2\,m_2 c_2]^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2}{2}\,\frac{[(m_2 - m_1)c_2 + 2\,m_1 c_1]^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2(m_1 + m_2)^2}\,[m_1(m_1 - m_2)^2 c_1^2 + 4\,m_1 m_2 c_1 c_2 (m_1 - m_2) + 4\,m_1 m_2^2 c_2^2$$
$$+ m_2(m_1 - m_2)^2 c_2^2 + 4\,m_1 m_2 c_1 c_2 (m_2 - m_1) + 4\,m_1^2 m_2 c_1^2]$$

$$= \frac{1}{2(m_1 + m_2)^2}\,[(m_1 - m_2)^2(m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2) + 4\,m_1 m_2 (m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2)]$$

$$= \frac{m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2}{2(m_1 + m_2)^2}\,[(m_1 - m_2)^2 + 4\,m_1 m_2] = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2}.$$

132. Die Grundgleichung der **kinetischen Gastheorie** $pv = \frac{nmu^2}{3}$ abzuleiten. (Vgl. LA 152.) §§ 57, 58, 83.

Anleitung: Vorbildlich für das „dynamische Gleichgewicht“ (S. 216), aus dem wir die Spannkraft eines Gases nach der kinetischen Gastheorie erklären, sei die annähernde Ruhe z. B. eines Buches vom Gewichte Q, gegen das wir von unten hinreichend schnell und stark mit den Fingern trommeln. — Im folgenden soll die Ableitung der Formel nur für drei einfachste Fälle von Formen des Gefäfses durchgeführt und an der Übereinstimmung der Resultate ersichtlich gemacht werden, dafs für jene Grundgleichung die Gestalt des Gefäfses überhaupt unwesentlich ist (was sich auch streng allgemein beweisen läfst).

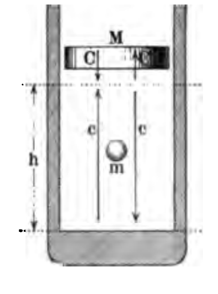


Fig. 181.

I. In einem vertikalen, zylindrischen Gefäfse (Fig. 181) befinde sich h cm über der Bodenfläche ein wagrechter Kolben von der Masse M g und dem Gewichte $Q = Mg$ Dyn. Gegen den sinkenden Kolben pralle eine sehr kleine Kugel von der Masse m g, die als vollkommen elastisch angenommen wird, so dafs sich nach der Berührung des Zylinders die vertikale, aufwärts gerichtete Geschwindigkeit c cm sec^{-1} in eine ebenso grofse vertikal abwärts gerichtete umkehrt. Dabei sei c so grofs, dafs von der Schwerebeschleunigung beim Auf- und Abfliegen des Kügelchens abgesehen werden kann. Dagegen sei die Bewegung des Kolbens M die eines vertikal aufwärts geworfenen und dann wieder infolge seiner Schwere sinkenden Körpers. Zwischen

II. Ist das Gefäß ein prismatisches von den Dimensione

$q = lb$, somit $p \,.\, lb = \frac{1}{h}\, m c^2$ oder $p \,.\, lbh = mc^2$ oder $p v =$

sich an den Stöfsen statt nur eines Kügelchens n (gleiche oder von gleichen oder ungleichen Geschwindigkeiten c), so verallg Gleichung zu $pv = \Sigma m c^2$.

Bisher war angenommen, dafs die Geschwindigkeit c no troffene Kolbenfläche gerichtet sei. Nehmen wir dagegen an, schwindigkeit c normal gegen die Wandflächen die Kompone fallen, wo $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = c^2$, so gilt für jede der drei zu rechteckigen Seitenwände des Gefäfses $pv = \Sigma m c_1^2$, $pv = \Sigma m$ daher $3pv = \Sigma m\,(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = \Sigma m c^2$ und also $pv = 1/$

III. Das Gefäfs sei eine innen vollkommen glatte Hohl messer R. Zuerst werde angenommen, dafs alle Kügelchen d punkt C (Fig. 182) gehen.

Zwischen zwei Stöfsen wird zurückgelegt die Wegstrecke . . .

dieses Zurücklegen erfordert die Zeit . . . .

in der Zeiteinheit ist die Anzahl der Stöfse . . . .

die bei einem Stofse übertragene Bewegungsgröfse ist . . . .

daher die in der Zeiteinheit übertragene Bewegungsgröfse . .

und von N Molekülen in der Zeiteinheit . . . .

auf je 1 cm² entfällt von dieser Wirkung . . . . . . $\frac{1}{4\pi R^2}$ . .

Da hier $\frac{4\pi}{3} R^3 = v$ das Volumen der Kugel ist, so ergibt sich

Fig. 182.

für den auf 1 cm² entfallenden Druck . .

Bewegt sich ein Teilchen nicht du

unabhängig von α, also auch überhaupt unabhängig von der Bewegungsrichtung der an die Innenfläche prallenden Teilchen.

Ist die Hohlkugel innen **nicht glatt** (und ebenso das Prisma und der Zylinder), so werden durch die Rauhigkeiten zwar einzelne Abweichungen von der angenommenen regelmäßigen Reflexion eintreten, aber sie werden nach verschiedenen Richtungen durchschnittlich gleich oft vorkommen und sich demnach gegenseitig im Gesamtergebnisse ausgleichen. —

Da in einem homogenen Gase zwar alle Moleküle als gleich vorausgesetzt werden, ihre Geschwindigkeiten aber im allgemeinen sehr verschieden sein müssen, so läfst sich die Gesamtmasse $Nm = M$ schreiben, wo N die Gesamtzahl aller dieser gleichen Moleküle (und M **nicht** obige Kolbenmasse) ist. Bedeutet überdies u^2 den Mittelwert aller untereinander sehr verschiedenen Geschwindigkeitsquadrate, so wird schliefslich $pv = \frac{Nmu^2}{3} = \frac{Mu^2}{3} = \frac{2}{3}\,L$, wo $L = \frac{Mu^2}{2}$ die lebendige Kraft der mittleren fortschreitenden Bewegung aller Teilchen ist.

133. Welche Annahmen müssen über die Geschwindigkeiten beim Übergang eines Punktes aus einem **widerstehenden Mittel** in ein anderes gemacht werden, damit für die hierbei eintretende plötzliche Veränderung der Richtung das **Sinusgesetz der Brechung** gilt?

§ 59, 128.

Anleitung: Es sei in Fig. 183 MN die Trennungsfläche zweier Mittel, die der Bewegung desselben Körpers solche Widerstände leisten, dafs sich seine Geschwindigkeiten dies- und jenseits MN z. B. verhalten wie $c : C = 3 : 4$. Dabei bleiben die Bewegungskomponenten $PO = OQ$ längs MN beim Übergang ungeändert. Dann ist

$$\frac{AO}{OB} = \frac{3}{4} = \frac{\frac{AO}{PO}}{\frac{OB}{OQ}}\text{; daher } \frac{\frac{PO}{AO}}{\frac{OQ}{OB}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{4}{3}.$$

Fig. 183.

Bemerkung: Die Emissionstheorie des Lichtes hatte, um zu dieser Formel $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{4}{3}$, wie sie dem Übergang eines Lichtstrahls aus Luft in Wasser entspricht, zu gelangen, annehmen müssen, dafs ein „Lichtteilchen" sich in der Luft mit der kleinen Geschwindigkeit c, im **Wasser** mit der **grofsen** Geschwindigkeit C bewege, damit die geometrische Konstruktion und Rechnung die tatsächliche Brechung **zum** Einfallslot liefere. — Die hier der Theorie zuliebe fingierten Vorgänge lassen sich mehr oder weniger gut physikalisch nachahmen, indem z. B. ein Zwirnröllchen über ein geneigtes Brett rollt, dessen eine Hälfte glatt, die andere rauh ist.

XVI. Schwingungen und Wellenbewegungen.

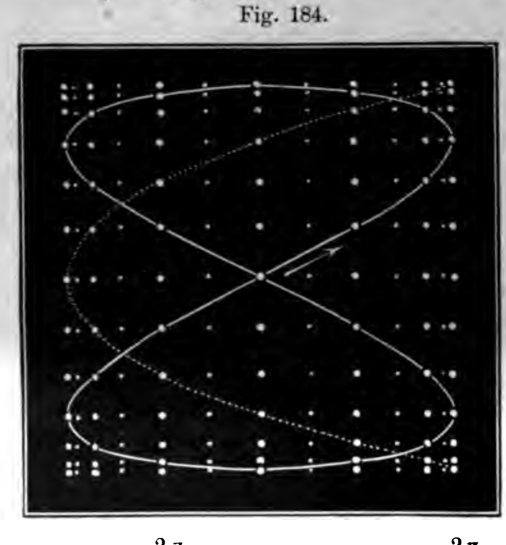
134. Die Gleichungen der Lissajouschen Figuren zu berechnen.

§ 62.

Anleitung. Erstes Beispiel: Für die 8 förmige Figur (Fig. 184) sei T die Schwingungsdauer nach der wagrechten Richtung (X-Richtung); dann ist die Schwingungs-

dauer nach der lotrechten (Y-) Richtung $2T$; die Amplituden sind in Fi einander gleich, allgemeiner seien sie a und b. Die Weg-Zeit-Gesetze Schwingungen lauten dann $x = a \sin \frac{2\pi}{T} t$ und $y = b \sin \frac{2\pi}{2T} t$. Setz $\frac{2\pi}{T} t = \varphi$, so ist einerseits $x = a \sin \varphi$ und $\sin \varphi = \frac{x}{a}$, andererseits $y = b$ $= b \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}$. Hieraus nach einigen Transformationen $y = \frac{b}{\sqrt{2a}} \sqrt{a - }$ $= \frac{b}{2\sqrt{a}} (\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x})$, wobei die Wurzeln mit Doppelzeichen freier Kombination) gelten. — Spezialisierungen für $x = 0$ ($y = 0$, $\pm$ $x = +a \left(y = \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ u. s. f. — Zu zeigen, daſs sich die 8förmige Figur auch

Fig. 184.



wenn man das arithm Mittel bildet aus den Or der im folgenden zweiten I behandelten parabolischen und der zu ihr symm liegenden (von der linken Ecke zur rechten Mitte linken unteren Ecke).

Zweites Beispiel: parabolische Figur (in F punktiert) ist das Ve der Schwingungsdauern 1 : 2; da es aber hier mäßig ist, die Phase beider Schwingungen Ausgehen von der rechten Ecke, also der positiven lage beider Schwingung zählen, so ist

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T} t = a \cos \varphi, \quad y = b \cos \frac{2\pi}{2T} t = b \cos \frac{\varphi}{2} = b \sqrt{\frac{1 + \cos}{2}}$$

woraus $y = \frac{b}{\sqrt{2a}} \sqrt{a + x}$. — Spezialisierungen für $x = -a$ (y $x = 0 \left(y = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, $x = a$ ($y = \pm b$) u. s. f. (Daſs die Kurve eine g liche Parabel zweiten Grades ist, ergibt sich, wenn wir sie auf ein Syster den Transformationsformeln $x = x' - a$, $y' = y$ beziehen, wobei $y' = \pm \frac{b}{\sqrt{2a}} \sqrt{x'}$, somit der Parameter $p = \frac{b^2}{4a}$.)

Drittes Beispiel: Für die doppelt verschlungene Figur in Fig. 246 (S. 23 sprechend den Schwingungsdauern 4 : 5, wird $x = a \cos 5\omega$ und $y = b$ (Hier würde die Elimination von ω schon zu einer verwickelten Gleichung zv x und y führen, weshalb es sich empfiehlt, die beiden vorstehenden Gleic gesondert zur Charakterisierung der Kurve zu verwenden (ähnlich wie Doppelgleichung der Zykloide im math. Anh. Nr. 24.)

Auch die sternförmige Figur, wie sie z. B. das Foucaultsche Pendel infolge der allmählich gegen die Erde sich drehenden Schwingungsebene beschreibt, kann man sich ebenfalls hervorgegangen denken aus zwei Sinusschwingungen von etwas verschiedener Schwingungsdauer.

135. Zu begründen, warum in Longitudinalwellen, deren Elongationen dem Gesetz der Sinusschwingungen folgen, stetige Verdichtungen und Verdünnungen ebenfalls nach dem Sinusgesetz mit einer Phasenverschiebung von $\frac{\lambda}{4}$ bzw. $\frac{T}{4}$ eintreten. §§ 63, 89.

Anleitung: Dafs eine solche Verschiebung um $\frac{\lambda}{4}$ besteht, ist besonders auffallend zu ersehen aus Fig. 254 (S. 237), wenn man sie so betrachtet, wie es der Fortpflanzung einer Longitudinalwelle entspricht (d. h. um 90° gegen die gewöhnliche Lage des Buches verdreht): hier rücken nämlich die Punkte überall dort am meisten zusammen bzw. auseinander, wo die Elongation Null ist. — Dafs ferner diese Verdichtungen und Verdünnungen selbst nach dem Sinusgesetz zu- und abnehmen, läfst sich leicht anschaulich machen mittels der kurbelartigen Drähte in dem Nebenapparat zu Machs Wellenmaschine (Fig. 252, S. 235). Wären nämlich diese nicht nach einer Sinuskurve, sondern nach einer aus geraden Stücken bestehenden Zickzacklinie (markiert durch die kleinen Knöpfchen unterhalb der Konkavplättchen) angeordnet, so würden beim Umlegen dieser Drähte in die longitudinale Lage die Dichtigkeiten in der Reihe der Pendelkugeln sich unstetig verändern. Aus Fig. 253a und 253c ist aber unmittelbar ersichtlich, dafs und warum bei umgelegten Sinusordinaten an den Enden und in der Mitte die gröfsten Dichtigkeitswechsel, aber keine Bewegungen der Pendelkugeln stattfinden, und warum die Dichtigkeitswechsel nicht unstetig, sondern stetig ineinander übergehen. — Rechnerisch ist das Maß der Verdichtungen gegeben durch den Unterschied $y' - y$ der Elongationen zweier benachbarter Punkte, bezogen auf den Unterschied $x' - x$ ihrer Abstände vom Nullpunkt der Punktreihe; also $\frac{y'-y}{x'-x} = \left[a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right) - a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] : (x' - x)$, welcher Ausdruck für $x' = x$ übergeht in $\frac{y'-y}{x'-x} = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Vgl. die Verschiebung der Kurven für *Sin* und *Cos* um 90° math. Anh. Nr. 19.

136. Die Gl. transversaler stehender Sinuswellen aufzustellen. § 63.

Anleitung: Nach math. Anh. Nr. 19 ist die Gleichung der allgemeinen Sinuskurve $y = a \sin \frac{x}{b} \cdots (1)$, wobei a die Höhe der Sinuskurve und $\frac{\pi}{2} b$ die Basis für den ersten Quadranten darstellt. In einer transversalen stehenden Sinuswelle ist dann a die gröfste Elongation, die ein Teilchen überhaupt erfährt. Für den Zeitpunkt $t = \frac{T}{4}$, in dem alle Teilchen gleichzeitig ihre Grenzlagen erreichen, ist die Gleichung der Wellenkurve (in Fig. 185 ausgezogen) $Y = a \sin \frac{\pi x}{\lambda}$, weil an die Stelle von $\frac{\pi}{2} b$ jetzt $\frac{\lambda}{2}$ tritt, so dafs $b = \frac{\lambda}{\pi}$ und $\frac{x}{b} = \frac{\pi x}{\lambda}$ ist. (Gemäß dem Gebrauche, bei stehenden Wellen schon einen Berg oder ein Tal als Wellenlänge

erstens die phoronomische Periodizität des Gröfser- und
und Negativ-)werdens der Elongation jedes Punktes mit der
schreitenden Zeit und zweitens die geometrische Periodiz
anderfolge von Wellenbergen und Wellentälern längs der Abszis

Das Hervorgehen stehender Wellen aus der Interferenz
(vgl. Fig. 259, S. 243) spricht sich aus in der identischen Gleichu

$$a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos \frac{2}{}$$

§ 64. **137. Newtons Gleichung $C = \sqrt{e:d}$ cm sec^{-1} für
zungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen abzuleiten.**

Anleitung: In dieser Gleichung bedeutet e den **Elasti**
elastischen Stoffes, durch den sich die Welle fortpflanzt. Ferne
Längendichte des Stoffes, d. i. die beim Querschnitt $q = 1$ mm
$L = 1$ m entfallende Masse des Stoffes. — Denken wir un
elastischen Stoffe oder Medium ein Prisma vom Querschnitt $q =$
gehoben und der Länge nach abgeteilt in Prismen von je L m L
Kraft von p Dyn an der Stirnfläche eines solchen Prismas ziehen
so würde eine Verlängerung oder Verkürzung l eintreten, die gem

$l = k \frac{L}{q} p$ für $q = 1$ und $k = \frac{1}{e}$ ergibt $l = \frac{1}{e} Lp$ oder $p =$

Gleichung besagt also, eine wie grofse Kraft angebracht werden
Prisma in dem statischen Zustande des Verlängert- oder Verkürzt
wobei sein anderes Ende als unbeweglich gedacht wird. Lasse
diese Kraft an dem elastischen Prisma angreifen, so haben wir di
Zustände zu verfolgen, die hierdurch im elastischen Medium ei
(so z. B., indem wir an Jollys Federwage ein Gewichtchen anh
sogleich eine Wellenbewegung eingeleitet wird, die die Spiralfed
und ins Unendliche ginge, wenn die Spiralfeder selbst unendlich
Wirklichkeit dagegen an der Aufhängestelle umkehrt und nach n
und Herlaufen und Bilden stehender Wellen zum angegebenen

innerhalb der Verkürzung (Verlängerung) l liegende Teil des Mediums verdichtet (verdünnt) wird, verschiebt sich sein Schwerpunkt um $\frac{l}{2}$, und die als konstant angenommene Kraft p leistet hierbei die Arbeit $p \cdot \frac{l}{2} = e \cdot \frac{l}{L} \cdot \frac{l}{2}$. Dieser Arbeit ist die lebendige Kraft $\frac{1}{2} Mc^2$ gleich, die die Masse $M = d \,.\, L$ empfängt, wobei c die mittlere Geschwindigkeit der beim Verdichten (Verdünnen) verschobenen Teilchen ist. Dieses c ist aber nicht schon die Fortpflanzungsgeschwindigkeit C der Welle selbst; vielmehr gilt $c : C = l : L$, da binnen der nämlichen Zeit, in der die Wellenbewegung um L fortschreitet, die Massenbewegung nur in der Verschiebung um l besteht. Somit $e \cdot \frac{l}{L} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} (d \,.\, L) \left(\frac{l}{L} \cdot C\right)^2$, also $C = \sqrt{e : d}$.

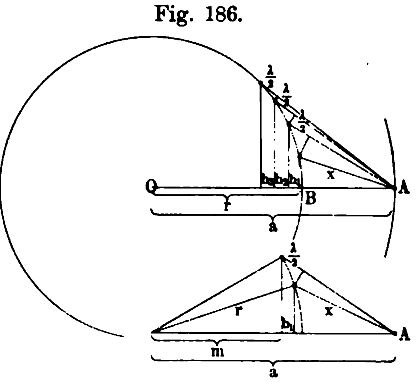
Bemerkung: Diese Ableitung gilt für aperiodische wie für periodische Wellen, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist also schon deshalb unabhängig von der Schwingungsdauer und Schwingungszahl (denn bei aperiodischen Wellen sind diese Gröfsen überhaupt gegenstandslos).

Numerisches Beispiel: Für trockene Luft von 0° C. ist $e = 1033{,}6 \times 981 \doteqdot 10^6$ Dyn; ferner $d = 0{,}001\,293 \text{ g cm}^{-3}$, woraus $C \doteqdot 28\,000$ cm $= 280$ m. Es ist also dieser von Newton gefundene theoretische Wert im Vergleich zum experimentell gefundenen 333 im Verhältnis $1 : 1{,}19 \ldots \doteqdot 1 : \sqrt{1{,}41} \ldots$, welche Nichtübereinstimmung von Laplace als Folge der die mechanischen Verdichtungen und Verdünnungen begleitenden thermischen Veränderungen erklärt wurde (§ 92, S. 313.)

138. Durch Rechnung zu zeigen, dafs sich bei der Ausbreitung einer Kugelwelle die sekundären Wellen durch Interferenz insoweit aufheben, als es Huygens' Prinzip entspricht. § 66.

Anleitung: Das primäre Erregungscentrum O habe eine Kugelwelle vom Radius r cm ausgesendet; jeder ihrer Punkte werde ein sekundäres Erregungscentrum und die von ihnen ausgehenden sekundären Kugelwellen interferieren an jeder Stelle des äufseren Raumes, z. B. bei einem Punkte A für $OA = a$ cm. Fresnel hat nun gezeigt, dafs das Ergebnis dieser Interferenz ein solches ist, als ob sich nur von der Kugelkappe der primären Welle bei B die sekundäre Erregung (also gleichsam nur die primäre Welle direkt) fortpflanze, wogegen sich die Wirkungen aller Kugelzonen, deren Ränder um je $\frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2} \ldots$ weiter von A abliegen, gegenseitig aufheben, indem je eine Zone das arithmetische Mittel der beiden ihr anliegenden ist. Dieser geometrische Kernsatz von Fresnels höheren Rechnungen läfst sich aber elementar so beweisen:

Fig. 186.



In Fig. 186 ist $x^2 = r^2 + a^2 - 2a(m + h_1)$ und $\left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = r^2 + a^2 - 2am$, woraus durch Subtraktion $\lambda x + \frac{\lambda^2}{4} = 2ah_1 \ldots$ (1). Ersetzen wir hier x durch

$x + \frac{\lambda}{2}$ und dann durch $x + 2\frac{\lambda}{2}$, und nennen wir die entsprechenden Höhe[n der] Zonen h_2 und h_3, so wird $\lambda\left(x + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{\lambda^2}{4} = 2ah_2$ und $\lambda\left(x + 2\frac{\lambda}{2}\right) + \frac{\lambda^2}{4} = 2$[…] woraus sogleich folgt $h_2 = \frac{h_1 + h_3}{2}$ oder $h_3 - h_2 = h_2 - h_1$.

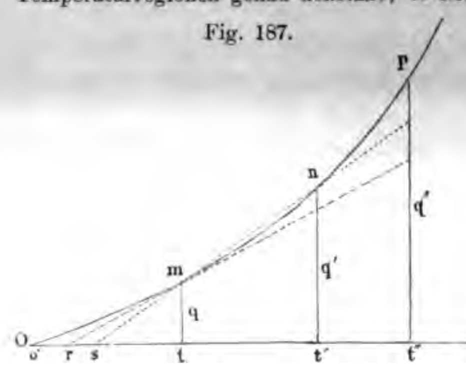
Somit: Wenn wir (in denselben Annäherungen wie FRESNEL) annehmen, die mittlere der drei Zonen von der Höhe h_2 und also der Fläche $z_2 = 2$[…] vom Punkte A sekundäre Wellen entsendet habe, so werden die Zonen $z_1 = 2$[…] und $z_3 = 2r\pi h_3$ Wellen mit einem Gangunterschied von $\frac{\lambda}{2}$ entsenden, und [das] Ergebnis der Interferenz wird, wenn wir von den kleinen Unterschieden der [Ab]stände verschiedener Punkte der Zonen von A absehen und die Wirkung nur [pro]portional der schwingenden Masse, also auch proportional den Zonenfläc[hen] setzen, für je eine Zone und ihre beiden Nachbarn gleich Null sein.

XVII. Wärmelehre.

§ 72. **139. Allgemeine Maßformeln für die mittlere spezifische Wä[rme] und die wahre spezifische Wärme aufzustellen.**

Anleitung: Wäre für je einen bestimmten Stoff die spezifische Wärme in [allen] Temperaturregionen genau konstant, so ließe sie sich darstellen durch eine [Ge]rade, in der längs der Abszi[ssen]achse OX (Fig. 187) die Te[mpe]raturen Ot aufgetragen sind, wo die Ordinaten q die Wär[me]mengen bedeuten. Da aber [zur] Erwärmung von t^0 auf t'^0 C. n[icht] genau, sondern nur annähe[rnd] $m(t' - t)$ cal. erforderlich sind, ist die graphische Darstellung [des] Zusammenhanges zwischen Wär[me]grad und Wärmemenge bei [den] meisten Stoffen eine von der [Ge]raden mehr oder weniger ab[wei]chende Kurve. Dabei bildet d[er Bruch]

Fig. 187.



$\frac{q' - q}{t' - t}$ ein Maß der **mittleren spezifischen Wärme** zwischen t und t'; und [der] Grenzwert dieses Bruches (vgl. math. Anh. Nr. 13) **für $t' = t$ ist das** [Maß] der **wahren spezifischen Wärme** bei t^0 C. — Da übrigens die Abweichun[gen] von der Geraden fast immer nur sehr klein sind, so braucht das Intervall [von] t bis t' nicht immer verschwindend klein genommen zu werden, sondern meist wird $t' = (t + 1)^0$ C. gewählt, und es ist dann $\frac{q' - q}{(t+1) - t} = q' - q$ das [Maß] für die spezifische Wärme bei der Temperatur t^0 C., deren Maßzahl gleich ist [der] Zahl von Grammcalorien, die erforderlich sind, um 1 g des Stoffes von t^0 [auf] $(t + 1)^0$ C. zu erwärmen.

§ 73. **140.** Durch Zeichnung ersichtlich zu machen, dafs und in[wie]weit die Ausdehnung verschiedener Stoffe in verschiede[nen]

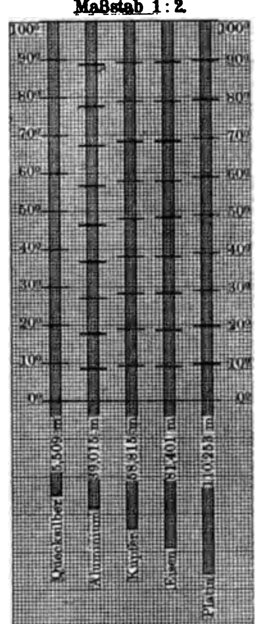


Temperaturregionen nicht gleichen Schritt hält mit der Ausdehnung des Quecksilbers.

Anleitung: Durch direkte Beobachtung des Verhaltens verschiedener Stoffe bei verschiedenen Temperaturen hat sich für sie ergeben, dafs an Stelle der Gleichung für die lineare (und entsprechend auch für die kubische) Ausdehnung $l = l_0 (1 + \alpha t)$ in besserer Annäherung gesetzt werden kann $l' = l_0 (1 + \alpha t + \beta t^2)$. Nach MATTHIESSEN haben die Koeffizienten α und β die in der Tabelle angegebenen

	Quecksilber	$\alpha = 2221 . 10^{-8}$, $\beta = 342 . 10^{-10}$	$\alpha = 1596 . 10^{-8}$, $\beta = 102{,}5 . 10^{-10}$	$\alpha = 1136 . 10^{-8}$, $\beta = 92{,}5 . 10^{-10}$	$\alpha = 868 . 10^{-8}$, $\beta = 39 . 10^{-10}$
100°	100	100,0	100,0	100,0	100,0
0°	90	88,8	89,4	89,3	89,6
80°	80	77,9	79,0	78,8	79,3
70°	70	67,3	68,7	68,4	69,1
60°	60	56,9	58,6	58,2	59,0
50°	50	46,7	48,5	48,1	48,9
40°	40	36,8	38,4	38,2	39,0
30°	30	27,2	28,6	28,4	29,1
20°	20	17,9	19,0	18,8	19,3
10°	10	8,8	9,5	9,3	9,6
0°	0	0	0	0	0
	Quecksilber 5,509 m	Aluminium 39,015 m	Kupfer 58,815 m	Eisen 81,401 m	Platin 110,253 m

Fig. 188.



Werte, wonach dann wieder die Ausdehnungen für 10 zu 10° berechnet und in beistehender Fig. 188 miteinander auf folgende Weise anschaulich vergleichbar gemacht worden sind: Für Quecksilber entsprechen einer Temperaturzunahme von je 10° Verlängerungen von je 10 mm; dies geschähe (abgesehen von der Ausdehnung des Glases überhaupt, also auch der verschiedenen Glassorten von Quecksilberthermometern) an einer 5,509 m langen Quecksilbersäule. Ebenso ist dann für die angeführten übrigen Stoffe diejenige Länge einer Stange (z. B. bei Aluminium 39,015 m) bei 0° C. angenommen, die sich bis 100° C. um 100 mm verlängert.

141. Numerische Durchführung eines Versuches mit dem Wasserdilatometer (Fig. 283, S. 266). § 73.

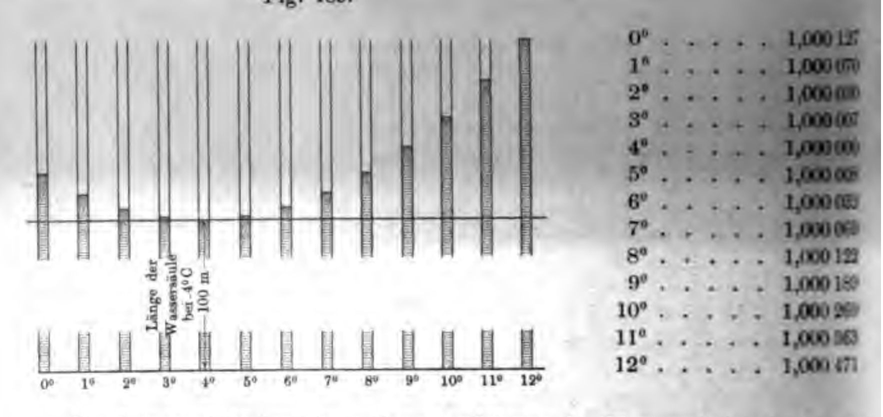
Anleitung: Eine Hohlkugel von etwa 6 cm Durchmesser geht in eine dickwandige Kapillarröhre von 24 cm Länge über und ist mit einem seitlichen Tubulus versehen, durch den ein Thermometer bis zur Mitte der Kugel eingeführt ist. Die Kugel und Röhre sind mit destilliertem, luftfreiem Wasser gefüllt, über dem sich ein Faden farbiger Flüssigkeit als Marke befindet. Überdies aber ist in der

Kugel soviel Quecksilber beigegeben, dafs die Ausdehnung des Glases kompensiert wird (nach der Gleichung $x : V = \varkappa_1 : \varkappa$, wo x das Volumen des Quecksilbers, V das Volumen des Glases, $\varkappa_1$ und $\varkappa$ die kubischen Ausdehnungskoeffizienten von Quecksilber und Glas (von 0° bis 100°) sind, also $\varkappa \doteqdot 1/_{50}$, $\varkappa_1 \doteqdot 1/_{400}$, also $x \doteqdot 1/_8\, V$). — Es war $V = 114\ \text{cm}^3$ bei 0°, die Weite der Röhre 0,038 cm³ per 1 cm Länge. Bei Weglassung der Quecksilberkompensation sinkt die Marke in der Röhre um 6 cm bei Erwärmung von 0° bis 4°. Da hierbei das Glas sich um 0,000 024 . 114 . 4 cm³ = 0,0109 cm³ erweitert, so hätte die Flüssigkeit nur um 3 cm zurückgehen dürfen, die übrigen 3 cm entfallen also auf die Zusammenziehung des Wassers zwischen 0° und 4° C.

§ 73. **142. Durch Zeichnung die verhältnismäßigen Gröfsen der Volumsänderungen des Wassers in der Nähe des Dichtemaximums ersichtlich zu machen.**

Anleitung: Eine Wassersäule, die bei 4° C. 1 m lang ist, ist z. B. bei 0° 1,000 127, bei 8° 1,000 122 m lang (von der Ausdehnung der Röhrenwandungen abgesehen). Daher verlängert sich z. B. eine Säule, die bei 4° C. 100 m lang ist, bei 8° um 1,22 cm. Diesen und den übrigen Zahlen der Tafel entspricht dann Fig. 189.

Fig. 189.



0°	1,000 127
1°	1,000 0[illegible]
2°	1,000 0[illegible]
3°	1,000 007
4°	1,000 000
5°	1,000 008
6°	1,000 0[illegible]
7°	1,000 0[illegible]
8°	1,000 122
9°	1,000 1[illegible]
10°	1,000 2[illegible]
11°	1,000 363
12°	1,000 471

Für die unverhältnismäßig gröfsere Ausdehnung des Wassers beim Gefrieren vgl. Fig. 284, S. 266.

§ 74. 143. Numerische Durchführung eines **Versuches mit Meldes** Röhre für Boyle-Mariottes Gesetz.

Anleitung: Durch eine Quecksilbersäule von der Länge l (die also auch ein Maß des Gewichtes p gibt) wird in einem kalibrierten Barometerrohr eine Luftsäule eingeschlossen, deren Länge von L_o bis L_u zunimmt, wenn die Röhre aus der anfänglichen Lage mit der Mündung nach oben allmählich mit der Mündung nach unten gewendet wird. Es ergaben sich z. B. bei $l = 24{,}5$ cm folgende Werte:

Öffnung nach oben . .	$P = b + p = 99{,}7$ cm	$L = 10{,}8$ cm	$L \cdot P = 1077$
Röhre wagerecht . . .	$b = 75{,}2$ cm	$= 14{,}3$ cm	$= 1075$
Öffnung nach unten . .	$b - p = 50{,}7$ cm	$= 21{,}3$ cm	$= 1080$

§ 74 144. Die graphische Darstellung von **Boyle-Gay-Lussacs** Gesetz (Figg. 190, 191) zu erläutern.

Anleitung: Da dieses Gesetz eine Beziehung zwischen den **drei** veränderlichen Gröfsen Druck, Volumen und Temperatur enthält, so ist seine graphische

Fig. 190.

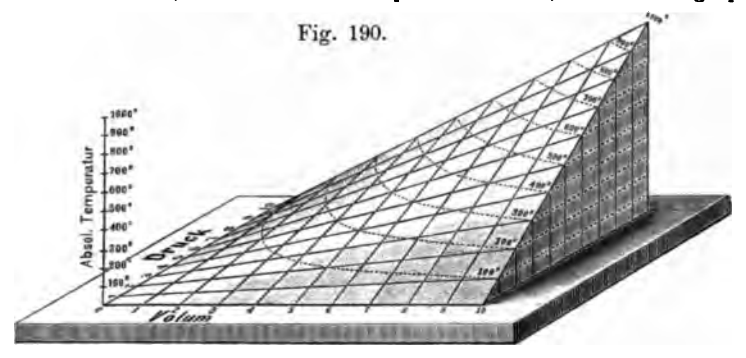
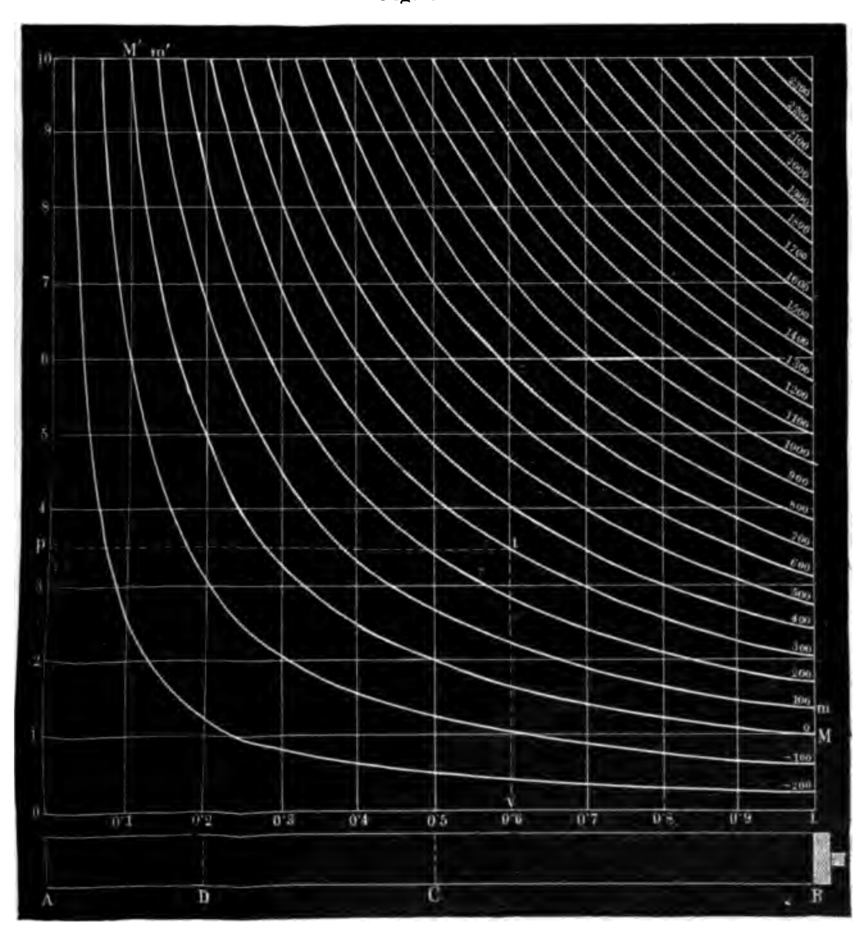


Fig. 191.



von 1,293 kg bei 0° C. und 76 cm Quecksilberdruck entsprechend hat, so ist $R = \frac{10\,333}{1{,}293 \,.\, 272{,}5} = 29{,}3$; wobei $T = 272{,}5°$ abs. Temp

Zu b): Das Normalgewicht eines Gases (§§ 46, 211) läfst s wicht der Gasmenge auffassen, die denselben Raum v bei gleiche gleicher Temperatur T einnimmt, wie 1 g des Normalgases. Aus sich für $v = 22\,400$ cm³, $p = 1\,013\,200$ Dyn und $T = 273°$ der Wert

§ 74. **146.** Ein Zahlenbeispiel für die **Reduktion der** auf den Normalzustand durchzuführen.

Anleitung: Es sei von einer gegebenen Gasmenge das Vol Drucke p und der Temperatur t gegeben. Das Volumen $V_{n,o}$ ders beim Normaldrucke von 76 cm und der Temperatur 0° C. ergib Gleichung $\frac{V_{p,t} \,.\, p}{272{,}5 + t} = \frac{V_{n,o}\, 760}{272{,}5}$.

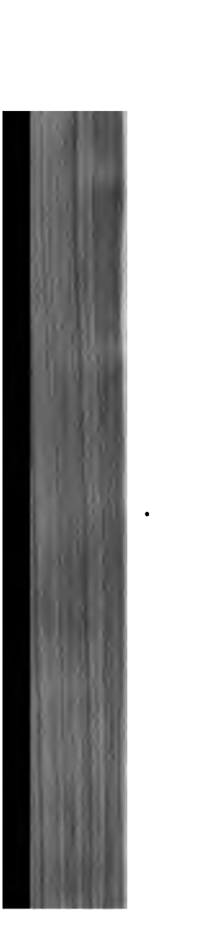


Fig. 192.

Es seien z. B. in einer kubizierten trockenen Gases über Quecksilber aufgefa Es sei $t = 15°$, die Höhe der Quecksilbersäule als Barometerstand sei an einer Messingskal gelesen, so dafs der reduzierte Barometers beträgt (LA 119). Mit Rücksicht auf den koeffizienten des Quecksilbers 0,000 181 ents lesenen Quecksilberhöhe $ab = 200{,}6$ mm Quecksilbersäule $\frac{200{,}6}{1 + 0{,}000\,181 \times 15} = 200{,}0$ steht daher unter dem Druck 730,62 — 200,0 Das reduzierte Gasvolumen ist daher

25,2 530,56

gebrochen und der mit Wasser gefüllte Ballon gewogen, so zeigen Ballon (einschliefslich der Spitze) und Wasser M g. Endlich zeige der vom Wasser entleerte und mit Luft gefüllte Ballon m g. — Ist die Dampfmenge im Kolben D, die Luftmenge L, so ist $D - L = m_1 - m$. Daher hätte die **Dampfdichte** $d = \frac{D}{L}$ den Wert $\frac{m_1 - m + L}{L} = \frac{m_1 - m}{L} + 1$, wenn Dampf und Luft bei t_1^0 C. und b_1 mm gemessen worden wären. Ist hierbei die Dichte der Luft λ_1, so wäre $L = \lambda_1 (M - m)$, also $d = \frac{m_1 - m}{M - m} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + 1$. Da aber der Dampf bei t^0 C. und b mm eingeschlossen wurde, so ist schliefslich

$$d = \left[\frac{m_1 - m}{M - m} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + 1\right] \frac{b_1}{b} \cdot \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}.$$

Fig. 193.



148. Aus der Dampfdichte des Wassers $\left(0{,}622 \neq \frac{5}{8}\right)$ und der relativen Dichte der Luft in Bezug auf Wasser (= 0,001 293) die Dichte $\frac{1}{1700}$ des Wasserdampfes von 100° C. in Bezug auf Wasser von 0° C. abzuleiten. § 77.

Anleitung: $0{,}001\,293 \times \frac{5}{8} \times \frac{273}{373}$. — Genauer: $\frac{0{,}001\,293 \,.\, 0{,}622}{1{,}367} = \frac{1}{1699{,}7}$.

149. Bei den Versuchen über das Sieden des Wassers unter dem Rezipienten der Verdünnungsluftpumpe oder im umgekehrten Kochkolben u. dgl. ist es leicht, das Wasser auch noch bei 40° C., 30° C. zum Wallen zu bringen. Würde dies auch noch bei 0° gelingen?

Anleitung: Ja; aber da die Spannung des Wasserdampfes hier nur 4 mm Quecksilberdruck beträgt, könnten sich Dampfblasen in einer Tiefe von 13,6 × 4 mm = 54,4 mm unter dem Wasserspiegel jedenfalls nicht mehr entwickeln. — Beim „Geysirphänomen“ wird das Wasser im tiefen Schacht bis weit über 100° C. erhitzt.

150. Die Begriffe **„kritischer Punkt“** („kritische Temperatur“, „kritischer Druck“, „kritisches Volumen“) graphisch zu erläutern. § 77.

Anleitung: In Fig. 194 stellt die Abszisse oc das Volumen von Flüssigkeit und Gas zusammengenommen, die Ordinaten die je einem Volumen entsprechende Spannkraft dar. Wird also ein nicht gesättigter Dampf von b her bei einer bestimmten, noch nicht zu hohen Temperatur zusammengedrückt, so wächst (gemäß der untersten ausgezogenen Kurve) anfangs die Spannkraft, dann tritt Kondensation ein, weshalb bei weiterer Volumenverkleinerung die Spannkraft des nun gesättigten Dampfes sich nicht mehr ändert. Ist endlich aller Dampf in Flüssigkeit übergegangen und wird auch diese noch zusammengeprefst, so steigt

Darstellung nicht mehr eine Kurve, sondern eine Fläch
Dabei stellt die Gerade (10 bis 1000°), die die Hypotenuse
winkligen Dreieckes an der rechten Stirnfläche bildet, die Pr
absoluter Temperatur und Druck dar, also das Gay-Lussa
Dagegen stellen die auf die horizontale Fläche projiziert ge
Hyperbeln die Beziehung zwischen Volumen und Druck
(Mariotte-)sche Gesetz für sich; vgl. Fig. 191 mit Fig. 190 ur

§ 74. **145.** In der Gasgleichung $pv = RT$ die Kon
auszuwerten a) für Luft, b) für das Normalgewi

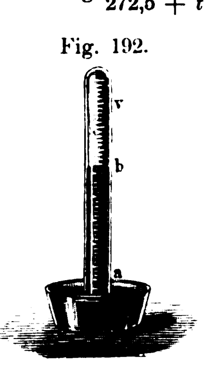
Anleitung. Zu a): Da 1 m³ Luft die Masse von 1,2
von 1,293 fg bei 0° C. und 76 cm Quecksilberdruck entspre
hat, so ist $R = \frac{10\,333}{1{,}293 \,.\, 272{,}5} = 29{,}3$; wobei $T = 272{,}5°$ abs.

Zu b): Das Normalgewicht eines Gases (§§ 46, 211) l
wicht der Gasmenge auffassen, die denselben Raum v bei
gleicher Temperatur T einnimmt, wie 1 g des Normalgases.
sich für $v = 22\,400$ cm³, $p = 1013200$ Dyn und $T = 273°$ der

§ 74. **146.** Ein Zahlenbeispiel für die **Reduktion**
auf den Normalzustand durchzuführen.

Anleitung: Es sei von einer gegebenen Gasmenge d
Drucke p und der Temperatur t gegeben. Das Volumen V_n
beim Normaldrucke von 76 cm und der Temperatur 0° C
Gleichung $\frac{V_{p,t} \,.\, p}{272{,}5 + t} = \frac{V_{n,o}\, 760}{272{,}5}$.

Fig. 192.



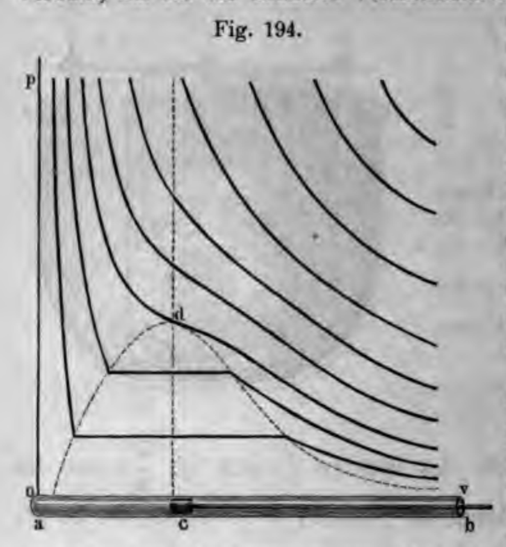
Es seien z. B. in einer kubizi
trockenen Gases über Quecksilber a
Es sei $t = 15°$, die Höhe der Quecksilb
als Barometerstand sei an einer Mess
gelesen, so dafs der reduzierte Baro
beträgt (LA 119). Mit Rücksicht a
koeffizienten des Quecksilbers 0,000 18
lesenen Quecksilberhöhe $ab = 200{,}$
Quecksilbersäule $\frac{200{,}6}{1 + 0{,}000\,181 \times 15} =$
steht daher unter dem Druck 730,62 –
Das reduzierte Gasvolumen ist daher
$\frac{25{,}2}{1 + 0{,}003\,67 \times 15} \cdot \frac{530{,}56}{760}$

§ 77. **147.** Die Formel zur Bestimmung von **Dampfd**

Anleitung: Im Glasballon Fig. 193 sei die Flüssigk
zu bestimmen ist, bis zum völligen Erfüllen des Ballons
heifse Bad erhitzt, worauf die Spitze zugeschmolzen **wird**;
peratur $t°$ C. und der Barometerstand b mm. Durch Wäg
temperatur von $t_1°$ C. und dem Barometerstande b_1 mm zeig
zusammen die Masse m_1 g; wird dann die Spitze unter W

ihre Spannung sehr rasch an. — Werden die Veränderungen gleicher Ar höherer Temperatur vorgenommen, so ist die Spannung des gesättigten Da größser, aber sie bleibt konstant (entsprechend der nächst höheren ausgezo Geraden) nur für ein kleineres Volumenintervall. Bei noch höherer Tempe

Fig. 194.



der **kritischen Temperatur,** diese Strecke Null (bei d); es dann $c\,d$ den **kritischen** I und $a\,c$ das **kritische** Vol dar. — Physikalisch zeigt sich „kritische Punkt" darin, wenn man Flüssigkeit und I bei hinreichend hoher Tempe (für Kohlendioxyd bei 30,9 durch Erhöhen des Druck kondensieren sucht, sich Grenzfläche zwischen Flüss und Dampf mehr erkennen lä

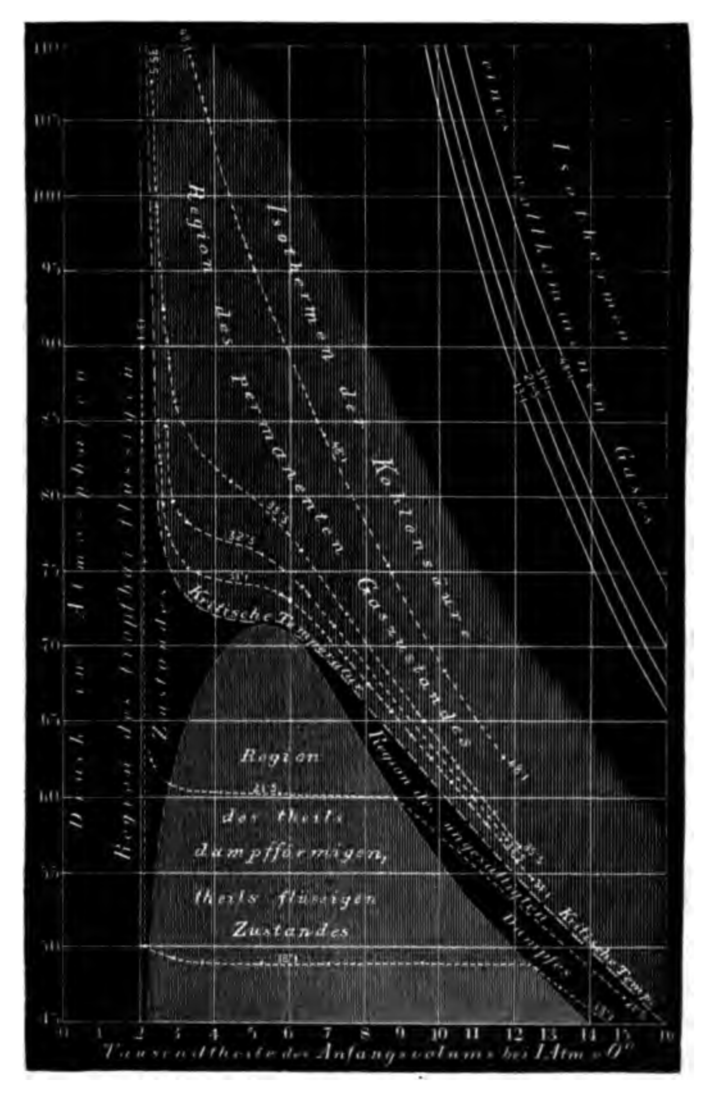
Die bisher nur qualitati schilderten Vorgänge sind in Fi nach den genaueren quantita Verhältnissen dargestellt; zu läuterung folgendes: Wird Ko dioxyd z. B. bei 13,1° auf 14,2 des Anfangsvolumens kompri so zeigt es eine Spannung von 45 at; beim Volumen von $12{,}2 \cdot 10^{-3}$ Spannung von 49 at, und bei dieser beginnt die Kondensation; und da mit das Kohlendioxyd ein gesättigter Dampf geworden und das Maximum Spannkraft für diese Temperatur erreicht hat, so entspricht einer Verkleine des Volumens keine Steigerung des äufseren und inneren Druckes Ist alles Gas in flüssiges Kohlendioxyd übergegangen, so hat dieses nur $2 \cdot 10^{-3}$ des Anfangsvolumens, und eine weitere Zusammendrückung der Flüssi erfordert nun wie bei allen Flüssigkeiten viel gröfsere Kräfte. — Bei einer l ren Temperatur, z. B. 21,5°, beginnt die Verflüssigung, wenn $8{,}7 \cdot 10^{-3}$ des Anf volumens und 60 at erreicht sind. Bei 31,0° C. entspricht einer Steigerung Druckes bis 73 at Volumenverminderung auf $6 \cdot 10^{-3}$. Von da ab nimmt Volumen rasch ab, ohne dafs sich der Druck viel über 73 at mehr steigern (dies also wieder entsprechend dem Konstantwerden der Spannung beim Sättig punkt eines Dampfes), aber eine Kondensation des Gases findet n statt. Es liegt also die Temperatur von 31,1° schon **über der kritis Temperatur** des Kohlendioxyds. Diese selbst gibt ANDREWS mit 30,92° C. und ihr entsprechenden **kritischen Druck** mit 77 at (das kritische Volumen $6{,}6 \cdot 10^{-3}$) an; d. h. bei 30,92° C. läfst sich auch durch noch so grofsen äuf Druck die Spannkraft des Kohlendioxyds nicht über 77 at steigern, ohne dafs bei diesem überhaupt zu erreichenden Maximum der Spannkraft wirkliche K densation einträte.

§ 83. **151.** Welche Beziehung stellt die Grundgleichung $pv = \frac{Mu^2}{3}$ kinetischen Gastheorie zwischen der **Mechanik der Molekularwirkun** und der kinetischen Wärmehypothese her? **(Vgl. LA 132.)**



Antwort: In LA 132 wurde die Gleichung $pv = \frac{1}{3} Mu^2$ aus lauter rein ›chanischen Annahmen und mechanischen Gesetzen abgeleitet; sie ist also inso- ›it selbst eine rein mechanische. Da nun aber das mechanische Verhalten ıes Gases, nämlich seine mechanische Spannung, ganz ebenso wie durch

Fig. 195.



ı mechanischen Vorgang der Volumverkleinerung auch durch den thermischen rgang der Temperaturerhöhung bewirkt werden kann, so ist es eine logisch rechtigte Hypothese, auch jene Veränderung des thermischen Zustandes selbst in mechanischen Veränderungen des Gases allein begründet zu denken. Und

weil nach der Hypothese des dynamischen Gleichgewichtes die vergröfser nische Spannung des Gases durch nichts anderes als durch die v lebendige Kraft der Gasteilchen erklärt werden soll, so führt die Verfo hypothetischen Gedankens dazu, auch den thermischen Zustand, n Temperatur des Gases, aus der lebendigen Kraft der Gasteilchen z Hätten alle Teilchen dieselbe Geschwindigkeit c, so würde $\frac{mc^2}{2}$ auc der Temperatur des Gases bilden; und zwar der absoluten Tempe dem Grenzwert $c = 0$ die mechanische Spannung $p = 0$ entspräch einem fiktiven Zustande der Spannung 0 die absolute Temperatur des rechnet würde. — In Wahrheit verlangt übrigens die Hypothese des d Gleichgewichts keineswegs, dafs alle Gasteilchen die gleiche Geschw haben; und um daher die Hypothese nicht mit einer entbehrlichen, also fertigten Teilannahme zu belasten, hat statt c ein Mittelwert u der G keiten aller Teilchen einzutreten, und es bildet dann $\frac{mu^2}{2}$ das Maß de Temperatur des Gases. In Gleichungen: Da nach der erfahrungsmä gleichung $pv = RT$, so ist nach der kinetischen Hypothese $RT = \frac{1}{3}$

$$T = \frac{Mu^2}{3R} = \frac{2}{3R} \cdot \frac{Mu^2}{2} = \frac{2N}{3R} \cdot \frac{mu^2}{2}.$$

Sowie die Grundgleichung das rein mechanische Mariottesc $pv = Konst$ enthält, so auch das rein thermische Gay-Lussacsche Ges bleibt für eine Gasmenge nebst M auch der Druck p konstant, so gelt mittleren Geschwindigkeiten u, u' und entsprechend für die absolute raturen T, T' wegen $v = \frac{Mu^2}{3p}$, $v' = \frac{Mu'^2}{3p}$ die Beziehungen

$$v : v' = u^2 : u'^2 = T : T' = (1 + \alpha t) : (1 + \alpha t').$$

§ 209. **152.** **Aus der Grundgleichung der kinetischen Gasthe Gleichung für Avogadros Hypothese abzuleiten.**

Anleitung: Es seien für zwei Gase $p_1 v_1 = \frac{1}{3} n_1 m_1 u_1^2$ und $p_2 v_2 = \frac{1}{3}$ Für gleiches Volumen zweier Gase bei gleichem Druck ist $p_1 = p_2$ und Haben die Gase überdies gleiche Temperatur und bildet (gemäß der LA 151) $\frac{mu^2}{2}$ als mittlere lebendige Kraft je eines Gasmoleküls ein absoluten Temperatur des Gases, so ist auch $m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2$, woraus da $n_1 = n_2$; d. h. alle Gase enthalten im gleichen Volumen bei gleichem D gleicher Temperatur gleichviel Moleküle.

§ 83. **153.** **Van der Waals' Zustandsgleichung der wirklichen $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$ zu erläutern.**

Anleitung: Das Boyle-(Mariotte-)Gay-Lussac-(Charles-)sche Gesetz p (kurz: „die Gasgleichung", vollständiger: die Gleichung für ideale Gas für $T = 0$, d. h. für $t = -273°$ C., ergeben $pv = 0$, so dafs entwede oder $v = 0$ werden müfste, was aus den Gründen des § 74 beides höc erster Annäherung eintreten könnte. — Aber auch abgesehen von weichungen bei der nie zu erreichenden Temperatur $T = 0$ verlang

e durch REGNAULT gefundenen Abweichungen der wirklichen Gase von dem
rhalten idealer Gase, daſs an der einfachen Gasgleichung $pv = RT$ Korrektions-
ieder angebracht werden. Es ist nämlich für wachsende p ($p' > p$) bei Wasser-
off $p'v' > pv$, bei allen anderen Gasen $p'v' < pv$. — Dieses Verhalten erklärt
h für die kinetische Gastheorie am einfachsten durch die Annahme, daſs die
olekeln schon des Wasserstoffs einen gegen die Gröſse des Gefäſsinnern nicht
rschwindend kleinen Raum einnehmen; denn dann wird die Zahl der an-
ander und somit auch an die Wand (den verschiebbaren Kolben) stoſsenden
ilchen im kleineren Raum verhältnismäßig gröſser, als bei verschwindend
einen Molekeln, und damit auch der Gasdruck gröſser. Bei anderen Gasen,
z. B. für $p' = 2p$ nun $v' < \frac{v}{2}$, wo also die stoſsenden Molekeln eine kleinere
irkung zustande bringen, als die einfachsten Annahmen der kinetischen Gas-
eorie voraussehen lassen, erklärt sich dies am leichtesten durch Annahme einer
e Bewegung der Teilchen teilweise hemmenden Kraft, einer Kohäsion inner-
lb des Gases, deren Wirkung JOULE auch experimentell konstatiert hat.

Indem VAN DER WAALS diese beiden Umstände berücksichtigte, brachte er
dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz zwei Veränderungen an: 1. Er setzt den
obachteten Druck aus dem Druck der stoſsenden Molekeln und einer Kraft zu-
mmen, die zu diesem Druck noch hinzukommen müſste, damit der das Ma-
otttesche Gesetz erfüllende Druck da sei; die hinzuzufügende Kraft (Kohäsion)
für jedes Teilchen desto gröſser, je mehr andere Teilchen im gegebenen Raum auf
eses Teilchen einwirken, also der Gasdichte proportional, und die Gesamtkraft ist
r Anzahl Teilchen, somit noch einmal der Gasdichte einfach direkt, die ganze
nzuzufügende Kraft also dem Quadrate der Gasdichte direkt, dem Quadrate des
olumens verkehrt proportional; statt p kommt also $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)$. — 2. Das Volumen,
s auch bei einem noch so groſsen Druck nicht Null werden, sondern nur einen
einstmöglichen Wert erhalten soll, werde $(v - b)$. Durch diese beiden Zusatz-
lieder wurde vortreffliche Übereinstimmung mit den besten Beobachtungen
EGNAULTS und anderer über die Abweichungen der wirklichen Gase von dem
romechanischen und aerothermischen Verhalten der idealen Gase erzielt.

**154. Die Gröſse der Moleküle eines Gases (Dampfes) zu be-
chnen aus der mechanischen oder kalorischen Arbeit, die
m Zerstieben einer Flüssigkeit, entgegen den Kapillarkräften,
orderlich ist. (Vgl. LA 128.)** §§ 57, 83.

Anleitung: Nach WILLIAM THOMSON erklärt sich der Wärmeverbrauch beim
rdampfen einer Flüssigkeit daraus, daſs diese in äuſserst feine Tröpfchen über-
führt wird und daher zur Vergröſserung der Gesamtoberfläche Arbeit
tgegen den Kapillarkräften erforderlich ist. — Nach GUSTAV JÄGER wird
rch die beständigen Stöſse, die die als Tröpfchen gedachten Moleküle eines
ses oder Dampfes auf die Gefäſswände und gegeneinander ausüben, eine der-
ige Zerteilung der ganzen Stoffmenge hervorgebracht, daſs schlieſslich ein sta-
närer Zustand eintritt; und zwar dies dann, wenn die Arbeit, die zum letzten
rstieben der Moleküle notwendig war, ihrer lebendigen Kraft gleich ist. — Nun
rde in LA 128 jene Arbeit für das Zerspalten einer Kugel von der Masse $2m$
zwei gleiche Kugeln durch die Kapillaritätskonstante α und den Radius ϱ je
er der kleinen Kugeln ausgedrückt. Die lebendige Kraft der groſsen Kugel

ist, dafs auch jedem Molekül als einem Flüssigkeitskügelchen die
der Flüssigkeit im ganzen zukomme, so ist $m = \frac{4\pi}{3}\varrho^3 . d$. Setz
von m in die obige Arbeitsgleichung ein, so ergibt sich für
$\varrho = 3\left(2 - \sqrt[3]{4}\right) \cdot \frac{\alpha}{u^2 d} \doteq 1{,}24 \cdot \frac{\alpha}{u^2 d}$. Es ergaben sich so für Wa
und $d = 1$ der Halbmesser eines Wasserdampfmoleküls 25.10⁻
Schwefelwasserstoff aus $\alpha = 33{,}84$ und $d = 1{,}293$ der Halbme
Diese Zahlen für die Gröfse der Moleküle der beiden (sowie d
anderer) Gase stimmen sehr gut mit den aus ganz anderen (et
ander unabhängigen) Methoden gefundenen überein.

XVIII. Schall.

§ 86. **155. Aus der absoluten Schwingungszahl des a^1 = absoluten Schwingungszahlen beliebiger anderer Töne f schwebend temperierte Stimmung zu berechnen.**

Anleitung: Da in dieser (z. B. in den modernen Klavieren Stimmung das Intervall einer Oktav in 12 gleiche Tonschritte abg einer einem Halbton entspricht, so ist die relative Schwingungsza $\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$, zweier Halbtöne $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 = 1{,}12246$, dreier $= 1{,}18921$ u. s. f. $\Big[1{,}25992,\ 1{,}33484,\ 1{,}41421 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^6 = \sqrt{2}$ fü z. B. c — *fis*, $1{,}49831 \doteq$ für $^3/_2$ die Quint; 1,58740, 1,68179 für d 1,88775, 2,00000 = 2 für die Oktav$\Big]$. — Aus diesen relativen Sc für eine beliebige Durtonleiter ergeben sich die absoluten Schwi die C-Durtonleiter und ihre Halbtöne dadurch, dafs hier a^1 die z. B. für $ais^1 = b^1$ 435 × 1,05946 = 460,865; für h^1 = 435 × 1,1

Anleitung: Da in der Gleichung $C = \sqrt{e:d}$ (LA 137) $e = p$ die Spannung per Querschnittseinheit, die Dichte d die Masse der Längeneinheit per Querschnittseinheit bedeutet, so ist $C = \sqrt{p:d}$. Ferner ist $C = \frac{2L}{T} = 2L \cdot n$, woraus $n = \frac{1}{2L} \cdot C$ (denn das Andauern stehender Schwingungen kann daraus erklärt werden, daß ein Impuls, der an dem einen Ende der Saite hervorgerufen wurde, sich wiederholt, so oft die fortschreitende Welle die Saitenlänge hin und zurück mit der Geschwindigkeit C durchlaufen hat). Es ist also $n = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{p}{d}}$.

157. Dopplers Prinzip für Schall- und Lichtwellen zu erläutern. §§ 91, 114, 18

Anleitung: Ist das Ohr (wie in der Regel stillschweigend vorausgesetzt) in Bezug auf einen Tonerreger von der Schwingungszahl n in Ruhe, so langen die Schallwellen in derselben Zeitabfolge $\left(\text{Schwingungsdauer } T = \frac{1}{n}\right)$ beim Ohre an, wie sie von der Schallquelle entsendet wurden. Haben dagegen Ohr und Schallquelle in Bezug aufeinander eine relative Geschwindigkeit, so ist die Abfolge des Eintreffens der Schallwellen im Ohr bei Annäherung eine raschere, bei Entfernung eine langsamere: es wird also ein höherer, bzw. ein tieferer Ton gehört, als ihn die in relativer Ruhe zum Ohre befindliche Schallquelle erregt. — Merkwürdigerweise ist es dabei nicht ganz gleichgültig, ob das Ohr O, des Beobachters ruht und die Tonquelle P sich gegen O hin bewegt (Fig. 196) oder ob O sich zur Tonquelle P hin bewegt (Fig. 197); für beides ruhende Luft vorausgesetzt (— genauer gesagt: relative Ruhe der Luft in Bezug auf die Erde, relative Bewegung der Tonquelle, bzw. des Ohres in Bezug auf die Erde).

Es sei die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles C m sec^{-1} und im ersten

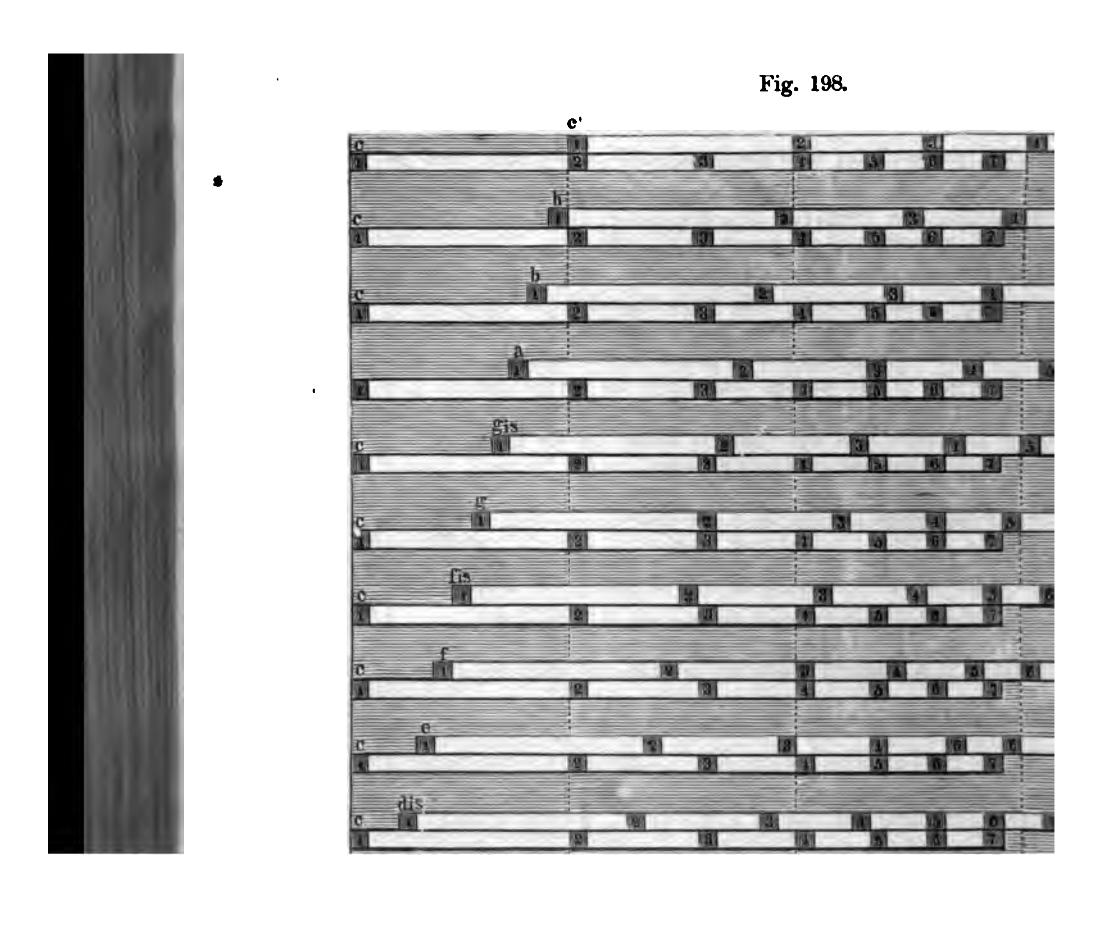
Fig. 196. P —c m sec^{-1}→ A ---------- O

Falle der von der Tonquelle in 1 sec zurückgelegte Weg $PA = c$ m (also die Geschwindigkeit c m sec^{-1}); ebenso $OB = c$ m. Es vergeht dann eine Zeit $\frac{C-c}{C} = \left(1 - \frac{c}{C}\right)$ sec zwischen dem Eintreffen der ersten und der $n$ten Schwingung beim Ohr, und das Ohr wird also in 1 sec von $n_1 = \frac{n}{1 - \frac{c}{C}} \cdots (1)$ Schwingungen getroffen. $\left[\text{Ebenso ist bei Entfernung } n_2 = \frac{n}{1 + \frac{c}{C}} \cdots (2).\right]$

Fig. 197. P ---------- B ←c m sec^{-1}— O

Im Falle der ruhenden Tonquelle und des bewegten Beobachters (Fig. 197) braucht der Schall $\frac{c}{C}$ sec zum Zurücklegen von OB; während dieser Zeit entsendet die Tonquelle $n\frac{c}{C}$ Schwingungen, und das Ohr empfängt in 1 sec jetzt $n_3 = n\left(1 + \frac{c}{C}\right) \ldots (3)$. $\left[\text{Ebenso ist bei Entfernung } n_4 = n\left(1 - \frac{c}{C}\right) \ldots (4).\right]$

Fig. 198.



hwindigkeit zum bzw. vom Auge verändert erscheinen und zwar so, dafs jede raunhofersche Linie gegen das violette bzw. rote Ende des Spektrums hin verhoben erscheint. In der Tat werden auch solche Verschiebungen der Spektrallien an vielen Gestirnen beobachtet und hieraus auf eine Bewegung längs der esichtslinie zur Erde hin oder von ihr weg geschlossen. Ja sogar die Rotationsschwindigkeit von planetarischen Körpern zeigt sich darin, dafs für Strahlen r einen und der anderen Hälfte des Körpers (zu beiden Seiten der Rotationshse) die Linien in dem einen und anderen Sinne verschoben sind.

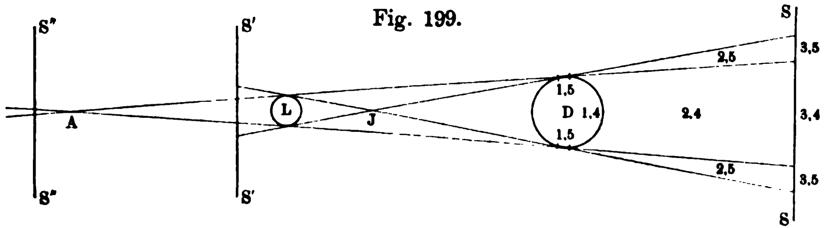
158. Zu ermitteln, welche der **Obertöne** von zwei gegebenen önen der chromatischen Tonleiter koinzidieren, und welche der Oberne dagegen **Schwebungen** (Stöfse) geben. § 93.

Anleitung: Nach einem Verfahren von Mach fertigt man sich zwei Leisten , die ein- für allemal die Töne der harmonischen Reihe für je eine Klaviertaste ig. 198) anzeigen. Es ist dann sofort ersichtlich, dafs für die Oktav (c^1) alle bertöne mit Obertönen des Grundtones (c) zusammenfallen. Bei dem konsonanten tervall Quint (g) fallen der zweite, vierte ... Ton zusammen (nicht der dritte, nfte ...). Beim dissonanten Intervall eines Halbtons (*cis*) treten gar keine oinzidenzen ein; und überdies stehen sich je ein Partialton des Grundtons und r kleinen Sekund so nahe, dafs sie merkliche Schwebungen geben. Aus esen arithmetischen Verhältnissen wollte Helmholtz die psychologischen Verltnisse der Konsonanz und Dissonanz erklären; vgl. psychol. Anh. Nr. 43.

XIX. Licht.

159. Von zwei Kugeln mit den Halbmessern R cm und r cm sei e eine (L) leuchtend, die andere (D) dunkel, nicht leuchtend, unrchsichtig. Lage und Gröfse der **Schatten** zu konstruieren (Fig. 199) ıd zu berechnen. § 99.

Fig. 199.



Anleitung: Man konstruiere die äufseren und inneren Tangenten an e in der Zeichenebene liegenden gröfsten Kreise der beiden Kugeln. Dann ist B. die Kugelkappe (1,4) der Kernschatten des Selbstschattens, die ugelzone (1,5) der Halbschatten des Selbstschattens. — Sechs Kombinamen: (1,4), (1,5), (1,6); (2,4), (2,5), (2,6). — Ist die leuchtende Kugel gröfser die dunkle, und liegt der Schirm aufserhalb des äufseren Ähnlichkeitspunktes A, entfällt die Kombination (3,4); warum? — Länge der Schattenkegel (nach den lgemeinen Formeln für die Abstände der äufseren bzw. inneren Ähnlichkeitsınkte A und J von den Kugelmittelpunkten; die Zentrale der Kugeln sei c):

$$A_L = \frac{r}{R-r}c, \quad J_L = \frac{r}{R+r}c, \quad A_D = \frac{R}{R-r}c, \quad J_D = \frac{R}{R+r}c.$$

Geometrische Erklärung des **Spiegelsextanten.**

...itung: Die parallelen Strahlen, die auf den festen, zur Hälfte d...
...piegel A und auf den drehbaren, ganz spiegelnden B auffallen, l...
...n O die Sterne L und G in Deckung erscheinen (Fig. 200). W...
...Nullstellung um den Winkel β gedreht, so kommt mit L das Bild ...
Sternes g ...r Deckung, für den der $\measuredangle\ GBg = 2\beta$ ist.

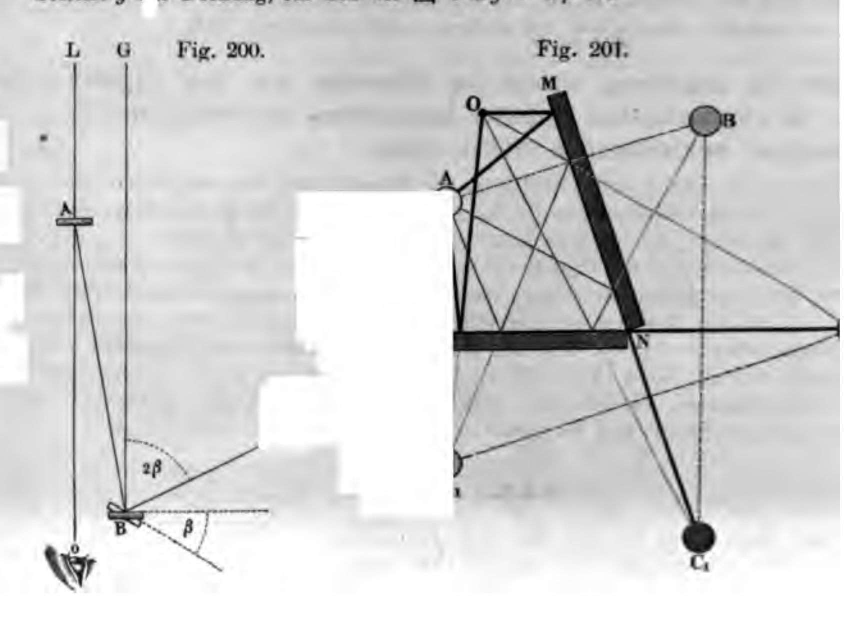


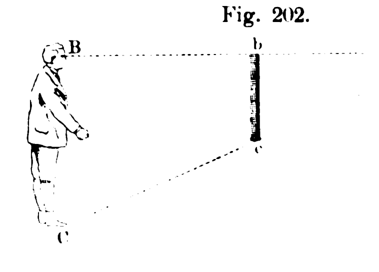
Fig. 200. Fig. 201.

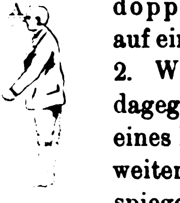
§ 102. **161.** Die Entstehung der Bilder am **Winkelspiegel** durch Ze...nung zu begründen.

Anleitung: In Fig. 201 ist A der gespiegelte Gegenstand, O das Auge. ... umgebe (ähnlich wie in Figg. 354, 355, S. 330) jeden der ein- oder mehrmals r... tierten Strahlen mit denjenigen divergierenden Strahlen, die noch in die P... von O (diese in beliebig übertriebenem Maßstab gezeichnet) eindringen kö...

§ 102. **162.** Zu zeigen, dafs und warum 1. in einem Planspiegel von ... gebener Längsausdehnung ein Mensch eine Strecke am eigenen l... die jener Länge parallel ... **doppelt** so grofs ist wie ... auf einmal überblicken k... 2. Warum überblicken ... dagegen z. B. in der Fass... eines Fingerringes einen ... weitem gröfseren Teil der ... spiegelnden Gegenständ...

Fig. 202.





Antwort. Zu 1: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und Abc (Fig. 202). — Zu 2: Hielten wir den Fingerring soweit vom Auge entfernt, dafs das Bild des Auges selbst in der doppelten Sehweite entsteht, so könnten wir auch von dem Auge nur ein Flächenstück von der doppelten Gröfse der Fassette überblicken. Wir pflegen aber den Fingerring viel näher zum Auge zu halten und die Bilder von viel entfernteren Gegenständen zu überblicken (Analogie zum Schauen durch ein Schlüsselloch).

163. Die sphärische Abweichung (Längen- und Breitenabweichung) für den Brennpunkt eines Hohlspiegels zu berechnen. (Fig. 203.) § 103.

Fig. 203.

Anleitung: Der Spiegel habe den Öffnungswinkel 2α und den Öffnungsradius $HN = \varrho$; es sei F der Brennpunkt der zentralen Strahlen, F' der Brennpunkt der Randstrahlen. Da $\triangle\, OF'N$ gleichschenklig, und $\measuredangle\, FF'S = 2\alpha$, so ergibt sich die Längenabweichung

$$OF' - OF = \lambda = f\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$$

die Breitenabweichung $FS = \sigma = \lambda \,.\, tg\, 2\alpha$.

Bei hinreichend kleinem α erhält man $\lambda \neq \frac{1}{2} f\alpha^2$, $\sigma \neq f\alpha^3$; oder wenn man $ON = r$ und $HN = \varrho$ einführt, $\lambda = \frac{\varrho^2}{4r}$, $\sigma = \frac{\varrho^3}{2r^2}$.

164. Die Gleichung für das Brechungsgesetz $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \;\ldots\; (1)$ ist nach β aufzulösen. § 104.

Auflösung: Aus $\sin\beta = \frac{1}{n}\sin\alpha \;\ldots\; (2)$ folgt $\beta = arc\,\sin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right) \ldots\; (3)$.

Bemerkung: Da man das Zeichen *arc sin* — sprich: *arcus sinus* — sowie die Zeichen für die übrigen cyklometrischen Funktionen *arc cos*, *arc tg* u. s. f. in der elementaren Mathematik zu vermeiden pflegt, begnügt man sich meistens, β nur mittelbar durch (2) oder (1) darzustellen; aber erst Gl. (3) stellt explizit β als abhängig von α dar.

165. Inwiefern ist Ptolemäus-Keplers Brechungsgesetz $\alpha = n\beta$ eine erste Annäherung an das richtige Gesetz $\sin\alpha = n\sin\beta$? § 104.

Antwort: Insoweit $\sin\alpha \neq \alpha$, $\sin\beta \neq \beta$; welche Annäherungen für die Astronomie sowohl wegen der Kleinheit der Öffnungswinkel der Linsen, wie der Kleinheit der astronomischen Strahlenbrechung sehr häufig ausreichend sind.

166. Der Einfallswinkel erfahre die sehr kleine Zunahme $\alpha' - \alpha$. Wie grofs ist die entsprechende Zunahme 1. des Brechungswinkels β, 2. die Zunahme der Ablenkung $d = \alpha - \beta$? — 3. Zu zeigen, dafs einer gleichmäßigen Zunahme $\beta' - \beta$ eine immer raschere Zunahme $d' - d$ der Ablenkung entspricht (Anwendung: LA 170). § 104.

Anleitung. Zu 1. Aus $\sin\alpha' = n\sin\beta'$ und $\sin\alpha = n\sin\beta$ folgt nach Subtraktion und Transformation $2\cos\frac{\alpha' + \alpha}{2}\sin\frac{\alpha' - \alpha}{2} = n \,.\, 2\cos\frac{\beta' + \beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta' - \beta}{2}$.

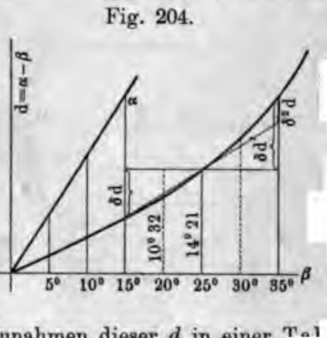
. h. für den Grenzwert $\alpha' - \alpha = 0$) wird $\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{1}{n} \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{\frac{1 - si}{n^2 - si}}$

d für sehr kleine α (und β) wieder $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n}$, $\alpha = n\beta$, LA 165

Zu 2. Aus $d' = \alpha' - \beta'$ und $d = \alpha - \beta$ folgt $d' - d = (\alpha' - \beta') - (\alpha$
$= (\alpha' - \alpha) - (\beta' - \beta) = \left[1 - \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\right] . (\alpha' - \alpha)$, woraus wieder für $\alpha' = \alpha$
$\frac{d' - d}{\alpha' - \alpha} = 1 - \frac{1}{n} \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Daher $\frac{d' - d}{\beta' - \beta} = \left[1 - \frac{1}{n} \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right] \cdot \frac{n\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{n\cos\beta}{\cos\alpha}$

Zu 3. Um vor allem den Sinn des Lehrsatzes 3 richtig aufzufassen, sind Zunahmen der β von 5 zu 5 Grad, sowie die zugehörigen Ablenkungen d und

Fig. 204.



β	α	$d = \alpha - \beta$	δd	δ^2
[illegible]	7° 30′	2° 30′		0°
[illegible]	15 5	5 5	2° 35′	0
[illegible]	22 50	7 50	2 45	0
[illegible]	30 32	10 32	3 2	0
[illegible]	39 21	14 21	3 29	0
[illegible]	48 35	18 35	4 14	1
[illegible]	59 12	24 12	5 37	4
[illegible]	74 34	34 34	10 22	

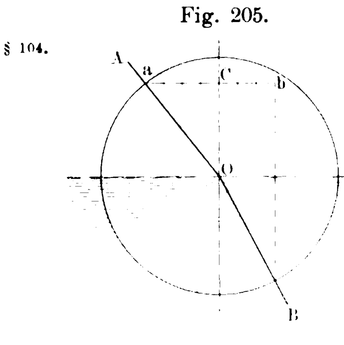
Zunahmen dieser d in einer T... d graphisch dargestellt (Fig. 204 spe für $n = {}^4/_3$). Dabei drückt ... mmer rascher werdende Zunahme de darin aus, dafs die Kurve (nicht nur steigt, sondern) nach oben konkav **wofür sich auch sagen läfst, der Unterschied $d_3 - d_2 > d_2 - d_1$. Dafs d Eigenschaft auch noch für verschwindend kleine Änderungen der β gilt,** zeigt rechnerisch so: Es seien β_1, β_2, β_3 drei unendlich benachbarte Werte von β dafs $\beta_3 - \beta_2 = \beta_2 - \beta_1$ (> 0). Dann sind die zugehörigen Veränderungen Ablenkung $\frac{d_3 - d_2}{\beta_3 - \beta_2} = \frac{n\cos\beta_2}{\cos\alpha_2} - 1$, ferner $\frac{d_2 - d_1}{\beta_2 - \beta_1} = \frac{n\cos\beta_1}{\cos\alpha_1} - 1$. Hier ist

$$d_3 - d_2 > d_2 - d_1, \text{ weil } \frac{n\cos\beta_2}{\cos\alpha_2} - 1 > \frac{n\cos\beta_1}{\cos\alpha_1} - 1, \text{ oder } \frac{\cos\beta_2}{\cos\alpha_2} > \frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1},$$

$\cos^2\beta_2 \cos^2\alpha_1 > \cos^2\beta_1 \cos^2\alpha_2$ oder $(1 - \sin^2\beta_2)(1 - n^2\sin^2\beta_1) > (1 - \sin^2\beta_1)(1 - n^2 \sin$ oder $(n^2 - 1) . \sin^2\beta_2 > (n^2 - 1) . \sin^2\beta_1$. — Nach Tilgung des positiven F tors $(n^2 - 1)$ erhält man schliefslich $\sin^2\beta_2 > \sin^2\beta_1$. Diese Ungleichung is der Tat richtig, da $\beta_2 > \beta_1$ und $\beta_2 - \beta_1$ ein spitzer Winkel ist.

§ 104.

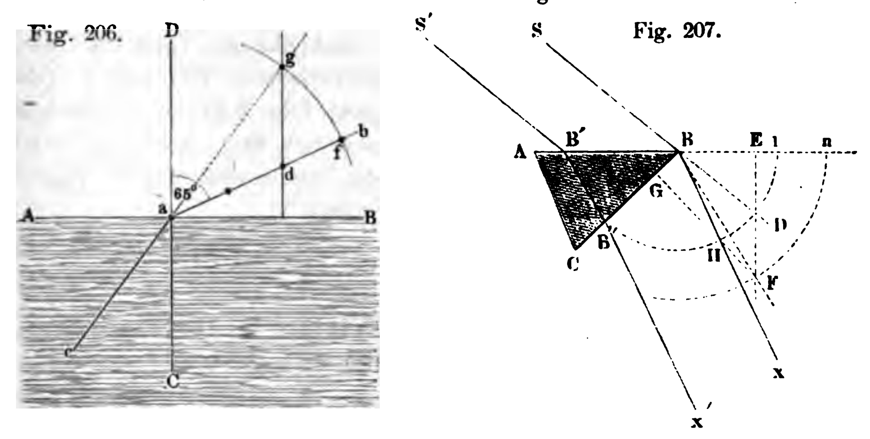
Fig. 205.



167. Mehrere Formen der Brechun konstruktion anzugeben, ihren Zusamm hang zu beweisen und ihre Vorzüge zu gründen.

Anleitung: In Fig. 363, S. 335 war l Einfallslot nötig und auch kein Teilen gegeb Strecken z. B. nach dem Verhältnis 4 : 3, sond nur ein Auftragen beliebig gleicher Strec (was viel leichter ist als Teilen). In Fig. sind Lot und Hilfskreis gezeichnet, und es

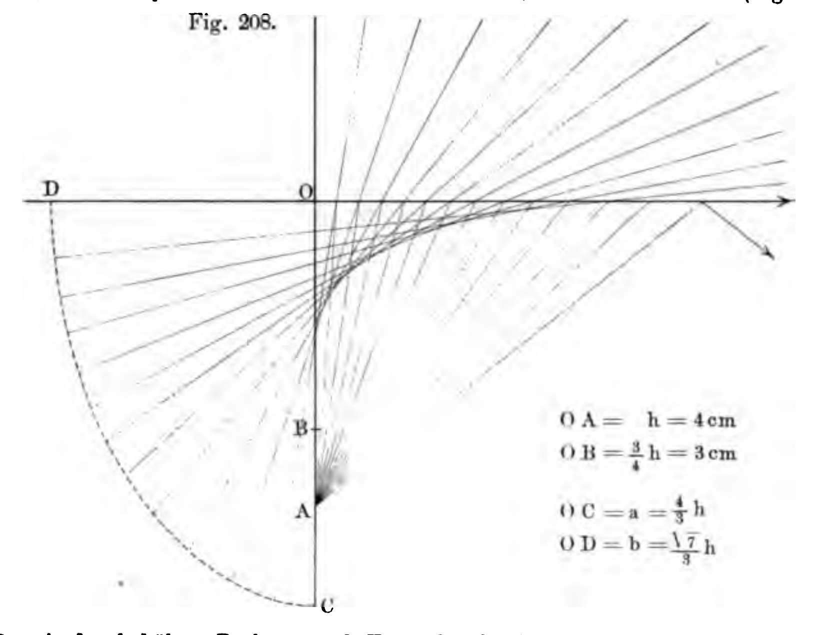
leicht ersichtlich, dafs ihr dann auch die Fig. 206 äquivalent ist. Von letzterer **Konstruktion** wird dann vorteilhafter Gebrauch gemacht beim Konstruieren des



Strahlenganges in Prismen (Fig. 207), wo ein für allemal Hilfskreise mit den **Halbmessern** vom Verhältnis 1 : *n* vorgezeichnet werden.

168. Auf was für einer Kurve kommen die Bilder eines Punktes bei der Brechung an einer Ebene (Fig. 365, S. 337) zu liegen? § 10.

Antwort: Auf dem geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte („Evolute") einer Ellipse von den Halbachsen $OC = h \cdot n$, $OD = h \cdot \sqrt{n^2 - 1}$ (Fig. 208).



(Beweis durch höhere Rechnung; als Ersatz hierfür die Konstruktion beliebig vieler Paare sehr benachbarter Strahlen und ihrer Durchschnittspunkte *B*, *B′ B″ B‴*. . .

reflektierte Strahl einander parallel sind; Zeichnung:

§ 106. **170. Zu beweisen, dafs dem symmetrischen D... das Prisma das Minimum der Ablenkung entspricht.**

Beweis: Beim symmetrischen Durchgang ist $\beta_1 = \beta_2$... $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$, so entspricht einer Zunahme $\beta_1' - \beta_1$ eine ebens... $\beta_2' - \beta_2$. Ferner entspricht nach LA 166, 3 jedem Zunehmen... nehmen von $d_1 = \alpha_1 - \beta_1$, das stärker ist als das Abnehmen ... Und da die gesamte Ablenkung D sich aus d_1 und d_2 zusammense... so enspricht dem Wachsen von β_1 ein Zunehmen von D. — ... spricht auch einem Abnehmen des β_1 ein Zunehmen des ... Abnehmen des β_1 kann man sich ja als Folge des Zunehmens d... wegen der angenommenen Symmetrie gilt alles über β_1 und sei... sagte auch für β_2 und seine Zunahmen). Da also sowohl dem Z... nehmen des dem symmetrischen Durchgang entsprechenden β ... des D entspricht, so entspricht jenem β das Minimum des D.

§ 107. **171. Die zu einer Änderung der Gegenstandsweite ... Änderung der Bildweite $b' - b$ für Sammelspiegel ... linsen zu berechnen. — Zu zeigen, dafs Gegenstand ... ander am nächsten im III. Linsenfalle sind.**

Anleitung: Aus $\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f}$ und $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ folgt $\frac{1}{a'}$ — ... oder $\frac{b' - b}{a' - a} = - \frac{b' b}{a' a} = - \frac{f^2}{(a' - f)(a - f)}$.

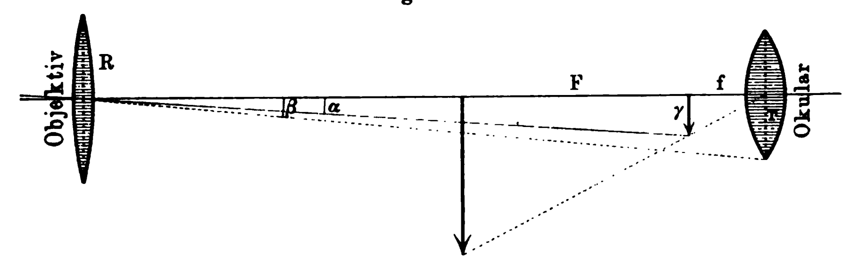
Für die Linse ist der Abstand y von Gegenstand und Bild y ...

Hier wird y ein Minimum, wenn für $a' = a$ der Ausdruck $\frac{y' - y}{a' - a}$ ...

Anleitung: Die Fig. 209 ist der Fig. 393 (S. 345) so entnommen, dafs der hwinkel σ, unter dem ein im Mittelpunkte der Objektivlinse befindlich gedachtes ge den Gegenstand AA' erblicken würde, noch etwas gröfser angenommen ist in Fig. 393. Für den Sehwinkel Σ, unter dem ein im Mittelpunkt des Okulars indlich gedachtes Auge denselben Gegenstand AA' erblicken würde, gilt dann auf Seite 355 begründete Rechnung $v = \frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{tg\,\Sigma}{tg\,\sigma} = \frac{\gamma : f}{\gamma : F} = \frac{F}{f}$.

Für die Objektivlinse des grofsen Refraktors der Wiener Sternwarte ist = 10,4 m = 1040 cm; die Öffnung des Objektivs (d. i. der Halbmesser des

Fig. 209.



asenrandes, nicht etwa der Krümmungshalbmesser der Linse!) ist $R = 33{,}75$ cm. Da der scheinbare Halbmesser des Mondes $\sigma = 0^{\circ}\,15' = \frac{1}{4}^{\circ}$, so ist die lineare öfse γ des Halbmessers des Mondbildchens (wie es sich z. B. auf einer in Brennebene des Objektivs gebrachten photographischen Platte erzeugt) $= 1040 \text{ cm} \times tg\,0^{\circ}\,15' = 4{,}538$ cm; das ganze Mondbild würde also auf der itte einen Kreis von fast 1 dm Durchmesser einnehmen.

Wie grofs müfste die Öffnung r der Okularlinse sein, wenn diese das nze Mondbild überschauen sollte? — Antwort: Für den Sehwinkel β, unter m sich vom Mittelpunkte der Objektivlinse aus gesehen der Halbmesser r des ularrandes darstellt, gilt $tg\,\beta = \frac{r}{F+f} \doteq tg\,0^{\circ}\,15' \doteq 0{,}004363$. Um die ganze eare Strecke γ zu überblicken, mufs $\measuredangle\,\beta \geqq \alpha$ sein. Es müfste daher, um mit n Fernrohr den ganzen Mond (d. h. durch das Okular das ganze Mondbild) erblicken zu können, $r \geqq 4{,}538$ cm, also der Durchmesser des Okularrandes öfser als 9 cm sein. — Zusatz: Bei so grofsem Rande wäre der kleinste mögle Krümmungshalbmesser der Linse (wenn diese nämlich als Vollkugel gewählt rde) ebenfalls 4,538 cm; und wäre es eine symmetrische Bikonvexlinse vom chungsexponenten $\frac{3}{2}$, so wäre auch die Brennweite 4,538 cm. Hiermit wäre Vergröfserung für ein Auge von der Sehweite 20 cm 20 : 4,5, also nicht einmal z die Vergröfserung 5; aber auch eine Linse für so schwache Vergröfserung fste behufs Abhaltung der Randstrahlen noch einen viel kleineren Randdurchsser bekommen.

173. Die Gleichung für die Beleuchtungsintensität $i = \frac{J}{r^2}$ gibt § 117. $= \infty$ für $r = 0$. Dies scheint zu heifsen, dafs, wenn eine Lichtelle eine noch so kleine Leuchtkraft J besitzt, aber in unmittelbare rührung mit der zu beleuchtenden Fläche gebracht wird, sie hier e gröfsere Beleuchtungsstärke hervorrufe, als eine beliebig kräftige

Lichtquelle bei irgend welchem endlichen, wenn auch noch so k
Abstande. — Ähnliche Paradoxa lassen sich an die Gesetze für S
Wärme- und andere Strahlen, für das Newt
Gravitationsgesetz, sowie an die Coulombschen (
für elektrische Ladungen und magnetische Pole kn
Wie sind sie zu lösen?

Fig. 210.

Anleitung: Der Formel $i = \frac{J}{r^2}$ liegt die Vorstellu
grunde, dafs die Lichtmenge, welche ein Punkt au
auf beliebig grofsen oder kleinen um jenen Punkt als
punkt gelegten Kugelflächen immer dieselbe bleibe. Di
intensität J stellt dann eine Art Dichte dar, näml
Grad der Verteilung jener Lichtmenge auf einer Kugel n
Halbmesser 1; dieser „Grad" wird gemessen durch die
des Lichtes, welche auf die Fläche 1 einer solchen Kugel
bzw. entfiele. Ebenso ist i die Dichte auf einer Kug
r fachen Halbmesser. Ist nun $r = \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots 0$ cm,
die Dichte 4, 9 . . . ∞mal gröfser, und es müfste, um
eine Fläche 1 mit Licht von solcher Dichte zu erfüllen,
9 . . . ∞mal so grofse Lichtmenge vorhanden sein, als üb
wirklich auf der Kugel von der Oberfläche 1 cm² vorhan

Fig. 211.



§ 124.

174. Die Beugung an dünnen S rechnerisch zu erläutern.

Anleitung: Ist $AB = b$ der Durch
C der Mittelpunkt des Stabquerschnittes, C
der Abstand des Schirmes von C, $Mm =$
Entfernung des ersten Minimums m vom Nul
mum M (Fig. 210), so ist $Bm - Am = \lambda/2$. —
$Bm^2 - Am^2 = (Bm - Am)(Bm + Am) \neq$
und da annähernd $Bm + Am \neq 2D$,
$D . \lambda = 2bd$, also $\lambda = \frac{2bd}{D}$.

Warum unterscheidet sich dieser Au
von dem in § 124, S. 387 für die Beugun
Lichtes an einem schmalen Spalt gewonnenen
den Faktor 2?

§ 126.

175. Fresnels Spiegelversuch re risch zu erläutern.

Anleitung: Es seien in Fig. 2
die Lichtquelle (Spalt), L' und L'' die
Spiegelbilder. Damit das erste Minimum
von dem Nullmaximum d cm entfernt sei,
$L''m - L'm = \frac{\lambda}{2}$ sein, oder $\sqrt{D^2 + \left(\frac{b}{2} + d\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(\frac{b}{2} - d\right)^2} =$
Da hier D grofs ist, sowohl gegen b wie gegen d, so kann gesetzt w



$$D\left[\sqrt{1+\left(\frac{b+2d}{2D}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{b-2d}{2D}\right)^2}\right]=\frac{\lambda}{2}, \text{ oder (nach } \sqrt{1+x} \doteqdot 1+{}^1\!/_2 x)$$

$$D\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+2d}{2D}\right)^2-1-\frac{1}{2}\left(\frac{b-2d}{2D}\right)^2\right]=\frac{\lambda}{2}. \text{ Somit } \lambda = 2\,\frac{b}{D}d.$$

Wenn der Schirm weiter von $L'L''$ rückt, gehen die Interferenzstreifen nach **Hyperbeln** auseinander (vgl. hierzu auch Fig. 225, S. 241).

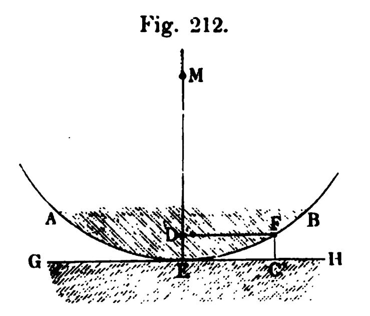
176. Die Dicke der Luftschicht an NEWTONS Farbenglas zu berechnen. § 127.

Anleitung: Es sei in Fig. 212 AEB ein Teil der Konvexlinse, deren Krümmungshalbmesser $EM = R$ mm ist, GH die Oberfläche der ebenen Glasplatte. Dem Halbmesser eines Newtonschen Farbenringes $EC = r$ mm entspricht dann die Dicke der Luftschicht $CF = d$ mm. Es ist

$r^2 = (2R - d)d = 2Rd - d^2 \doteqdot 2Rd.$

Da hier R und r direkt mefsbar sind, ergibt sich $d = \frac{r^2}{2R}$.

Fig. 212.



XX. Elektrische Mafsgröfsen.

177. Folgende Veranschaulichungen der elektrischen Ladungsmenge **1 st. LE** (und **1 Coulomb** = 3 . 10^9 st. LE), ferner des elektrischen Ladungsgrades (Potentiales) **1 st. PE** (und **1 Volt** = $\frac{1}{300}$ st. PE) und der elektrischen Energie zu begründen: §§ 135, 136

a) Zwei Kügelchen von je 1 g, die an Fäden von $l = \frac{981}{2}$ cm $\doteqdot$ 5 m im selben Punkte aufgehängt sind, müssen mit je 1 st. LE geladen sein, damit sie einander bis auf 1 cm Mittelpunktdistanz abstofsen. (Zum Beweise vgl. LA 35 d). — Dabei kommt es auf den Halbmesser nicht an, da die Ladungen wie von den Mittelpunkten her wirkend gedacht werden. Sollen speziell die Kugeln von 1 g Masse 1 cm Halbmesser haben (vgl. unten b), so eignen sich vergoldete Korkkugeln, da die Dichte des Korkes $\doteqdot \frac{1}{4}$ und $\frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 \cdot \frac{1}{4} \doteqdot 1$ g.

b) Wegen $E = C \cdot V$ (§ 139) und $C = r$ wird eine Kugel von 1 cm Halbmesser durch 1 st. LE auf 1 st. PE = 300 Volt (§ 149) geladen. Somit hat eine isolierte Leiterkugel (vergoldete Korkkugel, hohle oder massive Metallkugel) von 1 cm Halbmesser, die am Elektroskop ein Potential von 300 Volt zeigt, 1 st. PE; vgl. LA 182.

c) Die elektrische Energie wird praktisch gemessen durch den „Elektrizitätszähler" (§ 172), der den Stromverbrauch in Kilowattstunden angibt. Für 1 Kilowattstunde ist der Durchschnittspreis 36 Pfennige. Da 1 Watt = 10^7 Sekundenerg (§ 22), so ist 1 Kilowattstunde = 36 . 10^{12} Erg. — Somit ist in Geldwert 36 . 10^{12} Erg = 36 Pfennige; oder 1 Pfennig = 10^{12} Erg; oder 1 Erg = 10^{-12} Pfennig = ein Billiontel Pfennig. (Vgl. LA 53.)

§ 135. **178.** COULOMBS Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ für elektrische Ladun[g] nach ODSTRČILS Versuch nu[me]risch abzuleiten.

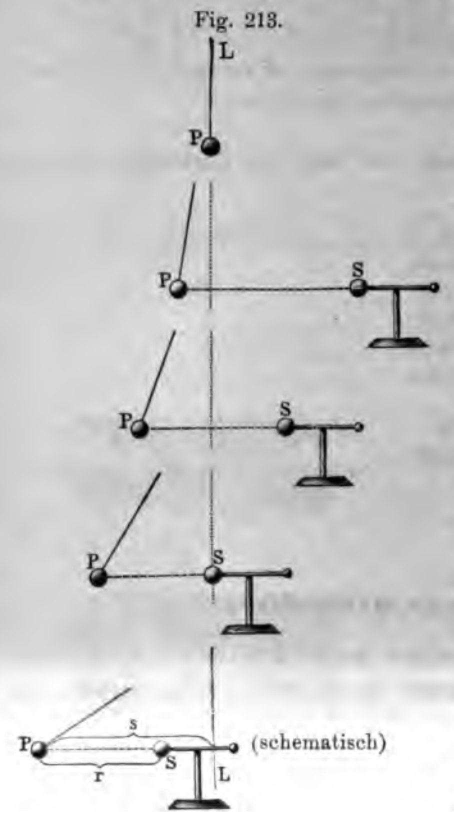


Fig. 213.

Anleitung: Auf die Gröfse [der] Kraft wird geschlossen durch die [Ab]lenkung s cm der „Pendelkugel“ P [aus] der Lotlage LL (Fig. 213), inde[m in] erster Annäherung $f = \varkappa s$. Dan[n] wenn das COULOMBsche Gesetz a[ls] gültig vorausgesetzt ist, $\varkappa s$ [...] oder $s r^2 = \frac{C}{\varkappa} = Konst.$ Würde z. B. in Fig. 213, wenn die Standku[gel] 1 cm diesseits der Lotlage steht, [die] Pendelkugel P um $s = 1$ cm jen[seits] der Lotlage abgelenkt erhalten, so [ist] dies $r = 2$ cm und $s r^2 = K$ $= 4$ (cm³). Dann fordert COUL[OMBS] Gesetz: Zu $s = 0$ gehört $r = \infty$ [...] $s = {}^1/_2$ cm gehört $r^2 = \frac{4}{{}^1/_2} = 8$ cm, ein Abstand der Standkugel dies[seits] der Lotlage um 2,8 cm u. s. f. — [Bei] der wirklichen Durchführung der [Ver]suche ist auf die Ladungsverluste R[ück]sicht zu nehmen, so dafs im al[lge]meinen immer nur die Resultate zw[eier] unmittelbar aufeinander folgender [Ver]suche vergleichbar sind.

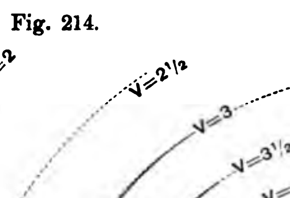
§ 136. **179.** Warum gibt es nicht im selben Sinne ein mechanisc[hes] Elektrizitätsäquivalent, wie es ein mechanisches Wärmeäquivalent gi[bt]

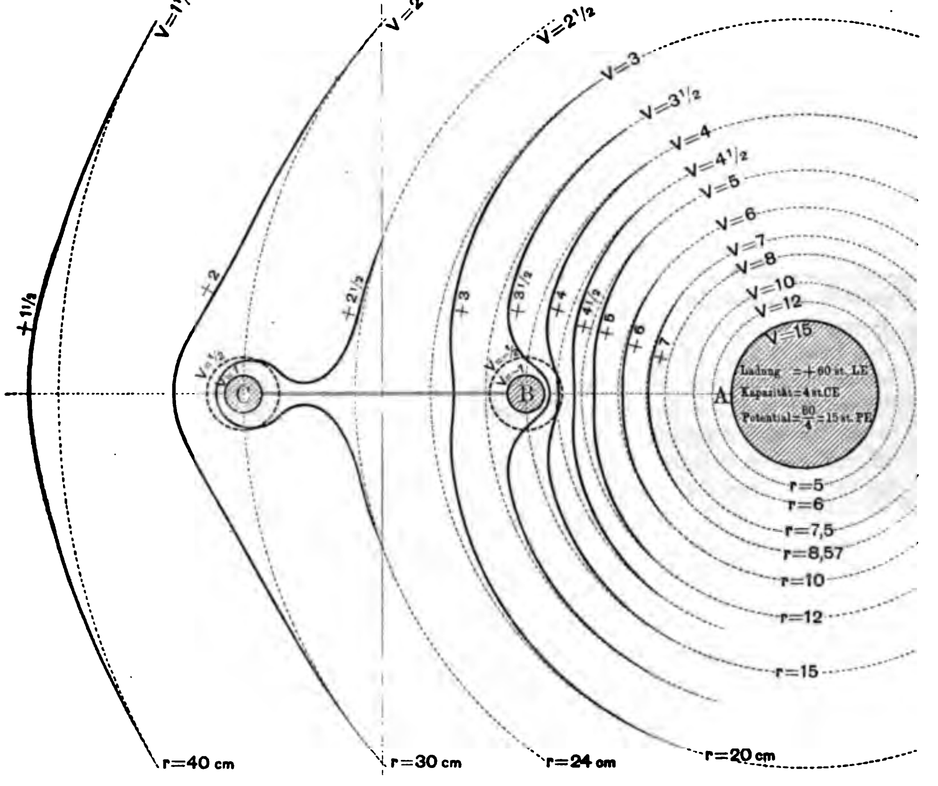
Antwort: „Mechanisches Wärmeäquivalent“ = mechanisches Äquivalent ei[ner] Wärmemenge. — Ein Elektrizitätsäquivalent gibt es zwar auch, aber nur, w[enn] Elektrizität im Sinne von Elektrizitätsgrad = elektrisches Potential genomm[en] wird. Dagegen können mit derselben Elektrizitätsmenge gröfsere oder klein[ere] Arbeitswerte gegeben sein, je nachdem ihr Gelegenheit gegeben ist, zu Stel[len] weniger oder mehr verschiedenen Potentials abzufliefsen und dabei Stromarb[eit] zu verrichten. — Analogie: Es gibt kein mechanisches Äquivalent einer Was[ser]menge, wohl aber ein mechanisches Äquivalent der potentiellen Energie ei[ner] Wassermenge in Bezug auf ein niedrigeres Niveau.

§ 138. **180.** Es sei der influenzierende Körper eine geladene Leit[er]kugel A, der influenzierte Körper bestehe aus zwei gleichen Leit[er]kugeln B, C, die durch einen leitenden Draht von verschwinden[d]



Fig. 214.





Maßstab 1 : 4

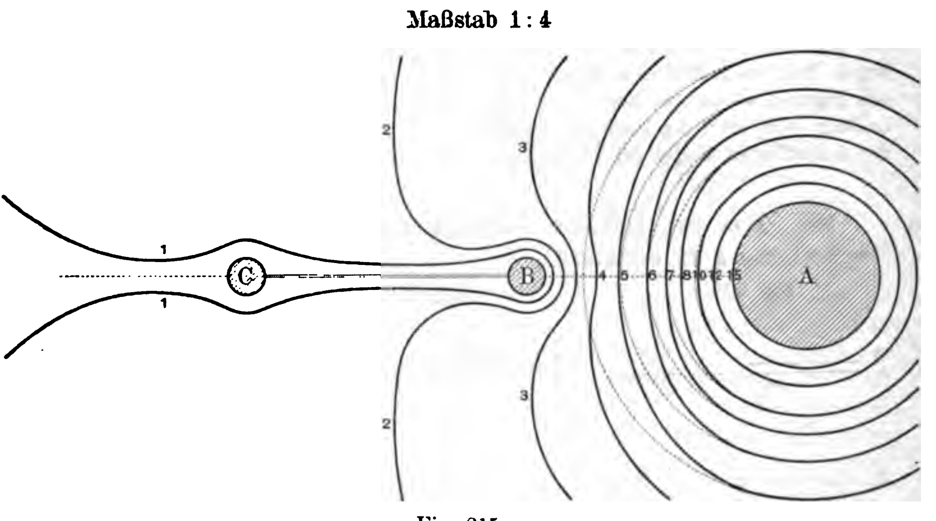


Fig. 215.

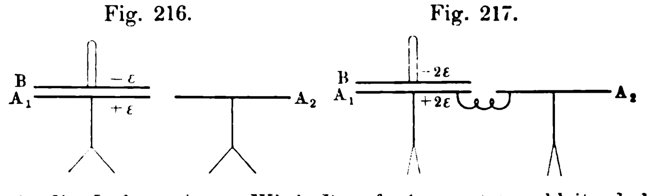
Kapazität verbunden sind. Zu erläutern, dafs und wie durch die gegenseitige Nähe beider Leiter deren Niveauflächen deformiert werden, wenn der influenzierte Körper BC α) isoliert (Fig. 214), β) mit der Erde leitend verbunden (Fig. 215) ist.

Anleitung: Die Figuren sind eine im Verhältnis 1 : 4 verkleinerte Wiedergabe einer Konstruktion in natürlicher Gröfse. Die isoliert aufgestellte Kugel A hat 4 cm Radius und daher 4 st. CE (elektrostatische Kapazitätseinheiten). Sie ist mit 60 st. LE (elektrostatischen Ladungseinheiten) geladen. Dann gelten in ihrem Kraftfeld die an den ausgezogenen Kreisen angeschriebenen Potentialwerte. Die Kugeln B und C haben je 1 cm Radius und 15 cm Zentralabstand. Sie sind in die Niveauflächen mit 15 bzw. 30 cm Abstand vom Mittelpunkt der Kugel A gestellt, wo also die Potentiale 4 bzw. 2 geherrscht haben. Es werden sich also B und C, wenn sie α) isoliert sind, selbst auf die Potentiale 4 und 2 laden, wozu $+4$ bzw. $+2$ st. LE gehören würden, da beide Kugeln die Kapazität von 1 st. CE haben. Da nun von aufsen her keine Ladungen zufliefsen können, wohl aber eine Verteilung positiver und negativer Ladung innerhalb des Körpers BC erfolgt, so wird der elektrostatischen Grundbedingung genügt, wenn das System BC das überall gleiche Potential 3 dadurch annimmt, dafs durch die Verteilung $+1$ st. LE auf C, -1 st. LE auf B auftritt. — Um weiter die durch diese neuen Ladungen herbeigeführten Veränderungen im Kraftfeld von A, B und C zu konstruieren, wird zuerst für B und C allein das zusammengesetzte Kraftfeld nach Tafel IIa, b (bei S. 109, entsprechend den roten Kurven mit entsprechend geänderten Zahlenwerten) konstruiert und dann noch einmal die Superposition dieser zusammengesetzten Potentiale für BC mit den einfachen Potentialen für A durchgeführt.

β) War das System BC mit der Erde leitend verbunden, so hat es überall das Potential 0, solange es im Kraftfeld der für sich positiv geladenen Kugel A ist. Wird nun diese weggenommen oder entladen, so zeigt BC (wenn vorher die Ableitung zur Erde beseitigt ist) nunmehr ein im Vergleich zum Potential 0 der Umgebung negatives Potential.

Man vergleiche schliefslich obige beide Figuren mit Fig. 467 und Fig. 468 (wo an Stelle der Kugel A die punktuelle Ladung $+6$ und an Stelle der Doppelkugel BC die schraffierte Kugel getreten ist); sodann mit diesen beiden Paaren von Figuren wieder die Fig. 451 und 453 (wo an Stelle von A bzw. der punktuellen Ladung $+6$ jetzt die geriebene Stange K, an Stelle der Doppelkugel BC bzw. der schraffierten Kugel der Doppelzylinder A, B getreten ist).

§ 134. **181.** Das den Influenzmaschinen zugrunde liegende Prinzip der Duplizierung zu erläutern.



Anleitung: Von zwei Elektroskopen mit den Kollektorplatten A_1 und A_2 und der Kondensatorplatte B (Fig. 216) empfange A_1 die Ladung $+\varepsilon$. Wird B auf A_1 gesetzt, ableitend berührt und isoliert abgehoben, so hat B die Ladung $-\varepsilon$. Nun wird B auf A_2 aufgesetzt, A_2 ab-



leitend berührt und B abgehoben, so hat auch A_2 die Ladung $+\varepsilon$. Verbindet man A_1 und A_2 miteinander leitend, so haben sie nun zusammen die Ladung $+2\varepsilon$. Wird B wieder auf A_1 gesetzt, so wird die Kapazität dieser Doppelplatte $A_1 B$ so groß, daß sich (fast) die ganze Ladung 2ε in A_1 sammelt (Fig. 217). Wird A_2 von A_1 getrennt, B ableitend berührt und abgehoben, so erhält B die Ladung -2ε u. s. f. Diese Duplizierung kann fortgesetzt werden, und sie liefert (infolge der beim wiederholten Abheben geleisteten Arbeit) die Ladungsmengen $+2\varepsilon$, $+4\varepsilon$, $+8\varepsilon$ . . . in den beiden verbundenen Elektroskopen.

182. Die Begriffe **elektrisches Potential, elektrische Ladungsmenge, Energie, Dichte** und **Spannung** (im elektrostatischen Sinne) sind durch numerische Beispiele für Leiterkugeln von gegebener Kapazität zu erläutern; z. B. für zwei Kugeln von $r = 5$ cm, $R = 10$ cm. §§ 133, 136,

Anleitung: Es seien die beiden Kugeln untereinander und mit einem Elektrometer leitend verbunden, und dieses weise nach der Ladung ein Potential z. B. von $V = 3000$ Volt aus. Da 1 Volt $= {}^1/_{300}$ st. PE, so ist das gemeinsame **Potential** der Kugeln 10 st. PE. — Die zur Erzielung dieses Potentials erforderliche **Ladungsmenge** ist nach $E = CV$, also $E = Vr$, bzw. $E = VR$, § 139, für die kleine Kugel 50 st. LE; für die große 100 st. LE (also 50×2, nicht 50×2^2!).

Die elektrische **Energie** ist $A = {}^1/_2\, VE$ Erg (§ 136); sie ist daher für die kleine Kugel ${}^1/_2 \,.\, 10 \,.\, 50 = 250$ Erg, für die große 500 Erg.

Die elektrische **Dichte** = der Ladungsmenge auf der Flächeneinheit $\left(\text{gemessen durch } \delta = \frac{E}{4r^2\pi} = \frac{Vr}{4r^2\pi} = \frac{V}{4r\pi}\right)$ beträgt für die kleine Kugel $\frac{10}{4.5.\pi} = 0{,}1591$, für die große $\frac{10}{4.10.\pi} = 0{,}0796$ st. Dichteeinheiten.

Die elektrostatische **Spannung** an einer Stelle der Oberfläche eines Leiters ist definiert als der normal gegen die Oberfläche nach außen wirkende statische Druck infolge der Abstoßung der ganzen Ladung auf die Einheit der Ladungsmenge; daher ist für die Kugel das Maß der Spannung $S = \frac{E}{r^2}$ Dyn $= \frac{V}{r}$ Dyn. Sie ist für die kleine Kugel $\frac{10}{5} = 2$ Dyn, für die große **1 Dyn** (LA 35, f.).

183. Wie lassen sich durch Maßflaschen die von einer Elektrisiermaschine gelieferten Ladungsmengen in relativem und absolutem Maße messen? §§ 134, 139.

Anleitung: Gesetzt, es trete bei einem bestimmten Abstande der Kugeln in Flasche c (Fig. 472, S. 437) nach je 1 sec, bei Verbindung mit einer „kräftigeren" Elektrisiermaschine schon nach je ${}^1/_2$, ${}^1/_3$ ... sec Selbstentladung ein: wir schließen dann, daß binnen derselben Zeit dem ganzen System Ladungsmengen zugeführt worden sind, die sich wie 1 : 2 : 3 . . . verhalten. — Um Messungen nicht nur im relativen, sondern absoluten Maße zu vollziehen, müßte einerseits die Kapazität der Maßflasche, andererseits durch Verbindung mit einem Elektroskop die Potentialdifferenz der Kugeln im Augenblick vor der Selbstentladung bekannt sein. Doch ist die Maßflasche heute nicht mehr ein der sonst erreichten Genauigkeit elektrischer Messungen entsprechendes Instrument.

XXI. Magnetische Mafsgröfsen.

§ 142. **184.** Durch Zeichnung zu erläutern, dafs die der Indifferen zone eines Magnetstabes näher liegenden Teile für sich stärk magnetisch sind als die nahe den Enden liegenden.

Anleitung: Da jeder Teil des Magnetstabes (bis herunter zu den hypot tischen „Elementarmagneten") für sich ein vollständiger Magnet ist, so ist, sich nach aufsen als magnetische Kraft äufsert, immer schon die Differenz zweier Kräfte; z. B. nahe dem No ende ein Überschufs der nordmag tischen Kraft eines Elementarmagn über die südmagnetische Kraft anliegenden Südpols des nächsten E mentarmagnetes. Aus theoretisc Betrachtungen hat sich ergeben, d für einen sehr dünnen, gleichmä magnetisierten Stab die die absolu Stärken der einzelnen magnetisc

Fig. 218.



Kräfte angebende Kurve eine Form nach Fig. 218 (Kettenlinie) hat. Obwohl h die absolute Stärke die gröfste bei J, die kleinste bei N und S ist, so ist doch Differenz entgegengesetzter magnetischer Kräfte bei M gröfser als z. B. bei m.

Fig. 219.

§ 143. **185.** Wie wirkt auf eine Magnetnadel ($\nu, \sigma; \lambda$) e Magnetstab ($n, s; l$) aus der „zweiten Hauptlage" (Fig. 219

Anleitung: Es sei wieder r cm der Abstand der Mittelpunk von Nadel und Stab. Dann sind die Abstände nach Fig. 220

$$s\nu = n\nu = R = \sqrt{\left(r-\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{l^2}{4}} \neq \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}} \neq r$$

(was besagt und wie rechtfertigt sich diese doppelte Vernachläs gung?). Die Kraft ist $f_{\nu,s} = \dfrac{\mu m}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \neq \dfrac{\mu m}{r^2} = f_{\nu,n}$. Für d

Fig. 220.

Resultierende F der beiden Kräfte, die somit zwar nic ihrer Gröfse, wohl aber wesentlich ihrer Richtung nac verschieden sind, gilt $F:f \neq l:r$, also $F = f\,\dfrac{l}{r} = \dfrac{\mu m}{r}$ und das Drehungsmoment $F\lambda = \dfrac{\mu\lambda \,.\, ml}{r^3} = \dfrac{M_1\,M}{r^3}$.

Es ist also das der ersten Hauptlage entsprechen Drehungsmoment $F\lambda = 2\,\dfrac{M_1\,M}{r^3}$ in erster Annäheru das Doppelte des Drehungsmomentes der zweit Hauptlage, was sich durch *Versuche* bestätigt, dur die also wieder ein indirekter Beweis für das Coulombsc Elementengesetz bei Polstärken erbracht ist.

14, 146. **186.** Für die erdmagnetische Horizonta intensität das Produkt $M.H$ durch Schwingung

rsuche zu bestimmen. — Für den Quotienten $M : H \neq {}^1/_2 r^3 tg\, \alpha$ ıe bessere Annäherung zu entwickeln.

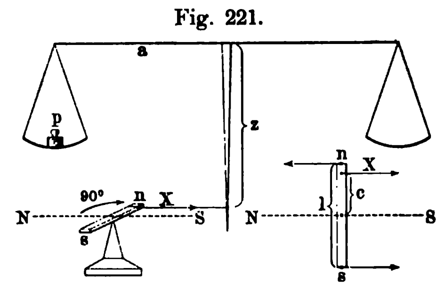
Anleitung: Ist $\mathfrak{M}$ das Massenmoment eines schwingenden Magnetstabes, H das Kraftmoment der Horizontalkomponente (vgl. § 146), so ist (nach § 33 Ende d LA 104) $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{MH}}$, also $MH = \frac{4\pi^2 \mathfrak{M}}{T^2}$. Hierin ist $\mathfrak{M}$ durch Rechnung ı dem Gewicht und der Gestalt des (z. B. rein zylindrischen) Magnetstabes (oder rch Versuche über die Torsionsschwingungen eines gleichgestalteten, magnetfreien ıbes, z. B. aus Messing), $T = \frac{1}{n}$ durch Beobachtung zu bestimmen. — Der sdruck bedarf noch einer Korrektion wegen der bei den Schwingungen ins iel tretenden Torsionskraft des Fadens. Zu dem Zwecke wird dem Faden eine ehung um α^0 erteilt und die Änderung φ^0 der Ruhelage des Magnets beobıtet, wo $\frac{\varphi}{\alpha - \varphi} = \vartheta$ das Torsionsverhältnis heifst. Es wird $MH = \frac{4\pi^2 \mathfrak{M}}{T^2(1+\vartheta)}$.

Ferner ist $\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} tg\, \alpha \left(1 - \frac{l^2}{4 r^2}\right)^2$, wie sich ergibt, wenn in dem Ausdrucke F (§ 143, S. 448) der Nenner $\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2$ beibehalten (nicht $\neq r^4$ gesetzt) rd. — Dabei bedeutet l genau genommen nicht die gemessene Länge des ıgnetstabes (n, s; l), sondern den Abstand l' der Pole n, s.

187. Für die erdmagnetische Horizontalintensität das Produkt H durch eine Hebelwage zu bestimmen (vgl. *Versuch* 2, § 146.) § 146.

Anleitung: In Fig. 221 bezeichne die Länge des Wagebalkens, z die nge des Zeigers vom Drehpunkt der ıge bis zum Befestigungspunkt des dens, c den Abstand des Fadens von r Drehachse des Magnetstabes bei ıkrechten Stellungen von Magnet, den und Zeiger. Dann bringt das r Herstellung des Gleichgewichts orderliche Übergewicht p an dem den eine Zugkraft X hervor, die ı Magnetstab um 90° aus dem magnetischen Meridian verdreht hält. Es d einander gleich die Kraftmomente einerseits $pa = Xz$, andererseits $c = MH$; somit $MH = \frac{pa}{z} \cdot c$. (Man beachte, dafs sich MH auf den Stab s; l) der Figg. 485 und 503, nicht auf die Nadel (ν, σ; λ) bezieht.)

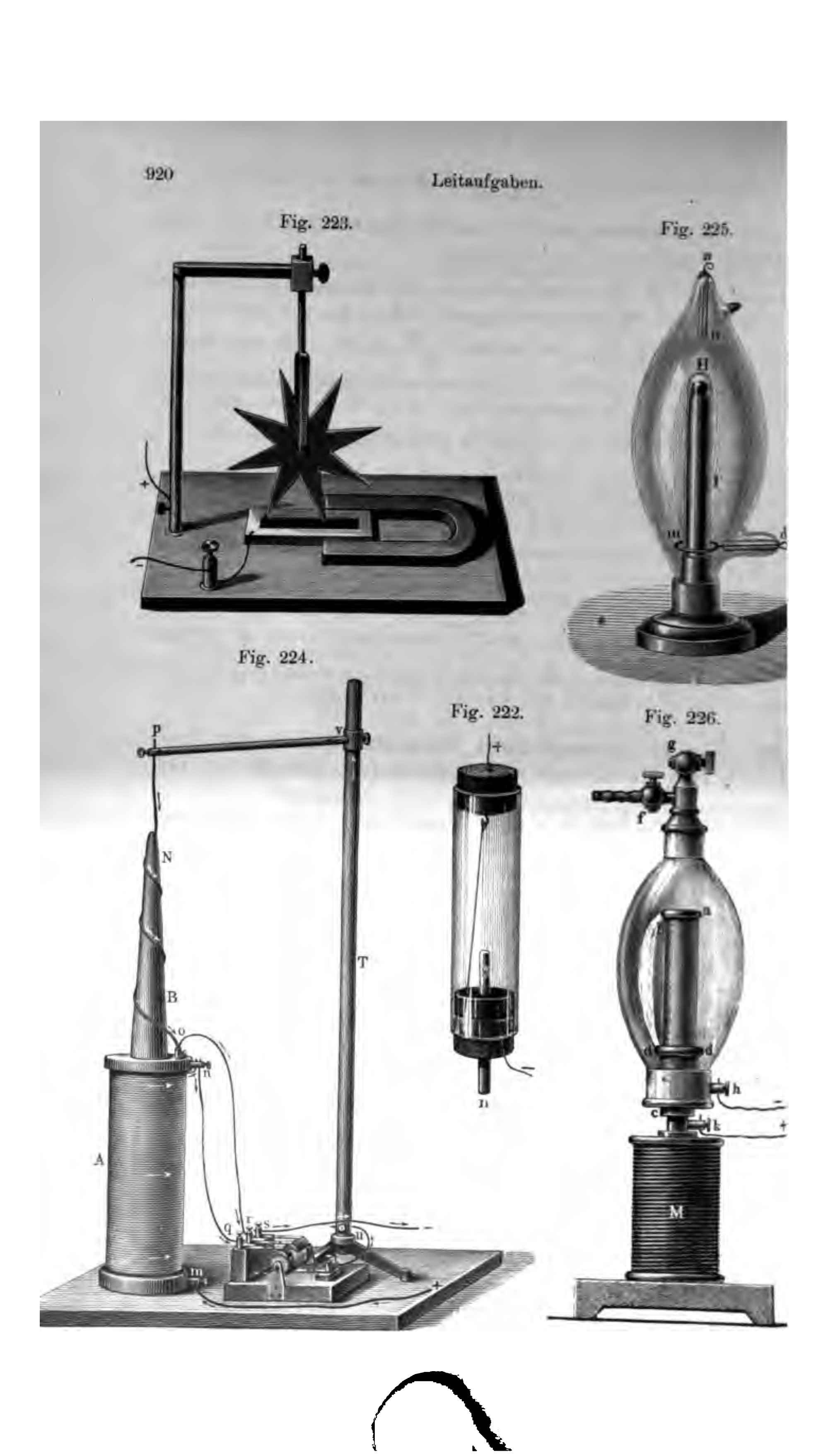
Fig. 221.



Der Quotient $\frac{M}{H}$ für den Stab wird wieder, wie nach § 146, S. 460 und wie der vorigen LA 186 aus der Ablenkung einer Nadel ermittelt.

XXII. Elektromagnetismus und Induktion.

188. Einige Versuche über die relativen Bewegungen zwischen römen und Magneten, speziell über die „elektromagnetischen ɔtationen" zu beschreiben und zu erklären. § 148.


Fig. 223.
Fig. 225.
Fig. 224.
Fig. 222.
Fig. 226.
p
v
N
B
T
A
M
H
+
-

Anleitung: Um zu zeigen, daſs der Erscheinung einer Bewegung des .gnetpoles in Bezug auf einen Stromleiter (einfachstes Beispiel bei stedts Versuch, Fall 3 in der Übersicht der Wechselwirkungen von Magneten 1 Strömen) umgekehrt auch eine Bewegung eines Stromleiters in Bezug f (u. zw. um) einen Magnetpol entspricht, müssen Teile des Stromleiters i beweglich gemacht werden. Dies ist z. B. der Fall bei der einfachen Vorbtung (Fig. 222). Der Strom flieſst von + zu — durch ein Stück Kupferdraht, oben aufgehängt ist und unten in Quecksilber taucht. Dieses Ende kreist dann . den Pol *s* des Magneten *sn*. — In Barlows Rädchen (Fig. 223) geht der Strom + durch die leitende Stütze in das Rädchen, dessen Spitze in Quecksilber cht, von dem weg der Stromleiter zu — geht. Denkt man sich die Kraftlinien n Magnetpol *n* zu *s* verlaufend, so weicht der Stromfaden, der von der Achsenbel durch die Zacke des Rades in das Quecksilber geht, normal zur Kraftlinie s; das Rädchen wird so durch die Wechselwirkung von Magnet und Strom in tation erhalten. — Nach Fig. 224 wickelt sich die biegsame, leitende Schnur *po* den aus der Spule *A* herausragenden Eisenkern abwechselnd in dem einen und deren Windungssinne spiralig auf, je nachdem mittels des Kommutators der rom in verschiedenen Richtungen zum Teil durch die Spule *A*, zum Teil durch biegsame Schnur geschickt wird. —

Auch der Lichtstrom in Geiſslerschen Röhren stellt einen beweglichen iter dar, der um einen Magnetkern kreist; in Fig. 225 ist der Magnet ein permanter, in Fig. 226 ein durch die Spule *M* angeregter Elektromagnet.

Als einfachstes Schema, warum die Bewegung des Stromleiters um den Pol ne kreisende ist, kann Fig. 509 (S. 467) dienen, wenn wir uns die einzelnen emente des Kreisstromes längs des Umfanges beweglich denken. .eses Kreisen stellt dann die Umkehrung dar zur Bewegung, die ein eier Pol längs der kreisförmigen Kraftlinien nach Fig. 512, S. 469 sführen würde.

Fig. 227.

189. Einrichtung und Verwendung der Sinusbussole.

§ 148.

Anleitung: Statt daſs, wie bei der Tangentenbussole, der .ng in der Ebene des magnetischen Meridians bleibt und Nadel aus seiner Ebene durch den Strom abgelenkt wird, wird r Ring bei der Sinusbussole der aus der Ebene des magnetischen ridians heraustretenden Nadel nachgedreht, und zwar so lange, die Nadel in der Ebene des Ringes bleibt. Fig. 227 zeigt n, daſs und warum an Stelle Funktion Tangens die Funktion us tritt.

190. Rechnerische Erirung von Wheatstones ücke zur Messung von elekschen Leitungswiderständen.

§ 149.

Fig. 228.

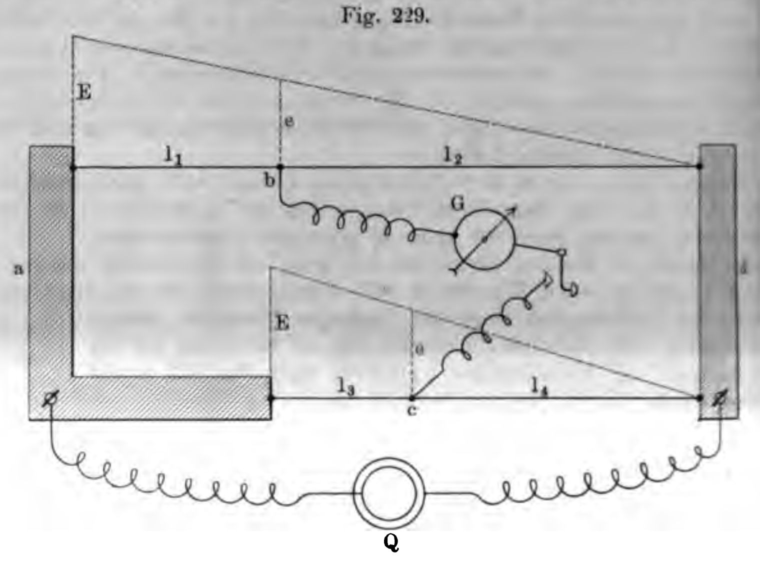
Anleitung: Von einer Batie *Q* (Fig. 228) führt eine Leitung den Ecken *a* und *d* eines Metallhmens *acdb*, so daſs, wenn e Parallelogrammseiten überall

ununterbrochen wären, eine Stromverzweigung nach den Wegen abd, acd eintreten würde. Wären überdies die Widerstände $ab = w_1$, $ac = w_2$, $bd = w_3$, $cd = w_4$ alle einander gleich, so würde ein in die Brücke cb eingeschaltetes Galvanometer den Ausschlag Null geben. Aber auch dann wird längs bc kein Strom fließen, wenn $w_1 : w_2 = w_3 : w_4$. Sind daher die Widerstände w_1, w_2, w_3 bekannt, durch Herausziehen von Stöpseln (wie beim SIEMENSschen Rheostaten) auf bestimmte Gröfsen zu bringen, so läfst sich hieraus der Widerstand eines Leiters berechnen (die übrige Verbindung cd als widerstandslos vorausgesetzt).

§ 149. **191. Graphische Erklärung von Wheatstones Brücke** (Fig. 229).

Anleitung: Mit den Polen einer Batterie Q sei das winkelförmige Kupferstück a und das gerade d verbunden, und beide seien als widerstandslos angenommen.

Fig. 229.





Zwischen a und d herrsche die Potentialdifferenz E, und der Potentialabfall dargestellt durch die beiden schiefen Geraden. a und d seien verbunden durch zwei parallele homogene Drähte, die sich nur durch die Längen $(l_1 + l_2)$ und $(l_3 +$ unterscheiden. Werden dann die Fufspunkte b und c der gleichen Ordinaten e einander durch die Galvanometerbrücke bGc verbunden, so bleibt diese strom Für jene Punkte b und c gilt aber gemäfs der Ähnlichkeit der rechtwinkl Dreiecke die Proportion $\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_3}{l_4}$. Da aber die Drähte als nur durch die Lä nicht durch den Querschnitt und spezifischen Widerstand sich unterscheidend genommen waren, so gilt auch $\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}$.

§ 149. **192. Die Umrechnungszahlen des elektrostatischen Maßsyst in die beiden elektromagnetischen Systeme zu begründen.**

Vorbemerkung. Was die Namen der drei Systeme betrifft, so sind sie drei absolute Systeme, da sie alle Gröfsen auf Centimeter, Sekunden und Gr

ıren. Dabei aber wenden die beiden theoretischen Maßsysteme die Einheiten cm, sec, g an; dagegen bleibt im praktischen oder elektro- ɔhen Maßsystem zwar als Zeiteinheit sec, aber als Längeneinheit er Erdmeridianquadrant = 10^9 cm, als Masseneinheit 10^{-11} g. — diese Umrechnungszahlen nur willkürlich sind, beruht der Unterschied dem theoretischen elektrostatischen Maßsystem (Übersichtstafel im ıh. S. 772, Kolonne 1) und dem theoretischen elektromagnetischen tem (Kolonne 2) auf folgenden Tatsachen:

ıhdem die Einheiten für die Mengen der Elektrizität und des Magnetismus Abstoſsungswirkungen gemäß dem COULOMBschen Gesetz in übereinler Weise definiert sind (so daſs die Dimension der Einheit bei beiden cm$^{3/2}$ sec^{-1} g$^{1/2}$ dieselbe ist), kommt als eine Erfahrung für sich noch die ıſs ein nach jenem elektrostatischen Maß gemessener Strom von bestimmter ıuf einen Pol von bestimmter Stärke nach BIOT-SAVARTS Gesetz mit ıer Kraft wirkt. Wird nun der Strom in dem zweiten, dem elektro- chen Maß, gemessen, so muſs zwischen diesen beiden theoretischen ınächst der Stromstärke, dann aber auch aller übrigen elektrischen und ɔhen Gröſsen, eine bestimmte Umrechnungszahl gelten.

ı dieser Zahl hat schon Faraday vorausgesehen, daſs sie mit der Ge- ʒkeit des Lichtes nach Maßzahl und Dimension identisch sein werde r noch keineswegs beweist, daſs die Identität sich auch auf die Qualität ung"] beider Gröſsengattungen erstrecke, da ja sehr oft Gröſsen ver- ır Gattung gleiche Dimension haben, z. B. elektrostatische Kapazität und Widerstand im elektromagnetischen Maß und Geschwindigkeit; vgl. math. . 7, S. 715). Das folgende Täfelchen zeigt, daß die Quotienten aus

Gattung der Gröſsen	Dimension im elektrostatischen System	Dimension im elektromagnetischen System	Quotienten
Ladungsmenge	$L^{3/2} T^{-1} M^{1/2}$	$L^{1/2} M^{1/2}$	$\frac{L}{T} = V$
Potential	$L^{1/2} T^{-1} M^{1/2}$	$L^{3/2} T^{-2} M^{1/2}$	$\frac{T}{L} = V^{-1}$
Kapazität	L	$L^{-1} T^2$	$\left(\frac{L}{T}\right)^2 = V^2$
Stromstärke	$L^{3/2} T^{-2} M^{1/2}$	$L^{1/2} T^{-1} M^{1/2}$	$\frac{L}{T} = V$
Widerstand	$L^{-1} T$	$L T^{-1}$	$\left(\frac{T}{L}\right)^2 = V^{-2}$

ɔnsionen im elektrostatischen und elektromagnetischen System immer auf von der Dimension einer Geschwindigkeit (oder ihre reziproken Werte, drate oder reziproken Werte der Quadrate) führen. Jene Gröſse von der ın v, die wir im Nächstfolgenden kurz die Gröſse v nennen wollen, haben ILHELM WEBER und KOHLRAUSCH (1856) aus Versuchen darüber ermittelt, groſse Zahl elektrostatischer Ladungseinheiten in einem Stromleiter zur

ɔei e die induzierte EMK in absoluten elektromagnetischen Potentialdifferenz-
.heiten ist. Es wird also $f \,.\, s = i \,.\, \lambda \,.\, H \,.\, s = e \,.\, i \,.\, t$, somit $e \,.\, t = H \,.\, \lambda \,.\, s$
▮ $e = H \,.\, \lambda \,.\, \frac{s}{t}$. Dabei ist aber $\frac{s}{t}$ die Geschwindigkeit c, mit welcher das
:terstück λ durch das magnetische Kraftfeld von der Feldstärke H senkrecht zu
- Kraftlinienrichtung bewegt wird, so dafs wir erhalten: $e = H \,.\, \lambda \,.\, c$. — Es
▮t dabei $\lambda \,.\, c$ die Fläche dar, welche das Leiterelement λ während 1 sec durch-
ft; auf je 1 cm² dieser Fläche entfallen aber H Kraftlinien: somit ist die
ıfszahl e der induzierten EMK gleich der Maßzahl $H \,.\, \lambda \,.\, c$ der in
ʟee geschnittenen Kraftlinien; was zu beweisen war.

In allen Fällen, wo das Leiterstück die Kraftlinien nicht normal schneidet
3 hiemit auch für alle irgendwie krummlinigen Leiter läfst sich Faradays
gel ebenfalls anwenden, indem die Projektion der Leiterstücke auf die zu den
ıtungen der Kraftlinien und der Bewegung normale Richtung eingeführt wird.
ıfache Beispiele hierfür in den beiden folgenden LA 195, 196.

Zusatz: Eine andere Erweiterung der Gleichung $e = H\lambda \,.\, c$ besteht darin,
ı die Bewegung des Sekundärleiters nicht mit konstanter, sondern mit ver-
!erlicher Geschwindigkeit geschieht. Überhaupt führt der Umstand, dafs
ı Faradays Regel die elektromotorische Kraft maßzahlengleich gesetzt wird
„per Zeiteinheit" geschnittenen Kraftlinien, zu folgenden Analogien: Der
ɜmeinen Maßformel für die Geschwindigkeiten $v = \frac{s' - s}{t' - t}$ für $t' = t$ ist analog
die Änderung der EMK und der Ladung $v_e = \frac{e' - e}{t' - t}$ für $t' = t$. Ferner
ʟ uns in LA 203 noch nützlich werden die Rechnungsgröfse $w_e = \frac{v_e' - v_e}{t' - t}$ für
: t; diese steht zu e in derselben Beziehung wie bei der Bewegung eines Punktes
Beschleunigung w zum Wege s.

195. Die Entstehung Ströme im Erdinduktor erklären.

§ 151.

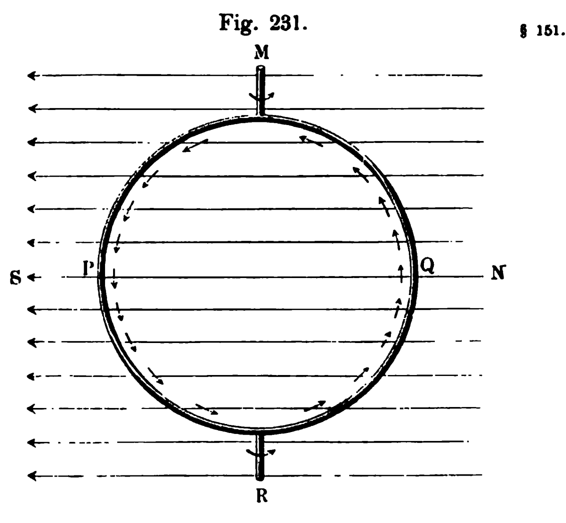


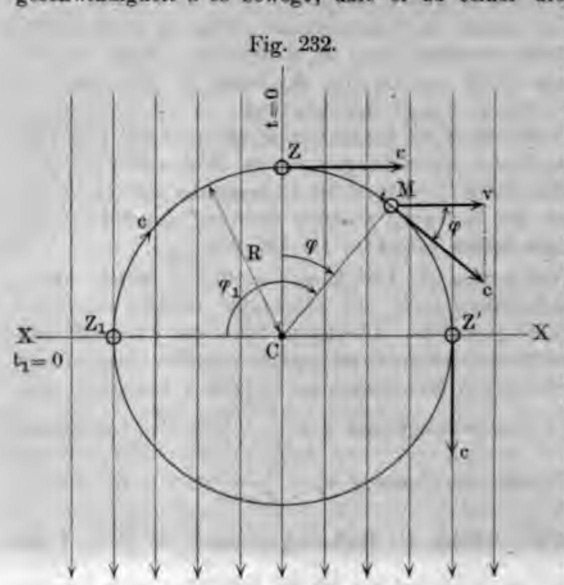
Fig. 231.

Anleitung: Stellen NS ɾ. 231) und die zu ihr Paral- ɑ die Kraftlinien des homo- ɑn magnetischen Kraftfeldes Erde dar, und wird der Ring Erdinduktors um die zu NS ɪmale Achse MR gedreht, so 'den die Kraftlinien am häu- ten bei P und Q, dagegen ' nicht nächst M und R ge- ɪitten (beides angedeutet 'ch den kleineren und gröfse- ı Abstand der Pfeile nächst ɑ Ring). Die Berechnung der den einzelnen Stellen des ıges induzierten EMKe bildet einen besonderen Fall der folgenden allgemei- 'en Aufgabe:

§ 151. **196.** Die Grundgleichung für **Wechselströme** $\boldsymbol{e = E . cos}$
$\boldsymbol{e = E . sin\, \alpha t_1}$ abzuleiten.

Anleitung: Wir denken uns einen geradlinigen Stromleiter von de
l cm in einem homogenen magnetischen Kraftfelde H mit konstanter
geschwindigkeit α so bewegt, dafs er zu seiner ursprünglichen Lage Z
$\varphi = 0$, Fig. 232) stets
bleibt; die Drehung
liege dabei in dem
R cm parallel zu der
der sich also mit
stanten Umfangsgesc
keit $c = R . \alpha$ bew
Stromleiter bewegt
von Z über M nach Z
zurück über Z_1 bis
schneidet er die K
senkrecht mit der
Geschwindigkeit v.
nun für den Punk
Geschwindigkeit v
Maximum, nimmt
mählich ab (allgemei
$v = c . cos\, \varphi = R$
[vgl. § 12, II, Gl.
erreicht in Z' den
$v = 0$. Entsprech
ziehungen in den üb

Fig. 232.



Quadranten. — Nach FARADAYS Regel (LA 194) ist die induzierte EMK, wel
Schneiden der Kraftlinien auftritt $e = H . l . v$ (hier ist v anstatt c zu setzen
Geschwindigkeit normal zur Kraftlinienrichtung fortwährend variiert). Wi
also für die im Punkte M induzierte EMK den Wert $e = H . l . R . \alpha .$
erreicht sein Maximum E für $cos\, \alpha t = +1$, also für $t = 0$, d. i. im I
nämlich: $E = H . l . R . \alpha$, so dafs sich ergibt $\boldsymbol{e = E . cos\, \alpha t}$. — Wen
Winkel ($\varphi = \alpha t$) und damit auch die Zeit t nicht von Z ausgehend zäh
dern schon von Z_1 an ($^1/_4$ Periode vorher) und die entsprechenden Bezei
φ_1 und t_1 einführen, so erhalten wir $\varphi_1 = 90° + \varphi$, daher $\varphi = \varphi_1 -$
$cos\, \varphi = cos\, (\varphi_1 - 90°) = sin\, \varphi_1$, ferner $\varphi = \alpha . t$ und $\varphi_1 = \alpha . t_1$, somit $e =$
$= E . sin\, \varphi_1 = E . sin\, \alpha t_1$. Wenn wir also die Zeit t_1 von jenem Auger
zählen, in dem keine Kraftlinien geschnitten werden (Z_1), dann ergibt
die induzierte EMK die Beziehung $\boldsymbol{e = E . sin\, \alpha t_1}$, analog der für
Zeit-Gesetz $s = a\, sin\, \alpha t$ einer einfachen Sinusschwingung (§ 12).

§ 151. **197.** Zu zeigen, dafs bei einem **Wechselstrom** (Sinusst
mittlere Stromstärke $\boldsymbol{i_m = \frac{2}{\pi} \cdot J}$.

Anleitung: Sind die veränderlichen Stromstärken durch die Ordin
Sinuslinie gegeben, wobei J den Maximalwert darstellen möge, so ist di
Stromstärke i_m gleich der Höhe des flächengleichen Rechteckes bei gleic



· $\frac{1}{4}$-Periode ($0^0 \lesseqgtr \varphi \leq 90^0$) hat die Fläche der Sinuskurve von der Gleichung
= $J \,.\, sin\, \varphi$ den Wert $F = J \,.\, 1$ (mathem. Anhang Nr. 19); die Höhe i_m des
hengleichen Rechteckes ergibt sich also aus $i_m \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \,.\, J$, also $i_m = \frac{2}{\pi} \cdot J$.

XIII. Beziehungen der elektrischen zu den kalorischen, chemischen und optischen Erscheinungen.

198. Zu beweisen, dafs die (mechanische oder kalorische) kundenarbeit äquivalent ist der Stromarbeit nach der Gleichung ·beit = Ladungsmenge × Ladungsgrad. § 152.

Anleitung: Um eine Ladungsmenge E vom Potential Null an eine Stelle zu ngen, wo das konstante Potential V herrscht, ist eine Arbeit erforderlich im rage $A = EV$ (— nicht $A = \frac{1}{2} EV$, wie in § 136, wo das Potential erst Null auf V zu steigern war). Diese Arbeit wird bei der Entladung wieder wonnen. Strömt nun während einer Zeit von t sec eine Ladungsmenge E rch einen Draht von einer Stelle höheren zu einer Stelle niedrigeren Potentials, ist die Potentialdifferenz e, so erscheint die gewonnene Arbeit in Form von irme; da die elektromotorische Kraft $E = i\,t$, deren Arbeitswert $A = i\,t \,.\, e = i^2 w \,.\, t$, ist die Wärmemenge per Sekunde $Q = 0{,}24\ i\,e = 0{,}24\ i^2 w$ cal.

199. Das kalorische Äquivalent A der mechanischen Arbeits-heit (§ 82) aus der durch Erwärmung eines Leiters in einem Kalori-ster erzeugten Temperaturerhöhung per sec zu berechnen. § 153.

Anleitung: Das Kalorimeter (Fig. 546, S. 494) enthalte z. B. 200 g Wasser, r Wasserwert des Gefäfses sei 25 g. Durch einen (Konstantan-) Draht von Ω Widerstand werde 120 Sek. lang ein Strom von 3 Amp. geleitet. Die Erwär-ng betrage 2,3°. — Aus $A\,i^2 w\,t = 225 \,.\, 2{,}3$ cal. ergibt sich $A =$ **0,24 cal.**

200. Zu beweisen, dafs die der Stromstärke günstigste Schal-ng für mehrere gleiche Elemente die ist, bei der der äufsere iderstand gleich ist dem inneren. § 156.

Anleitung: Es seien n einfache Elemente, deren jedes die elektromotorische aft e und den inneren Widerstand w_i hat, anfänglich alle nebeneinander chaltet. Dann ist wegen der Vergröfserung des Plattenquerschnittes der innere samtwiderstand $W_i = \frac{w_i}{n}$. Hat der äufsere Schliefsungsleiter (einschliefslich der Betrieb zu setzenden Drähte bei Telegraphen, Glühversuchen ...) den gegebenen derstand W_a, so ist (weil die elektromotorische Kraft e der ganzen Batterie ich ist der je eines der n Elemente) die Stromstärke $J = \frac{e}{W_i + W_a}$. Bilden nun aus den n Elementen x gleiche Gruppen, so dafs nunmehr je $\frac{n}{x}$ (zu em $\frac{n}{x}$ fachen Element) nebeneinander geschaltet und diese x Gruppen ntereinander geschaltet sind, so wird die elektromotorische Kraft $E = ex$,

der innere Widerstand je eines der $\frac{n}{x}$ fachen Elemente wegen der Verklein des Gesamtplattenquerschnittes x mal so grofs, somit in den x mal so zahlre Elementen x^2 mal so grofs; an dem äufseren Widerstand W_a ändere sich n

Daher ist jetzt die Stromstärke $J' = \frac{ex}{W_i x^2 + W_a} = \frac{e}{W_i x + \frac{W_a}{x}}$. Hier er

J' das Maximum, wenn der Nenner das Minimum erreicht, was bei Gleic der Summanden eintritt, weil das Produkt der Summanden $W_i x \cdot \frac{W_a}{x} =$ W eine konstante Gröfse ist (Zusatz im math. Anh. Nr. 14, Beispiel 2). - gegebene Werte von W_a und n ist also $x = \sqrt{\frac{W_a}{W_i}} = \sqrt{n \cdot \frac{W_a}{w_i}}$. Die ma

Stromstärke ist dann: $J_{max} = \frac{E}{W_a + W_a} = \frac{e\sqrt{n\frac{W_a}{w_i}}}{2 W_a} = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{n}{W_a w_i}}$.

§ 155. **201. Messende Versuche zum Ohmschen Gesetz** an g nischen Elementen.

Beispiele: 1. Ein Daniellelement sei durch Drähte, deren Widerstand acht gelassen werden kann, mit einem Hartmann-Braunschen Ampèreme 0,668 Ohm Widerstand verbunden. Der Widerstand des ganzen Stromkre w, die Stromstärke i, die elektromotorische Kraft e; es werden dann $w_1 =$ $w_2 = 2$ Ohm u. s. f. eingeschaltet und die Stromstärken $i_1, i_2 \ldots$ beobachtet ist $iw = e$, $i_1(w + w_1) = e \ldots$, woraus $w = \frac{w_1 i_1}{i - i_1} = \frac{w_2 i_2}{i - i_2}$ u. s. f. Der wert dieser nahezu übereinstimmenden Werte von w ergibt (nach Abz Ampèremeterwiderstandes) den inneren Widerstand des Elementes.

Z. B.: Es war abgelesen $i = 1{,}32$ Amp., $w_1 = 1$ Ohm, $i_1 = 0{,}61$. Ferner $w = 0{,}859$ Ohm, innerer Widerstand $w_0 = 0{,}191$ Ohm.

2. Aus denselben Versuchen folgt die elektromotorische Kra Elementes $e = i \cdot w = 1{,}32 \cdot 0{,}859 = 1{,}134$ Volt.

3. Ähnliche Versuche für Reihen- und Parallelschaltung von Ele

4. Man benutze das Ampèremeter als Galvanometer ($w_i = 74$ Oh schalte neben 1 Daniell soviel Rheostatenwiderstand (273 Ohm), dafs der Au 18 Skalenteile beträgt. Verdoppelt man den Gesamtwiderstand von 347 O sinkt der Ausschlag auf 9° u. s. f. — Schaltet man ein zweites Element hi verdoppelt sich der Ausschlag.

§ 155. 202. Zu zeigen, dafs die Beziehungen für den inneren und äu Widerstand der Elemente (LA 200) auch bei Thermosä Dynamomaschinen u. s. w. (speziell auch bei Erregung eines S mittels Influenzmaschine, § 140, S. 438, Figg. 472 u. 473)

Anleitung: Bei einer Dynamomaschine herrscht an den Klemmen e den Konstruktionsgröfsen abhängige Potentialdifferenz, und es zeigt sich da hier aus ein Potentialabfall, sobald der „äufsere" Stromkreis geschlossen w dafs ein Strom fliefsen kann. Derselbe Strom fliefst jedoch auch im Inn



hine (durch die induzierten Ankerdrähte und durch die Magnetbewickelung): ılb ist auch dieser „innere Widerstand" der Maschine in Betracht zu ziehen. ieser innere Widerstand liefse sich beliebig klein machen, wenn die (Anker-Magnet-) Wickelungen beliebig kurz und dick gemacht werden könnten; stehen aber folgende Hindernisse entgegen: a) Je kürzer die induzierten te sind, desto kleiner wird unter sonst gleichen Verhältnissen die induzierte : (FARADAYS Regel, § 151, LA 194). b) Mit dem Drahtquerschnitt wächst Raumbedarf für diese Drähte sehr bedeutend, d. h. die Maschine wird un-iltnismäßig grofs und schwer, daher auch teuer, so dafs es wirtschaftlicher , im Inneren der Maschine einen bestimmten Prozentsatz der Leistung durch nwärme zu verlieren (LA 205, 211). — Ähnlich für Thermosäulen.

Bei der Erregung eines Stromes mittels der Influenzmaschine (§ 140, uch a) ist zu bedenken, dafs im äufseren Stromkreise nur dann ein Strom weisbar ist (durch die kleinen Pendel), wenn zwischen den beiden Polkugeln Potentialdifferenz herrscht; würden wir nun anstatt der halbleitenden Holz-:hen, welche die Pendel tragen, gut leitende Drähte verwenden, so wäre der ɜrstand w_a derselben verschwindend klein gegen den inneren Widerstand w_i Influenzmaschine, d. h. zwischen den beiden Polkugeln würde (nahezu!) keine ntialdifferenz mehr herrschen, und die Maschine wäre „kurz" geschlossen. Die ɜr Maschine erzeugte Potentialdifferenz würde dann ganz dazu verwendet, den ·en Widerstand w_i zu überwinden.

203. Die Schwingungsdauer elektrischer Schwingungen aus der azität c und der Selbstinduktion L eines Leitersystems zu berechnen. § 157.

Vorbemerkung über das Maß der **Selbstinduktion** eines Leitersystems: lie Selbstinduktion aufgefafst werden kann als die Summe der wechsel-igen Induktionen aller Stromfäden, die wir uns in dem System bei Ver-rung seines Ladungsgrades (z. B. bei rascher disruptiver Entladung) auf-nd zu denken haben, so gilt auch für die Selbstinduktion die nach ıDAYS Regel bestehende Proportionalität $N = Li$ . . (1) zwischen der Zahl N Kraftlinien eines Primärstromes oder Magnetes, die seitens des Sekundär-·s geschnitten werden, und der Stärke i des induzierten Stromes; der Pro-onalitätsfaktor L heifst der **Selbstinduktionskoeffizient** des Leitersystems.

Speziell hat die Selbstinduktion wesentlichen Einflufs auf den Verlauf der nstärke in den sehr jähen nderungen bei disruptiver Ent-ıg in einer Funkenstrecke lener Flasche, Induktorium, zwar hier nicht nur in den lungen der Sekundärspule, son-auch in den mit den Pol-ln a verbundenen grofsen en BC, Fig. 233). —

Fig. 233.

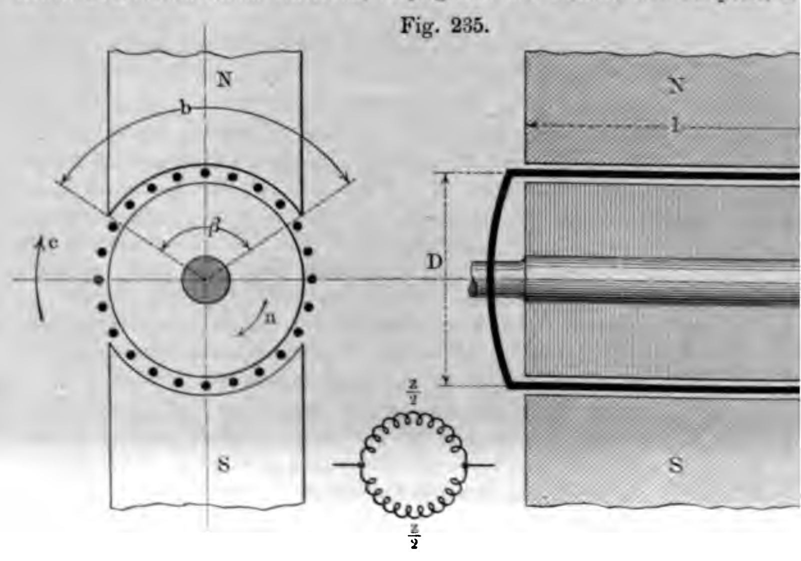
Dafs der Verlauf der Entladung infachsten Falle analog sei einer Sinusschwingung $s = a \,.\, sin\,(\alpha t)$ mit ıderlicher Beschleunigung $w = -\alpha^2 s$ und daher mit der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\alpha}$, ergibt sich so: das Leitersystem BC habe die Kapazität c und n einem bestimmten Zeitpunkt t durch die Ladungsmenge E auf das Potential

Die Zahl der hintereinander geschalteten induzierten Drähte ist ($^1/_2 . Z_i$), d
Anker einer zweipoligen Dynamomaschine aus zwei parallel geschalteten Z
besteht; es wird daher die in allen Drähten induzierte EMK $E = {}^1/_2 . e_s . Z_i . 10^{-}$
— Nun ist $2b : D\pi = Z_i : Z$, daher $Z_i = \frac{2b . Z}{D\pi}$, somit:

$$E = \frac{1}{2} . \frac{H . l . D\pi n}{60} . \frac{2b . Z}{D\pi} . 10^{-8} = \frac{H . l . b . n . Z}{60 . 10^8}.$$

Hier ist ($l . b$) die Fläche des Nordpoles (in cm²) des Feldmagnetes, aus d
Kraftlinien in den Anker eintreten, resp. gleich der Fläche des Südpoles, in

Fig. 235.



die Kraftlinien wieder aus dem Anker ihren Rückweg finden; es
$N = H . l . b$ die Kraftlinienzahl per Polpaar (zugehörig zu einem ge-
schlossenen magnetischen Kreis). Es wird demnach $E = \frac{N . n . Z}{60 . 10^8}$ V

b) Für mehrpolige Maschinen gilt die allgemeine Beziehung $E = \frac{N}{\ldots}$

Dabei bedeutet p die Anzahl der Polpaare, p_1 die Anzahl der Bürstenpaa
lich $2p_1$ die Zahl der parallel geschalteten Stromzweige im Anker.

Man ersieht aus diesen Grundgleichungen, dafs die EMK einer
maschine gröfser wird, wenn

1. das Magnetfeld stärker gemacht wird (N),
2. die Tourenzahl erhöht wird (n),
3. die Zahl der Ankerdrähte vergröfsert wird (Z),
4. die Zahl der Pole vermehrt wird (p),
5. die Schaltung im Anker so gewählt wird, dafs die Zahl der ge-
   schalteten Stromkreise kleiner wird (p_1).

206. Zu zeigen, dafs die in einem Elektromotor auf-
elektromotorische Gegenkraft (EMGK) dessen Nutzeffekt (das
dessen Wirkungsgrad) in günstigem Sinne beeinflufst.



Anleitung: Bezeichnen wir die EMGK mit E, die Spannungsdifferenz, an .che der Motor angeschlossen wird (Klemmenspannung) mit E_k, die ihm zuührte Stromstärke mit J, den Widerstand der Magnetwickelung und des Ankers ammengenommen mit w, so mufs die Gleichung bestehen: $E_k = E + J \cdot w$. ltiplizieren wir diese Gleichung mit J, so erhalten wir $E_k \cdot J = E \cdot J + J^2 \cdot w$. bei ist $(E_k \cdot J) = A$ der zugeführte elektrische Effekt (Gesamteffekt in Watt), l $(J^2 \cdot w)$ der Verlust durch Stromwärme, so dafs also $(E \cdot J) = a$ den Nutz-ːkt (in Watt) darstellt. Der Wirkungsgrad η wird daher um so gröfser, je hr sich E dem E_k nähert, weil $\eta = \frac{a}{A} = \frac{E \cdot J}{E_k \cdot J} = \frac{E}{E_k}$ ist, d. h. also der rkungsgrad steigt mit der EMGK. Der ideale Fall $E = E_k$, also $\eta = 1 = 100$ Proz., natürlich niemals ganz zu erreichen, weil es einen widerstandslosen Motor ($w = 0$) ht gibt, so dafs stets $E < E_k$ bleibt.

Warum ist es auch beim Elektromotor günstig, die Bürsten (aber gegen die ːhrichtung) zu verschieben, wenn der Motor „belastet" ist? (Vergl. Ankerreaktion l Bürstenverschiebung bei den Generatoren, § 162, Fig. 601 bis 603).

Wenn man zwei ganz gleichgebaute Dynamomaschinen miteinander durch tungen verbindet, so dafs die eine als Generator, die andere als Motor wirkt, ist bei Hauptstrommaschinen (Fig. 597, S. 537) die Drehrichtung des Motors entgegengesetzte von der des Generators, bei Nebenschlufsmaschinen (Fig. 598, 537) jedoch beim Motor und Generator dieselbe; warum?

207. Charakteristische Eigenschaften der Hauptstrom-, Nebenhlufs- und Compound-Generatoren und der entsprechenden Motoren.

§§ 162, 163.

Anleitung: Wir bezeichnen im folgenden mit:

E die EMK der Maschine (des Generators, bzw. Motors),
E_k die Klemmenspannung,
W_a den Ankerwiderstand,
W_m den Widerstand der Magnetwickelungen,
J_a den Ankerstrom,
J_m den Magnetisierungsstrom,
J den Strom im äufseren Kreise,
n die Tourenzahl per Minute.

Für die Praxis ist das Verhalten der Dynamomaschinen bei konstanter Tourenal n und variabler Belastung wichtig; bei den Motoren handelt es sich um den trieb mit konstanter Klemmenspannung E_k und variabler Belastung.

A. Dynamomaschinen (Generatoren).

Die Eigenschaften im Betriebe werden durch die sogenannte „Charakristik" zum Ausdrucke gebracht; man versteht darunter die graphische Darllung des Zusammenhanges zwischen der Stromstärke J im äufseren Kreise ntzstrom) und der Klemmenspannung E_k; die Stromstärken J werden dabei als szissen, die Klemmenspannungen E_k als Ordinaten angenommen.

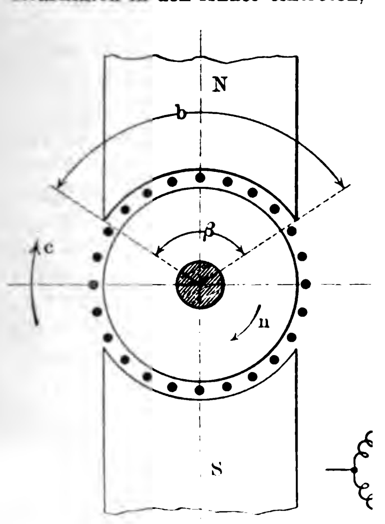
a) Hauptstrommaschine (Fig. 236).

Vor allem ist $J = J_a = J_m$ und nach der Grundgleichung der Dynamoschinen (LA 205) $E = \frac{N \cdot n \cdot Z}{60 \cdot 10^8} \cdot \frac{p}{p_1} = K \cdot N \cdot n$, worin K konstant ist, da Leiterzahl Z, die Polpaarzahl p und die Zahl der Bürstenpaare p_1 für eine

Die Zahl der hintereinander gesch
Anker einer zweipoligen Dynamom
besteht; es wird daher die in allen D
— Nun ist $2b : D\pi = Z_i : Z$, da

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{H \, . \, l \, . \, D \pi n}{60}$$

Hier ist $(l \, . \, b)$ die Fläche des Nord
Kraftlinien in den Anker eintreten,



die Kraftlinien wieder aus dem
$N = H \, . \, l \, . \, b$ die Kraftlinienzahl

schlossenen magnetischen Kreis).

b) Für mehrpolige Maschine

Dabei bedeutet p die Anzahl der I
lich $2p_1$ die Zahl der parallel gesc
Man ersieht aus diesen Gr
maschine gröfser wird, wenn
1. das Magnetfeld stärker ge
2. die Tourenzahl erhöht wi
3. die Zahl der Ankerdrähte
4. die Zahl der Pole vermeh
5. die Schaltung im Anker s
schalteten Stromkreise kle

206. Zu zeigen, dafs
elektromotorische Gegenkraf
dessen Wirkungsgrad) in gün

aschine konstant sind; wenn nun auch die Tourenzahl n konsta so ergibt sich $E = (K . n) . N = K_1 . N$, d. h. die EMK ist der Kraftlinienzahl N per Polpaar; letztere wird aber durc ngsstrom J_m (hier $= J$) bestimmt und verläuft ähnlich der M e für Eisen (Fig. 237); durch Änderung des Ordinatenmaßstabe

Fig. 236.

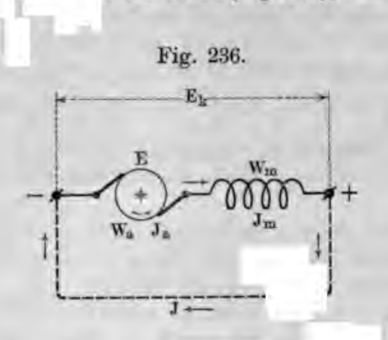
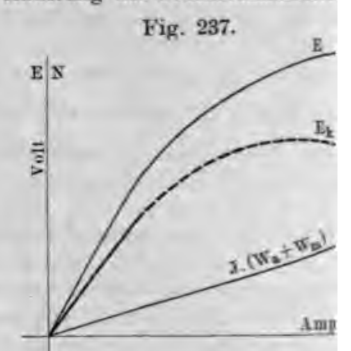


Fig. 237.



also die Kurve für Zusammenhang zwischen J und diese Kurve heifst „in tik der Hauptstrommaschine. We die Maschine belastet d zleistung $E_k . J$ Watt liefert, so v erzeugte EMK E vendet, um die Klemmenspannung liefern, andererseit ge Prozente betragenden) Spannung $e = J . (W_a + W_m)$ zu ist die graphische Darstellung eine durch den Ursprung. Subtrah an nun (graphisch) nach der Gl $E_k = E - e = E - J . (W_a + W_m)$ von der EMK E den Spannungsve der durch den „inneren" Widerstand der Maschine $W_i = W_a + W_m$ ve wird, so ergibt sich eine zweite Kurve, die „äufsere Charakteristik", we Klemmenspannung E_k in Abhängigkeit vom Strome J darstellt.

Die Form dieser Kurve für E_k läfst erkennen, dafs die Hauptstromm bei konstanter Tourenzahl n durchaus nicht eine konstante Klemmenspan bei verschiedenen Belastungen zu liefern vermag, weshalb sie auch in stationen mit konstanter Netzspannung nicht brauchbar ist und überha für spezielle Zwecke Verwendung finden kann.

b) Nebenschlufsmaschine (Fig. 238).

Es ist $E_k = E - J_a . W_a = J_m . W_m$ und $J_a = J + J_m$; wenn die M einen hohen elektrischen Wirkungsgrad $\left(\eta_e = \frac{\text{Nutzeffekt}}{\text{Gesamteffekt}} = \frac{E_k . J}{E . J_a}\right)$ soll, so darf der Spannungsverlust im Anker ($= J_a . W_a$), sowie der Strom der Magnetwindung (W_m grofs! dünne Drähte!) („im Nebenschlufs") nur sein. Dann ist aber in allererster roher Annäherung $J_a . W_a \neq 0$, also J und ebenso $J_a \neq J$ wegen $J_m \neq 0$, d. h. gegenüber J (bzw. J_a) spielt keine Rolle und deshalb ist auch E (bzw. angenähert auch E_k) konstant f J (vgl. Fig. 239), sobald die Tourenzahl n konstant bleibt; es verursa der Spannungsverlust im Anker, sowie die Ankerreaktion ein unbedeutende der Klemmenspannung E_k bei steigendem Strom J; das Magnetfeld bleibt fast ganz konstant, da J_m konstant bleibt, im Gegensatze zur Hauptstromm bei welcher die Stärke des Magnetfeldes mit J für jede Belastung sich än

Die Nebenschlufsmaschine liefert also fast konstante Spannung für alle Be-ngen; der geringe Spannungsabfall kann leicht durch teilweises Ausschalten Regulierwiderstandes (vor der Magnetwickelung) aufgehoben werden.

Fig. 238.

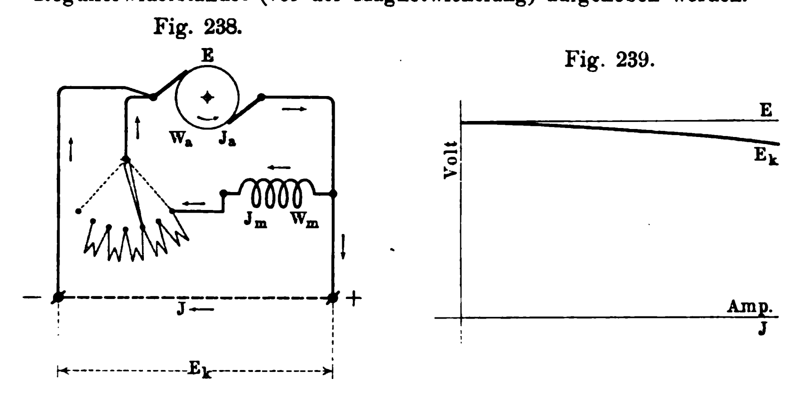
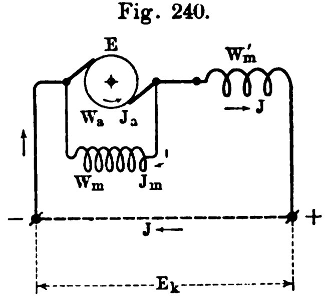


Fig. 239.

c) Compoundmaschine (Fig. 240).

Wenn man bei einer Nebenschlufsmaschine auf die Feldmagnete noch Win-en (dicken Drahtes) aufwickelt, die vom Nutzstrome J durchflossen werden, ·ird der geringe Spannungsabfall, der bei allein wirksamer Nebenschlufs-ung mit steigendem Strome auftreten würde, h die gleichzeitige Wirkung der neu hinzu-mmenen Hauptstromwindungen, die bei steigen- J das Magnetfeld verstärken, wieder kompen-, so dafs bei zweckmäßiger Konstruktion der ›nschlufs- und Hauptstromwickelungen bei jeder stung dieselbe Klemmenspannung E_k erzielt .. Verstärkt man die Wirkung der Hauptstrom-:elung noch mehr, dann steigt sogar die Klemmen-ınung mit steigendem Strome J (übercompoun-te Maschine, Bahngenerator!); es läfst sich ırch der Spannungsverlust auf der Fernleitung pensieren, d. h. also die Spannung an einem fern gelegenen Punkte ohne ılierung konstant halten.

Fig. 240.



B. Elektromotoren.

Bei den Elektromotoren stellt die „Charakteristik" den Zusammenhang zwischen ·enzahl n und Stromstärke J bei konstanter Klemmenspannung E_k dar; erdem ist das Drehmoment, das der Motor abgeben kann, von Wichtigkeit.

a) Hauptstrommotor.

Die EMGK ist $E = \frac{N \cdot n \cdot Z}{60 \cdot 10^8} \cdot \frac{p}{p_1} = K \cdot N \cdot n$ und ist $E = E_k - J \cdot (W_a + W_m)$; nun hierbei der Wirkungsgrad grofs werden, dann mufs der Spannungsverlust $W_a + W_m$) klein bleiben, d. h. in erster Annäherung $J \cdot (W_a + W_m) \neq 0$, it ist $E \neq E_k$ konstant, gemäß unserer Voraussetzung; dann wird aber n nahezu konstant, d. h. wenn die Kraftlinienzahl N wächst, so fällt die renzahl n nahezu verkehrt proportional; N wächst aber nur bei steigendem

Strome J, und zwar bei geringerer „Sättigung" der Feldmagnete fast dirk
portional dem Strome J; folglich ist auch das Produkt $J \cdot n$ konstant (
seitige Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten); der Einfluſs des Span
verlustes un
Form der M
sierungskurv
zerren dies
hältnisse
maßen; je
aber läuft
Hauptstrom
langsamer,

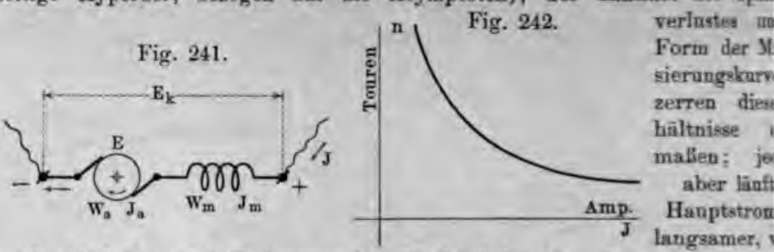


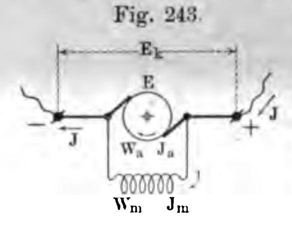
Fig. 241. Fig. 242.

stärker belastet wird (Steigungen bei Straſsenbahnen!). Das Drehmoment
ab von der Kraftlinienzahl N und vom Strome im Anker $J_a = J$; bei stei
Strome J nimmt auch N zu, so daß die Vergröſserung des Drehmomentes
dieser beiderseitigen Einflüsse sehr bedeutend ist (kräftiges Anlaufen be
motoren, sowie bei Aufzügen und Kranen).

b) Nebenschluſsmotor.

Da die Magnetwickelung an der konstanten Klemmenspannung
geschlossen ist, so bleibt J_m konstant für jede Motorbelastung, also $N =$
für $E_k =$ konstant; es ist nun die EMGK $E = (K \cdot N) \cdot n = K' \cdot n$; d
$E = E_k - J_a \cdot W_a$ und $J_a \cdot W_a$ sehr klein gegen E_k sein soll, so wird auch E
stant, so daſs $E = K' \cdot n \neq$ konstant, also
Tourenzahl $n \neq$ konstant bleibt für alle Bela
das Drehmoment ist nicht so groſs, wie beim
strommotor, weil sich das Magnetfeld nicht ve
läſst, sondern nur der Ankerstrom (vorausgese
$E_k =$ konstant bleibt). Wegen seiner nahezu k
bleibenden Tourenzahl wird der Nebenschlu
besonders für Transmissionsantrieb (Fabriken.
stätten) verwendet.

Fig. 243.



c) Der Compoundmotor

wird verhältnismäßig selten verwendet und ermöglicht durch die gleic
Wirkung einer Nebenschluſs- und einer (schwächenden!) Hauptstromwi
die vollständige Konstanz der Tourenzahl.

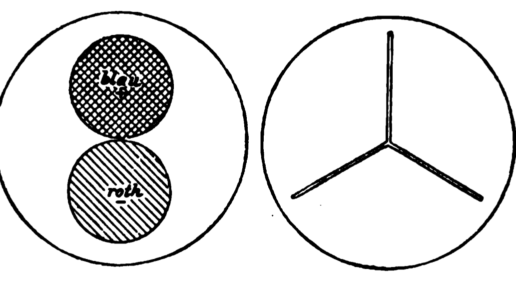
§ 164. **208.** Die den **Dreiphasenmaschinen zu Grunde liegende**
metrische Gleichung $\sin\varphi + \sin(\varphi - 120^0) + \sin(\varphi - 240^0$
zu beweisen.

Anleitung: $\sin(\varphi - 120^0) + \sin(\varphi - 240^0) = 2 \sin(\varphi - 180^0) \cos 60^0 = -$
Oder: $\sin\varphi + \sin\varphi \cdot \cos 120^0 - \cos\varphi \cdot \sin 120^0 + \sin\varphi \cdot \cos 240^0 - \cos\varphi \cdot s$
$= \sin\varphi + \sin\varphi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos\varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\varphi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos\varphi \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

§ 164. **209.** Die den Dreiphasenmaschinen zu Grunde liegende
metrische Beziehung (LA 208) graphisch zu versinnlichen.

Anleitung: Über die mit dem blauen und roten Kreis (Fig. 244) bemalte Scheibe wird die mit dem dreifachen Schlitz versehene Scheibe gelegt. Stellt dann eine vom Berührungspunkt der beiden farbigen Kreise durch sie gezogene Sehne die Stärke des positiven, bzw. negativen Stromes dar, so läfst sich zuerst zeigen, dafs bei einer Drehung aus einer tangentialen Stellung des Schlitzes um 180° die Sehnen nach der Funktion Sinus wachsen; denn $s = d \sin \varphi$. Wird dann z. B. für $\varphi = 90°$, d. i. die Maximalstärke des positiven Stromes $J = d$ gesetzt, so kommen zu ihr noch die negativen Stromstärken — $(J \sin 30° + J \sin 150°) = -(\frac{1}{2}J + \frac{1}{2}J) = -J$, so dafs im ganzen $+ J + (-J) = 0$. Aber auch allgemein stellen die drei durch Schlitze sichtbaren Sehnen zusammen immer wieder die Summe $J = 0$ dar, und bei gleichmäßiger Drehung der geschlitzten Scheibe ist daher das An- und Abschwellen der drei einzelnen Ströme stetig mit dem Blick zu verfolgen.

Fig. 244.



210. Betriebsgröfsen einer 16kerzigen Glühlampe.

§ 171.

Anleitung: Die gebräuchlichen Glühlampen konsumieren etwa 3 Watt per Hefnereinheit; diese Zahl (welche ökonomischer Koeffizient oder minder korrekt Ökonomie der Glühlampe heißt) ist empirisch gefunden (theoretisch wäre sie abzuleiten aus den elektrischen und optischen Konstanten des Kohlenfadens). — Eine Glühlampe zu 16 Hefnereinheiten (gewöhnlich bezeichnet als „16kerzige“ Glühlampe) verbraucht daher $3 \times 16 = 48$ Watt. Brennt die Lampe im Anschlufs an ein Leitungsnetz von 100 Volt Spannung, so fliefst durch die Lampe ein Strom von der Stärke J Amp. $= \frac{48 \text{ Watt}}{100 \text{ Volt}} = 0{,}48$ Amp. $\doteq \frac{1}{2}$ Amp.

Während einer Stunde ist also der Lampe die Arbeit: 48 Watt $\times$ 1 Stunde $=$ 48 Wattstunden $=$ nahezu $\frac{1}{2}$ Hektowattstunde zuzuführen. Diese Arbeitseinheit „Hektowattstunde“ (event. die zehnmal so grofse Einheit „Kilowattstunde“) wird bei der Eichung der Elektrizitätsmesser (Elektrizitätszähler) zu Grunde gelegt. — Da nun 1 PS (Pferdestärke) $=$ 736 Watt (§ 22), so entspricht dem in der Glühlampe aufgewendeten elektrischen Effekt von 48 Watt ein mechanischer Effekt von $\frac{48}{736}$ PS $= \frac{3}{46} \doteq \frac{1}{15}$ PS. Somit ist während einer Brennstunde für eine 16kerzige Glühlampe eine Arbeit von nahezu $\frac{1}{15}$ Pferdestärkestunde erforderlich.

Man berechne den Effektverbrauch einer Glühlampe zu 10, 25, 32 Hefnereinheiten, sowie die Stromstärke bei 110, 150, 220 Volt Spannung!

Die sogenannten „Spar“-Glühlampen brauchen nur etwa 2,5 Watt (eventuell nur 2 Watt) per Hefnereinheit, dafür ist aber ihre Lebensdauer viel geringer; dieselbe beträgt (je nach der Güte des Fabrikates) bei

3 Watt per Hefnereinheit ungefähr 800 bis 1000 Stunden,
$2\frac{1}{2}$ „ „ „ „ 400 „ 500 „
2 „ „ „ „ 300 „ 400 „

Die „Sparglühlampen“ sparen daher zwar an Stromkosten, dafür müssen aber häufiger neue Lampen eingesetzt werden.

auf der Leitung"; die Bezeichnung „Verlust" erklärt sich sofort,
J multiplizieren; wir erhalten dann: $e \cdot J = J^2 \cdot w$, d. i. jen
welche nach dem Gesetze von Joule (§ 152) im Widerstande w b
Wärme verwandelt, also für die Übertragung nutzlos aufgewend
Wird nun im Orte B ein Nutzeffekt $E' \cdot J$ Watt verlangt, so daſ
Spannung E' Volt und ein Strom J Amp. zur Verwendung komm
in A eine Spannung $E = (E' + e)$ Volt herrschen und dabei die Str
durch die Leitung nach B, dort durch die Lampen, Motoren usw.
die Rückleitung wieder nach A zurückfließen. Es ergibt sich also fol

A Watt $= E \cdot J$ . . . . erforderliche Wattleist
a „ $= e \cdot J = J^2 \cdot w$ . . . . . Wattverlust auf der L
A' „ $= E' \cdot J$ . . . . Nutzleistung in B.

Es geht also auf der Leitung ein bestimmter Prozentsatz
der Nutzleistung A' „verloren"; dieser Verlust hängt nur von de
und vom Leitungswiderstande w ab, da $a = e \cdot J = J^2 \cdot w$. Nun ist
daher wird: $a = \frac{J^2 \cdot L}{K \cdot q} = J \cdot e$, also der Spannungsverlust $e =$

Diese Gleichung (1) bildet die Grundlage für alle Leitungsbe
J, L, K und e gegebene Gröſsen sind. — Ist insbesondere der
Querschnitt" (siehe unten) bekannt, so läſst sich für jede Anlage
der „wirtschaftliche Spannungsverlust" ermitteln.

Von gröſster Wichtigkeit ist die Höhe der Spannung E' in
orte B. Wir nehmen an, daſs wir einmal in B die Spannung E_1',
die m mal höhere Spannung E_2' verwenden wollen; in beiden Fäll
leistung A' in B, sowie der Wattverlust a auf der Leitung dersell
die Betriebskosten dieselben bleiben; es wird also $A_1' = A_2'$ und
folgt wegen $A = A' + a$ sofort auch $A_1 = A_2$. Wir finden dah

$$\left.\begin{array}{lll} A_1 = J_1 \cdot E_1 & \ldots & A_2 = J_2 \cdot E_2 \ldots \\ a_1 = J_1 \cdot e_1 & \ldots & a_2 = J_2 \cdot e_2 \ldots \end{array}\right\} E_2' = m \cdot E_1',$$

Die Leitungslänge L und das spezifische Leitungsvermögen K bleibt in beiden Fällen ungeändert, so dafs nur der Querschnitt q_1 bzw. q_2 noch zu bestimmen ist; wir finden: $q_1 = \frac{J_1 \cdot L}{K \cdot e_1}$ und $q_2 = \frac{J_2 \cdot L}{K \cdot e_2}$, somit

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\frac{J_2 \cdot L}{K \cdot e_2}}{\frac{J_1 \cdot L}{K \cdot e_1}} = \frac{J_2 \cdot e_1}{e_2 \cdot J_1} = \frac{J_2 \cdot e_1}{m \cdot e_1 \cdot m \cdot J_2} = \frac{1}{m^2} \text{ oder } q_2 = \frac{1}{m^2}\, q_1,$$

d. h. wenn man die Spannung m mal so grofs annimmt, wird der Leitungsquerschnitt $\frac{1}{m^2}$ mal so klein.

Dadurch ist es aber möglich, mit dünnen, billigen Leitungen Kraftübertragungen auf grofse Entfernungen auszuführen. Hohe Spannungen lassen sich aber mit Hilfe der Wechselstrom- und Drehstrom-Transformatoren sehr leicht erzielen (§ 166), und dies ist auch der Grund, warum bei grofsen Entfernungen besonders der Drehstrom dem Gleichstrom überlegen ist. — Da sich nun bei jeder Anlage vor allem die Frage aufdrängt, einen wie dicken Draht man für die Leitung wählen soll, so ist grundlegend der folgende Satz von Thomson:

Der **„wirtschaftliche Querschnitt“** ist dann vorhanden, wenn der Geldwert der in der Leitung nutzlos in Wärme verwandelten Stromenergie gleich ist den Kosten für die jährliche Verzinsung der Leitungsanlage. — Beweis: Aus Gl. (1) folgt der Wattverlust auf der Leitung $a = e \cdot J = \frac{J^2 \cdot l}{K \cdot q}$ Watt, daher während der T Betriebsstunden eines Jahres ein Energieverlust von $\frac{T \cdot J^2 \cdot l}{K} \cdot \frac{1}{q}$ Wattstunden. Kostet dann in der Zentrale eine Wattstunde m_1 Mark (Kronen), so ist der Geldwert des Energieverlustes gleich

$$M_1 = \frac{T \cdot J^2 \cdot l \cdot m_1}{K} \cdot \frac{1}{q} = \frac{C_1}{q} \text{ Mark (Kronen).}$$

Andererseits sind die Kosten für Verzinsung (einschliefslich Amortisation) der Leitung $M_2 = l \cdot q \cdot m_2 \cdot z = C_2 \cdot q$, wobei m_2 die Anlagekosten für die Längen- und Querschnittseinheit der Leitung und z die Jahresprozente der Verzinsung sind. Der „wirtschaftliche Querschnitt“ ist dann derjenige, für welchen $M_1 + M_2 = \frac{C_1}{q} + C_2 \cdot q$ ein Minimum wird. Da auch diese Summe (vgl. LA 200) eine solche ist, für die das Produkt der Summanden M_1 und M_2 den konstanten Wert $C_1 \cdot C_2$ hat, so tritt das Minimum ein für $q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{T \cdot J^2 \cdot l \cdot m_1}{K \cdot l \cdot m_2 \cdot z}} = J \cdot \sqrt{\frac{T \cdot m_1}{K \cdot m_2 \cdot z}}$.

Hierfür wird $M_1 = \frac{T \cdot J^2 \cdot l \cdot m_1}{K} \cdot \frac{\sqrt{K \cdot m_2 \cdot z}}{J \sqrt{T \cdot m_1}} = J \cdot l \cdot \sqrt{\frac{T \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot z}{K}}$

und $M_2 = l \cdot m_2 \cdot z \cdot J \cdot \sqrt{\frac{T \cdot m_1}{m_2 \cdot K \cdot z}} = J \cdot l \cdot \sqrt{\frac{T \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot z}{K}} = M_1$.

XXV. Zur Astronomie.

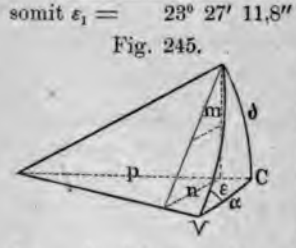
212. **Den Wert der Schiefe der Ekliptik** aus gegebenen Rektaszensionen und Deklinationen der Sonne zu berechnen. §§ 177, 178,

Anleitung: In dem bei C rechtwinkligen sphärischen Dreieck (Fig. 245, math. Anh. Nr. 18) seien die Katheten α und δ die Rektaszensionen und Deklina-

tionen der Sonne an irgend einem Tage des Jahres; die Schiefe der Ekliptik ε ist dann der der Kathete δ gegenüberliegende Winkel, somit $tg\,\varepsilon = \frac{tg\,\delta}{\sin\,\alpha}$. — Nun waren z. B. beobachtet worden in:

Berlin, 18. Jan. 1882	Paris, 2. Sept. 1882	Greenwich, 6. April 1882
$\alpha = 300^\circ\ 26'\ 25{,}95''$	$\alpha = 161^\circ\ 24'\ 51{,}0''$	$\alpha = 15^\circ\ 3'\ 29{,}53''$
$\delta = -\ 20^\circ\ 30'\ 28{,}1''$	$\delta = +\ 7^\circ\ 52'\ 21{,}5''$	$\delta = +\ 6^\circ\ 25'\ 51{,}0''$
somit $\varepsilon_1 = 23^\circ\ 27'\ 11{,}8''$	$\varepsilon_2 = 23^\circ\ 27'\ 10{,}1''$	$\varepsilon_3 = 23^\circ\ 27'\ 12{,}1''$.

Fig. 245.



Da also aus den drei voneinander unabhängigen Dreiecken sich (sehr annähernd) gleiche Werte von ε ergeben haben, so kommen die Örter der Sonne auf einer Linie zu liegen, die (ebenso wie der gleichsam als Abszissenachse zu Grunde gelegte Äquator) einen **Hauptkreis** bildet; d. h. die **Ekliptik** (im geometrischen Sinne) ist ein **gröfster Kreis** am Himmel, **in dessen Ebene die Erde liegt.** Dementsprechend liegen die Schnittpunkte von Äquator und Ekliptik am Himmel um 180° voneinander ab, wie sich ebenfalls aus direkten Messungen ergibt (von der Präzessionsbewegung des Äquators hier abgesehen).

§ 177. **213. Geht die Sonne am Tag des Frühlingsanfanges immer und überall genau im Ostpunkte auf? Warum ist im Kalender als Zeitpunkt des Frühlingsanfanges keineswegs etwa immer 6 Uhr morgens (weder Sternzeit noch Sonnenzeit), sondern eine bestimmte Stunde, Minute und Sekunde bald des Tages, bald der Nacht angegeben?**

Antwort: Frühlingsanfang ist der Zeitpunkt, in dem der Mittelpunkt der Sonnenscheibe mit dem Frühlingspunkt zusammenfällt, so dafs die Sonne vorher und nachher südliche, bzw. nördliche Deklination hat, also schon nicht mehr im Äquator steht. Ostpunkt ist aber ein Durchschnittspunkt des Äquators mit dem Horizont. Es kann daher die Sonne nur für einen bestimmten Meridian der Erde genau im Ostpunkt aufgehen, und zwar dort um 6^h morgens Ortszeit (vermehrt bzw. vermindert um die Zeitgleichung = wahre Sonnenzeit — mittlere Sonnenzeit). Für einen westlich von jenem Meridian gelegenen Ort hat sie bis zum Aufgang schon nördliche Deklination angenommen. Der Aufgangspunkt hat sich also gegen Norden etwas verschoben. Hierdurch hat sich auch der Zeitpunkt des Aufgehens etwas verfrüht, was aber durch den Unterschied der Ortszeiten für unsere Breiten mehr als ausgeglichen wird.

§ 178. 214. Inwiefern ist keiner der sogenannten populären „Beweise für die Kugelgestalt der Erde“ für sich einwurfsfrei?

Andeutungen: 1. **Der überall kreisförmige Horizont:** Auch auf einer unendlich sich ausdehnenden Ebene würden wir von jedem Punkte oberhalb derselben wegen der begrenzten Sehkraft unseres Auges nur kreisförmige Stücke überblicken. (Freilich würde dann der Umfang des Kreises sich ins Unendliche zu verlieren scheinen, während auf dem Meere der Horizont scharf abgeschnitten erscheint — zur Überraschung eines jeden, der dies zum erstenmal sieht). — 2. **Zunahme der Gröfse des Gesichtskreises bei gröfserer Höhe des Beobachtungsortes:** Diese Zunahme folgt zwar aus der schon angenommenen

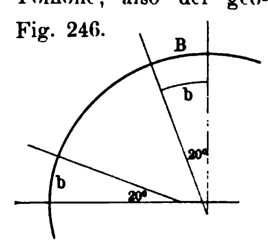


Kugelgestalt der Erde. Wer aber von dieser noch nichts wüſste, würde auf den direkten Anblick hin, der (wegen der irdischen Strahlenbrechung) nicht nur eine Ebene, sondern sogar die schwachkonvexe Erdoberfläche konkav („wie ein riesiges Waschbecken") zeigt, die Konvexität keineswegs direkt sehen können. — Auch daſs von Türmen, Schiffen bei zunehmendem Abstand vom Auge zuerst die unteren Teile verschwinden, die höheren noch sichtbar bleiben, könnte von der geringeren Durchsichtigkeit der unteren Luftschichten herrühren. — 3. **Krumme Begrenzung des Erdschattens bei Mondesfinsternissen:** Da die Mondoberfläche selbst gekrümmt ist, so würde ein krummer Rand des Schattens sich auch erzeugen können. wenn an dem schattenwerfenden Körper (der Erde) ein gerader Rand wäre. — 4. **Reisen um die Erde:** Das in der Theorie angenommene „Reisen" nach derselben Richtung, bis man zum Ausgangspunkt zurückkommt, ist trotz Schiffen und Wagen noch nie wirklich ausgeführt worden. Wohin das Umschiffen von Kontinenten führt, kann richtig nur beschrieben werden, wenn die Kugelgestalt der Erde schon vorausgesetzt ist. — 5. **Analogie zur Kugelgestalt der übrigen Weltkörper:** Diese ist höchstens von Mond und Sonne direkt zu beobachten (übrigens erscheinen auch diese wegen der mit der Entfernung sehr rasch abnehmenden Genauigkeit der Tiefenlokalisation als Ebenen). — Alle hier angedeuteten Einwendungen sind freilich durch näheres Eingehen auf die quantitativen Einzelheiten der Beobachtung (wodurch sie aber dann aufhören, populäre Beweise zu sein) selbst wieder zu entkräften und bilden also nicht etwa wirkliche Widerlegungen des Satzes von der Kugelgestalt der Erde. In Wirklichkeit aber ist der Satz eben nur durch die Verbindung von Längen- und Winkelmessungen streng zu beweisen, und es finden sich dann die sonstigen Beobachtungen mit ihm (sowie dem Gesetz der Strahlenbrechung zu 1 und 2, der Projektionslehre zu 3 usf.) in vollem Einklang.

215. Zu zeigen, daſs die Breitengrade von Süden gegen Norden hin an Länge zunehmen müssen, wenn sich als Gestalt der Erde die des abgeplatteten Rotationsellipsoids ergeben soll. § 179.

Anleitung: Man denke sich die „Abplattung" sehr stark (unmiſsverständlich: den Krümmungshalbmesser an den Polen groſs, Fig. 246), so daſs man nächst den Polen sehr lange Strecken im Meridian wandern muſs, bis sich eine kleine Änderung der Lotrichtung (desgleichen der Polhöhe, also der geographischen Breite) ergibt (für den Grenzfall einer ebenen Erdoberfläche würden die Lote sogar bei beliebigen Abständen parallel). Dann entspricht auch je einem Winkelgrad Unterschied in höheren Breiten ein längerer Kreis-(Ellipsen-)bogen als nahe dem Äquator. Da man nun in der Tat die je einem Breitenunterschied von 1° entsprechende Bogenlänge bei der französischen Gradmessung 1735 in Peru (1° 31′ 0″ s. Br.) 56753 Toisen, in Lappland (66° 20′ 10″ n. Br.) 57437 Toisen fand, so war das abgeplattete Ellipsoid als Gestalt der Erde erwiesen, übereinstimmend mit der theoretischen Voraussicht von Huygens und Newton; das verlängerte Ellipsoid (die Pflaumengestalt der Erde) war widerlegt.

Fig. 246.



216. Welche Winkelstellungen der Zeiger an derselben Uhr entsprechen dem Unterschiede der Orts-, Zonen- und Weltzeit? § 181.

Anleitung: Vergleichen wir zuerst nur Orts- und Weltzeit, so u scheiden sie sich für je einen Ort um eine bestimmte Zeitstrecke, der dann ganz bestimmte Winkel zwischen den Minuten- und Stundenzeigern entspre Z. B. für Wien (neue Universitätssternwarte) unter 16° 20′ 22,3″ östl. v. Gr bilden an der zwölfstündigen Uhr die Stundenzeiger 32° 40′ 44,6″, die Minuten (32° 40′ 44,6″ × 12) — 360° = 32° 8′ 55,2″. — Wäre also für den internatio Verkehr nach Weltzeit der Zeiger etwa weifs, für die Ortszeit blau, so würd Eisenbahnzug um „x^h weifse Zeit“ abfahren, eine Theatervorstellung um „y^h Zeit“ beginnen. — Für die Zonenzeit sind dann je 1, 2, 3 . . . Stunden zur zeit zu addieren bzw. zu subtrahieren.

§ 182. **217.** Den Abstand Erde-Mond $R \doteq 60\,r$ aus Beobachtunge berechnen.

Anleitung: Für zwei Orte von den geographischen Breiten φ und φ' demselben Meridian werden bei demselben Durchgang des Mondes durch Meridian seine Zenitdistanzen z und z' bestimmt. Dann gilt nach Fig.

Fig. 247.



$R : r = \sin z : \sin x \ldots (1), \quad R : r = \sin z' : \sin y \ldots (2),$

woraus $(\sin z' + \sin z) : (\sin z' - \sin z) = (\sin y + \sin x) : (\sin y - \sin x)$

oder $tg\,\frac{z' + z}{2} : tg\,\frac{z' - z}{2} = tg\,\frac{y + x}{2} : tg\,\frac{y - x}{2}$ . .

Da hier $(x + y) + (180^\circ - z) + (\varphi + \varphi') + (180^\circ - z') = 360^\circ$, so ist x $= z' + z - (\varphi + \varphi')$, so dafs sich aus (3) auch $x - y$ und somit sowohl x y ergibt; hiernach aus (1) oder (2) auch $R : r$. — So war z. B. für Stock (φ = 52° 31′ 13″ nördlich) und Kapstadt (φ' = 33° 56′ 3″ südlich) bei gl zeitigen Beobachtungen z = 32° 4′ 48″ und z' = 55° 42′ 48″, woraus $R : r$ = Diese Zahl ändert sich zwischen den Grenzwerten 56,9681 und 63,5875 w der elliptischen Gestalt der Mondbahn; mittlerer Wert = große Halb = 60,2778 mittlere Erdradien (vgl. LA 34).

182. 183. **218.** Wie ergeben sich aus den gröfsten östlichen und westli Elongationen von Merkur und Venus die Abstände dieser Plan von der Sonne?

Anleitung: Werden die Bahnen von Merkur, Venus und Erde als konzentr Kreise in derselben Ebene mit der Sonne als Mittelpunkt angenommen und Verhältnis der Bahnhalbmesser z. B. für Venus und Erde = $^3/_4$ schon als bel angenommen, so ist $\sin(\measuredangle VES) = ^3/_4$ (Fig. 664, S. 593). Daher folgt umgek aus dem zu beobachtenden Winkel das Verhältnis der Bahnhalbmesser. — In W lichkeit ist aus den veränderlichen gröfsten Elongationen (bei Merkur zwis 21° und 27°, bei Venus zwischen 44° und 47°) auf die nicht kreisförmigen Ba



und aus den wechselnden nördlichen und südlichen Breiten (Abweichungen aus der Ekliptik) auf die Neigung der Bahnebenen zu schliefsen; vgl. Tafel VII.

219. Nach Analogie a) der „Uhrzeigeraufgabe“ die Beziehung zwischen siderischer und synodischer Umlaufszeit, b) für äufsere Planeten, c) für innere Planeten, d) für den Mond aufzustellen. § 183, 184.

Anleitung: a) Dafs Minuten- und Stundenzeiger sich um $1^h\ 5^5/_{11}{}^{min}$, $2^h\ 10^{10}/_{11}{}^{min}$ usf. decken, ergibt sich schon daraus, dafs binnen 12 Stunden 11 Deckungen in gleichen Zeitabständen erfolgen, weshalb die Anzahl der Minutenstriche z. B. für die nach 1 Uhr erfolgende Deckung $60^{min} : 11 = 5^5/_{11}{}^{min}$ betragen mufs. — Dieses Resultat ergibt sich auch durch Gleichungsansatz so:

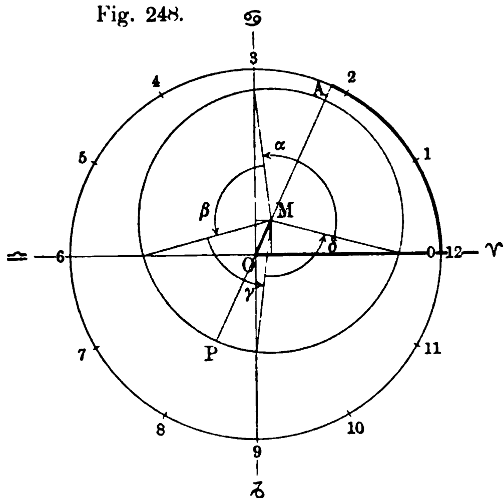
a) Binnen derselben Zeit von t^{min} legt der Minutenzeiger den Bogen $U + u$ mit der Geschwindigkeit C, der Stundenzeiger den Bogen u mit der Geschwindigkeit c zurück, wo $U = 60^{min}$ und $C = 12c$. Somit $\frac{U+u}{C} = \frac{u}{c}$ . . . 1); $U + u = 12u$; $u = 60:11 = 5^5/_{11}{}^{min}$.

b) Für einen äufseren Planeten sei T die siderische Umlaufszeit, S die synodische Umlaufszeit, α der Winkel, um den der Planet während einer synodischen Periode von der Sonne aus gesehen, fortschreitet, J die Dauer eines Erdjahres, so ist (analog zu Gl. 1) $\frac{360^0 + \alpha}{\alpha} = \frac{T}{J}$ . . . (2) oder $\frac{360^0}{\alpha} = \frac{T}{J} - 1$, und wegen $\frac{360^0}{\alpha} = \frac{T}{S}$ wird $\frac{T}{S} = \frac{T}{J} - 1$ oder $\frac{1}{S} = \frac{1}{J} - \frac{1}{T}$.

c) Ähnlich findet man für einen inneren Planeten $\frac{1}{S} = \frac{1}{J} + \frac{1}{T}$ (wie auch durch Vertauschung aus der vorhergehenden Gleichung folgt).

d) Sind T_s und T_m die siderischen Umlaufszeiten von Sonne und Mond, S die synodische Umlaufszeit des Mondes, so ist $\frac{360^0 + \alpha}{\alpha} = \frac{T_s}{T_m}$ oder $\frac{360^0}{\alpha} = \frac{T_s}{T_m} - 1$, ferner $\frac{360^0}{\alpha} = \frac{T_s}{S}$, folglich $\frac{T_s}{S} = \frac{T_s}{T_m} - 1$ oder $\frac{1}{S} = \frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_s}$.

Fig. 248.



§§ 174, 177, 1

220. Wie hat HIPPARCH aus der ungleichen Dauer der Jahreszeiten die Lage der Apsiden und die Gröfse der Exzentrizität der als Kreis vorausgesetzten Sonnenbahn in Bezug auf die Erde ermittelt?

Anleitung: Es sei in Fig. 248 O der Mittelpunkt der Erde und zugleich der der Himmelssphäre, also auch der Mittelpunkt der Ekliptik als eines gröfsten Kreises am Himmel, an welcher die 12 Tierzeichen, 0 = ♈ (Widder), 1 = ♉ (Stier) . . .,

angegeben sind. M sei der Mittelpunkt der als Kreis angenommenen Bahn der Sonne in Bezug auf die Erde; die Ebene dieser Bahn fällt zusammen mit der der Ekliptik, der Mittelpunkt M liegt um die Strecke OM von O ab in der Apsidenlinie AP (A = Apogäum, P = Perigäum). Es ist der Winkel $AO\Upsilon$ (d. h. die Lage der Apsidenlinie in Bezug auf den Frühlingspunkt oder: die Länge des Apogäums) und die Gröfse der Exzentrizität OM im Verhältnis zum (willkürlich angenommenen) Halbmesser R der Sonnenbahn MA zu ermitteln. Die HIPPARCH die (erst von KEPLER berichtigte) Voraussetzung gemacht hatte, dafs die Sonne in einer Kreisbahn gleichförmig sich bewege, so entspräche, wenn der Punkt M mit O zusammenfiele, jedem der vier Quadranten des Kreises von je 90° die gleiche Zahl von $\frac{365^1/_4}{4} = 91^5/_{16}$ Tage. Um wieviel und nach welcher Richtung hin der Punkt M von O abliegt, ergab sich für HIPPARCH daraus, dafs die Dauer der Jahreszeiten (Bewegung der Sonne von den Äquinoktien zu den Solstitien und zurück) aus Beobachtungen gegeben war für den

Frühling	$94^1/_2$	Tage, entsprechend einem Winkel	$\alpha = 93°\ 9'$,
Sommer	$92^1/_2$	" " "	$\beta = 91°\ 11'$,
Herbst	88	" " "	$\gamma = 86°\ 51'$,
Winter	90	" " "	$\delta = 88°\ 49'$.

Hieraus hat HIPPARCH die Lage des Punktes M schon durch eine Art rechtwinkliger Koordinaten x, y in Bezug auf das Koordinatensystem Widder-Wage (1, 7) und Krebs-Steinbock (4, 10) so bestimmt, dafs aus den Bögen des Kreises um Mittelpunkte O die Sinusstrecken x, y gebildet und dann in Teile des Radius $MA = R$ umgerechnet wurden. Es ergab sich

$$x = {}^1/_2\,(\alpha + \beta) - 180 = 2°\ 10' = 0{,}03181\ R$$
$$y = \alpha - 90 - x \ldots\ldots = 0°\ 59' = 0{,}04143\ R.$$

Hieraus folgt: $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}04143\ R = {}^1/_{24}\ R$, und hieraus $\measuredangle\ \Upsilon OA = 65°\ 35' = 2\ sign\ 5°\ 35'$ (1 $sign = signum$, Zeichen, Tierzeichen = 30°)

§ 183.

Fig. 249.

221. Wie hat KEPLER Gestalt, Lage und relative Gröfse der Bahnen von Erde, Mars (und den übrigen Planeten) aus den Beobachtungen abgeleitet?

Antwort: Es sei E_1 (Fig. 249) ein Ort der Erde zur Zeit einer Opposition Sonne S und Mars M, also SE_1M eine Gerade; es wird zu dieser Zeit Mars im allgemeinen nicht durch den Knoten gehen (wie es in Fig. 666, S. 596 angenommen war). Dennoch weifs man, dafs **nach Verlauf** einer vollen siderischen Umlaufszeit T (gleich der Zeit zwischen **zwei Durchgängen** durch den Knoten) Mars wieder an demselben Orte M in **Bezug auf** Sonne und Fixsterne angekommen ist, wiewohl die Erde nun einen **anderen Ort** E_2 in ihrer Bahn einnimmt, und



somit auch Mars einen anderen scheinbaren Ort am Himmel hat. Für das so entstehende Dreieck MSE_2 ergeben sich die Winkel aus der heliozentrischen Länge λ_1 des Mars, der geozentrischen Länge A der Sonne (oder der heliozentrischen Länge der Erde E_2) und der geozentrischen Länge λ_2 des Mars; nämlich

$$\measuredangle\, SE_2M = A + \lambda_2 \text{ und } \measuredangle\, SME_2 = \gamma = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Hiernach ergibt sich mittels des Sinussatzes der Abstand SE_2, ausgedrückt durch den Abstand SM (als Längeneinheit). — Ebenso lassen sich für ein drittes, viertes . . . Eintreffen des Mars in M weitere Örter E_3, E_4 . . . in Bezug auf die Sonne nach Abstand und Richtung festlegen, indem immer die Radienvektoren in derselben Längeneinheit SM ausgedrückt und die Richtung jedes Radiusvektors auf dieselbe Richtung $S\Upsilon$ bezogen wird. — So legte Kepler zuerst eine Tafel der Erdörter an, gleichsam als Material für eine Polargleichung der Kurve, in der die Richtung $S\Upsilon$ die Polarachse, die heliozentrischen Längen der Erde die Polarwinkel und die Abstände SE die Radienvektoren darstellen. — Bei der auf diese Tafel sich gründenden Induktion, dafs diese Kurve eine Ellipse sei, von der S der Brennpunkt ist, und dafs die Radienvektoren in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchstreichen, ging Kepler sehr kühn zu Werke, indem er zuerst nur für Perihel und Aphel die Beziehung $\Sigma . r = \sigma . R$ bemerkte und dies sogleich zum Flächensatz verallgemeinerte. Auf die Ellipsengestalt geriet er erst nach langem, vergeblichem Probieren. — Vorstehendes ist eine nähere Ausführung der auf S. 596 nur angedeuteten Überlegung „Zu 2“. — Ebenso „Zu 1“. In ebensolchen Dreiecken $SM'E_2'$ . . . ist nunmehr die Seite SE_2' bekannt, und es kann SM' . . . (ebenso SM'', SM''' . . .) nach Länge und Richtung berechnet werden, wodurch die Bahn des Mars in Bezug auf die Sonne festgelegt ist. — Dabei werden möglichst viele aufeinander folgende Oppositionen, und wo für diese selbst keine Beobachtungen vorliegen, interpolierte Werte benutzt. Das Beobachtungsmaterial entnahm Kepler zum bei weitem gröfseren Teile den Aufzeichnungen Tychos, der den Mars durch mehr als 20 Jahre beobachtet hatte.

222. Für Olaf Römers Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit ist es wesentlich, dafs die wirkliche Zeit zwischen je zwei Verfinsterungen des Trabanten beobachtet wird, während Jupiter und Sonne in Konjunktion bzw. Opposition stehen. Denn nur hier ist die relative Geschwindigkeit von Erde und Jupiter gleich Null. Diese relative Geschwindigkeit ist dagegen am gröfsten nahe den Quadraturen. Dies läßt schon in allgemeinen Zügen vermuten, dafs jene relative Geschwindigkeit nach dem Gesetze des Sinus sich ändere; es ist dies durch genauere Rechnung zu prüfen. § 186.

Anleitung: Nehmen wir zunächst an, Jupiter stehe unbewegt in J (Fig. 250), die Sonne in S, die Erde bewege sich gleichförmig in einem Kreise mit dem Mittelpunkte S.

Fig. 250.

Aus $r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi$

und $r'^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi'$

folgt $r'^2 - r^2 = -2a\varrho(\cos\varphi' - \cos\varphi)$

oder

$$(r' + r)\delta = 4a\varrho\sin\frac{\varphi' + \varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi' - \varphi}{2}.$$

Stab EJ sei um E drehbar und schleife in einer Hülse bei
wie sich Jupiter in Bezug auf die Erde bewegt (entspre
von der Erde aus). — Numerische Werte für $\varrho = 0$, $\pi/2$, π, 3
Gröfse (goniometrische Funktion) stellt den Faktor a/r spezie
dar? Phoronomische Bedeutung? — Nehmen wir auf die Be
in Bezug auf die Sonne Rücksicht, so tritt an die Stelle von
nur $T_{e,i}$ (Bedeutung? — numerischer Wert für $T_i \neq 11$ Jah

XXVI. Zur Meteorologie.

§ 192. **223. Wie stellen die Thermoisoplethen den tä lichen Gang der Temperatur eines Ortes dar?**

Anleitung: Man denke sich in Fig. 251 das Rechteck, a Seiten die Tagesstunden (z. B. $3a$ = 3 Uhr *ante meridiem* [v morgens; $9p$ = 9 Uhr *post meridiem* = 9 Uhr abends), a Seiten die Monate verzeichnet sind, als Grundebene eines dreia systems, so dafs in jedem Punkte dieser Koordinatenebene an die Temperatur für die betreffende Stunde aufgetragen ist (für jedes Jahr eigens oder das Mittel für eine bestimmte A Die durch alle oberen Endpunkte dieser Temperaturordinaten g dann die Temperaturfläche. Werden auf ihr die Niveauli $2\frac{1}{2}^\circ$ C. fortschreitend verzeichnet und wieder in die Grunde ergibt sich ein Überblick über den täglichen und jährlichen Ga (Die punktierten Kurven $S.$-$A.$ und $S.$-$U.$ geben die Zeiten d und Sonnenunterganges für die verschiedenen Monate an).

Aus dem Anblicke der Fig. 251 kann man vor allem w Tatsachen herauslesen, dafs die höchste Temperatur nicht u erst gegen 3 Uhr Nachmittag, bzw. nicht im Juni, sondern e

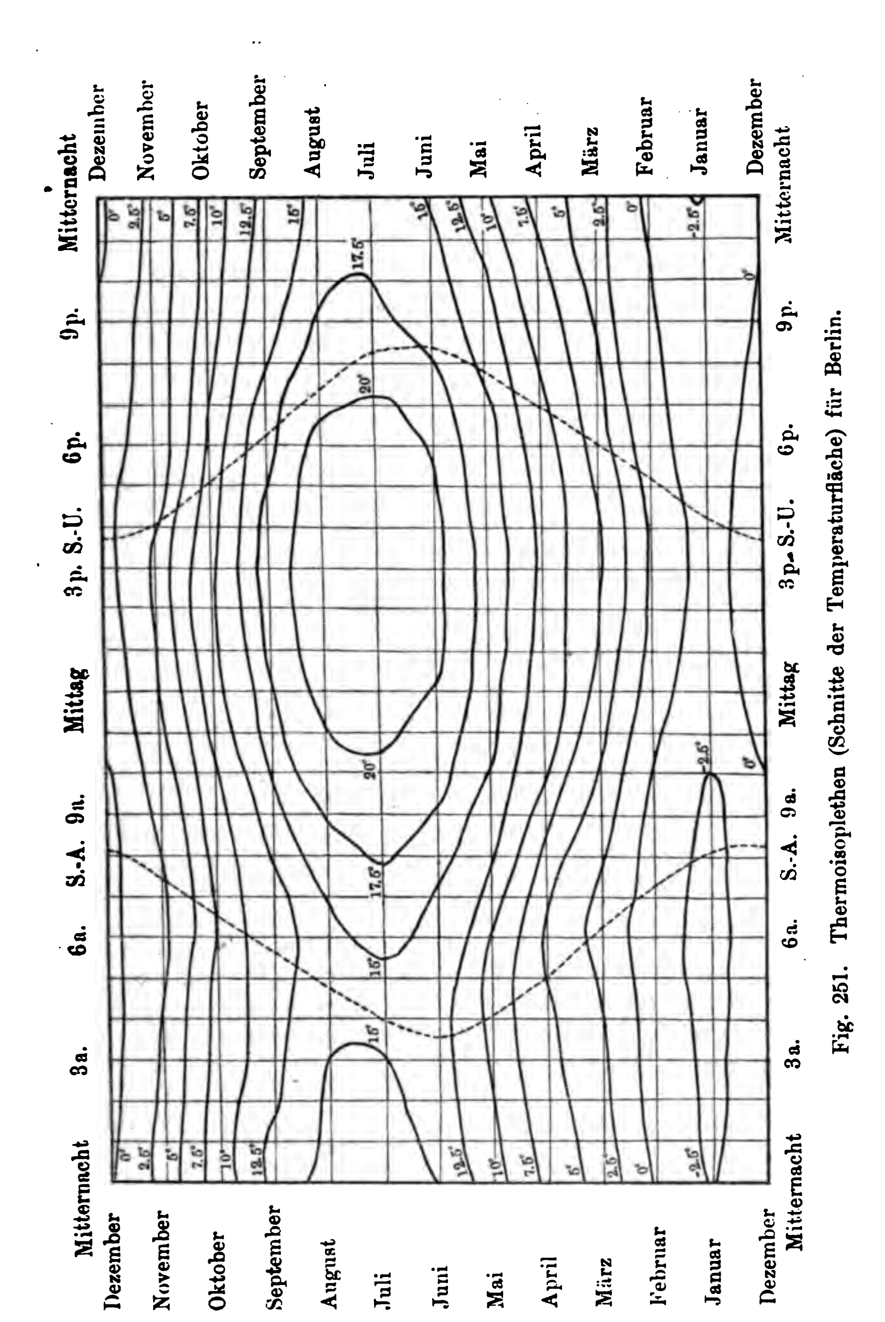
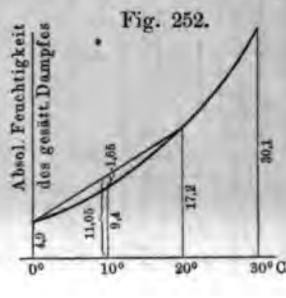


Fig. 251. Thermoisoplethen (Schnitte der Temperaturfläche) für Berlin.

§ 195. **224. Inwieweit vermochte die ältere Theorie von HUTTON at sphärische Niederschläge aus der Mischung ungleich warmer, Wasserdampf gesättigter Luftmengen zu erklären?**

Anleitung: Der Grundgedanke jener Erklärung knüpfte daran an, da Kurve (Fig. 252) für die den verschiedenen Temperaturen entsprechenden Feu keiten eine nach oben konkave ist. Z. B. Der Mischung gleicher Raumm Luft von 0° und von 20° entspricht die Mittellinie des Trapezes, dessen s Seite die Sehne ist; der Mischungstemperatur von 10° entsprächen also $\frac{4,9 -}{}$ $= 11,05$ g. Es müfsten daher $11,05 - 9,4 = 1,65$ g Wasser kondensiert u Wolken oder als Regen ausgeschieden werden. — Gleichwohl spricht gegen Theorie, dafs 1. wohl nur höchst selten Luftmengen von so sehr verschie Temperaturen überhaupt zur Mischung kommen, 2. dafs gleiche Raumteile und 20° nur dann ein Gemisch von 10° geben, wenn die Luft trocken oder vom Sättigungspunkte entfernt war. Waren dagegen die gleichen Raumm Luft von 0° und 20° schon gesättigt, so wird die Mischungstemperatur indem bei der Kondensation von 1 g Wasser ungefähr ebenso viel Wärm wird, als bei 76 cm Druck zur Erwärmun 1 m³ Luft um 2° C. erforderlich ist. Hiernach sich statt 10° als Mischungstemperatur 11, und da für diese um 1,6° höhere Mischung peratur schon wieder ein höherer Sättigungs ist, so fielen (wie die eingehendere Rechnung nur mehr 1,05 g Wasser heraus, d. i. nur etw des in den gemischten Luftmengen ursprü vorhandenen Wassers. Dies erklärt aber ir meisten Fällen nur einen ganz kleinen Tei tatsächlichen Niederschlagsmengen.

Fig. 252.



Da die ganzen Mengen mit der neueren Erklärung der atmosphäri Niederschläge aus der mechanischen Wärmetheorie in bestem Einklange sind ist jene ältere Theorie durch diese neuere wohl endgültig besiegt.

§§ 77. 195. **225. Durch annähernde Rechnungen zu zeigen, dafs in aufstei den Luftströmen die Abkühlung infolge der geleisteten mechanis Arbeit a) bei trockener Luft rund 1° C. für 100 m, dagegen b) feuchter (bis zur Kondensation der Wasserdünste gesättigter) rund 1° auf 200 m Erhebung beträgt.**

Anleitung: Die Aufgabe a) erfordert die Gleichung $\left(\frac{v}{v_0}\right)^k = \frac{p}{p_0} \cdots$ (I) das Poissonsche (oder das potenzierte Mariottesche) Gesetz heifst und a wie sich Druck und Volumen „adiabatisch", d. h. in einem Raume ändern für die beim Komprimieren gewonnenen (und beim Ausdehnen verlor Wärmemengen undurchlässig ist; darin bedeutet $k = c_p : c_v$ das Verh der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen. d die (meisten) Gase denselben Wert $k = 1,41$ hat (§§ 72, 82). — Behufs Able von Gl. (I) nehmen wir an: Eine bestimmte Menge eines vollkommenen Gases aus seinem Anfangszustande, für den $p_0 v_0 = R(a + t_0)$, durch Zufuhr Wärmemenge Q bei konstantem Druck p_0 übergeführt in einen Zustand



den $p_0 v_1 = R(a + t')$. Dann ist $p_0 v_1 - p_0 v_0 = R(t' - t_0)$, ferner

$$Q = c_p (t' - t_0) = \frac{c_p \cdot p_0}{R} (v_1 - v_0).$$

Den zweiten Zustand ändern wir in einen dritten durch Abfuhr derselben Wärmemenge bei konstantem Volumen v_1. Dann wird $p_1 v_1 = R(a + t_1)$ also $p_0 v_1 - p_1 v_1 = R(t' - t_1)$; und weil jetzt $Q = c_v (t' - t_1) = \frac{c_v v_1}{R} (p_0 - p_1)$ so ergibt sich aus Gleichstellung der beiden Werte von Q

$$\frac{c_p p_0}{R} (v_1 - v_0) = \frac{c_v v_1}{R} (p_0 - p_1) \text{ oder } \frac{p_0 - p_1}{p_0} = k \cdot \frac{v_1 - v_0}{v_1} \ldots (1).$$

Es besteht also zwischen den Gröfsen p und v eine Beziehung der gleichen Art wie zwischen p und h bei der barometrischen Höhenmessung (§ 46). — Denken wir uns also der ersten adiabatischen Zufuhr einer Wärmemenge Q eine zweite, dritte ... solcher Wärmemengen Q', Q'' ... so folgend, dafs für sie $\frac{p_0 - p_1}{p_0} = \frac{p_1 - p_2}{p_1} = \ldots \frac{p_{n-1} - p_n}{p_{n-1}} = \frac{q}{n}$, so wird $p_n = p_0 \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n$, und dies geht (nach Anh. Nr. 17 und LA 124) für $n = \infty$ über in $p_n = p_0 \cdot e^q \ldots (2)$.
Wegen Gl. (1) ist aber auch $k \frac{v_1 - v_0}{v_1} = k \frac{v_2 - v_1}{v_2} = \cdots = k \cdot \frac{v_n - v_{n-1}}{v_n} = \frac{q}{n}$, daher $v_n = v_0 \cdot e^{\frac{q}{k}} \ldots (3)$; aus (2) und (3) folgt sofort Gl. (I).

Wird also z. B. Luft von 15° C. aus einer Stelle von $p = 76$ cm Barometerstand auf eine von $p = 75$ cm gehoben (nämlich um rund 100 m), so ist $T_0 = 273° + 15° = 288°$ absoluter Skala. Aus Gl. (I) folgt dann

$$T = 288 \times \left(\frac{75}{76}\right)^{\frac{0{,}41}{1{,}41}} = 287{,}16 \text{ absoluter Skala} = 14{,}16° \text{C}.$$ Also ist die Temperaturverminderung 288° — 287,16° = 15° — 14,16° C. = 0,84° $\neq$ 1° C. —

Die Aufgabe b) ist elementar nicht in allgemeinen Formeln zu lösen. — Um aber wenigstens zu erkennen, dafs und warum bei feuchter Luft einer Erhebung um 100 m eine geringere Temperaturverminderung als 0,84° entspricht, ist zu beachten, dafs, wenn sich die Dünste kondensieren, aus ihnen selbst wieder eine Wärmemenge „frei" wird, die zu einer weiteren Erhebung ausreicht, bis die gleiche Abkühlung wie bei trockener Luft erreicht ist. — Ist z. B. Luft von 15° mit Wasserdampf gesättigt, so enthält 1 kg des Gemenges 10,43 g Wasserdampf, bei 14° noch 9,78 g. Bei dieser Temperaturerniedrigung um 1° C. müfsten also 0,65 g Wasser herausfallen, bei der mit der Erhebung um 100 m verbundenen Abkühlung um nur 0,84° also etwa 0,55 g Wasser. Aus diesem sich kondensierenden Dampf werden 540 × 0,55 = 297 cal frei. Diese reichen aus, 1 kg Luft um mehr als 1° zu erwärmen, da die spezifische Wärme der Luft nur 237 cal (für den beigemengten Dampf 481 cal) beträgt. Man sieht aber, dafs die vorausgesetzte Wasserausscheidung zum gröfseren Teil noch nicht zustande kommt.

Eine andere (aber nur sehr angenäherte) Methode zur Erläuterung der für die Meteorologie so sehr wichtigen Zahlen „1° C. Abkühlung für 100 m, bzw. 200 m Erhebung" ist die folgende: Zu a) Es werden h kgm $= \frac{h}{424}$ Cal verbraucht, wenn 1 kg Luft um h m gehoben wird. Für $h = 100$ m entspricht

$h' = 424 \times 0{,}453 = 192$ m $\neq$ **200 m** sein.

226. Zu zeigen, dafs die jährliche Strahlun einen 200 m dicken Eishimmel (mit der Sonne als M mit 1 Erdweite $= 2 . 10^7$ Meilen Halbmesser) oder daf dicke Eisdecke auf der Erde abzuschmelzen vermöchte.

Anleitung: Nach LANGLEY erhält 1 cm² im Abstan von der Sonne bei senkrechter Einstrahlung 3 cal per Minute $3 . 60 . 24 . 365$ cal. Da 1 cm³ Eis annähernd 1 g Masse hat und a 80 cal erfordert, so berechnet sich die Dicke x cm der durch die jährl zu schmelzenden Eisschicht wegen $1 \text{ cm}^2 . x \text{ cm} = x \text{ cm}^3$ aus $80 x$ also $x = 19710$ cm $\neq$ 200 m.

Denken wir uns ferner einen Eispanzer von y cm Dick Erdkugel gebreitet, so ist das Volumen dieser Kugelschale annäh (wo der Erdhalbmesser $R = 6370 . 10^5$ cm). Der Querschnitt fängt per Minute $R^2 \pi . 3$ cal auf. Es ist also per Jahr

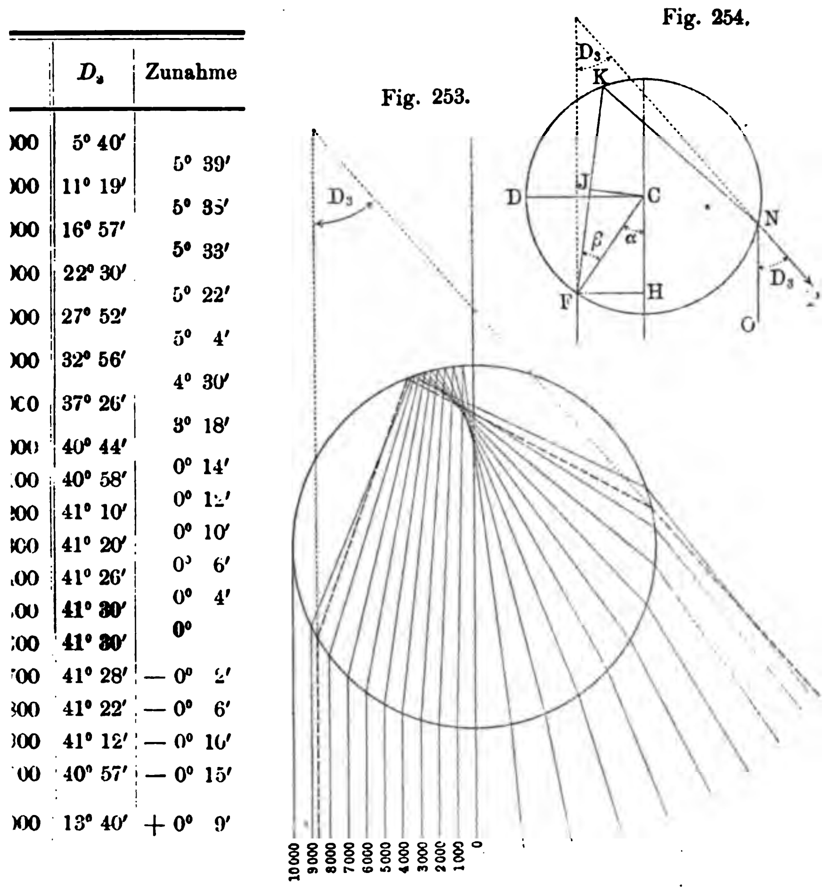
Wärmebedarf $80 \times 4 R^2 \pi . y = 3 \times 60 . 24 . 365 R^2 \pi$ W

somit $y = \frac{1}{4} x = 50$ m.

§ 199. **227.** Der Grundgedanke von DESCARTES' Theorie d ist rechnerisch zu erläutern.

Anleitung: In Fig. 253 seien für einige Strahlen, die in g voneinander durch den gröfsten Kreis eines kugelförmigen Reg die Strahlen konstruiert, die eine Brechung, eine Reflexion und n erfahren haben. Die punktierte Gerade bedeutet dann den S die Nachbarstrahlen am dichtesten geschart sind und Maximum der Ablenkung erfahren hat.

Dies bewies DESCARTES, indem er nachstehende Tabelle dachte er sich auf einen zur Richtung der Sonnenstrahlen norm



	D_3	Zunahme
)00	5° 40′	
)00	11° 19′	5° 39′
)00	16° 57′	5° 35′
)00	22° 30′	5° 33′
)00	27° 52′	5° 22′
)00	32° 56′	5° 4′
)C0	37° 26′	4° 30′
)00	40° 44′	3° 18′
.00	40° 58′	0° 14′
200	41° 10′	0° 12′
300	41° 20′	0° 10′
.00	41° 26′	0° 6′
.00	**41° 30′**	0° 4′
;00	**41° 30′**	0°
'00	41° 28′	— 0° 2′
300	41° 22′	— 0° 6′
)00	41° 12′	— 0° 10′
'00	40° 57′	— 0° 15′
)00	13° 40′	+ 0° 9′

Diese halb empirische Methode läfst sich rechnerisch so ausgestalten: Jeder ·ahl, der an der Kugel gebrochen, reflektiert und wieder gebrochen wird, erleidet .e Ablenkung D_3, für die $\beta = \alpha - \beta + \frac{D_3}{2}$, also $D_3 = 4\beta - 2\alpha$. Es sei n derjenige Winkel α zu berechnen, bei dem einer Änderung in α' doch keine derung der Ablenkung D_3 entspricht; also $D_3' = D_3$ oder $4\beta' - 2\alpha' = 4\beta - 2\alpha$ ɜr $\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{1}{2}$. Da aber nach LA 166, 1. allgemein $\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2\alpha}{n^2 - \sin^2\alpha}}$, folgt

$$\sqrt{\frac{1 - \sin^2\alpha}{n^2 - \sin^2\alpha}} = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

B. Für $n = \frac{4}{3}$ wird $\sin\alpha = \sqrt{\frac{20}{27}}$, also $\alpha = 59° \, 23' \, 29''$.

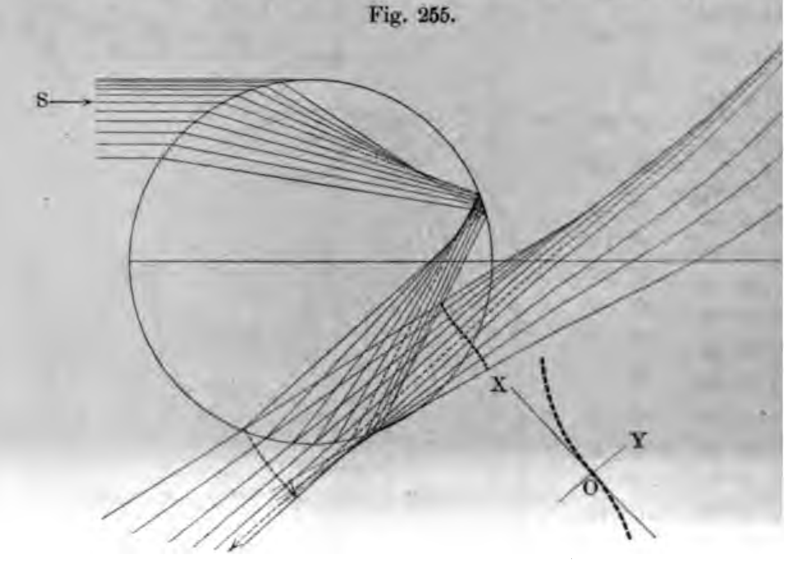
DESCARTES hatte $n = \frac{250}{187}$ angenommen, ohne schon die Verschiedenheit der echungsquotienten für verschiedene Farben zu kennen; erst NEWTON hat die rbenfolge gemäfs seiner Dispersionstheorie erklärt. Nach unseren gegenwärtigen zeichnungen ergibt sich also z. B. für das

Rot	der Linie B	$n = 1{,}330$, also $\alpha = 59^0\ 35'$, $\beta = 40^0\ 25'$, $D = 42$
Gelb	„ „ D	$n = 1{,}334$, also $\alpha = 59^0\ 20'$, $\beta = 40^0\ 10'$, $D = 42$
Violett	„ „ H	$n = 1{,}344$, also $\alpha = 58^0\ 50'$, $\beta = 39^0\ 30'$, $D = 40$

§ 199. **228. Der Grundgedanke von AIRYS Theorie des Regenboge graphisch zu erläutern.**

Anleitung: Beachten wir, dafs in Fig. 255 die oberhalb des punk maximal abgelenkten Strahles austretenden Strahlen divergieren, die unt

Fig. 255.



austretenden konvergieren, wie sich namentlich an den Rückwärtsverlängeru der Strahlen deutlich zeigt. Dies hat zur Folge, dafs, wenn wir uns durch beliebigen Punkt des punktierten Strahles das zu ihm normale Element der W fläche und zu allen übrigen Strahlen die an jenés Element anschliefsenden mente der Wellenfläche konstruiert denken, diese Wellenfläche (nicht wi den meisten anderen optischen Erscheinungen angenommen werden durfte, kugelig oder ellipsoidisch, sondern) derart gekrümmt ist, dafs sie jenseit punktierten Strahles konkav, diesseits konvex ist. [Die Gleichung der hat die Form $y = cx^3$ (math. Anh., Fig. 30, S. 728), wie sich aus den schiedenen Zeiten ergibt, die die Strahlen zum Durchsetzen verschieden Strecken innerhalb und aufserhalb des Tropfens brauchen]. Solchen asymm schen Wellenflächen aber entsprechen Interferenzen des gebeu Lichtes, die um so beträchtlicher sind, je stärker die Wellenfläche gekr ist; und zwar wird die Krümmung um so stärker, je kleiner die Tropfen sir

§ 200. **229. Aus der Zunahme des positiven Potentials der Luftelektr nach oben das negative Potential der Erdkugel abzuleiten.**

Anleitung: Die tatsächlich beobachteten Werte des Potentialgefälle Meter Höhendifferenz (deren allgemeines Mittel etwa 130 Volt per Meter ist) ;



für die in Wirklichkeit immer mehr oder weniger feuchte Luft. Franz Exner **hat** gezeigt, dafs für die Abhängigkeit des Potentialgefälles von dem wechselnden **Feuchtigkeitsgehalt** sich (unter gewissen theoretischen Voraussetzungen) eine empi**rische** Formel aufstellen läfst, aus der sich dann für den Grenzfall völlig trockener **Luft** ein Potentialgefälle von 1410 Volt per Meter nächst der Erdoberfläche **ergibt**. Unter der weiteren Annahme, dieses Potentialgefälle rühre blofs daher, **dafs** an der Oberfläche der Erdkugel eine Ladungsmenge E gleichmäfsig ausgebreitet **sei**, ergibt sich für das Potential unter und an der Erdoberfläche $V = \frac{E}{R}$ und **1 m** über der Erdoberfläche $V + 1410 = \frac{E}{R+1}$, wo der Erdradius $R = 63710000$ m ist. Durch Elimination von E folgt $V + 1410 = \frac{VR}{R+1}$ und **hieraus** $V \neq -1410 . R \neq 9 . 10^9$ Volt. — Dafs und inwieweit aber die dieser Be**rechnung** zugrunde liegenden Annahmen durch neuere Messungen modifiziert sind, **vergleiche** § 200. — Man berechne aufser dem Potential auch noch die übrigen **Gröfsen**: elektrische Ladungsmenge, Energie, Dichte und Spannung (nach **dem** Vorbilde von LA 182) unter den obigen fiktiven Annahmen.

230. Zu zeigen, dafs und wie sich beim Zusammenfliefsen elektrisch **geladener** Regentropfen das Oberflächenpotential (zu unterscheiden **von** der elektrischen Dichte, LA 182) der geladenen Wassermengen **(nicht** aber das Potential im äußeren Kraftfeld) erhöht. § 201.

Anleitung. 1. Stereometrische Hilfsaufgabe: Es seien n gleiche Kugeln **vom** Halbmesser r cm zu einer einzigen Kugel vom Halbmesser R cm vereinigt **worden.** In welchem Verhältnis $R : r$ wird der Radius gröfser, und in welchem **Verhältnis** $O : no$ hat sich dann die Gesamtoberfläche verringert? Antwort: $v = \frac{4}{3}\pi r^3$; $V = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$; $R = r\sqrt[3]{n}$. Ferner $n . o = n . 4\pi r^2$; $O = 4\pi R^2 = 4\pi r^2 \sqrt[3]{n^2} = o\sqrt[3]{n^2}$. (Z. B. Für $n = 1000$ ist $R = 10r$, dagegen $O : 1000o = 1/10$. **Es hat** sich also z. B. beim Zusammenfliefsen von 1000 gleichen Regentröpfchen **zu einem** einzigen Tropfen die Gesamtoberfläche auf $1/10$ verkleinert.) — 2. Physi**kalische** Anwendung: War das Potential je eines der kleinen Tropfen v (wo **hier die** Bezeichnung für das Potential v nicht zu verwechseln ist mit obiger für **das** Volumen v) und die Kapazität eines Tropfens $c = r$, und bleibt beim Zusammen**fliefsen** von n Tropfen die Ladungsmenge $E = ne = nvc = nvr$ unverändert, **so ist** nun für den grofsen Tropfen das Potential $V = \frac{E}{R} = \frac{nvr}{r\sqrt[3]{n}} = v\sqrt[3]{n^2}$.

Es geben also z. B. 1000 Tröpfchen beim Zusammenfliefsen einen 100mal so **grofsen** Ladungsgrad. [Bei dieser Rechnung kamen also für die Kapazität nur **die** Kugelradien, nicht die Oberflächen in Betracht. — Dagegen für die elektrischen **Dichten** $d = \frac{e}{o}$ und $D = \frac{E}{O} = \frac{ne}{o\sqrt[3]{n^2}} = d\sqrt[3]{n}$ ergibt sich für $n = 1000$ nur $D = 10d$. — Für die atmosphärischen Entladungserscheinungen käme nicht **dieses** Verhältnis der Dichten, sondern obiges der Potentiale $V = 100\,v$ in **Betracht.** — Doch ist zu bemerken, dafs sich diese Berechnung nur auf die Steige**rung der** Oberflächenpotentiale der einzelnen kleinen und des aus ihnen hervor-



Sachregister.

A.

B.

C.

D.



E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

L.

O.

Q.

R.

S.

T.



U.

V.

W.

Y.

Z.

Berichtigungen.

Seite 31, Zeile 7 v. o.: anstatt *vertikalen* soll es heißen **schiefen**.
Seite 65, Zeile 4 bis 2 v. u.: anstatt $r_1 r_2 r_3$ soll es heißen $k_1 k_2 k_3$.
Seite 107, Zeile 7 v. o.: anstatt Gl. 7 soll es heißen Gl. 4.
Seite 110, Zeile 12 v. o.: anstatt $\sum \frac{m}{r}$ soll es heißen $\varkappa \sum \frac{m}{r}$.
Seite 117, Zeile 15 v. o.: anstatt $+H$ und $-H$ soll es heißen $(+H)$ und (
Seite 286, Zeile 20 v. u.: anstatt 0,08534 soll es heißen 0,089.
Seite 411, Zeile 13 v. o.: anstatt **durch die** soll es heißen **durch Zwis schaltung einer Trockensäule die.**
Seite 495 ist in Fig. 547 im oberen Teile die Pfeilrichtung (und entspre auch die Färbung der beiden Hälften der Nadel) entsprechen Richtung des unteren Pfeiles umzukehren.
Seite 504, Zeile 1 v. o.: anstatt *thermischen* soll es heißen **chemischen.**
Seite 547, Zeile 4 u. 5 v. u.: anstatt $\sin \alpha$ u. $\cos \alpha$ soll es heißen $\sin \alpha t$ u. (
Seite 548, Zeile 4 v. o.: anstatt J_2^2 soll es heißen J^2.
Seite 557, Zeile 5 v. o.: anstatt Fig. 557 soll es heißen 558.
Seite 732, Zeile 5 v. o.: anstatt $\frac{y'-y}{x'-y}$ soll es heißen $\frac{y'-y}{x'-x}$.
Seite 733, Zeile 4 v. o. ist oberhalb $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ der Buchstabe C_2 zu tilgen.
Seite 746, Zeile 8 v. o. ist nach „alle erdenklichen Arten" eine Anmerkung zuschalten gleichlautend mit der Anmerkung zu S. 729.
Seite 749, Zeile 6 v. o.: anstatt $\binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3$

soll es heißen $\binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3$.

Seite 813, in Figur 93 hat sich zwischen „urblau" und „urgelb" die Bezeich grün zu erstrecken, wonach die Figur richtig folgend

